ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ & ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΑΙΟΣ 2000
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \dfrac{5 + i}{2 + 3i}$.

α) Να γράψετε τον z στη μορφή $\alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in IR$.

Στην παρακάτω ερώτηση να γράψετε τη σωστή απάντηση.

δ) Το z^4 είναι ίσο με :

Α. 4, Β. 4i, Γ. -4i, Δ. -4.

Β. Να βρεθούν τα σημεία του επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει $\left|\dfrac{z - 1}{z - i}\right| = 1$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f, με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16, & 0 < x < 5 \\ (\alpha^2 + \beta^2)\ell n(x - 5 + e) + 2(\alpha + 1)e^{5 - x}, & x \geq 5 \end{cases}$$

Α. Να βρεθούν τα $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$

Β. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in IR$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 5$.

Γ. Για τις τιμές των α, β του ερωτήματος Β, να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

ΘΕΜΑ 4ο

Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά. Έστω $f(t)$ η συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά από χρόνο t από τη χορήγησή του, όπου $t \geq 0$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ είναι $\dfrac{8}{t + 1} - 2$.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση $f(t)$.

β) Σε ποια χρονική στιγμή t, μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, η συγκέντρωσή του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη;

γ) Να δείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή $t = 8$, υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν τη χρονική στιγμή $t = 10$, η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί. (Δίνεται $\ell n 11 \cong 2{,}4$).

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΜΑΙΟΥ 2000

ΘΕΜΑ 2ο

Α. α) $z = \dfrac{5 + i}{2 + 3i} = \dfrac{(5 + i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \dfrac{10 - 15i + 2i + 3}{4 + 9} = \dfrac{13 - 13i}{13} = 1 - i.$

δ) $z^4 = (1 - i)^4 = ((1 - i)^2)^2 = (-2i)^2 = -4 \rightarrow$ **Δ**

Β. $\left|\dfrac{z - 1}{z - i}\right| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|z - 1|}{|z - i|} = 1 \Leftrightarrow |z - 1| = |z - i|.$

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα σημεία της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, με Α (1 , 0) και Β (0 , 1), η διχοτόμος της γωνίας xOy, με εξίσωση y = x.

ΘΕΜΑ 3ο

Α. $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} (x^2 - 8x + 16) = 1$

$\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} \left[(\alpha^2+\beta^2)\ln(x - 5 + e) + 2(\alpha + 1)e^{5 - x}\right] = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha + 2$

Β. Για να είναι η συνάρτηση f συνεχής στο $x_0 = 5$, πρέπει

$\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = f(5)$ δηλαδή $\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha + 2 = 1 \Leftrightarrow$

$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow (\alpha + 1)^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha + 1 = 0$ και $\beta = 0$

Άρα $\alpha = -1$ και $\beta = 0$.

Γ. Για $\alpha = -1$ και $\beta = 0$, είναι $f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16, & 0 < x < 5 \\ \ln(x - 5 + e), & x \geq 5 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x - 5 + e) = +\infty$, διότι

$\lim\limits_{x\to +\infty} (x - 5 + e) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$.

ΘΕΜΑ 4ο

α) $f'(t) = \dfrac{8}{t + 1} - 2 = 8\,\dfrac{1}{t + 1} - 2 = \left[8\ln(t + 1) - 2t\right]'$

άρα $f(t) = 8\ln(t + 1) - 2t + c$

Είναι $f(0) = 0$ άρα $c = 0$.

Επομένως $f(t) = 8\ln(t + 1) - 2t,\ t \geq 0$.

β) $f'(t) = \dfrac{8}{t + 1} - 2 = \dfrac{6 - 2t}{t + 1},\ t \geq 0.$

t	0	3	$+\infty$
f´(t)	+	0	-
f (t)	↗		↘

Η συγκέντρωσή του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη όταν t = 3.

γ) $f(8) = 8\ln(8 + 1) - 2\cdot 8 = 8\ln 9 - 16 = 8\ln 3^2 - 16$

$= 16\ln 3 - 16 = 16(\ln 3 - 1) > 0$, διότι $\ln 3 > 1$.

$f(10) = 8\ln(10 + 1) - 2\cdot 10 = 8\ln 11 - 20 \cong 8\cdot 2{,}4 - 20 = 19{,}2 - 20 < 0.$

Άρα τη χρονική στιγμή t = 8, υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν τη χρονική στιγμή t = 10, η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί.

ΙΟΥΝΙΟΣ 2000
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

Α2. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Β1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με **Σωστό ή Λάθος**.

α. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f είναι πάντοτε συνεχής στο x_0.

β. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

γ. Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0, τότε η f είναι συνεχής στο x_0.

Β2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη της κάθε συνάρτησης στο σημείο x_0.

Στήλη Α (συναρτήσεις)	**Στήλη Β (εφαπτόμενες)**
α. $f(x) = 3x^3$, $x_0 = 1$	1. $y = -2x + \pi$
β. $f(x) = \eta\mu 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$	2. $y = \frac{1}{4}x + 1$
γ. $f(x) = 3\|x\|$, $x_0 = 0$	3. $y = 9x - 6$
δ. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$	4. $y = -9x + 5$
	5. δεν υπάρχει

Θέμα 3ο

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα [0, 1] και ισχύει $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, 1)$. Αν $f(0) = 2$ και $f(1) = 4$, να δείξετε ότι:

α. η ευθεία $y = 3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

β. υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $f(x_1) = \dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$

γ. υπάρχει $x_2 \in (0, 1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 2000$.

Θέμα 4ο

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = \dfrac{\alpha t}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2}$, $t \geq 0$, όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

α. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β.

β. Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΤΙΚΗΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2000

Θέμα 1ο

Α1. $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Α2. $\rightarrow$ 6ο Θέμα Θεωρίας, σελίδα 8

Β1. α. Σωστό, β. Λάθος, γ. Σωστό.

Β2. α - 3, β - 1, γ - 5, δ - 2.

Θέμα 3ο

α. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 1)$.

1ος τρόπος

- η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$
- $f(0) < 3 < f(1)$

από Θ. ενδιαμέσων τιμών, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 3$

2ος τρόπος

Έστω η συνάρτηση g, με $g(x) = f(x) - 3$.

- η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$, ως διαφορά συνεχών.
- $g(0) = f(0) - 3 = 2 - 3 = -1 < 0$
  $g(1) = f(1) - 3 = 4 - 3 = 1 > 0$

από Θ. Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$ ή $f(x_0) - 3 = 0$ ή $f(x_0) = 3$.

Είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, 1)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1)$, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 1)$, δηλαδή η ευθεία $y = 3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

β. Είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, 1)$, άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $(0, 1)$.

$$0 < \frac{1}{5} < 1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(0) < f\left(\frac{1}{5}\right) < f(1) \Leftrightarrow 2 < f\left(\frac{1}{5}\right) < 4 \quad \textbf{(1)}$$

$$0 < \frac{2}{5} < 1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(0) < f\left(\frac{2}{5}\right) < f(1) \Leftrightarrow 2 < f\left(\frac{2}{5}\right) < 4 \quad \textbf{(2)}$$

$$0 < \frac{3}{5} < 1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(0) < f\left(\frac{3}{5}\right) < f(1) \Leftrightarrow 2 < f\left(\frac{3}{5}\right) < 4 \quad \textbf{(3)}$$

$$0 < \frac{4}{5} < 1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(0) < f\left(\frac{4}{5}\right) < f(1) \Leftrightarrow 2 < f\left(\frac{4}{5}\right) < 4 \quad \textbf{(4)}$$

$$(1), (2), (3), (4) \overset{(+)}{\Rightarrow} 8 < f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) < 16 \Leftrightarrow$$

$$2 < \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4} < 4 \Leftrightarrow$$

$$f(0) < \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4} < f(1)$$

και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, από Θ. ενδιαμέσων τιμών, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε

$$f(x_1) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}.$$

γ. $1^{ος}$ τρόπος

- η f είναι συνεχής στο [0 , 1]
- η f είναι παρ/μη στο (0 , 1)

από Θ.Μ.Τ.
υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (0 , 1)$, τέτοιο ώστε

$$f'(x_2) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 2$$

$2^{ος}$ τρόπος

Έστω η συνάρτηση g, με $g(x) = f(x) - 2x$.

- η g είναι συνεχής στο [0 , 1], ως διαφορά συνεχών.
- η g είναι παρ/μη στο (0 , 1), με $g'(x) = f'(x) - 2$.
- $g(0) = f(0) - 0 = 2$
  $g(1) = f(1) - 2 = 4 - 2 = 2$

από Θ. Rolle, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (0 , 1)$, τέτοιο ώστε $g'(x_2) = 0$ ή $f'(x_2) - 2 = 0$ ή $f'(x_2) = 2$.

Άρα υπάρχει $x_2 \in (0 , 1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2 , f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 2000$.

Θέμα 4ο

α. Η f είναι συνεχής στο $[0 , +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $[0 , +\infty)$ με

$$f(t) = \frac{\alpha t}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2} = \frac{\alpha t}{1 + \frac{t^2}{\beta^2}} = \frac{\alpha t}{\frac{\beta^2 + t^2}{\beta^2}} = \frac{\alpha\beta^2 t}{\beta^2 + t^2}$$

$$f'(t) = \left(\frac{\alpha\beta^2 t}{\beta^2 + t^2}\right)' = \frac{(\alpha\beta^2 t)' \cdot (\beta^2 + t^2) - \alpha\beta^2 t \cdot (\beta^2 + t^2)'}{(\beta^2 + t^2)^2}$$

$$= \frac{\alpha\beta^2 \cdot (\beta^2 + t^2) - \alpha\beta^2 t \cdot 2t}{(\beta^2 + t^2)^2} = \frac{\alpha\beta^4 + \alpha\beta^2 t^2 - 2\alpha\beta^2 t^2}{(\beta^2 + t^2)^2}$$

$$= \frac{\alpha\beta^4 - \alpha\beta^2 t^2}{(\beta^2 + t^2)^2}$$

Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης f είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται όταν $t = 6$, άρα $f(6) = 15$ και $f'(6) = 0$ (Θ. Fermat).

$$f'(6) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha\beta^4 - \alpha\beta^2 \cdot 6^2}{(\beta^2 + 6^2)^2} = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta^4 - \alpha\beta^2 \cdot 6^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha\beta^2(\beta^2 - 36) = 0 \overset{\alpha>0,\ \beta>0}{\Leftrightarrow} \beta^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \beta^2 = 36 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{\beta = 6}$$

$$f(6) = 15 \Leftrightarrow \frac{\alpha\beta^2 \cdot 6}{\beta^2 + 6^2} = 15 \overset{\beta=6}{\Leftrightarrow} \frac{\alpha \cdot 6^2 \cdot 6}{2 \cdot 6^2} = 15 \Leftrightarrow 3\alpha = 15 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = 5}$$

β. Η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, άρα $f(t) \geq 12$.

$$f(t) \underset{\beta = 6}{\overset{\alpha = 5}{=}} \frac{180t}{36 + t^2}$$

$$f(t) \geq 12 \Leftrightarrow \frac{180t}{36 + t^2} \geq 12 \Leftrightarrow \frac{15t}{36 + t^2} \geq 1 \overset{36 + t^2 > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$15t \geq 36 + t^2 \Leftrightarrow t^2 - 15t + 36 \leq 0$$

t	0		3		12		$+\infty$
$t^2-15t+36$		+	0	-	0	+	

Άρα το φάρμακο δρα αποτελεσματικά από 3 ώρες μέχρι και 12 ώρες.

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2000

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - \alpha}$, όπου α πραγματικός αριθμός.

α. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε η συνάρτηση f να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 4$.

β. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, 0)$ να διέρχεται από το σημείο $A(-2, 3)$.

γ. Αν $\alpha > 2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει αριθμός $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιος, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη x_0 να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ 4ο

Σε έναν διαγωνισμό ενός Οργανισμού για την πρόσληψη προσωπικού, συγκεντρώθηκαν 1000 γραπτά υποψηφίων. Κάθε γραπτό διορθώνεται από δύο διαφορετικούς βαθμολογητές. Κάθε βαθμολογητής διορθώνει 4 φακέλους των 25 γραπτών την ημέρα. Για τη διόρθωση κάθε γραπτού ο βαθμολογητής αμείβεται με 200 δραχμές. Τη διόρθωση συντονίζουν δύο επόπτες που αμείβονται με 4000 δραχμές την ημέρα. Στο τέλος της διόρθωσης όλων των γραπτών, κάθε βαθμολογητής παίρνει επιπλέον ως επίδομα 10000 δραχμές ανεξάρτητα από τον αριθμό των ημερών που απασχολήθηκε.

α) Να αποδείξετε ότι το κόστος $K(x)$ σε χιλιάδες δραχμές για τη διόρθωση όλων των γραπτών δίνεται από τη συνάρτηση $K(x) = 10\left(x + \dfrac{16}{x} + 40\right)$, όπου x ο αριθμός των βαθμολογητών που απασχολούνται.

β) Πόσοι πρέπει να είναι οι βαθμολογητές, ώστε το κόστος της διόρθωσης να είναι ελάχιστο;

γ) Να βρείτε το ελάχιστο κόστος του ερωτήματος (β) και τον αριθμό των ημερών που απασχολήθηκαν οι βαθμολογητές για τη διόρθωση των γραπτών.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2000

ΘΕΜΑ 3ο

α. $D_f = (-\infty , \alpha) \cup (\alpha , +\infty)$ και $4 \notin D_f$ άρα **$\alpha = 4$**.

β. Πρέπει $\lambda_{εφαπτ.} = \lambda_{AM} = f'(1)$.

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x - \alpha}\right)' = \frac{(2x - 3)(x - \alpha) - (x^2 - 3x + 2)}{(x - \alpha)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2\alpha x - 3x + 3\alpha - x^2 + 3x - 2}{(x - \alpha)^2} = \frac{x^2 - 2\alpha x + 3\alpha - 2}{(x - \alpha)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1) = \dfrac{1 - 2\alpha + 3\alpha - 2}{(1 - \alpha)^2} = \dfrac{\alpha - 1}{(\alpha - 1)^2} = \dfrac{1}{\alpha - 1} \\ \lambda_{AM} = \dfrac{0 - 3}{1 + 2} = \dfrac{-3}{3} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\alpha - 1} = -1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = 0}$$

γ. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει x_0, τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0^2 - 2\alpha x_0 + 3\alpha - 2}{(x_0 - \alpha)^2} = 0 \Leftrightarrow x_0^2 - 2\alpha x_0 + 3\alpha - 2 = 0$$

Πρέπει $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (-2\alpha)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3\alpha - 2) \geq 0 \Leftrightarrow 4\alpha^2 - 12\alpha + 8 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\alpha^2 - 3\alpha + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha - 2) \geq 0$, που ισχύει διότι $\alpha > 2$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. 1000 γραπτά · 2 φορές = 2000 βαθμολογήσεις

κάθε πακέτο έχει 4 φακέλους · 25 γραπτά = 100 γραπτά

2000 : 100 = 20 πακέτα βαθμολόγησης

Κόστος βαθμολόγησης = 20 · 2000 δρχ. = 40 000 δρχ = 40 χιλ. δρχ. **(1)**

Επίδομα = 10000 · x βαθμολογητές = 10000x δρχ. = 10x χιλ. δρχ. **(2)**

Η διόρθωση θα διαρκέσει $\dfrac{20 \text{ πακέτα}}{x \text{ βαθμολογητές}} = \dfrac{20}{x}$ μέρες **(3)**

Οι δύο επόπτες θα πάρουν :

$2 \cdot \dfrac{20}{x} \cdot 4000$ δρχ. $= \dfrac{160000}{x}$ δρχ. $= \dfrac{160}{x}$ χιλ. δρχ. **(4)**

Από (1) , (2) και (4) έχουμε :

$$K(x) = 400 + 10x + \frac{160}{x} = 10\left(40 + x + \frac{16}{x}\right) \text{ σε χιλ. δρχ., } x > 0$$

β. $K'(x) = 10\left(40 + x + \dfrac{16}{x}\right)' = 10\left(1 - \dfrac{16}{x^2}\right) = 10\dfrac{x^2 - 16}{x^2}$, $x > 0$

x	0		4		$+\infty$
K´(x)		-	0	+	
K (x)		↘		↗	

Ελάχιστο κόστος για x = **4 βαθμολογητές**.

γ. Ελάχιστο κόστος = K (4) = **480 χιλ. δρχ**.

Από τη σχέση (3), για x = 4 έχουμε ότι η διόρθωση των γραπτών θα γίνει σε $\dfrac{20}{4}$ = **5 μέρες.**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2000

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

α. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ.

β. Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τι συμπεραίνετε για τη μονοτονία της συνάρτησης f;

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη σωστό **(Σ)** ή λάθος **(Λ)**.

α. Η συνάρτηση $f(x) = e^{1-x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β. Η συνάρτηση f, με $f'(x) = -2\eta\mu x + \dfrac{1}{\eta\mu^2 x} + 3$, όπου $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

γ. Αν είναι $f'(x) = g'(x) + 3$, για κάθε $x \in \Delta$, τότε η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - e^{2x} + 1}{\eta\mu 2x} = 5$.

α. Να βρείτε το f (0).

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

γ. Αν $h(x) = e^{-x} \cdot f(x)$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και h στα σημεία A (0 , f (0)) και B (0 , h (0)) αντίστοιχα είναι παράλληλες.

ΘΕΜΑ 4ο

Η τιμή P ενός προϊόντος, t μήνες μετά την εισαγωγή του στην αγορά, δίνεται από τον τύπο $P(t) = 4 + \dfrac{t-6}{t^2 + \dfrac{25}{4}}$.

α. Να βρείτε την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.

β. Να βρείτε το χρονικό διάστημα στο οποίο η τιμή του προϊόντος συνεχώς αυξάνεται.

γ. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τιμή του προϊόντος γίνεται μέγιστη.

