Άσκηση 1

Έστω το ενδεχόμενο A και A΄ το συμπλήρωμα του με P(A) > P(A΄). Έστω η συνάρτηση $g(x)=\frac{\lambda}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{16}x+2$ με $\lambda\neq 0$.

α. Να δείξετε ότι $P(A)>\frac{1}{2}$ και $P(A')<\frac{1}{2}$.

β. Να βρείτε την g΄(x) και την g΄΄(x).

γ. Αν η συνάρτηση g(x) παρουσιάζει ακρότατα για $x_1 = P(A΄)$ και $x_2 = P(A)$ να δείξετε ότι λ = 1.

δ. Να βρεθούν οι πιθανότητες P(A), P(A΄).

ε. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο (0, g(0))

Λύση

α. Ισχύει $P(A)>P(A')\Leftrightarrow P(A)>1-P(A)\Leftrightarrow 2P(A)>1\Leftrightarrow P(A)>\frac{1}{2}$. Επίσης $P(A')=1-P(A)<\frac{1}{2}$ αφού $P(A)>\frac{1}{2}$.

β. $\forall x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g'(x)=\left(\frac{\lambda}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{16}x+2\right)'=\lambda x^2-x+\frac{3}{16}$ και $g''(x)=2\lambda x-1$

γ. Αφού η g παρουσιάζει ακρότατα για $x_1 = P(A΄)$ και $x_2 = P(A)$ θα είναι ρίζες της εξίσωσης g΄(x) = 0 δηλαδή $\lambda x^2-x+\frac{3}{16}=0$.

Οπότε από Vieta έχουμε: $S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}\Leftrightarrow P(A)+P(A')=-\frac{-1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\Leftrightarrow 1=\frac{1}{\lambda}\Leftrightarrow \boxed{\lambda=1}$

δ. Για λ = 1 η συνάρτηση g(x) γίνεται $g(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{16}x+2$ και $g'(x)=x^2-x+\frac{3}{16}$ οπότε $g'(x)=0$ έχουμε $\Delta=1-4\left(\frac{3}{16}\right)=1-\frac{12}{16}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\frac{1}{2}}{2}=\begin{cases}=x_1=\dfrac{1+\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{3}{4}\\ =x_2=\dfrac{1-\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

οπότε $P(A)=\frac{3}{4}$ και $P(A')=\frac{1}{4}$ αφού από **(α)** ερώτημα P(A) > P(A΄).

ε. Για x = 0: g(0) = 2. Το σημείο επαφής είναι το (0, 2). Η εξίσωση έχει τη μορφή ψ = λx + β οπότε $2=0+\beta\Leftrightarrow\boxed{2=\beta}$. Όμως $\lambda=g'(1)=1-1+\frac{3}{16}=\frac{3}{16}$.

Οπότε η εξίσωση είναι $\boxed{\psi=\frac{3}{16}x+2}$

Άσκηση 2

Δίνονται $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x$ και $g(x)=x^5-x^3$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

α. Να δείξετε ότι η C_g τέμνει τον άξονα x΄x σε τρία σημεία.

β. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ αν είναι γνωστό ότι η C_f διέρχεται από τα σημεία A(1, 0) B(2, 0).

γ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $t(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$.

δ. Να βρείτε $\lim\limits_{x\to 1}\frac{g(x)}{f(x)}$.

Λύση

α. Λύνω την εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow x^5-x^3=0 \Leftrightarrow x^3\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$ ή $x=-1$. Άρα τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία (0, g(0)) (1, g(1)) (–1, g(–1)).

β. Ισχύουν $\begin{matrix} f(1)=0 \\ f(2)=0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\alpha+\beta=0 \\ 8+4\alpha+2\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=1 \\ 4\alpha+2\beta=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=-1 \\ 2\alpha+\beta=-4 \end{cases} \Leftrightarrow$ α = –3 και β = 2

γ. Για α = –3 και β = 2 η $f(x)=x^3+3x^2+2x$ οπότε $t(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{x^5-x^3}{x^3-3x^2+2x}$. Βρίσκω πότε $x^3-3x^2+2x=0 \Leftrightarrow x(x^2-3x+2)=0 \Leftrightarrow$ x = 0 ή x = 1 ή x = 2.

Άρα πεδίο ορισμού της t(x) είναι το $\mathbb{R}\{1,0,2\}$.

δ. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^5-x^3}{x^3-3x^2+2x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^5(x^2-1)}{x(x^2-3x+2)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^5(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^5(x+1)}{x(x-2)}=\dfrac{2}{-1}=-2$

Άσκηση 3

Κάποιος θέλει να περιφράξει μια έκταση που έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Διαθέτει 1200 ευρώ και από την μια πλευρά του παραλληλογράμμου υπάρχει ένας τείχος οπότε δεν θα περιφραχτεί. Η πλευρά μήκους ψ μέτρων θα περιφραχθεί από υλικό που στοιχίζει 3 ευρώ το μέτρο ενώ οι πλευρές μήκους x η καθεμία από υλικό που στοιχίζει 6 ευρώ το μέτρο.

α. Να δείξετε ότι το εμβαδό δίνεται από τον τύπο $E(x)=-4x^2+400x$. 100

β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της E(x).

γ. Να βρείτε τις διαστάσεις x, ψ ώστε το εμβαδό του ορθογωνίου να γίνει μέγιστο.

δ. Πόσο είναι το εμβαδό αυτό;

Λύση

α. Η πλευρά μήκους ψ κοστίζει 3ψ ευρώ. Οι πλευρές μήκους x κοστίζουν 2x · 6 = 12x ευρώ οπότε 3ψ + 12x = 1200 ευρώ.

Το εμβαδό δίνεται από τον τύπο: $E=x\cdot\psi=x\cdot\left(\dfrac{1200-12x}{3}\right)=x\cdot(400-4x)=-4x^2+400x$

β. Πρέπει $\begin{cases} x\ge0 \\ \text{και} \\ 400-4x\ge0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge0 \\ \text{και} \\ x\le100 \end{cases}$. Άρα το πεδίο ορισμού είναι [0, 100]

γ. Έχουμε $E'(x)=400-8x$

οπότε: $E'(x)=0 \Leftrightarrow x=50$

$E'(x)>0 \Leftrightarrow x<50$

Έτσι έχουμε τον πίνακα:

		50	
E΄(x)	+	0	–
E(x)	↗		↘

Οπότε για x = 50 η E(x) παρουσιάζει μέγιστο. Τότε το ψ = 200 μέτρα.

δ. Το εμβαδό τότε είναι: E = 200 · 50 = 10.000 τ.μ.