δ. Να αποδείξετε ότι η τιμή του προϊόντος μετά από κάποια χρονική στιγμή συνεχώς μειώνεται, χωρίς όμως να μπορεί να γίνει μικρότερη από την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΤΙΚΗΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2000

ΘΕΜΑ 1ο

Α. α. 21ο θέμα θεωρίας σελίδα 15.

β. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Β. α. Λ, β. Σ, γ. Λ.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = \dfrac{f(x) - e^{2x} + 1}{\eta\mu 2x}$, $x \neq \dfrac{\kappa\pi}{2}$ με $\kappa \in Z$.

Είναι $f(x) = e^{2x} - 1 + g(x)\cdot\eta\mu 2x$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 5$.

Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, άρα

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[e^{2x} - 1 + g(x)\cdot\eta\mu 2x\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}(e^{2x} - 1) + \lim_{x\to 0} g(x)\cdot\lim_{x\to 0}\eta\mu 2x = 0 + 5\cdot 0 = 0$$

β. $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x} - 1 + g(x)\cdot\eta\mu 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{e^{2x} - 1}{x} + g(x)\cdot\frac{\eta\mu 2x}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x} - 1}{x} + \lim_{x\to 0} g(x)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{x} = 2 + 5\cdot 2 = 12,$$

διότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x} - 1}{x} \underset{\text{L'Hospital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{2x}}{1} = 2$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 2x}{x} = 2$.

Άρα $f'(0) = 12$.

γ. $$\lim_{x\to 0}\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}\cdot f(x) - 0}{x} = \lim_{x\to 0}\left(e^{-x}\cdot\frac{f(x)}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{-x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1\cdot f'(0) = f'(0),$$ άρα $h'(0) = f'(0)$.

Επομένως οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και h στα σημεία $A(0, f(0))$ και $B(0, h(0))$ αντίστοιχα είναι παράλληλες.

ΘΕΜΑ 4ο

α. $P(0) = 4 + \dfrac{-6}{\frac{25}{4}} = 4 - \dfrac{24}{25} = \dfrac{76}{25}$.

β. $$P'(t) = \left(4 + \frac{t-6}{t^2 + \frac{25}{4}}\right)' = \frac{(t-6)' \cdot \left(t^2 + \frac{25}{4}\right) - (t-6) \cdot \left(t^2 + \frac{25}{4}\right)'}{\left(t^2 + \frac{25}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{t^2 + \frac{25}{4} - 2t \cdot (t-6)}{\left(t^2 + \frac{25}{4}\right)^2} = \frac{-t^2 + 12t + \frac{25}{4}}{\left(t^2 + \frac{25}{4}\right)^2}$$

$$P'(t) > 0 \Leftrightarrow \frac{-t^2 + 12t + \frac{25}{4}}{\left(t^2 + \frac{25}{4}\right)^2} > 0 \Leftrightarrow -t^2 + 12t + \frac{25}{4} > 0$$

$$\Delta = 12^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 25 = 169 \text{ και } t = \frac{-12 \pm 13}{-2} = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{απορρίπτεται} \\ \frac{25}{2} \end{cases}$$

t	0		$\frac{25}{2}$		$+\infty$
P´(t)		+	○	-	
P (t)		↗		↘	

Η τιμή του προϊόντος αυξάνεται όταν $0 < t < \dfrac{25}{2}$.

γ. Η τιμή του προϊόντος γίνεται μέγιστη τη χρονική στιγμή $t_0 = \dfrac{25}{2}$.

δ. Η τιμή του προϊόντος μειώνεται όταν $t > \dfrac{25}{2}$.

$$\lim_{x \to +\infty} P(t) = \lim_{x \to +\infty}\left(4 + \frac{t-6}{t^2 + \frac{25}{4}}\right) = 4 + \lim_{x \to +\infty} \frac{t-6}{t^2 + \frac{25}{4}} = 4 + \lim_{x \to +\infty} \frac{t}{t^2}$$

$$= 4 + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{t} = 4 + 0 = 4 > \frac{76}{25} = P(0)$$

ΙΟΥΝΙΟΣ 2001

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2.

Να αποδείξετε ότι $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Α.2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με **Σωστό** ή **Λάθος**.

Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

α. $|z|^2 = z\bar{z}$

β. $|z^2| = z^2$

γ. $|z| = -|\bar{z}|$

δ. $|z| = |\bar{z}|$

ε. $|i\bar{z}| = |z|$

Β.1. Αν $z_1 = 3 + 4i$ και $z_2 = 1 + \sqrt{3}\,i$, να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της **Στήλης Β** έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα.

Στήλη Α	Στήλη Β
	α. 4
1. $\lvert z_1 \cdot z_2 \rvert$	**β.** 2
2. $\lvert z_1^2 \rvert$	**γ.** 25
3. $\lvert z_2 \rvert^2$	**δ.** - 5
4. $-\lvert \overline{z_1} \rvert$	**ε.** - 2
5. $\lvert i z_2 \rvert$	**στ.** 5
	ζ. 10

Β.2. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z| = 1$, να δείξετε ότι $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$.

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & x \le 3 \\ \dfrac{1 - e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$

α. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $\alpha = -1/9$.

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(4, f(4))$.

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

ΘΕΜΑ 3ο

Για μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών IR, ισχύει ότι : $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ για κάθε $x \in IR$, όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών IR, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

i) $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in IR$

ii) $f(x) = 1 - 2x^2 \cdot \int_0^1 t \cdot f^2(xt)\,dt$, για κάθε $x \in IR$.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$g(x) = \dfrac{1}{f(x)} - x^2$, για κάθε $x \in IR$.

α. Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x) = -2xf^2(x)$.

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

γ. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

δ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x\, f(x)\, \text{ημ}2x\right)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2001

Θέμα 1ο

Α1. → 3ο Θέμα Θεωρίας, σελίδα 7

Α2. α. Σωστό, β. Λάθος, γ. Λάθος, δ. Σωστό, ε. Σωστό.

Β1. 1 - ζ, 2 - γ, 3 - α, 4 - δ, 5 - β.

Β2. $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{1}{z}$.

Θέμα 2ο

α. Η f είναι συνεχής, άρα είναι και συνεχής στο $x_0 = 3$,

άρα $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = f(3)$

Είναι $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \alpha x^2 = 9\alpha$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{1 - e^{x-3}}{x - 3} \underset{\text{L'Hospital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x \to 3^+} \frac{-e^{x-3}}{1} = -1$$

$f(3) = 9\alpha$

Άρα $9\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -1/9$.

β. $f(4) = \dfrac{1 - e^{4-3}}{4 - 3} = 1 - e$

Για $x > 3$: $f'(x) = \left(\dfrac{1 - e^{x-3}}{x - 3}\right)' = \dfrac{(1 - e^{x-3})' \cdot (x - 3) - (1 - e^{x-3}) \cdot (x - 3)'}{(x - 3)^2}$

$$= \frac{-e^{x-3} \cdot (x - 3) - (1 - e^{x-3})}{(x - 3)^2}$$

$$f'(4) = \frac{-e^{4-3} \cdot (4 - 3) - (1 - e^{4-3})}{(4 - 3)^2} = \frac{-e - (1 - e)}{1^2} = -1$$

$(\varepsilon) : y - f(4) = f'(4) \cdot (x - 4) \Leftrightarrow$

$(\varepsilon) : y - (1 - e) = -1 \cdot (x - 4) \Leftrightarrow$

$(\varepsilon) : y - 1 + e = -x + 4 \Leftrightarrow$

$(\varepsilon) : y = -x + 5 - e$.

γ. Για $x \in [1 , 2]$ είναι $f(x) = -\frac{1}{9}x^2 < 0$, άρα

$$E = -\int_1^2 f(x)\,dx = -\int_1^2 -\frac{1}{9}x^2\,dx = \frac{1}{9}\cdot\int_1^2 x^2\,dx = \frac{1}{9}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{7}{27} \text{ τ.μ.}$$

Θέμα 3ο

α. ***1ος τρόπος***

Έστω ότι η παραγωγίσιμη f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0.
Από Θ. Fermat είναι $f'(x_0) = 0$.
$[f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x)]' = (x^3 - 2x^2 + 6x - 1)' \Leftrightarrow$
$3f^2(x) \cdot f'(x) + 2\beta f(x) \cdot f'(x) + \gamma \cdot f'(x) = 3x^2 - 4x + 6$
και για $x = x_0$ είναι :
$3f^2(x_0) \cdot f'(x_0) + 2\beta f(x_0) \cdot f'(x_0) + \gamma \cdot f'(x_0) = 3x_0^2 - 4x_0 + 6 \Leftrightarrow$
$0 = 3x_0^2 - 4x_0 + 6$.
Άτοπο διότι το τριώνυμο $3x_0^2 - 4x_0 + 6$ έχει $\Delta = -56 < 0$.
Άρα η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

β. ***Η λύση αυτή αποτελεί και 2ο τρόπο για το α ερώτημα.***

$[f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x)]' = (x^3 - 2x^2 + 6x - 1)' \Leftrightarrow$
$3f^2(x) \cdot f'(x) + 2\beta f(x) \cdot f'(x) + \gamma \cdot f'(x) = 3x^2 - 4x + 6 \Leftrightarrow$
$[3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma] \cdot f'(x) = 3x^2 - 4x + 6$.

- Είναι $3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma > 0$, για κάθε $x \in IR$,
  διότι είναι τριώνυμο ως προς $f(x)$
  με $\Delta = (2\beta)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \gamma = 4\beta^2 - 12\gamma = 4(\beta^2 - 3\gamma) < 0$, αφού $\beta^2 < 3\gamma$.
- Είναι $3x^2 - 4x + 6 > 0$, για κάθε $x \in IR$,
  διότι είναι τριώνυμο ως προς x με $\Delta = -56 < 0$.

Άρα $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 6}{3f^2(x) + 2\beta \cdot f(x) + \gamma} > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα.
(άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα, για το α ερώτημα)

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$.

- η g είναι συνεχής στο $[0 , 1]$, ως πολυωνυμική.
- $g(0) = -1 < 0$ και $g(1) = 4 > 0$.

Από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0 , 1)$, ώστε $g(x_0) = 0$.

Είναι $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = g(x)$ και για $x = x_0$
$f^3(x_0) + \beta f^2(x_0) + \gamma f(x_0) = g(x_0) \Leftrightarrow$
$f(x_0) \cdot [f^2(x_0) + \beta f(x_0) + \gamma] = 0 \Leftrightarrow$
$f(x_0) = 0$ ή $f^2(x_0) + \beta f(x_0) + \gamma = 0$.
Το $f^2(x_0) + \beta f(x_0) + \gamma$ είναι τριώνυμο με $\Delta = \beta^2 - 4\gamma < 0$.
Άρα $f^2(x_0) + \beta f(x_0) + \gamma > 0$, για κάθε $x_0 \in IR$.
Επομένως $f(x_0) = 0$
και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα το x_0 είναι μοναδικό.
Άρα υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $(0 , 1)$.

Είναι $0 \le \beta^2 < 3\gamma$,
άρα $\gamma > 0$.
Άρα $\beta^2 < 3\gamma < 4\gamma$
$\Leftrightarrow \beta^2 < 4\gamma$
$\Leftrightarrow \beta^2 - 4\gamma < 0$

Θέμα 4ο

α. $f(x) = 1 - 2x^2 \cdot \int_0^1 t \cdot f^2(xt)\, dt$

$= 1 - 2 \cdot \int_0^1 xt \cdot f^2(xt) \cdot x\, dt$

$= 1 - 2 \cdot \int_0^x u \cdot f^2(u)\, du$

Θέτω $xt = u$
$du = x\, dt$
- $t = 0 \rightarrow u = 0.$
- $t = 1 \rightarrow u = x.$

$$f'(x) = \left(1 - 2 \cdot \int_0^x u \cdot f^2(u)\, du\right)' = -2 \cdot \left(\int_0^x u \cdot f^2(u)\, du\right)' = -2 \cdot x \cdot f^2(x)$$

β. $g'(x) = \left[\dfrac{1}{f(x)} - x^2\right]' = \dfrac{-f'(x)}{f^2(x)} - 2x \overset{(α)}{=} \dfrac{2x \cdot f^2(x)}{f^2(x)} - 2x = 2x - 2x = 0$

άρα η g είναι σταθερή στο IR.

γ. $f(0) = 1 - 2 \cdot \int_0^0 u \cdot f^2(u)\, du = 1 - 2 \cdot 0 = 1$

$g(0) = \dfrac{1}{f(0)} - 0^2 = \dfrac{1}{1} - 0 = 1$, και επειδή η g είναι σταθερή

είναι $g(x) = 1$, για κάθε $x \in IR \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{f(x)} - x^2 = 1$, για κάθε $x \in IR \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{f(x)} = x^2 + 1$, για κάθε $x \in IR \Leftrightarrow$

$f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$, για κάθε $x \in IR$.

δ. Είναι $x \cdot f(x) \cdot ημ2x = \dfrac{x}{x^2 + 1} \cdot ημ2x$

$-1 \le ημ2x \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{-x}{x^2 + 1} \le \dfrac{x}{x^2 + 1} \cdot ημ2x \le \dfrac{x}{x^2 + 1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{x^2 + 1} \cdot ημ2x\right) = 0$,

άρα $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x \cdot f(x) \cdot ημ2x\right) = 0.$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΙΟΥΛΙΟΥ 2001

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε :

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in IR$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- οποιαδήποτε άλλη παράγουσα της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in IR$.

Α.2. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις, ώστε να προκύψουν γνωστές ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

α. $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x)\,dx =$ .....

β. $\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) + g(x)]\,dx =$ .....

γ. $\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx =$ .....

όπου $\lambda, \mu \in IR$ και f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$.

Β.1. Να βρείτε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f''(x) = 6x + 4$, $x \in IR$ και η γραφική της παράσταση στο σημείο $A(0, 3)$ έχει κλίση 2.

Β.2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

α. $\int_0^1 (e^x + x)\,dx$, β. $\int_1^4 \frac{3x^2}{\sqrt{x}}\,dx$, γ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x)\,dx$.

ΘΕΜΑ 2ο

α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών για τους οποίους ισχύει $|z + 16| = 4|z + 1|$.

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών για τους οποίους ισχύει $|z - 1| = |z - i|$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x + \alpha, & \text{αν } x \le 1 \\ (1 - e^{-x+1})\ln(x - 1), & \text{αν } x \in (1, 2] \end{cases}$, όπου $\alpha \in IR$.

α. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1 - e^{-x+1}}{x - 1}$.

β. Να βρείτε το $\alpha \in IR$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

γ. Για $\alpha = -1$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f συνεχής στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f(x) = \frac{1}{x} + \int_1^x \frac{tf(t)}{x^2}\,dt$, με $x > 0$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

β. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$, $x > 0$.

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

ε. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΙΟΥΛΙΟΥ 2001

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. 24Ο θέμα θεωρίας σελίδα 17.

Α.2. α. $\lambda\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, β. $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$, γ. $\lambda\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \mu\int_\alpha^\beta g(x)\,dx$.

Β.1. $f'(x) = \int(6x+4)\,dx = 3x^2 + 4x + c_1 \underset{c_1 = 2}{\overset{f'(0)=2}{\Rightarrow}} f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$

$f(x) = \int(3x^2 + 4x + 2)\,dx = x^3 + 2x^2 + 2x + c_2 \underset{f(0)=3}{\overset{A(0,3)\in C_f}{\Rightarrow}} c_2 = 3$

Άρα $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 3$.

Β.2. α. $\int_0^1(e^x + x)\,dx = \left[e^x + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = e + \frac{1}{2} - (1+0) = e - \frac{1}{2}$

β. $\int_1^4 \frac{3x^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^4 3x^2\cdot x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int_1^4 3x^{\frac{3}{2}}\,dx = \left[3\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_1^4 = \frac{6}{5}\left[x^2\sqrt{x}\right]_1^4 = \frac{186}{5}$

γ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x)\,dx = \left[-2\sigma\upsilon\nu x + 3\,\eta\mu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 5.$

ΘΕΜΑ 2ο

α. $|z+16| = 4|z+1| \Leftrightarrow |z+16|^2 = 16|z+1|^2 \Leftrightarrow$

$(z+16)(\bar{z}+16) = 16(z+1)(\bar{z}+1) \Leftrightarrow$

$z\bar{z} + 16z + 16\bar{z} + 256 = 16z\bar{z} + 16z + 16\bar{z} + 16 \Leftrightarrow$

$-15z\bar{z} = -240 \Leftrightarrow z\bar{z} = 16 \Leftrightarrow |z|^2 = 16 \Leftrightarrow |z| = 4$

άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 4$.

β. Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα σημεία της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, με Α (1 , 0) και Β (0 , 1), η διχοτόμος της γωνίας xOy, με εξίσωση $y = x$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. $\lim\limits_{x\to1}\frac{1 - e^{-x+1}}{x-1} \underset{\text{L'Hospital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to1}\frac{e^{-x+1}}{1} = \mathbf{1}.$

β. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}(x+\alpha) = 1 + \alpha$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\left[(1 - e^{-x+1})\ln(x-1)\right] = \lim_{x\to1^+}\frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{1-e^{-x+1}}} \underset{\text{L'Hospital}}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-e^{-x+1}}{(1-e^{-x+1})^2}}$$

$$= \lim_{x\to1^+}\frac{(1-e^{-x+1})^2}{-(x-1)e^{-x+1}} = -\lim_{x\to1^+}\frac{1-e^{-x+1}}{x-1}\cdot\lim_{x\to1^+}\frac{1-e^{-x+1}}{e^{-x+1}} = -1\cdot 0 = 0.$$

$f(1) = 1 + \alpha$

Για να είναι η f συνεχής στο $x_0 = 1$ πρέπει $1 + \alpha = 0 \Leftrightarrow$ **$\alpha = -1$**.

γ. • Η f είναι συνεχής στο [1 , 2]
• Η f είναι παραγωγίσιμη στο (1 , 2) ως γινόμενο παραγωγισίμων
• $f(1) = 1 + \alpha = 0$
$f(2) = (1 - e^{-1})\ln 1 = 0$

Από Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1 , 2)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, δηλαδή η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(\xi , f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x.

ΘΕΜΑ 4ο

α. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \displaystyle\int_1^x \frac{tf(t)}{x^2}\,dt = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\int_1^x tf(t)\,dt$, με $x > 0$ **(1)**.

Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις των παραγωγίσιμων

$f_1(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_2(x) = \dfrac{1}{x^2}$ και $f_3(x) = \displaystyle\int_1^x tf(t)\,dt$.

β. (1) $\overset{\cdot x^2}{\Leftrightarrow}$ $x^2 f(x) = x + \displaystyle\int_1^x tf(t)\,dt$

Παραγωγίζοντας κατά μέλη έχουμε :

$$\left[x^2 f(x)\right]' = (x)' + \left(\int_1^x tf(t)\,dt\right)' \Leftrightarrow 2xf(x) + x^2 f'(x) = 1 + xf(x) \Leftrightarrow$$

$$xf(x) + x^2 f'(x) = 1 \overset{:x}{\Leftrightarrow} f(x) + xf'(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left[xf(x)\right]' = (\ln x)'$$

Από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $xf(x) = \ln x + c \overset{x>0}{\Leftrightarrow} f(x) = \dfrac{\ln x + c}{x}$, με $x > 0$

Για $x = 1$ είναι $f(1) = c = 1$, άρα $f(x) = \dfrac{\ln x + 1}{x}$, με $x > 0$.

γ. $f'(x) = \left(\dfrac{\ln x + 1}{x}\right)' = \dfrac{(\ln x + 1)' \cdot x - (\ln x + 1)\cdot(x)'}{x^2} = \dfrac{1 - (\ln x + 1)}{x^2} = \dfrac{-\ln x}{x^2}$

x	0		1		$+\infty$
f΄(x)		+	0	-	
f (x)		↗		↘	

Ολικό μέγιστο $f(1) = \dfrac{\ln 1 + 1}{1} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x + 1}{x} \overset{\left(\frac{-\infty}{0^+}\right)}{=} -\infty$ **(2)**

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x + 1}{x} \underset{\text{L'Hospital}}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0$ **(3)**

$\Rightarrow f(A) = (-\infty , 1]$

δ. Από (2) και (3) η C_f έχει ασύμπτωτες τους άξονες x΄x και y΄y.

ε. $E \overset{\substack{f(x)>0 \\ \text{στο } [1,e]}}{=} \displaystyle\int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \frac{\ln x + 1}{x}dx \underset{\substack{\bullet\ x=1 \to u=0 \\ \bullet\ x=e \to u=1}}{\overset{u=\ln x \text{ και } du=\frac{1}{x}dx}{=}} \int_0^1 (u+1)du$

$$= \left[\frac{u^2}{2} + u\right]_0^1 = \frac{1}{2} + 1 - 0 = \frac{3}{2} \text{ τ.μ.}$$

ΜΑΪΟΣ 2002

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α , β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α , β], τότε να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

Β.1. Έστω η συνάρτηση f (x) = ημx. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο IR και ισχύει f΄(x) = συνx.

Β.2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με **Σωστό** ή **Λάθος**.

α. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α , β] και συνεχής στο (α , β], τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α , β] μια μέγιστη τιμή.

β. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1 - 1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

γ. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = 0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

δ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο IR, τότε $\int f(x)\,dx = x\cdot f(x) - \int x\cdot f'(x)\,dx$.

ε. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε f (x) > 0 κοντά στο x_0.

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(v) = i^v z$, $v \in IN^*$.

α. Να δείξετε ότι f (3) + f (8) + f (13) + f (18) = 0.

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το IR .

Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης fog είναι 1 - 1.

α. Να δείξετε ότι η g είναι 1 - 1.

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο [α , β]. Να αποδείξετε ότι αν h (x) > g (x) για κάθε $x \in [\alpha , \beta]$, τότε και $\int_{\alpha}^{\beta} h(x)\,dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$.

β. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο IR συνάρτηση f, που ικανοποιεί τις σχέσεις : $f(x) - e^{-f(x)} = x - 1$, $x \in IR$ και f (0) = 0.

i) Να εκφραστεί η f΄ ως συνάρτηση της f.

ii) Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < x\cdot f'(x)$, για κάθε x > 0.

iii) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x = 0, x = 1 και τον άξονα x΄x, να δείξετε ότι $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ 2002

Θέμα 1ο

Α. → 25ο Θέμα Θεωρίας, σελίδα 17.

Β1. → 11ο Θέμα Θεωρίας, σελίδα 10.

Β2. α. Λάθος, β. Λάθος, γ. Σωστό, δ. Σωστό, ε. Σωστό.

Θέμα 2ο

α. $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = i^3 z + i^8 z + i^{13} z + i^{18} z = -iz + z + iz - z = 0.$

Θέμα 3ο

α. $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) = f(g(x_2))$

και επειδή η fog είναι «1 - 1», είναι $x_1 = x_2$.

β. $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ και η g είναι «1 - 1», άρα

$f(x) + x^3 - x = f(x) + 2x - 1 \Leftrightarrow x^3 - x - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = 0.$

Θεωρούμε τη συνάρτηση h, με $h(x) = x^3 - 3x + 1$.

$h'(x) = (x^3 - 3x + 1)' = 3x^2 - 3$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$h'(x) = 3x^2 - 3$		+	0	-	0	+	
h (x)		↗		↘		↗	

• $\Delta_1 = (-\infty , -1)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3 - 3x + 1) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-1} h(x) = \lim\limits_{x\to-1}(x^3 - 3x + 1) = 3 \end{array}\right\} \overset{h\uparrow \text{ στο } \Delta_1}{\Rightarrow} h(\Delta_1) = (-\infty , 3)$$

$0 \in h(\Delta_1)$ άρα η $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα ρ_1 στο $\Delta_1 = (-\infty , -1)$ και $\rho_1 < 0$

• $\Delta_2 = [-1 , 1]$

$$\left.\begin{array}{l} h(-1) = 3 \\ h(1) = -1 \end{array}\right\} \overset{h\downarrow \text{ στο } \Delta_2}{\Rightarrow} h(\Delta_2) = [-1 , 3]$$

$0 \in h(\Delta_2)$ άρα η $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα ρ_2 στο $\Delta_2 = [-1 , 1]$

• $\Delta_1 = (1 , +\infty)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to1} h(x) = \lim\limits_{x\to1}(x^3 - 3x + 1) = -1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3 - 3x + 1) = +\infty \end{array}\right\} \overset{h\uparrow \text{ στο } \Delta_3}{\Rightarrow} h(\Delta_3) = (-1 , +\infty)$$

$0 \in h(\Delta_3)$ άρα η $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα ρ_3 στο $\Delta_3 = (1 , +\infty)$ και $\rho_3 > 0$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\rho_2 > 0$.

► η h είναι συνεχής στο [0 , 1]

► $h(0) = 1$ και $h(1) = -1$

Από Θ. Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0 , 1)

και επειδή $\rho_1 < 0$ και $\rho_3 > 1$ θα είναι $\rho_2 \in (0 , 1)$.

Θέμα 4ο

α. $h(x) > g(x) \Leftrightarrow h(x) - g(x) > 0$ άρα $\int_{\alpha}^{\beta}[h(x) - g(x)]\,dx > 0 \Leftrightarrow$

$\int_{\alpha}^{\beta} h(x)\,dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx > 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} h(x)\,dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx.$

β. i. $\left[f(x) - e^{-f(x)}\right]' = (x-1)' \Leftrightarrow f'(x) + e^{-f(x)} \cdot f'(x) = 1 \Leftrightarrow$

$f'(x) \cdot [1 + e^{-f(x)}] = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-f(x)}}$ ή $f'(x) = \dfrac{e^{f(x)}}{1 + e^{f(x)}}$

ii. **1ος τρόπος**

Θα δείξω $\dfrac{x}{2} < f(x) < x \cdot f'(x) \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \dfrac{1}{2} < \dfrac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{2} < \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} < f'(x)$

- η f είναι συνεχής στο $[0, x]$
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, x)$

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, x)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

$f'(0) = \dfrac{e^{f(0)}}{1 + e^{f(0)}} = \dfrac{e^0}{1 + e^0} = \dfrac{1}{2}$

Άρα αρκεί να δείξουμε $f'(0) < f'(\xi) < f'(x)$, με $0 < \xi < x$.
Δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα.

$$f''(x) = \left[\frac{e^{f(x)}}{1 + e^{f(x)}}\right]' = \frac{\left[e^{f(x)}\right]' \cdot \left[1 + e^{f(x)}\right] - e^{f(x)} \cdot \left[1 + e^{f(x)}\right]'}{\left[1 + e^{f(x)}\right]^2}$$

$$= \frac{e^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \left[1 + e^{f(x)}\right] - e^{f(x)} \cdot e^{f(x)} \cdot f'(x)}{\left[1 + e^{f(x)}\right]^2} = \frac{e^{f(x)} \cdot f'(x)}{\left[1 + e^{f(x)}\right]^2} > 0$$

διότι $f'(x) > 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα.

2ος τρόπος

➢ Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = f(x) - \dfrac{x}{2}$.

$g'(x) = f'(x) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^{f(x)}}{1 + e^{f(x)}} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^{f(x)} - 1}{2\left(1 + e^{f(x)}\right)} > 0$, για $x > 0$

διότι $x > 0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow e^{f(x)} > e^0 \Leftrightarrow e^{f(x)} - 1 > 0$

άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

$x > 0 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow f(x) - \dfrac{x}{2} > 0 \Leftrightarrow f(x) > \dfrac{x}{2}$ **(1)**.

➢ Θεωρούμε τη συνάρτηση h, με $h(x) = f(x) - x \cdot f'(x)$.
$h'(x) = f'(x) - f'(x) - x \cdot f''(x) = -x \cdot f''(x)$.

$$f''(x) = \left[\frac{e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}\right]' = \frac{\left[e^{f(x)}\right]' \cdot \left[1+e^{f(x)}\right] - e^{f(x)} \cdot \left[1+e^{f(x)}\right]'}{\left[1+e^{f(x)}\right]^2}$$

$$= \frac{e^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \left[1+e^{f(x)}\right] - e^{f(x)} \cdot e^{f(x)} \cdot f'(x)}{\left[1+e^{f(x)}\right]^2} = \frac{e^{f(x)} \cdot f'(x)}{\left[1+e^{f(x)}\right]^2} > 0$$

διότι $f'(x) > 0$.
Άρα $h'(x) < 0$, για $x > 0$,
δηλαδή η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

$$x > 0 \overset{h\downarrow}{\Leftrightarrow} h(x) < h(0) \Leftrightarrow f(x) - x \cdot f'(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < x \cdot f'(x) \quad \textbf{(2)}.$$

Από (1) και (2) έχουμε : $\frac{x}{2} < f(x) < x \cdot f'(x)$, για κάθε $x > 0$.

iii. Είναι $\frac{x}{2} \le f(x) \le x \cdot f'(x)$, για κάθε $x \ge 0$,
άρα $f(x) \ge 0$, για κάθε $x \ge 0$
και $E = \int_0^1 f(x)\,dx$.

- $\frac{x}{2} < f(x) \overset{(\alpha)}{\Rightarrow} \int_0^1 \frac{x}{2}\,dx < \int_0^1 f(x)\,dx \Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 < E \Leftrightarrow \frac{1}{4} < E \quad \textbf{(3)}$

- $f(x) < x \cdot f'(x) \overset{(\alpha)}{\Rightarrow} \int_0^1 f(x)\,dx < \int_0^1 x \cdot f'(x)\,dx \Leftrightarrow$

  $E < \left[x \cdot f(x)\right]_0^1 - \int_0^1 (x)' \cdot f(x)\,dx \Leftrightarrow E < f(1) - \int_0^1 f(x)\,dx \Leftrightarrow$

  $E < f(1) - E \Leftrightarrow 2E < f(1) \Leftrightarrow E < \frac{1}{2} \cdot f(1) \quad \textbf{(4)}$

Από (3) και (4) έχουμε $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} \cdot f(1)$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΙΟΥΛΙΟΥ 2002

ΘΕΜΑ 1ο

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha , \beta]$.

β. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

γ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο IR και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha , \beta]$ στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

δ. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha , \beta]$ και σημείο $x_0 \in [\alpha , \beta]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει $f'(x_0) = 0$.

ε. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha , \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha , \beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει πάντα $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in IR$.

α. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν.

γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x)\,dx$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f, ορισμένη στο IR, με τύπο $f(x) = \dfrac{|x - z|^2 - |x + \bar{z}|^2}{x^2 + |z|^2}$,

όπου z συγκεκριμένος μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in IR$ με $\alpha \neq 0$.

α. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

β. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f, εάν $|z + 1| > |z - 1|$.

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της f.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη στο IR με δεύτερη συνεχή παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις $f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f(x)f'(x)$, $x \in IR$ και $f(0) = 2f'(0) = 1$.

α. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f.

β. Αν η g είναι συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα $[0 , 1]$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x - \int_0^x \dfrac{g(t)}{1 + f^2(t)}\,dt = 1$ έχει μια μοναδική λύση στο διάστημα $[0 , 1]$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΙΟΥΛΙΟΥ 2002

ΘΕΜΑ 1ο

α. Λ, β. Σ, γ. Σ, δ. Λ, ε. Λ.

ΘΕΜΑ 2ο

α. $f'(x) = \left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)' = \dfrac{(e^x - 1)'(e^x + 1) - (e^x - 1)(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2}$

$= \dfrac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} = \dfrac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$, για κάθε $x \in IR$.

Η f είναι γν. αύξουσα στο IR, άρα και «1 – 1» , δηλαδή αντιστρέψιμη.

$y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \Leftrightarrow ye^x + y = e^x - 1 \Leftrightarrow y + 1 = e^x - ye^x \Leftrightarrow$

$y + 1 = e^x(1 - y)$

$e^x = \dfrac{1 + y}{1 - y}$

$x = \ln\dfrac{1 + y}{1 - y}$

$f^{-1}(y) = \ln\dfrac{1 + y}{1 - y}$

• $y \neq 1$

• $\dfrac{1 + y}{1 - y} > 0 \overset{y\neq 1}{\Leftrightarrow} (1 + y)(1 - y) > 0 \Leftrightarrow$

$1 - y^2 > 0 \Leftrightarrow y^2 < 1 \Leftrightarrow |y| < 1 \Leftrightarrow -1 < y < 1$

Άρα $f^{-1}(x) = \ln\dfrac{1 + x}{1 - x}$, $x \in (-1 , 1)$.

β. $f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow \ln\dfrac{1 + x}{1 - x} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1 + x}{1 - x} = 1 \Leftrightarrow 1 + x = 1 - x \Leftrightarrow x = 0.$

γ. $I = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\frac{1 + x}{1 - x}dx \underset{\substack{\bullet\ x = \frac{1}{2} \to u = -\frac{1}{2} \\ \bullet\ x = -\frac{1}{2} \to u = \frac{1}{2}}}{\overset{\substack{x = -u \\ dx = -du}}{=}} -\int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \ln\frac{1 - u}{1 + u}\,du$

$= \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{1 + u}{1 - u}\right)^{-1} du = -\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\frac{1 - u}{1 + u}\,du = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $f(x) = \dfrac{|x - z|^2 - |x + \bar{z}|^2}{x^2 + |z|^2} = \dfrac{(x - z)(x - \bar{z}) - (x + \bar{z})(x + z)}{x^2 + |z|^2}$

$= \dfrac{x^2 - \bar{z}x - zx + z\bar{z} - x^2 - \bar{z}x - zx - z\bar{z}}{x^2 + |z|^2} = \dfrac{-2(z + \bar{z})x}{x^2 + |z|^2} = \dfrac{-4\mathrm{Re}(z)x}{x^2 + |z|^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4\mathrm{Re}(z)x}{x^2 + |z|^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4\mathrm{Re}(z)x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4\mathrm{Re}(z)}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4\mathrm{Re}(z)x}{x^2 + |z|^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4\mathrm{Re}(z)x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4\mathrm{Re}(z)}{x} = 0.$

β. $|z + 1| > |z - 1| \Leftrightarrow |z + 1|^2 > |z - 1|^2 \Leftrightarrow (z + 1)(\bar{z} + 1) > (z - 1)(\bar{z} - 1)$

$\Leftrightarrow z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 > z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 \Leftrightarrow 2(z + \bar{z}) > 0 \Leftrightarrow 4\mathrm{Re}(z) > 0$

$$f'(x) = -4\mathrm{Re}(z)\left(\frac{x}{x^2+|z|^2}\right)' = -4\mathrm{Re}(z)\frac{|z|^2 - x^2}{\left(x^2+|z|^2\right)^2} = 4\mathrm{Re}(z)\frac{x^2-|z|^2}{\left(x^2+|z|^2\right)^2}$$

x	$-\infty$	$-\lvert z\rvert$		$\lvert z\rvert$	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	○	+
$f(x)$	↗		↘		↗

τοπ. μέγιστο $f\left(-|z|\right) = \dfrac{-4\mathrm{Re}(z)\left(-|z|\right)}{\left(-|z|\right)^2+|z|^2} = \dfrac{4|z|\mathrm{Re}(z)}{2|z|^2} = \dfrac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|}$

τοπ. ελάχιστο $f\left(|z|\right) = \dfrac{-4\mathrm{Re}(z)\cdot|z|}{\left(|z|\right)^2+|z|^2} = \dfrac{-4|z|\mathrm{Re}(z)}{2|z|^2} = -\dfrac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|}$

γ. • $\Delta_1 = \left(-\infty\ ,\ -|z|\right)$ με f γν. αύξουσα

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4\mathrm{Re}(z)x}{x^2+|z|^2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-|z|} f(x) \overset{f\ \text{συνεχής}}{=} f\left(-|z|\right) = \dfrac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|} \end{array}\right\} \Rightarrow f(\Delta_1) = \left(0\ ,\ \dfrac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|}\right)$$

$0 \notin f(\Delta_1)$, άρα η f δεν έχει ρίζες στο Δ_1

• $\Delta_2 = \left[-|z|\ ,\ |z|\right]$ με f γν. φθίνουσα

$$\left.\begin{array}{l} f\left(-|z|\right) = \dfrac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|} \\ f\left(|z|\right) = -\dfrac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|} \end{array}\right\} \Rightarrow f(\Delta_2) = \left[-\dfrac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|}\ ,\ \dfrac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|}\right]$$

$0 \in f(\Delta_1)$, άρα η f έχει μοναδική ρίζα στο Δ_2

• $\Delta_3 = \left(|z|\ ,\ +\infty\right)$ με f γν. αύξουσα

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to|z|} f(x) \overset{f\ \text{συνεχής}}{=} f\left(|z|\right) = -\dfrac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4\mathrm{Re}(z)x}{x^2+|z|^2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(\Delta_3) = \left(-\dfrac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|}\ ,\ 0\right)$$

$0 \notin f(\Delta_3)$, άρα η f δεν έχει ρίζες στο Δ_3

Επομένως $f(A) = f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)\cup f(\Delta_3) = \left[-\dfrac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|}\ ,\ \dfrac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|}\right]$

και η $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. $f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f(x)f'(x) \Leftrightarrow [f'(x)f(x)]' = f'(x)f(x)$

Από εφαρμογή σχολικού βιβλίου $f'(x)f(x) = c_1e^x$

και για $x = 0$ έχουμε $f'(0) \cdot f(0) = c_1 = \frac{1}{2}$.

Άρα $f'(x)f(x) = \frac{1}{2}e^x \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = e^x \Leftrightarrow [f^2(x)]' = (e^x)'$

Από συνέπειες Θ.Μ.Τ. έχουμε $f^2(x) = e^x + c_2$

και για $x = 0$ έχουμε $f^2(0) = 1 + c_2 = 1 \Leftrightarrow c_2 = 0$.

Επομένως $f^2(x) = e^x$.

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η f δεν έχει ρίζες,

άρα από συνέπειες του Θ. Bolzano η f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο IR και επειδή $f(0) = 1 > 0$ θα είναι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in$ IR.

Επομένως $f(x) = \sqrt{e^x}$.

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση h, με $h(x) = 2x - \int_0^x \frac{g(t)}{1 + f^2(t)}dt - 1$.

Είναι $h(x) = 2x - 1 - \int_0^x \frac{g(t)}{1 + e^t}dt$

▹ Η h είναι συνεχής στο $[0 , 1]$ ως πράξεις συνεχών

▹ $h(0) = -1 < 0$ και $h(1) = 1 - \int_0^1 \frac{g(t)}{1 + e^t}dt > 0$ διότι :

- $0 \le g(t) \le 1$ **(1)**
- $0 \le t \le 1 \Rightarrow e^0 \le e^t \le e^1 \Leftrightarrow 2 \le 1 + e^t \le 1 + e \Leftrightarrow$

  $\frac{1}{1 + e} \le \frac{1}{1 + e^t} \le \frac{1}{2}$ **(2)**

  Από (1), (2) $\Rightarrow 0 \le \frac{g(t)}{1 + e^t} \le \frac{1}{2}$ **(3)**

  Άρα $\frac{1}{2} - \frac{g(t)}{1 + e^t} \ge 0$ και $\int_0^1\left(\frac{1}{2} - \frac{g(t)}{1 + e^t}\right)dt \ge 0 \Leftrightarrow$

  $\int_0^1 \frac{1}{2}dt - \int_0^1 \frac{g(t)}{1 + e^t}dt \ge 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ge \int_0^1 \frac{g(t)}{1 + e^t}dt \Leftrightarrow$

  $1 - \int_0^1 \frac{g(t)}{1 + e^t}dt \ge 1 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow h(1) \ge \frac{1}{2} > 0$

άρα από Θ. Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της h στο $(0 , 1)$.

$h'(x) = \left(2x - 1 - \int_0^x \frac{g(t)}{1 + e^t}dt\right)' = 2 - \left(\int_0^x \frac{g(t)}{1 + e^t}dt\right)' = 2 - \frac{g(x)}{1 + e^x}$

Από την (3) έχουμε $0 \ge -\frac{g(x)}{1 + e^x} \ge -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \ge 2 - \frac{g(x)}{1 + e^x} \ge 2 - \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2 \ge h'(x) \ge \frac{3}{2} \Rightarrow h'(x) > 0$, για κάθε $x \in [0 , 1]$

Άρα η h είναι γν. αύξουσα στο $[0 , 1]$, και η $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $[0 , 1]$.

ΜΑΪΟΣ 2003

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Β. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και $\bar{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει $|z| = |\bar{z}| = |-z|$.

β. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

γ. Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει $\int f'(x)\,dx = f(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$.

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.

ε. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $w = 3z - i\bar{z} + 4$, όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z.

α. Να αποδείξετε ότι $Re(w) = 3\alpha - \beta + 4$ και $Im(w) = 3\beta - \alpha$.

β. Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$.

γ. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$, έχει το ελάχιστο μέτρο.

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.

β. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1 + x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, 0)$ είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}.

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση $x = 3$.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α, β). Αν ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma \in (\alpha, \beta)$, $\delta \in (\alpha, \beta)$, έτσι ώστε $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$, να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα (α, β).

β. Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$.

γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ 2003

ΘΕΜΑ 1ο

Α. → 6ο Θέμα Θεωρίας, σελίδα 8

Β. → Θεωρία, σελίδα 25

Γ. α. ΣΩΣΤΟ, β. ΣΩΣΤΟ, γ. ΣΩΣΤΟ, δ. ΛΑΘΟΣ, ε. ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ 2ο

α. $w = 3z - i \cdot \bar{z} + 4 = 3(\alpha + \beta i) - i(\alpha - \beta i) + 4 = 3\alpha + 3\beta i - \alpha i - \beta + 4$

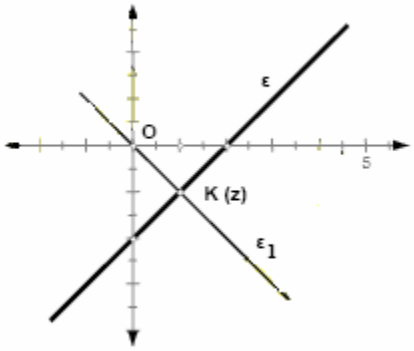
$= (3\alpha - \beta + 4) + (3\beta - \alpha) \cdot i$

άρα $Re(w) = 3\alpha - \beta + 4$ και $Im(w) = 3\beta - \alpha$

β. $x = 3\alpha - \beta + 4$ και $y = 3\beta - \alpha$

$(x , y) \in (\varepsilon') : y = x - 12 \Leftrightarrow 3\beta - \alpha = 3\alpha - \beta + 4 - 12 \Leftrightarrow$

$\beta = \alpha - 2$ άρα $(\alpha , \beta) \in (\varepsilon) : y = x - 2$



γ. Από το Ο (0 , 0) φέρνω ευθεία ε_1 κάθετη στην ε την οποία τέμνει στο σημείο Κ.

Είναι $\lambda_\varepsilon = 1$ άρα $\lambda_{\varepsilon 1} = -1$ και $(\varepsilon_1) : y = -x$.

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

άρα ο μιγαδικός με το ελάχιστο μέτρο είναι ο $z_0 = 1 - i$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

$f''(x) = 20x^3 + 6x = x \cdot (20x^2 + 6)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f (x)	∩		∪

Η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $(-\infty , 0]$, ενώ στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο $[0 , +\infty)$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR, άρα είναι και 1 - 1, δηλαδή αντιστρέφεται.

β. Μας ζητούν να δείξουμε ότι $f(e^x) \geq f(1 + x)$.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR, αρκεί να δείξουμε ότι $e^x \geq x + 1$, για κάθε $x \in IR$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = e^x - x - 1$, $x \in IR$

$g'(x) = e^x - 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
g (x)	↘		↗

Η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$.

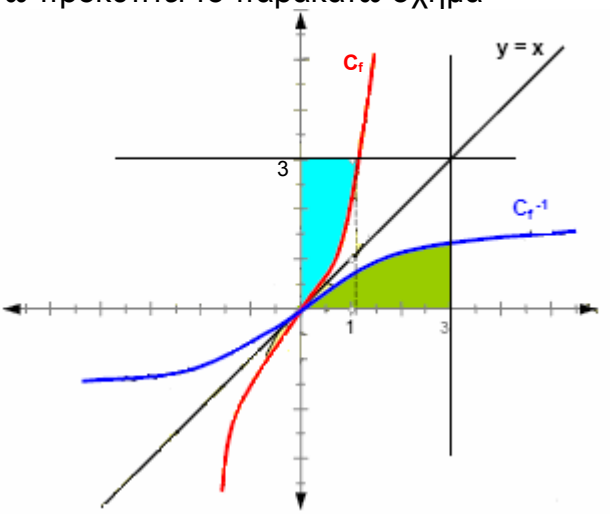
$g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1$.

γ. Είναι $f'(0) = 1$, άρα η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο Ο (0 , 0) είναι:

$y - 0 = 1 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = x$

Από συμπέρασμα του σχολικού βιβλίου (σελίδα 155), οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

δ. Από τα παραπάνω προκύπτει το παρακάτω σχήμα



Το ζητούμενο εμβαδόν που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f^{-1}, την ευθεία $x = 3$ και τον άξονα $x'x$ λόγω συμμετρίας ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, την ευθεία $y = 3$ και τον άξονα $y'y$.

$$E = \int_0^1 [3 - f(x)]\,dx = \int_0^1 (3 - x^5 - x^3 - x)\,dx = \left[3x - \frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= 3 - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{25}{12} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Είναι $\gamma \neq \delta$, διότι αν $\gamma = \delta$ τότε $f(\gamma) = f(\delta)$ και $f(\gamma) \cdot f(\delta) = [f(\gamma)]^2 \geq 0$
(άτοπο διότι $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$)

Έστω $\gamma < \delta$

- f συνεχής στο $[\gamma, \delta] \subseteq [\alpha, \beta]$
- $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$

Από Θ. Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\gamma, \delta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα (α, β).

β. Έστω ότι $f(\gamma) > 0$ και $f(\delta) < 0$.

➢
- f συνεχής στο $[\alpha, \gamma]$
- f παραγωγίσιμη στο (α, γ)

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\eta_1 \in (\alpha, \gamma)$, τέτοιο ώστε

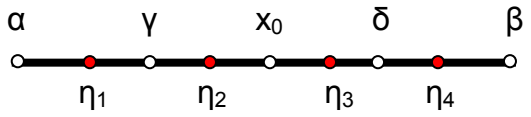
$$f'(\eta_1) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} > 0 \quad \textbf{(1)}$$

➢
- f συνεχής στο $[\gamma, x_0]$
- f παραγωγίσιμη στο (γ, x_0)

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\eta_2 \in (\gamma, x_0)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\eta_2) = \frac{f(x_0) - f(\gamma)}{x_0 - \gamma} < 0 \quad \textbf{(2)}$$

- • f συνεχής στο $[x_0 , \delta]$
  • f παραγωγίσιμη στο (x_0 , δ)
  Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\eta_3 \in (x_0 , \delta)$, τέτοιο ώστε
  $$f'(\eta_3) = \frac{f(\delta) - f(x_0)}{\delta - x_0} < 0 \quad \textbf{(3)}$$
- • f συνεχής στο $[\delta , \beta]$
  • f παραγωγίσιμη στο (δ , β)
  Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\eta_4 \in (\delta , \beta)$, τέτοιο ώστε
  $$f'(\eta_4) = \frac{f(\beta) - f(\delta)}{\beta - \delta} > 0 \quad \textbf{(4)}$$
- • f΄ συνεχής στο $[\eta_1 , \eta_2]$
  • f΄ παραγωγίσιμη στο (η_1 , η_2)
  Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (\eta_1 , \eta_2)$ τέτοιο ώστε
  $$f''(\xi_1) = \frac{f'(\eta_2) - f'(\eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} < 0 \text{ από (1) και (2)}$$
- • f΄ συνεχής στο $[\eta_3 , \eta_4]$
  • f΄ παραγωγίσιμη στο (η_3 , η_4)
  Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (\eta_3 , \eta_4)$ τέτοιο ώστε
  $$f''(\xi_2) = \frac{f'(\eta_4) - f'(\eta_3)}{\eta_4 - \eta_3} > 0 \text{ από (3) και (4)}$$



γ. • **f΄΄ συνεχής στο $[\xi_1 , \xi_2]$**
• $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$ από (β) ερώτημα
Από Θ. Bolzano η $f''(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα ξ,
που είναι θέση **<u>πιθανού σημείου καμπής</u>**.

ΣΧΟΛΙΟ : Το ότι ζητήθηκε ν' αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f, είναι λανθασμένο διότι δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι η f΄΄ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του ξ. Η διατύπωση έπρεπε να είναι :
«**γ.** Υπάρχει ένα τουλάχιστον πιθανό σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.».

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΙΟΥΛΙΟΥ 2003

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.
Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι:

α. όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in IR$, είναι παράγουσες της f στο Δ και

β. κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ, παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in IR$.

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με **Σωστό** ή **Λάθος**.

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα
$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

β. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

γ. Μία συνάρτηση $f : A \to IR$ είναι συνάρτηση 1 - 1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή :
αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

δ. Αν f, g είναι συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει :
$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$

Γ. Πότε μία ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

ΘΕΜΑ 2ο

α. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις : $|z| = 2$ και $Im(z) \ge 0$.

β. Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ), τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{4}{z}\right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

α. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

β. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f, όταν το x τείνει στο $-\infty$.

γ. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} + f(x) = 0$.

δ. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx = \ln(\sqrt{2} + 1)$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο IR με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις : $f(x) = -f(2 - x)$ και $f'(x) \ne 0$, για κάθε $x \in IR$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

γ. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45^0.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΙΟΥΛΙΟΥ 2003

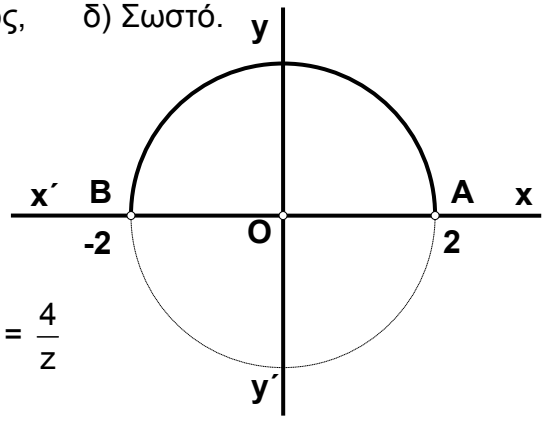
Θέμα 1ο

Α. → 24ο Θέμα Θεωρίας, σελίδα 17

Β. α) Σωστό, β) Λάθος, γ) Λάθος, δ) Σωστό.

Γ. → Θεωρία, σελίδα 23

Θέμα 2ο



α) Είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο Ο (0 , 0) και ακτίνα 2 που βρίσκονται στον άξονα x΄x ή πάνω από τον άξονα x΄x.

β) $|z| = 2 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow z\bar{z} = 4 \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{4}{z}$

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{4}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \bar{z}\right) = \mathrm{Re}(z)$$

Όπως φαίνεται στο σχήμα το πραγματικό μέρος του z, άρα και η εικόνα του w κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

Θέμα 3ο

α. $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - x^2}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + x} \overset{x>0}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1\right)} = 0$$

β. $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1} - x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x}{x}$$

$$\overset{x<0}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1\right) = -2 = \lambda$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - \lambda x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x + 2x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)}{\sqrt{x^2+1} - x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x^2}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x} \overset{x<0}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x} = 0 = \beta$$

Άρα η πλάγια ασύμπτωτη της C_f, όταν το x τείνει στο $-\infty$, είναι η $y = -2x$.

γ. $f'(x) = \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \dfrac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = -\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

άρα $f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1} + f(x) = -\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\sqrt{x^2+1} + f(x) = f(x) + f(x) = 0.$

δ. Από (γ) ερώτημα έχουμε : $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = -\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_0^1 -\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = -\int_0^1 \left[\ell n f(x)\right]'\,dx = -\left[\ell n f(x)\right]_0^1$$

$$= -\left[\ell n f(1) - \ell n f(0)\right] = -\ell n(\sqrt{2}-1) = \ell n(\sqrt{2}-1)^{-1}$$

$$= \ell n\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \ell n\frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \ell n(\sqrt{2}+1).$$

Θέμα 4ο

α. Η f' είναι συνεχής στο IR και $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in$ IR.
Από συνέπειες Θ. Bolzano η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο IR.
Επομένως η f είναι γνησίως μονότονη.

β. Είναι $f(x) = -f(2-x)$, για κάθε $x \in$ IR.
Για $x = 1$ έχουμε $f(1) = -f(1) \Leftrightarrow 2f(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$.
Άρα το $x_0 = 1$ είναι ρίζα της $f(x) = 0$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.
Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα τη $x_0 = 1$.

γ. Έστω ότι η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(x_0, 0)$.
Πρέπει $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 0$, άρα $A(1, 0)$

$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{\frac{f(x)}{f'(x)} - 0}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{f'(x)\cdot(x-1)} = \lim_{x\to1}\left[\frac{f(x)}{x-1}\cdot\frac{1}{f'(x)}\right]$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}\cdot\lim_{x\to1}\frac{1}{f'(x)} = f'(1)\cdot\frac{1}{f'(1)} = 1,$$

διότι
- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-1} = f'(1)$ και
- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to1} f'(x)} \overset{f' \text{ συνεχής}}{=} \dfrac{1}{f'(1)}$

άρα $g'(1) = 1 = \varepsilon\varphi 45^0$,
επομένως η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $A(1, 0)$, στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45^0.

ΜΑΪΟΣ 2004

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

Β. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με **Σωστό** ή **Λάθος**.

α. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

β. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$.

γ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει : $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(x_0)$.

δ. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

ε. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α , β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α , β], τότε $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 \cdot \ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.

β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x \cdot f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο IR και $f(0) = f(3/2) = 0$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0\,,\,\frac{3}{2}\right)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -f(\xi)$.

β. Εάν $f(x) = 2x^2 - 3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(\alpha) = \int_\alpha^0 g(x)\,dx$, $\alpha \in IR$.

γ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} I(\alpha)$.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: IR \to IR$, τέτοια ώστε $f(1) = 1$. Αν για κάθε $x \in IR$, ισχύει $g(x) = \int_1^{x^3} |z| f(t)\,dt - 3\left|z + \frac{1}{z}\right|(x-1) \geq 0$, $z = \alpha + \beta i \in C$, με $\alpha, \beta \in IR^*$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο IR και να βρείτε τη g΄.

β. Να αποδείξετε ότι $|z| = \left|z + \frac{1}{z}\right|$.

γ. Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος **β** να αποδείξετε ότι $Re(z^2) = -\frac{1}{2}$.

δ. Αν επιπλέον $f(2) = \alpha > 0$, $f(3) = \beta$ και $\alpha > \beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2\,,\,3)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ 2004

ΘΕΜΑ 1ο

Α. → 23ο Θέμα Θεωρίας, σελίδα 16

Β. → Θεωρία, σελίδα 22

Γ. α. ΣΩΣΤΟ, β. ΣΩΣΤΟ, γ. ΛΑΘΟΣ, δ. ΛΑΘΟΣ, ε. ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ 2ο

α. Πρέπει $x > 0$ άρα $D_f = (0 , +\infty)$

$$f'(x) = (x^2 \ell n x)' = (x^2)' \ell n x + x^2 (\ell n x)' = 2x\ell n x + x^2 \frac{1}{x} = 2x\ell n x + x = x(2\ell n x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2\ell n x+1) = 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2\ell n x+1 = 0 \Leftrightarrow \ell n x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
f'(x)	-	○	+
f (x)	↘		↗

Ολικό ελάχιστο $\mathbf{f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \ell n\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ell n e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e}}$

β. $f''(x) = \left[x \cdot (2\ell n x + 1)\right]' = (x)' \cdot (2\ell n x + 1) + x \cdot (2\ell n x + 1)' = 2\ell n x + 3$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ell n x + 3 = 0 \Leftrightarrow \ell n x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{e\sqrt{e}}$$

x	0	$\frac{1}{e\sqrt{e}}$	$+\infty$
f''(x)	-	○	+
f (x)	∩		∪

$$\mathbf{f\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{e\sqrt{e}}\right)^2 \ell n\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{e^3} \cdot \ell n e^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{e^3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2e^3}}$$

άρα έχει σημείο καμπής $\mathbf{A\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}, -\frac{3}{2e^3}\right)}$

γ. ♦Στο διάστημα $\Delta_1 = \left(0 , \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2 \ell n x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ell n x}{\frac{1}{x^2}} \underset{\text{L' Hospital}}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = 0 \\ f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e} \end{array}\right\} f(\Delta_1) = \left[-\frac{1}{2e} , 0\right)$$

♦ Στο διάστημα $\Delta_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 \ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \cdot \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \\ f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e} \end{array}\right\} f(\Delta_2) = \left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right)$$

Επομένως $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = \left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right)$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $g'(x) = (e^x \cdot f(x))' = (e^x)' \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x) = e^x (f(x) + f'(x))$

- η g είναι παραγωγίσιμη στο [0 , 3/2]
- $g(0) = g(3/2) = 0$

Από Θ. Rolle προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$ τέτοιο

ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{\xi}(f(\xi) + f'(\xi)) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = -f(\xi)$

β. $I(\alpha) = \int_\alpha^0 g(x)\,dx = \int_\alpha^0 e^x \cdot f(x)\,dx = \int_\alpha^0 e^x \cdot (2x^2 - 3x)\,dx$

$$= \int_\alpha^0 \left(e^x\right)' \cdot (2x^2 - 3x)\,dx = \left[e^x \cdot (2x^2 - 3x)\right]_\alpha^0 - \int_\alpha^0 e^x \cdot (2x^2 - 3x)'\,dx$$

$$= 0 - e^\alpha \cdot (2\alpha^2 - 3\alpha) - \int_\alpha^0 e^x \cdot (4x - 3)\,dx \quad (1)$$

$$\int_\alpha^0 e^x \cdot (4x - 3)\,dx = \int_\alpha^0 \left(e^x\right)' \cdot (4x - 3)\,dx = \left[e^x \cdot (4x - 3)\right]_\alpha^0 - \int_\alpha^0 e^x \cdot (4x - 3)'\,dx$$

$$= -3 - e^\alpha \cdot (4\alpha - 3) - \int_\alpha^0 4e^x\,dx = -3 - e^\alpha \cdot (4\alpha - 3) - 4\left[e^x\right]_\alpha^0$$

$$= -3 - e^\alpha \cdot (4\alpha - 3) - 4 + 4e^\alpha \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε :

$$I(\alpha) = -e^\alpha \cdot (2\alpha^2 - 3\alpha) + 3 + e^\alpha \cdot (4\alpha - 3) + 4 - 4e^\alpha$$

$$= e^\alpha \cdot (-2\alpha^2 + 3\alpha + 4\alpha - 3 - 4) + 4 + 3$$

$$= e^\alpha \cdot (-2\alpha^2 + 7\alpha - 7) + 7$$

γ. $$\lim_{\alpha\to-\infty}\left[e^\alpha \cdot (-2\alpha^2 + 7\alpha - 7)\right] = \lim_{\alpha\to-\infty}\frac{-2\alpha^2 + 7\alpha - 7}{e^{-\alpha}} \underset{\text{L' Hospital}}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}}$$

$$= \lim_{\alpha\to-\infty}\frac{-4\alpha + 7}{-e^{-\alpha}} \underset{\text{L' Hospital}}{\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}}$$

$$= \lim_{\alpha\to-\infty}\frac{-4}{e^{-\alpha}} = -4\lim_{\alpha\to-\infty} e^\alpha = 0$$

Άρα $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} I(\alpha) = 7 + \lim\limits_{\alpha\to-\infty}\left[e^\alpha \cdot (-2\alpha^2 + 7\alpha - 7)\right] = 7 + 0 = 7$

ΘΕΜΑ 4ο

α. $g(x) = |z| \cdot \int_1^{x^3} f(t)\,dt - 3\left|z + \frac{1}{z}\right|(x-1)$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο IR

Η $h(x) = |z| \cdot \int_1^{x} f(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη στο IR

Η $t(x) = x^3$ είναι παραγωγίσιμη στο IR

Η $\varphi(x) = |z| \cdot \int_1^{x^3} f(t)\,dt$ είναι παρ/μη στο IR ως σύνθεση των h και t

Η $s(x) = 3\left|z + \frac{1}{z}\right|(x-1)$ είναι παραγωγίσιμη στο IR ως πολυωνυμική

Άρα η g είναι παρ/μη στο IR ως διαφορά των παρ/μων φ και s.

$$g'(x) = \left[|z| \cdot \int_1^{x^3} f(t)\,dt - 3\left|z + \frac{1}{z}\right|(x-1)\right]'$$

$$= |z| \cdot \left[\int_1^{x^3} f(t)\,dt\right]' - 3\left|z + \frac{1}{z}\right|(x-1)'$$

$$= 3 \cdot |z| \cdot x^2 f(x^3) - 3\left|z + \frac{1}{z}\right|$$

β. Παρατηρούμε ότι

$$g(x) = \int_1^{x^3} |z| f(t)\,dt - 3\left|z + \frac{1}{z}\right|(x-1) \geq 0 = g(1), \text{ για κάθε } x \in IR$$

Άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ και επειδή ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Fermat, προκύπτει ότι $g'(1) = 0$.

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot |z| \cdot f(1) - 3\left|z + \frac{1}{z}\right| = 0 \overset{f(1)=1}{\Leftrightarrow} |z| = \left|z + \frac{1}{z}\right|.$$

γ. $$|z|^2 = \left|z + \frac{1}{z}\right|^2 \Leftrightarrow z\bar{z} = \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right) \Leftrightarrow z\bar{z} = z\bar{z} + \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} + \frac{1}{z\bar{z}} \Leftrightarrow$$

$$0 = \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} + \frac{1}{z\bar{z}} \Leftrightarrow z^2 + \bar{z}^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 + \overline{z^2} = -1$$

α΄ τρόπος : $2\,Re(z^2) = -1 \Leftrightarrow Re(z^2) = -½$

β΄ τρόπος : $z^2 = (\alpha + \beta i)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta i - \beta^2 = (\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha\beta i$

$(\alpha + \beta i)^2 + (\alpha - \beta i)^2 = -1 \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta i - \beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta i - \beta^2 = -1$

$\Leftrightarrow 2(\alpha^2 - \beta^2) = -1 \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 = -½ \Leftrightarrow Re(z^2) = -½$

δ. Θα δείξουμε ότι $\beta < 0$. Είναι $\alpha^2 - \beta^2 = -½ < 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) < 0$.

Όμως $\alpha - \beta > 0$ διότι $\alpha > \beta$, άρα $\alpha + \beta < 0 \Leftrightarrow \beta < -\alpha < 0$.

- Η f είναι συνεχής στο $[2, 3]$
- $f(2) = \alpha > 0$ και $f(3) = \beta < 0$

Από Θ. Bolzano για την f στο διάστημα $[2, 3]$ προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (2, 3)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΙΟΥΛΙΟΥ 2004

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν
- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με **Σωστό** ή **Λάθος**.

α. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

β. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

γ. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού IR και ορίζονται οι συνθέσεις fog και gof, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

δ. Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.

ε. Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0, με $k \in IN$ και $k \geq 2$.

Γ. Να ορίσετε πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα [α, β].

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: IR \to IR$ με $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$, όπου $m \in IR$, $m > 0$.

α. Να βρείτε τον m ώστε $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in IR$.

β. Αν $m = 10$, να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to IR$ συνεχής στο διάστημα [α, β] με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και μιγαδικός αριθμός z με $Re(z) \neq 0$, $Im(z) \neq 0$ και $|Re(z)| > |Im(z)|$. Αν $z + \frac{1}{z} = f(\alpha)$ και $z^2 + \frac{1}{z^2} = f^2(\beta)$, να αποδείξετε ότι:

α. $|z| = 1$

β. $f^2(\beta) < f^2(\alpha)$

γ. η εξίσωση $x^3 f(\alpha) + f(\beta) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (-1, 1).

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, +\infty) \to IR$ τέτοια, ώστε

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} 2x \cdot f(2xt)\, dt.$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x - (x + 1)$.

γ. Να αποδείξετε ότι η f(x) έχει μοναδική ρίζα στο $[0, +\infty)$.

δ. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΙΟΥΛΙΟΥ 2004

ΘΕΜΑ 1ο

Α. $\rightarrow$ 19ο Θέμα Θεωρίας, σελίδα 14

Β. α. Λάθος, β. Σωστό, γ. Λάθος, δ. Σωστό, ε. Σωστό.

Γ. $\rightarrow$ Θεωρία, σελίδα 21

ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο IR, με

$f'(x) = (2^x + m^x - 4^x - 5^x)' = 2^x \cdot \ell n2 + m^x \cdot \ell nm - 4^x \cdot \ell n4 - 5^x \cdot \ell n5$

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$.

Από Θ. Fermat, $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \ell n2 + \ell nm - \ell n4 - \ell n5 = 0 \Leftrightarrow \ell n2 + \ell nm = \ell n4 + \ell n5 \Leftrightarrow \ell n2m = \ell n20 \Leftrightarrow 2m = 20 \Leftrightarrow m = 10$.

β. Για $m = 10$, είναι $f(x) = 2^x + 10^x - 4^x - 5^x$.

$$E = \int_0^1 |f(x)|\,dx \overset{f(x)\geq 0}{=} \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (2^x + 10^x - 4^x - 5^x)\,dx$$

$$= \left[\frac{2^x}{\ell n2} + \frac{10^x}{\ell n10} - \frac{4^x}{\ell n4} - \frac{5^x}{\ell n5}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{\ell n2} + \frac{9}{\ell n10} - \frac{3}{\ell n4} - \frac{4}{\ell n5}\right) \text{τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $z + \frac{1}{z} = f(\alpha) \in IR$ άρα $\overline{z + \frac{1}{z}} = z + \frac{1}{z} \Leftrightarrow \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} = z + \frac{1}{z} \Leftrightarrow$

$z\bar{z}^2 + z = z^2\bar{z} + \bar{z} \Leftrightarrow z\bar{z}^2 - z^2\bar{z} + z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z\bar{z}(\bar{z} - z) - (\bar{z} - z) = 0 \Leftrightarrow$

$(\bar{z} - z)\cdot(z\bar{z} - 1) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} - z = 0$ ή $z\bar{z} - 1 = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$ ή $z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow$

$z \in IR$ ή $|z|^2 = 1 \overset{Im(z)\neq 0}{\Leftrightarrow} |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$.

β. $z + \frac{1}{z} = f(\alpha) \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = f^2(\alpha) \Leftrightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} + 2 = f^2(\alpha) \Leftrightarrow$

$f^2(\beta) + 2 = f^2(\alpha)$ άρα $f^2(\beta) < f^2(\alpha)$.

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = x^3 \cdot f(\alpha) + f(\beta)$.

- η g είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ ως πολυωνυμική.
- $g(-1) = -f(\alpha) + f(\beta)$

  $g(1) = f(\alpha) + f(\beta)$

  $g(-1) \cdot g(1) = [-f(\alpha) + f(\beta)] \cdot [f(\alpha) + f(\beta)] = f^2(\beta) - f^2(\alpha) < 0$ από (β)

από Θ. Bolzano

η $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} 2x \cdot f(2xt)\, dt$

$= \dfrac{x^2}{2} + \int_0^x f(u)\, du$

Θέτω $2xt = u$.
Είναι $2x\, dt = du$.
- Όταν $t = 0$ τότε $u = 0$
- Όταν $t = \dfrac{1}{2}$ τότε $u = x$

άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0 , +\infty)$, ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

β. $f'(x) = \left[\dfrac{x^2}{2} + \int_0^x f(u)\, du\right]' = x + f(x) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = x \Leftrightarrow$

$f'(x) \cdot e^{-x} - f(x) \cdot e^{-x} = x \cdot e^{-x} \Leftrightarrow \left[f(x) \cdot e^{-x}\right]' = x \cdot e^{-x}$

Άρα $f(x) \cdot e^{-x} = \int x \cdot e^{-x}\, dx = \int x \cdot \left(-e^{-x}\right)'\, dx = -x \cdot e^{-x} - \int (x)' \cdot \left(-e^{-x}\right) dx$

$= -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + c$ και

$f(x) = \dfrac{-x \cdot e^{-x} - e^{-x} + c}{e^{-x}} \Leftrightarrow f(x) = -x - 1 + ce^x$ **(1)**

Για $x = 0$ είναι $f(0) = \dfrac{0^2}{2} + \int_0^0 f(u)\, du = 0$

(1) $\overset{x=0}{\Rightarrow} f(0) = -0 - 1 + ce^0 \Leftrightarrow 0 = c - 1 \Leftrightarrow c = 1$

(1) $\overset{c=1}{\Rightarrow} f(x) = -x - 1 + e^x \Leftrightarrow f(x) = e^x - (x + 1)$.

γ. $f'(x) = e^x - 1 > 0$ για $x > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0 , +\infty)$

$f(0) = 0$,

άρα η f έχει μοναδική ρίζα στο $[0 , +\infty)$ την $x = 0$.

δ. • $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x - 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[e^x \left(1 - \dfrac{x + 1}{e^x}\right)\right] = +\infty$,

διότι $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 1}{e^x} \underset{\text{L' Hospital}}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$

- το $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ είναι **κακώς ορισμένο** διότι

δεν υπάρχει διάστημα της μορφής $(-\infty , \alpha)$, με $\alpha \in IR$,

που να ορίζεται η f, αφού $D_f = [0 , +\infty)$.

ΣΧΟΛΙΟ : Το ότι ζητήθηκε να υπολογιστεί ένα όριο που ήταν κακώς ορισμένο ήταν «περίεργο». Ίσως αγνοήθηκε ότι $D_f = [0 , +\infty)$.

ΜΑΪΟΣ 2005

Α.1 Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α , β]. Αν η f είναι συνεχής στο [α , β] και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, δείξτε ότι για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των f (α) και f (β) υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha , \beta)$, τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$.

Α.2 Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$;

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με **Σωστό** ή **Λάθος**.

α. Αν η f είναι συνεχής στο [α , β] με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha , \beta)$, ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta) > 0$.

β. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)]$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

γ. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και C_f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1}.

δ. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

ε. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε ισχύει $\left(\int_\alpha^x f(t)\,dt\right)' = f(x) - f(\alpha)$, για κάθε $x \in \Delta$.

στ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3, με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$.

α. Δείξτε ότι : $\overline{z_1} = \dfrac{9}{z_1}$.

β. Δείξτε ότι ο αριθμός $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός.

γ. Δείξτε ότι : $|z_1 + z_2 + z_3| = \dfrac{1}{3}\,|z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$.

α. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .

β. Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $y = \lambda e x$. Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Μ.

γ. Δείξτε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτομένης της στο σημείο Μ και του άξονα y΄y, είναι $E(\lambda) = \dfrac{e - 2}{2\lambda}$.

δ. Υπολογίστε το $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda}$.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο IR τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση $2f'(x) = e^{x - f(x)}$, για κάθε $x \in IR$ και $f(0) = 0$.

α. Να δειχθεί ότι: $f(x) = \ln\left(\frac{1 + e^x}{2}\right)$.

β. Να βρεθεί το: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(x - t)\,dt}{\eta\mu x}$.

γ. Δίδονται οι συναρτήσεις: $h(x) = \int_{-x}^{x} t^{2005} \cdot f(t)\,dt$ και $g(x) = \frac{x^{2007}}{2007}$.

Δείξτε ότι $h(x) = g(x)$, για κάθε $x \in IR$.

δ. Δείξτε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^{x} t^{2005} \cdot f(t)\,dt = \frac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0, 1)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ 2005

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. → 5ο Θέμα Θεωρίας, σελίδα 8

Α.2. → Θεωρία, σελίδα 23

Β. α. ΛΑΘΟΣ, β. ΛΑΘΟΣ, γ. ΣΩΣΤΟ, δ. ΣΩΣΤΟ, ε. ΛΑΘΟΣ , στ. ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ 2ο

α. $|z_1| = 3 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 9 \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_1 = 9 \overset{z_1 \neq 0}{\Leftrightarrow} \bar{z}_1 = \frac{9}{z_1}$

β. 1ος τρόπος

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} + \frac{z_2 \bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} + \frac{z_2 \bar{z}_1}{|z_1|^2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{9} + \frac{z_2 \bar{z}_1}{9}$$

$$= \frac{z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1}{9} = \frac{2\,\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2)}{9} \in IR$$

2ος τρόπος

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_1}{z_2} + \frac{\frac{9}{\bar{z}_2}}{\frac{9}{\bar{z}_1}} = \frac{z_1}{z_2} + \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{z_1}{z_2} + \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \in IR$$

3ος τρόπος

$w = \bar{w} \Leftrightarrow w - \bar{w} = 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{Im}(w) = 0 \Leftrightarrow w \in IR$

$$\overline{\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \frac{\frac{9}{z_1}}{\frac{9}{z_2}} + \frac{\frac{9}{z_2}}{\frac{9}{z_1}} = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \text{ άρα } \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \in IR$$

γ. $\left| z_1 + z_2 + z_3 \right| = \left| \overline{z_1 + z_2 + z_3} \right| = \left| \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 \right| = \left| \dfrac{9}{z_1} + \dfrac{9}{z_2} + \dfrac{9}{z_3} \right|$

$$= 9\left| \frac{z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1}{z_1z_2z_3} \right| = 9\,\frac{\left| z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 \right|}{\left| z_1 \right| \cdot \left| z_2 \right| \cdot \left| z_3 \right|}$$

$$= 9\,\frac{\left| z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 \right|}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{\left| z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 \right|}{3}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $f'(x) = (e^{\lambda x})' = e^{\lambda x}(\lambda x)' = \lambda \cdot e^{\lambda x} > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

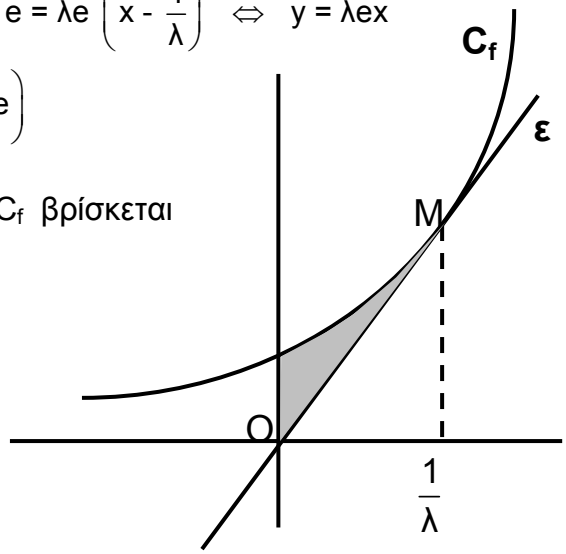
β. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(x_0 , f\,x_0)$ είναι

(ε) : $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ **(1)**.

$O(0 , 0) \in (\varepsilon)$ άρα $-f(x_0) = -f'(x_0) \cdot x_0 \Leftrightarrow -e^{\lambda x} = -\lambda \cdot x_0 \cdot e^{\lambda x} \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{1}{\lambda}$

$$(1) \overset{x_0 = \frac{1}{\lambda}}{\Rightarrow} y - f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = f'\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \Leftrightarrow y - e = \lambda e\left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \Leftrightarrow y = \lambda e x$$

σημείο επαφής $M\left(\dfrac{1}{\lambda} , f\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)\right) \rightarrow M\left(\dfrac{1}{\lambda} , e\right)$



γ. **1ος τρόπος**

Από το διπλανό σχήμα βλέπουμε ότι η C_f βρίσκεται "πάνω" από την εφαπτομένη (ε) άρα

$$E(\lambda) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (e^{\lambda x} - e\lambda x)\,dx = \left[\frac{e^{\lambda x}}{\lambda} - e\lambda\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$= \frac{e}{\lambda} - \frac{e}{2\lambda} - \frac{1}{\lambda} = \frac{e-2}{2\lambda}$$

2ος τρόπος

$f''(x) = (\lambda\, e^{\lambda x})' = \lambda\, e^{\lambda x}(\lambda x)' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} > 0$

άρα η f είναι κυρτή στο IR.

Επομένως οποιαδήποτε εφαπτόμενη της C_f βρίσκεται "κάτω" από τη γραφική παράσταση της f. Δηλαδή $f(x) \geq e\lambda x$, για κάθε $x \in$ IR

$$E(\lambda) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (e^{\lambda x} - e\lambda x)\,dx = \left[\frac{e^{\lambda x}}{\lambda} - e\lambda\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}} = \frac{e}{\lambda} - \frac{e}{2\lambda} - \frac{1}{\lambda} = \frac{e-2}{2\lambda}$$

δ. $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda} = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{\lambda^2 \cdot \frac{e-2}{2\lambda}}{2 + \eta\mu\lambda} = \dfrac{e-2}{2} \cdot \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{\lambda}{2 + \eta\mu\lambda} = +\infty$ διότι :

- Είναι $e > 2$ άρα $\dfrac{e-2}{2} > 0$
- $-1 \leq \eta\mu\lambda \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2 + \eta\mu\lambda \leq 3 \Leftrightarrow 1 \geq \dfrac{1}{2+\eta\mu\lambda} \geq \dfrac{1}{3} \overset{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} \dfrac{\lambda}{3} \leq \dfrac{\lambda}{2 + \eta\mu\lambda} \leq \lambda$

$\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{\lambda}{3} = +\infty$ άρα $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{\lambda}{2 + \eta\mu\lambda} = +\infty$

ΘΕΜΑ 4ο

α. $2f'(x) = e^{x - f(x)} \Leftrightarrow 2e^{f(x)} f'(x) = e^x \Leftrightarrow \left(2e^{f(x)}\right)' = \left(e^x\right)'$ άρα $2e^{f(x)} = e^x + c$ (1)

(1) $\overset{x=0}{\Rightarrow} 2e^{f(0)} = e^0 + c \Leftrightarrow 2 = 1 + c \Leftrightarrow c = 1$

(1) $\overset{c=1}{\Rightarrow} 2e^{f(x)} = e^x + 1 \Leftrightarrow e^{f(x)} = \dfrac{e^x + 1}{2}$ άρα $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x + 1}{2}\right)$

β. $$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(x-t)\,dt}{\eta\mu x} \underset{\substack{t=0 \to u=x \\ t=x \to u=0}}{\overset{\substack{u=x-t \\ dt=-du}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{-\int_x^0 f(u)\,du}{\eta\mu x} = \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(u)\,du}{\eta\mu x} \underset{\text{L'Hospital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)^*}{=}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\int_0^x f(u)\,du\right)'}{(\eta\mu x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x} \overset{f \text{ συνεχής}}{=} \frac{f(0)}{\sigma\upsilon\nu 0} = \frac{0}{1} = 0$$

∗ Η συνάρτηση $Q(x) = \int_0^x f(u)\,du$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη με

$Q'(x) = \left(\int_0^x f(u)\,du\right)' = f(x)$

γ. $h(x) = \int_{-x}^x t^{2005} f(t)\,dt = \int_0^x t^{2005} f(t)\,dt - \int_0^{-x} t^{2005} f(t)\,dt$

$$h'(x) = \left(\int_0^x t^{2005} f(t)\,dt - \int_0^{-x} t^{2005} f(t)\,dt\right)' = \left(\int_0^x t^{2005} f(t)\,dt\right)' - \left(\int_0^{-x} t^{2005} f(t)\,dt\right)'$$

$$= x^{2005} f(x) - (-x)^{2005} f(-x) \cdot (-x)' = x^{2005}\left[f(x) - f(-x)\right]$$

$$= x^{2005}\left[\ln\left(\frac{e^x + 1}{2}\right) - \ln\left(\frac{e^{-x} + 1}{2}\right)\right] = x^{2005} \ln\left(\frac{\frac{e^x + 1}{2}}{\frac{e^{-x} + 1}{2}}\right)$$

$$= x^{2005} \ln\left(\frac{e^x + 1}{\frac{1}{e^x} + 1}\right) = x^{2005} \ln\left(\frac{e^x + 1}{\frac{e^x + 1}{e^x}}\right) = x^{2005} \ln e^x = x^{2005}\, x = x^{2006}$$

$g'(x) = \left(\dfrac{x^{2007}}{2007}\right)' = x^{2006}$, επομένως $h'(x) = g'(x)$ άρα $h(x) = g(x) + c$

και επειδή $h(0) = g(0) = 0$ τότε $c = 0$. Άρα $h(x) = g(x)$.

δ. Από το (γ) ερώτημα η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $g(x) = \frac{1}{2008}$

1ος τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση φ, με $\varphi(x) = g(x) - \frac{1}{2008}$

- φ συνεχής στο [0 , 1] ως διαφορά συνεχών
- $\left.\begin{array}{l} \varphi(0) = g(0) - \frac{1}{2008} = -\frac{1}{2008} < 0 \\ \varphi(1) = g(1) - \frac{1}{2008} = \frac{1}{2007} - \frac{1}{2008} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(0)\cdot\varphi(1) < 0$

από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0 , 1)$,
τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = 0$ (2)

$\varphi'(x) = g'(x) = x^{2006} > 0$ στο (0 , 1)
άρα η $\varphi(x) = 0$ έχει το πολύ μια λύση στο (0 , 1) (3)
Από (2) και (3) η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο (0 , 1)

2ος τρόπος

- g συνεχής στο [0 , 1] ως διαφορά συνεχών
- $g(0) = 0$, $g(1) = \frac{1}{2007}$ και $g(0) = 0 < \frac{1}{2008} < \frac{1}{2007} = g(1)$

από Θ. ενδιαμέσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον
$x_0 \in (0 , 1)$, τέτοιο ώστε $g(x_0) = \frac{1}{2008}$ (4)
$g'(x) = x^{2006} > 0$ στο (0 , 1)
άρα η $g(x) = \frac{1}{2008}$ έχει το πολύ μια λύση στο (0 , 1) (5)

Από (4) , (5) η εξίσωση $g(x) = \frac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μια λύση στο (0 , 1)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΙΟΥΛΙΟΥ 2005

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Έστω η συνάρτηση f, με $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Α.2 Πότε μια συνάρτηση $f : A \to IR$ λέγεται "1 - 1";

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με **Σωστό** ή **Λάθος**.

α. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ.

β. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α , β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o. Αν η f είναι κυρτή στο (α , x_o) και κοίλη στο (x_o , β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A(x_0 , f(x_0))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

γ. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

δ. Αν για δύο συναρτήσεις f , g ορίζονται οι fog και gof, τότε είναι υποχρεωτικά $fog \neq gof$.

ε. Οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών z, $\bar{z}$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x.

στ. Αν η συνάρτηση f έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ και $\lambda \in IR^*$, τότε ισχύει $\int \lambda \cdot f(x)\, dx = \lambda \cdot \int f(x)\, dx$.

ΘΕΜΑ 2ο

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $z_1 + z_2 = 4 + 4i$ και $2z_1 - \bar{z}_2 = 5 + 5i$, να βρείτε τους z_1, z_2.

β. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z , w ισχύουν $|z - 1 - 3i| \leq \sqrt{2}$ και $|w - 3 - i| \leq \sqrt{2}$:

i. να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι, ώστε z = w

ii. να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο IR με $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in IR$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι "1 - 1".

β. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία A(1 , 2005) και B (-2 , 1), να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8)) = -2$.

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο M της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία (ε): $y = -\dfrac{1}{668}x + 2005$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : IR \to IR$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 2005.$$

α. Να δείξετε ότι : **i.** $f(0) = 0$, **ii.** $f'(0) = 1$.

β. Να βρείτε το $\lambda \in IR$, έτσι ώστε $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + \lambda(f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} = 3$

γ. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο IR και $f'(x) > f(x)$, για κάθε $x \in IR$, να δείξετε ότι:

i. $x \cdot f(x) > 0$, για κάθε $x \neq 0$.

ii. $\int_0^1 f(x)\,dx < f(1)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΙΟΥΛΙΟΥ 2005

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 $\rightarrow$ 10ο Θέμα Θεωρίας, σελίδα 10.

Α.2 $\rightarrow$ Θεωρία, σελίδα 21.

Β. α. Σωστό, β. Λάθος, γ. Σωστό, δ. Λάθος, ε. Σωστό, στ. Σωστό.

ΘΕΜΑ 2ο

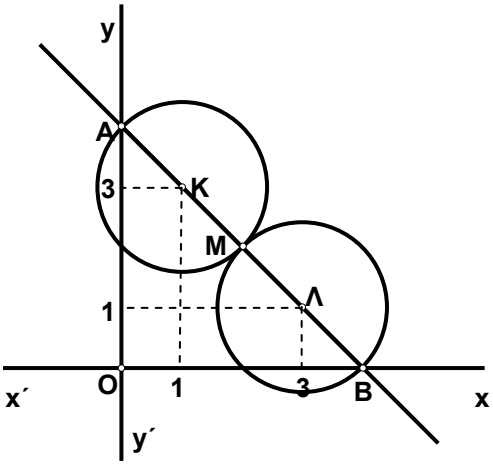
α. Έστω $z_1 = x + yi$ και $z_2 = \alpha + \beta i$. Τότε

$$z_1 + z_2 = 4 + 4i \Leftrightarrow (x + \alpha) + (y + \beta) = 4 + 4i \Rightarrow \begin{cases} x + \alpha = 4 & \textbf{(1)} \\ y + \beta = 4 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

$$2z_1 - \overline{z_2} = 5 + 5i \Leftrightarrow (2x - \alpha) + (2y + \beta) = 5 + 5i \Rightarrow \begin{cases} 2x - \alpha = 5 & \textbf{(3)} \\ 2y + \beta = 5 & \textbf{(4)} \end{cases}$$

Από (1) , (3) $\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \alpha = 1 \end{cases}$ και από (2) , (4) $\Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \beta = 3 \end{cases}$

Άρα $z_1 = 3 + i$ και $z_2 = 1 + 3i$.



β. i. Η εικόνα του μιγαδικού z βρίσκεται στον κυκλικό δίσκο με κέντρο $K(1, 3)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$, ενώ η εικόνα του μιγαδικού w βρίσκεται στον κυκλικό δίσκο με κέντρο $\Lambda(3, 1)$ και ακτίνα $R = \sqrt{2}$.

$(K\Lambda) = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2} = R + \rho$,

άρα οι κυκλικοί δίσκοι εφάπτονται εξωτερικά, δηλαδή υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w, έτσι ώστε $z = w$

(στο σχήμα η εικόνα τους είναι το κοινό σημείο των κυκλικών δίσκων).

ii. Η μέγιστη τιμή του $|z - w|$ είναι η απόσταση (AB), όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα και είναι ίση με $2R + 2\rho = 4\sqrt{2}$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Έστω ότι η f δεν είναι "1 - 1".

Τότε υπάρχουν $\alpha, \beta \in IR$, με $\alpha < \beta$ και $f(\alpha) = f(\beta)$.

Από Θ. Rolle στο $[\alpha, \beta]$, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Άτοπο διότι $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in IR$. Άρα η η f είναι "1 - 1".

β. Τα σημεία Α (1 , 2005) και Β (-2 , 1) είναι σημεία της C_f άρα f (1) = 2005 και f (-2) = 1.

$f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8)) = -2$ άρα $f(f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8))) = f(-2) \Leftrightarrow$

$-2004 + f(x^2 - 8) = 1 \Leftrightarrow f(x^2 - 8) = 2005 \Leftrightarrow f(x^2 - 8) = f(1)$

και επειδή η f είναι "1 - 1" θα είναι $x^2 - 8 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

γ. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο [-2 , 1]

Από Θ. Μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-2 , 1)$, τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{2005 - 1}{1 + 2} = \frac{2004}{3} = 668 \text{ και } \lambda_\varepsilon = -\frac{1}{668},$$

άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $M(x_0 , f(x_0))$ της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία (ε).

ΘΕΜΑ 4ο

α. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = \dfrac{f(x) - x}{x^2}$, $x \neq 0$.

Είναι $f(x) = x^2 \cdot g(x) + x$ και επειδή η f είναι συνεχής στο IR, θα είναι

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[x^2 \cdot g(x) + x\right] = 0$$

ii. $$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot g(x) + x}{x} = \lim_{x\to 0}\left[x \cdot g(x) + 1\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x\to 0} g(x) + 1 = 0 \cdot 2005 + 1 = 1$$

β. $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \lambda(f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} = 3 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \lambda\frac{(f(x))^2}{x^2}}{2\frac{x^2}{x^2} + \frac{(f(x))^2}{x^2}} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + \lambda\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2}{2 + \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2} = 3 \Leftrightarrow \frac{1 + \lambda\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\right)^2}{2 + \left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\right)^2} = 3 \overset{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = f'(0) = 1}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{1 + \lambda \cdot 1^2}{2 + 1^2} = 3 \Leftrightarrow \frac{1 + \lambda}{3} = 3 \Leftrightarrow \lambda + 1 = 9 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda = 8}$$

γ. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = f(x) \cdot e^{-x}$.

Είναι $g'(x) = (f'(x) - f(x)) \cdot e^{-x} > 0$, διότι $f'(x) > f(x)$, για κάθε $x \in$ IR.

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

- $x < 0 \Rightarrow g(x) < g(0) \Leftrightarrow f(x) \cdot e^{-x} < 0$ άρα $f(x) < 0$ και $x \cdot f(x) > 0$
- $x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) \Leftrightarrow f(x) \cdot e^{-x} > 0$ άρα $f(x) > 0$ και $x \cdot f(x) > 0$

Άρα $x \cdot f(x) > 0$, για κάθε $x \neq 0$.

ii. Είναι $f'(x) - f(x) > 0$, για κάθε $x \in$ IR.

Άρα $\int_0^1 [f'(x) - f(x)]\, dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x)\, dx - \int_0^1 f(x)\, dx > 0 \Leftrightarrow$

$[f(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)\, dx > 0 \Leftrightarrow f(1) - f(0) > \int_0^1 f(x)\, dx \Leftrightarrow$

$\int_0^1 f(x)\, dx < f(1)$.

ΜΑΪΟΣ 2006

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.
Να αποδείξετε ότι :

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

Α.2 Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ;

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με **Σωστό** ή **Λάθος**.

α. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z, ισχύει $|z|^2 = z^2$.

β. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

γ. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

δ. Ισχύει ο τύπος $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε. Ισχύει η σχέση $\int_\alpha^\beta f(x) \cdot g'(x)\, dx = \left[f(x) \cdot g(x)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x) \cdot g(x)\, dx$, όπου f΄, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α , β].

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2 + (x - 2)^2$, με $x \geq 2$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1 - 1.

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.

γ. i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία $y = x$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

α. Να αποδείξετε ότι : i) $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$

ii) $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$ και $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \geq -1$

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} - \ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

γ. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \ln x$ στο σημείο $A(\alpha, \ln\alpha)$, με $\alpha > 0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$, με $\beta \in \mathbb{R}$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

δ. Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ 2006

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. → 21ο & 22ο Θέματα Θεωρίας, σελίδες 15 - 16

Α.2. → Θεωρία, σελίδα 23

Β. α. ΛΑΘΟΣ, **β.** ΣΩΣΤΟ, **γ.** ΣΩΣΤΟ, **δ.** ΛΑΘΟΣ, **ε.** ΣΩΣΤΟ.

ΘΕΜΑ 2ο

α. 1ος τρόπος

$f'(x) = 2(x - 2)$, $x \geq 2$. Είναι $f'(x) > 0$ για $x > 2$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2 , +\infty)$. Επομένως η f είναι «1 - 1».

2ος τρόπος

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2 + (x_1 - 2)^2 = 2 + (x_2 - 2)^2 \Leftrightarrow (x_1 - 2)^2 = (x_2 - 2)^2 \Leftrightarrow$
$|x_1 - 2| = |x_2 - 2|$ και $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 2$ άρα $x_1 - 2 = x_2 - 2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$.
Επομένως η f είναι «1 - 1».

β. Η f είναι «1 - 1» άρα η f είναι αντιστρέψιμη.

$$y = 2 + (x - 2)^2 \Leftrightarrow y - 2 = (x - 2)^2 \overset{\text{πρέπει } y \geq 2}{\Rightarrow} x - 2 = \sqrt{y - 2} \Leftrightarrow$$

$x = 2 + \sqrt{y - 2}$. Άρα $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x - 2}$, $x \geq 2$

γ. i) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των C_f και $y = x$ λύνουμε την εξίσωση
$f(x) = x \Leftrightarrow 2 + (x - 2)^2 = x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 3$
Άρα τα κοινά σημεία των C_f και $y = x$ είναι τα $A(2 , 2)$ και $B(3 , 3)$.
Για να βρούμε τα κοινά σημεία των C_f^{-1} και $y = x$ λύνουμε την εξίσωση
$f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow 2 + \sqrt{x - 2} = x \Leftrightarrow \sqrt{x - 2} = x - 2 \Leftrightarrow$
$x - 2 = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 3$
Άρα τα κοινά σημεία των C_f^{-1} και $y = x$ είναι τα $A(2 , 2)$ και $B(3 , 3)$.

ii) Οι f και f^{-1} είναι συνεχείς στο $[2 , 3]$.
Αναζητούμε το πρόσημο της $\Delta(x) = f(x) - f^{-1}(x) = (x - 2)^2 - \sqrt{x - 2}$

1ος τρόπος

$\Delta(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 - \sqrt{x - 2} \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 \geq \sqrt{x - 2} \Leftrightarrow$
$(x - 2)^4 \geq x - 2 \Leftrightarrow (x - 2)^4 - (x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow$
$(x - 2)[(x - 2)^3 - 1] \geq 0 \overset{x \geq 2}{\Leftrightarrow} (x - 2)^3 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$
$(x - 2)^3 \geq 1 \Leftrightarrow x - 2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 3$
Άρα $\Delta(x) \leq 0$ στο $[2 , 3]$

2ος τρόπος

Από προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι οι C_f, C_f^{-1} τέμνονται στα $A(2,2)$ και $B(3,3)$, άρα η $\Delta(x)$ έχει μοναδικές ρίζες τις 2 και 3.
Στο διάστημα $(2 , 3)$ η συνεχής $\Delta(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο.

$$\Delta\left(\frac{5}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right) - f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) = 2 + \left(\frac{5}{2} - 2\right)^2 - 2 - \sqrt{\frac{5}{2} - 2} = \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{2}} < 0$$

Άρα $\Delta(x) \leq 0$ στο $[2 , 3]$

$$E = -\int_2^3 \Delta(x)\,dx = -\int_2^3 \left[(x - 2)^2 - \sqrt{x - 2}\right] dx = \int_2^3 \sqrt{x - 2}\,dx - \int_2^3 (x - 2)^2\,dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{(x - 2)^3}\right]_2^3 - \left[\frac{(x - 2)^3}{3}\right]_2^3 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ τ. μ.}$$

ΘΕΜΑ 3ο

1η λύση

α. i) Θα δείξουμε ότι $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1|$

Είναι $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -z_2 - z_3$

$|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| \Leftrightarrow |-z_2 - z_3 - z_2| = |z_3 + z_2 + z_3| \Leftrightarrow$

$|-2z_2 - z_3| = |2z_3 + z_2| \Leftrightarrow |2z_2 + z_3|^2 = |2z_3 + z_2|^2 \Leftrightarrow$

$(2z_2 + z_3)(2\bar{z}_2 + \bar{z}_3) = (2z_3 + z_2)(2\bar{z}_3 + \bar{z}_2) \Leftrightarrow$

$4z_2\bar{z}_2 + 2z_2\bar{z}_3 + 2\bar{z}_2z_3 + z_3\bar{z}_3 = 4z_3\bar{z}_3 + 2z_2\bar{z}_3 + 2\bar{z}_2z_3 + z_2\bar{z}_2 \Leftrightarrow$

$3z_2\bar{z}_2 = 3z_3\bar{z}_3 \Leftrightarrow 3|z_2|^2 = 3|z_3|^2 \Leftrightarrow 3 = 3$ που ισχύει

Ομοίως δείχνουμε ότι $|z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$.

ii) $|z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2| = 1 + 1 = 2$ άρα $|z_1 - z_2|^2 \le 4$

$(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \le 4 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 + z_2\bar{z}_2 \le 4 \Leftrightarrow$

$|z_1|^2 - \left(z_1\bar{z}_2 - \overline{z_1\bar{z}_2}\right) + |z_2|^2 \le 4 \Leftrightarrow 1 - 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) + 1 \le 4 \Leftrightarrow$

$-2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \le 2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \ge -1$

2η λύση

α. i) Είναι $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = -z_3$

$|z_1 + z_2| = |-z_3| \Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 = |z_3|^2 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = 1 \Leftrightarrow$

$z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 + z_2\bar{z}_2 = 1 \Leftrightarrow |z_1|^2 + (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) + |z_2|^2 = 1 \Leftrightarrow$

$1 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) + 1 = 1 \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = -1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = -\frac{1}{2}$ (1)

$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 + z_2\bar{z}_2$

$= |z_1|^2 - (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) + |z_2|^2 = 1 - 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) + 1 \overset{(1)}{=} 3$

Άρα $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$

Ομοίως δείχνουμε ότι $|z_3 - z_1| = |z_2 - z_3| = \sqrt{3}$.

ii) Είναι $|z_1 - z_2|^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3 \le 4$ και $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = -\frac{1}{2} \ge -1$

3η λύση

α. i) Αποδεικνύω ότι $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$

Είναι $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = -z_3$

Άρα $|-z_3|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 \Leftrightarrow 1 + |z_1 - z_2|^2 = 2 + 2 \Leftrightarrow$

$|z_1 - z_2|^2 = 3 \Leftrightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{3}$

Ομοίως $|z_3 - z_1| = |z_2 - z_3| = \sqrt{3}$, άρα $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$

ii) Είναι $|z_1 - z_2|^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3 \le 4$ και

$$|z_1 - z_2|^2 = 3 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = 3 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 + z_2\bar{z}_2 = 3$$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2 - \left(z_1\bar{z}_2 - \overline{z_1\bar{z}_2}\right) + |z_2|^2 = 3 \Leftrightarrow 1 - 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) + 1 = 3 \Leftrightarrow$$

$$-2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = -\frac{1}{2} \geq -1$$

β. Οι εικόνες των z_1 , z_2 , z_3 είναι σημεία του μοναδιαίου κύκλου και επειδή $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$ σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Πρέπει $x \neq 1$ και $x > 0$. Άρα $D_f = (0 , 1) \cup (1 , +\infty)$

$$f'(x) = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} - \frac{1}{x} = -\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x} < 0 \text{ για } x \in D_f$$

Άρα f γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα (0 , 1) και (1 , + ∞).

• Στο $\Delta_1 = (0 , 1)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x\right) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x\right) = -\infty$$

άρα $f(\Delta_1) = IR$

• Στο $\Delta_2 = (1 , +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x\right) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x\right) = -\infty$$

άρα $f(\Delta_2) = IR$

Επομένως το σύνολο τιμών είναι $f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = IR$.

β. • $0 \in f(\Delta_1)$ και f γνησίως φθίνουσα στο Δ_1.

Άρα η $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ_1.

• $0 \in f(\Delta_2)$ και f γνησίως φθίνουσα στο Δ_2.

Άρα η $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ_2.

Επομένως η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο D_f.

γ. 1ος τρόπος

$g'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ και $h'(x) = e^x$, $x \in IR$.

Βρίσκουμε την εφαπτόμενη (ε) της C_g στο A (α , lnα)

$$(\varepsilon) : y - g(\alpha) = g'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow (\varepsilon) : y - \ln\alpha = \frac{1}{\alpha}(x - \alpha)$$

Η (ε) είναι και εφαπτομένη της C_h στο B

Άρα $\lambda_\varepsilon = g'(\alpha) = h'(\beta)$ άρα $\frac{1}{\alpha} = e^\beta$ ή $\beta = -\ln\alpha$ **(1)**

Β ∈ ε άρα

$$e^\beta - \ln\alpha = \frac{1}{\alpha}(\beta - \alpha) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\alpha} - \ln\alpha = \frac{1}{\alpha}(-\ln\alpha - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$1 - \alpha\ln\alpha = -\ln\alpha - \alpha \Leftrightarrow \alpha + 1 = (\alpha - 1)\ln\alpha \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \ln\alpha \Leftrightarrow \frac{\alpha+1}{\alpha-1} - \ln\alpha = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$$

άρα το α είναι ρίζα της $f(x) = 0$.

Αν $\alpha = 1$ τότε η εφαπτομένη της C_g στο A (1 , 0) είναι η $y = x - 1$, ενώ η εφαπτομένη της C_h στο B (0 , 1) είναι η $y = x + 1$ και δεν ταυτίζονται. Άρα **α ≠ 1**.

2ος τρόπος

$g'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ και $h'(x) = e^x$, $x \in IR$.

Βρίσκουμε την εφαπτόμενη (ε_1) της C_g στο $A(\alpha, \ln\alpha)$

$(\varepsilon_1) : y - g(\alpha) = g'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow (\varepsilon_1) : y = \frac{1}{\alpha}x - 1 + \ell n\alpha$

Βρίσκουμε και την εφαπτόμενη (ε_2) της C_h στο $B(\beta, e^\beta)$

$(\varepsilon_2) : y - h(\beta) = h'(\beta)(x - \beta) \Leftrightarrow (\varepsilon_2) : y = e^\beta x - \beta e^\beta + e^\beta$

Για να ταυτίζονται οι (ε_1) και (ε_2) πρέπει :

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} = e^\beta \Leftrightarrow \ell n\alpha = \beta \quad \textbf{(1)} \text{ και} \\ -1 + \ell n\alpha = -\beta e^\beta + e^\beta \quad \textbf{(2)} \end{cases}$$

Από (1) και (2) έχουμε

$-1 + \ell n\alpha = \ell n\alpha \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \overset{\cdot\alpha}{\Leftrightarrow} -\alpha - \alpha\,\ell n\alpha = -\ell n\alpha + 1 \Leftrightarrow$

$\alpha + 1 = (\alpha - 1)\ell n\alpha \Leftrightarrow \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} = \ell n\alpha \Leftrightarrow$

$\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} - \ell n\alpha = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$

άρα το α είναι ρίζα της $f(x) = 0$.

Αν $\alpha = 1$ τότε η εφαπτομένη της C_g στο $A(1, 0)$ είναι η $y = x - 1$, ενώ η εφαπτομένη της C_h στο $B(0, 1)$ είναι η $y = x + 1$ και δεν ταυτίζονται. Άρα $\boldsymbol{\alpha \neq 1}$.

δ. Από το (γ) ερώτημα προκύπτει ότι το πλήθος των κοινών εφαπτόμενων των C_g και C_h ισούται με το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$. Από το (β) ερώτημα η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες άρα οι C_g και C_h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΙΟΥΛΙΟΥ 2006

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Να αποδείξετε ότι $(συνx)' = -ημx$, $x \in IR$.

Α.2 Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με **Σωστό** ή **Λάθος**.

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει $\left||z_1| - |z_2|\right| \le |z_1 + z_2|$.

β. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

γ. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $[\ell n|x|]' = \frac{1}{x}$.

δ. Μια συνάρτηση $f : A \to IR$ είναι 1 - 1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

ε. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[α , β]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[α , β]$, τότε $\int_α^β f(t)\,dt = G(α) - G(β)$.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1 + e^x}{1 + e^{x+1}}$, $x \in IR$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της στο IR.

β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{f(x)}\,dx$.

γ. Για κάθε $x < 0$ να αποδείξετε ότι $f(5^x) + f(7^x) < f(6^x) + f(8^x)$.

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, που ικανοποιούν την ισότητα $(4 - z)^{10} = z^{10}$ και η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + x + α$, $α \in IR$.

α. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία $x = 2$.

β. Αν η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο τομής της με την ευθεία $x = 2$ τέμνει τον $y'y$ στο $y_0 = -3$, τότε :

i. να βρείτε το α και την εξίσωση της εφαπτομένης (ε).

ii. να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, της εφαπτομένης (ε), **<u>του άξονα x΄x</u>** και της ευθείας $x = \frac{3}{5}$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot \ell n(x + 1) - (x + 1) \cdot \ell nx$, με $x > 0$.

α. i. Να αποδείξετε ότι: $\ell n(x + 1) - \ell nx < \frac{1}{x}$, $x > 0$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0 , +\infty)$.

β. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot \ell n\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $α \in (0 , +\infty)$, τέτοιος ώστε $(α + 1)^α = α^{α+1}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΙΟΥΛΙΟΥ 2006

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. → 12ο Θέμα Θεωρίας, σελίδα 11

Α.2. → Θεωρία, σελίδα 23

Β. α. ΣΩΣΤΟ, **β.** ΛΑΘΟΣ, **γ.** ΣΩΣΤΟ, **δ.** ΣΩΣΤΟ, **ε.** ΛΑΘΟΣ.

ΘΕΜΑ 2ο

α) $$f'(x) = \left(\frac{1+e^x}{1+e^{x+1}}\right)' = \frac{\left(1+e^x\right)'\left(1+e^{x+1}\right) - \left(1+e^x\right)\left(1+e^{x+1}\right)'}{\left(1+e^{x+1}\right)^2}$$

$$= \frac{e^x\left(1+e^{x+1}\right) - e^{x+1}\left(1+e^x\right)}{\left(1+e^{x+1}\right)^2} = \frac{e^x(1-e)}{\left(1+e^{x+1}\right)^2} < 0$$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο IR.

β) $$\int \frac{1}{f(x)}dx = \int \frac{1+e^{x+1}}{1+e^x}dx = \int \frac{1+e^x - e^x + e\times e^x}{1+e^x}dx = \int\left(\frac{1+e^x}{1+e^x} + (e-1)\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx$$

$$= \int 1\,dx + (e-1)\int \frac{e^x}{1+e^x}dx = x + (e-1)\cdot \ell n(1+e^x) + c$$

γ) Είναι $0 < \frac{5}{6} < 1$ άρα για $x < 0$ είναι $\left(\frac{5}{6}\right)^x > \left(\frac{5}{6}\right)^0 \Leftrightarrow \frac{5^x}{6^x} > 1 \Leftrightarrow$

$5^x > 6^x$ και επειδή η f είναι γν. φθίνουσα $f(5^x) < f(6^x)$ **(1)**

Όμοια $0 < \frac{7}{8} < 1$ άρα για $x < 0$ είναι $\left(\frac{7}{8}\right)^x > \left(\frac{7}{8}\right)^0 \Leftrightarrow \frac{7^x}{8^x} > 1 \Leftrightarrow$

$7^x > 8^x$ και επειδή η f είναι γν. φθίνουσα $f(7^x) < f(8^x)$ **(2)**

Από (1) και (2) $\overset{(+)}{\Rightarrow}$ $f(5^x) + f(7^x) < f(6^x) + f(8^x)$.

ΘΕΜΑ 3ο

α) $(4-z)^{10} = z^{10} \Rightarrow \left|(4-z)^{10}\right| = \left|z^{10}\right| \Leftrightarrow |4-z|^{10} = |z|^{10} \Leftrightarrow$

$|4-z| = |z| \Leftrightarrow |4-z|^2 = |z|^2 \Leftrightarrow (4-z)(4-\bar{z}) = z\bar{z} \Leftrightarrow$

$16 - 4\bar{z} - 4z + z\bar{z} = z\bar{z} \Leftrightarrow 4(z+\bar{z}) = 16 \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z) = 4 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 2$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία $x = 2$.

β) i. Είναι $f'(x) = 2x + 1$.

Επίσης $f(2) = 6 + \alpha$ και $f'(2) = 5$.

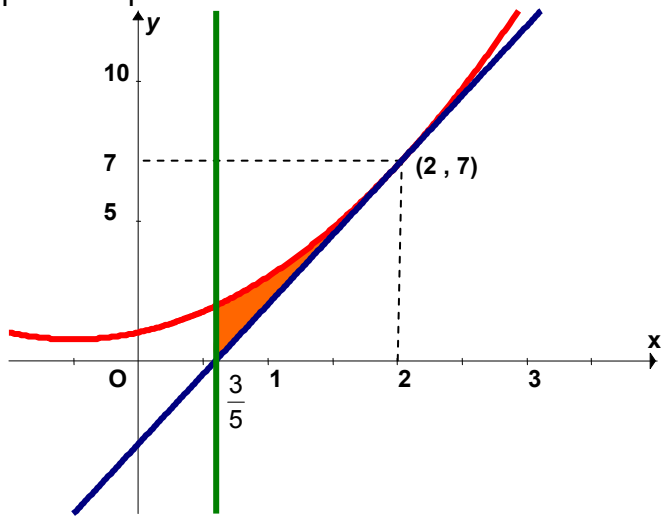
$(\varepsilon) : y - f(2) = f'(2)\cdot(x-2) \Leftrightarrow$

$(\varepsilon) : y = 5x + \alpha - 4$

$A(0, -3) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow$ **$\alpha = 1$**

Για $\alpha = 1$ είναι **$(\varepsilon) : y = 5x - 3$**

ii. Σχεδιάζοντας τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία (ε) και την κατακόρυφη ευθεία $x = \frac{3}{5}$, το ζητούμενο εμβαδόν (γραμμοσκιασμένο χωρίο) είναι :



$$E = \int_{\frac{3}{5}}^{2} [f(x) - (5x - 3)]\, dx = \int_{\frac{3}{5}}^{2} (x^2 + x + 1 - 5x + 3)\, dx = \int_{\frac{3}{5}}^{2} (x^2 - 4x + 4)\, dx$$

$$= \int_{\frac{3}{5}}^{2} (x - 2)^2\, dx = \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_{\frac{3}{5}}^{2} = 0 - \frac{\left(\frac{3}{5} - 2\right)^3}{3} = \frac{343}{375} \text{ τ.μ.}$$

ΣΧΟΛΙΟ : Το ότι στην εκφώνηση της άσκησης για τον υπολογισμό του εμβαδού του χωρίου αναφερόταν και ο άξονας x΄x ήταν **περιττό στοιχείο** και μάλλον μπέρδευε τους μαθητές.

ΘΕΜΑ 4ο

α) i. Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = \ell n x$, $x > 0$.

$g'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. με τη g στο $[x , x + 1]$

Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x , x + 1)$, τέτοιο ώστε

$$g'(x_0) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = \frac{\ell n(x+1) - \ell n x}{1} = \ell n(x+1) - \ell n x$$

Άρα $\frac{1}{x_0} = \ell n(x+1) - \ell n x$.

Αρκεί να δείξω ότι $\frac{1}{x_0} < \frac{1}{x}$, το οποίο ισχύει διότι $x < x_0$.

Επομένως $\ell n(x+1) - \ell n x < \frac{1}{x}$.

ii. $f'(x) = \left[x \cdot \ell n(x+1) - (x+1) \cdot \ell n x\right]' = \ell n(x+1) + x \cdot \frac{1}{x+1} - \ell n x - (x+1) \cdot \frac{1}{x}$

$$= \ell n(x+1) + \frac{x}{x+1} - \ell n x - 1 - \frac{1}{x} = \ell n(x+1) - \ell n x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} < 0$$

διότι $\ell n(x+1) - \ell n x - \frac{1}{x} < 0$ από α)i) ερώτημα και $-\frac{1}{x+1} < 0$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0 , +\infty)$

β) $$\lim_{x\to+\infty}\left[x \cdot \ell n\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] \overset{(+\infty)\cdot 0}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ell n\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{\text{L'Hospital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\ell n\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

γ) $(\alpha + 1)^{\alpha} = \alpha^{\alpha + 1} \overset{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} \ell n(\alpha + 1)^{\alpha} = \ell n\alpha^{\alpha + 1} \Leftrightarrow \alpha \cdot \ell n(\alpha + 1) = (\alpha + 1) \cdot \ell n\alpha$

$\Leftrightarrow \alpha \cdot \ell n(\alpha + 1) - (\alpha + 1) \cdot \ell n\alpha = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left[x \cdot \ell n(x + 1) - (x + 1) \cdot \ell nx\right] = 0 - (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[x \cdot \ell n(x + 1) - (x + 1) \cdot \ell nx\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[x \cdot \ell n(x + 1) - x\ell nx - \ell nx\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[x \cdot \left[\ell n(x + 1) - \ell nx\right] - \ell nx\right] = \lim_{x \to +\infty} \left(x \cdot \ell n\frac{x + 1}{x} - \ell nx\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[x \cdot \ell n\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \ell nx\right] \overset{(\beta)}{=} 1 - (+\infty) = -\infty$$

Άρα $f(A) = IR$.

Είναι $0 \in f(A)$ άρα η $f(\alpha) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0 , +\infty)$ και επειδή η f είναι "1 - 1" ως γνησίως φθίνουσα στο $(0 , +\infty)$, τότε η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

ΜΑΪΟΣ 2007

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Αν z_1 , z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Α.2 Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Α.3 Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$;

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με **Σωστό** ή **Λάθος**.

α. Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[\alpha , \beta]$ και για κάθε $x \in [\alpha , \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx > 0$.

β. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

δ. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε $\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)\, dt\right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$ με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

ε. Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim_{x \to -\infty} \alpha^x = 0$.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \dfrac{2 + \alpha i}{\alpha + 2i}$, με $\alpha \in IR$.

α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0 , 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

β. Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο $z = \dfrac{2 + \alpha i}{\alpha + 2i}$ για $\alpha = 0$ και $\alpha = 2$ αντίστοιχα.

i. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2.

ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $(z_1)^{2\nu} = (-z_2)^{\nu}$ για κάθε φυσικό αριθμό ν.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x - 2ημ^2θ$, όπου $θ \in IR$ μια σταθερά με $θ \neq κπ + π/2$, $κ \in Z$.

α. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

β. Ν' αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f, να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $Γ(x_3, f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y = -2x - 2ημ^2θ$.

δ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $y = -2x - 2ημ^2θ$.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα [0 , 1] για την οποία ισχύει $f(0) > 0$. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα [0 , 1] για την οποία ισχύει $g(x) > 0$, για κάθε $x \in [0 , 1]$.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\cdot g(t)\,dt,\ x \in [0 , 1] \quad \text{και}$$

$$G(x) = \int_0^x g(t)\,dt,\ x \in [0 , 1]$$

α. Να δειχθεί ότι $F(x) > 0$, για κάθε x στο διάστημα (0 , 1].

β. Να αποδειχθεί ότι $f(x) \cdot G(x) > F(x)$, για κάθε x στο διάστημα (0 , 1].

γ. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $\dfrac{F(x)}{G(x)} \leq \dfrac{F(1)}{G(1)}$ για κάθε x στο διάστημα (0 , 1].

δ. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\left(\int_0^x f(t)\cdot g(t)\,dt\right)\left(\int_0^{x^2} ημt^2\,dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)\,dt\right)\cdot x^5}$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ 2007

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. → 3ο Θέμα Θεωρίας, σελίδα 7

Α.2. → Θεωρία, σελίδα 20

Α.3. → Θεωρία, σελίδα 23

Β.α. ΛΑΘΟΣ, **β.** ΛΑΘΟΣ, **γ.** ΛΑΘΟΣ, **δ.** ΣΩΣΤΟ, **ε.** ΣΩΣΤΟ.

ΘΕΜΑ 2ο

α. $|z| = \left|\dfrac{2 + αi}{α + 2i}\right| = \dfrac{|2 + αi|}{|α + 2i|} = \dfrac{\sqrt{2^2 + α^2}}{\sqrt{α^2 + 2^2}} = 1$

β. $z_1 = \dfrac{2}{2i} = \dfrac{-2i^2}{2i} = -i$ και $z_2 = \dfrac{2 + 2i}{2 + 2i} = 1$

i) $|z_2 - z_1| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

ii) $(z_1)^{2ν} = (-i)^{2ν} = i^{2ν} = (i^2)^ν = (-1)^ν = (-z_2)^ν$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $f'(x) = 3x^2 - 3$ και

$f''(x) = 6x$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f΄(x)		+	○	-		-	○	+	
f΄΄(x)		-		-	○	+		+	
f (x)			τ.μ.		σ.κ.		τ.ελ.		

β. • $\Delta_1 = (-\infty , -1)$

Η f είναι γν. αύξουσα στο Δ_1

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta) = 2 - 2\eta\mu^2\theta = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$

άρα $f(\Delta_1) = (-\infty , 2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$

$0 \in f(\Delta_1)$, άρα η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ_1.

• $\Delta_2 = [-1 , 1]$

Η f είναι γν. φθίνουσα στο Δ_2

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) - 2\eta\mu^2\theta = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$

$f(1) = 1^3 - 3 - 2\eta\mu^2\theta) = -2 - 2\eta\mu^2\theta < 0$

άρα $f(\Delta_2) = [-2 - 2\eta\mu^2\theta , 2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$

$0 \in f(\Delta_2)$, άρα η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ_2.

• $\Delta_3 = (1 , +\infty)$

Η f είναι γν. αύξουσα στο Δ_3

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta) = - 2 - 2\eta\mu^2\theta < 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta) = +\infty$

άρα $f(\Delta_3) = (-2 - 2\eta\mu^2\theta , +\infty)$

$0 \in f(\Delta_3)$, άρα η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ_3.

Επομένως η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες στο IR.

γ. Τα ζητούμενα σημεία είναι :

$A(-1 , 2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$, $B(1 , - 2 - 2\eta\mu^2\theta)$ και $\Gamma(0 , -2\eta\mu^2\theta)$

Οι συντεταγμένες των A , B , Γ ικανοποιούν την εξίσωση της ευθείας (ε) :

$y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$, άρα τα A , B , Γ βρίσκονται στην (ε).

δ. Θεωρούμε $g(x) = f(x) - (-2x - 2\eta\mu^2\theta) = x^3 - x$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
g (x)		-	○	+	○	-	○	+	

$$E = \int_{-1}^{0} g(x)\,dx - \int_{0}^{1} g(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx - \int_{0}^{1} (x^3 - x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \ldots = \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Για $x \in [0 , 1]$ είναι :

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq f(0) > 0 \\ g(x) > 0 \end{array}\right\} \text{ άρα } f(x)\cdot g(x) > 0$$

Για $x \in (0 , 1]$ είναι $f(x)\cdot g(x) > 0$ άρα: $\int_0^x f(x)\cdot g(x)\,dx > 0 \Leftrightarrow F(x) > 0$

β. $0 \leq t \leq x \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(t) \leq f(x) \overset{g(t)>0}{\Leftrightarrow} f(t)\cdot g(t) \leq f(x)\cdot g(t) \Leftrightarrow f(x)\cdot g(t) - f(t)\cdot g(t) \geq 0$

Θεωρώ $\varphi(t) = f(x)\cdot g(t) - f(t)\cdot g(t),\ t \in [0 , x]$

Η φ είναι συνεχής στο $[0 , x]$ ως πράξεις συνεχών

Είναι $\varphi(t) \geq 0$ και για $x > 0$, η φ δεν είναι παντού μηδέν στο $[0 , x]$

άρα $\int_0^x \varphi(t)\,dt > 0 \Leftrightarrow \int_0^x [f(x)\cdot g(t) - f(t)\cdot g(t)]\,dt > 0 \Leftrightarrow$

$\int_0^x f(x)\cdot g(t)dt - \int_0^x f(t)\cdot g(t)dt > 0 \Leftrightarrow \int_0^x f(x)\cdot g(t)dt > \int_0^x f(t)\cdot g(t)dt \Leftrightarrow$

$f(x)\cdot \int_0^x g(t)dt > F(x) \Leftrightarrow f(x)\cdot G(x) > F(x)$

γ. Θεωρούμε συνάρτηση Η, με $H(x) = \dfrac{F(x)}{G(x)}$.

$$H'(x) = \frac{F'(x)\cdot G(x) - F(x)\cdot G'(x)}{[G(x)]^2} = \frac{f(x)\cdot g(x)\cdot G(x) - F(x)\cdot g(x)}{[G(x)]^2}$$

$$= g(x)\cdot \frac{f(x)\cdot G(x) - F(x)}{[G(x)]^2} > 0$$

διότι $g(x) > 0$ και $f(x)\cdot G(x) > F(x)$ άρα η Η είναι γν. αύξουσα στο $[0 , 1]$

$$x \leq 1 \overset{H\uparrow}{\Leftrightarrow} H(x) \leq H(1) \Leftrightarrow \frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}.$$

δ. $$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)\cdot g(t)\,dt\right)\left(\int_0^{x^2} \eta\mu t^2\,dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)\,dt\right)\cdot x^5} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\int_0^x f(t)\cdot g(t)\,dt}{\int_0^x g(t)\,dt}\cdot\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2\,dt}{x^5}\right)$$

- $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x f(t)\cdot g(t)\,dt}{\int_0^x g(t)\,dt} \underset{\text{L' Hospital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)\cdot g(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} f(x) \overset{f\ \text{συνεχής}}{=} f(0)$$

- $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2\,dt}{x^5} \underset{\text{L' Hospital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x^4\cdot 2x}{5x^4} = \frac{2}{5}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x^4}{x^4}\cdot\lim_{x\to 0^+} x = 0$$

Άρα $$L = \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x f(t)\cdot g(t)\,dt}{\int_0^x g(t)\,dt}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2\,dt}{x^5} = f(0)\cdot 0 = 0$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΙΟΥΛΙΟΥ 2007

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Α.2. Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Rolle του Διαφορικού Λογισμού;

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με **Σωστό** ή **Λάθος**.

α. Η εικόνα f (Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

β. Αν f, g, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [α , β], τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cdot g'(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g'(x)\,dx$.

γ. Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε $\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt\right)' = f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α , β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α , Β) όπου $A = \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B = \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$.

ε. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε ισχύει $f(x) = g(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu 3x}{x}, & x < 0 \\ x^2 + \alpha x + \beta\sigma\upsilon\nu x, & x \geq 0 \end{cases}$

α. Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 3$.

β. Αν $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$, να αποδειχθεί ότι α = β = 3.

γ. Αν α = β = 3, να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = e^x - e\cdot \ln x$, $x > 0$.

α. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι γν. αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

β. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $f(x) \geq e$, για κάθε $x > 0$.

γ. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\int_{x^2+1}^{x^2+2} f(t)\,dt = \int_{x^2+3}^{x^2+2} f(t)\,dt + \int_2^4 f(t)\,dt$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \dfrac{2 - \bar{z}_1}{2 + \bar{z}_1}$, όπου $\alpha, \beta\in IR$ με $\beta \neq 0$. Δίνεται επίσης ότι $z_2 - z_1 \in IR$.

α. Να αποδειχθεί ότι $z_2 - z_1 = 1$.

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο.

γ. Αν ο αριθμός z_1^2 είναι φανταστικός και αβ > 0, να υπολογισθεί ο z_1 και να αποδειχθεί ότι $(z_1 + 1 + i)^{20} - (\bar{z}_1 + 1 - i)^{20} = 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΙΟΥΛΙΟΥ 2007

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. 6ο Θέμα Θεωρίας, σελίδα 8

Α.2. → Θεωρία, σελίδα 24

Β. α. Λάθος, **β.** Λάθος, **γ.** Σωστό, **δ.** Σωστό, **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ 2ο

α. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\eta\mu 3x}{x} = 3 \cdot \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\eta\mu 3x}{3x} \underset{\substack{\text{αν } x \to 0^- \\ \text{τότε } u \to 0^-}}{\overset{3x = u}{=}} 3 \cdot \lim\limits_{u \to 0^-} \frac{\eta\mu u}{u} = 3$

β. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, άρα $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + \alpha x + \beta\sigma\upsilon\nu x) = \beta \end{array}\right\} \text{ άρα } \beta = 3$$

Για $x > 0$ είναι $f'(x) = 2x + \alpha - \beta\eta\mu x$.

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \Leftrightarrow 2\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta\eta\mu\frac{\pi}{2} = \pi \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

Επομένως **α = β = 3**.

γ. $\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} (x^2 + 3x + 3\sigma\upsilon\nu x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 3\eta\mu x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3} + \frac{3\pi^2}{2}$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. $f'(x) = (e^x - e \cdot \ln x)' = e^x - \frac{e}{x}$, $x > 0$

$f''(x) = \left(e^x - \frac{e}{x}\right)' = e^x + \frac{e}{x^2} > 0$, $x > 0$, άρα η f' είναι γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Για $x > 1 \overset{f' \uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$, άρα η **f είναι γν. αύξουσα στο $(1, +\infty)$**.

β. Για $0 < x < 1 \overset{f' \uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$, άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο $(0, 1)$.

x	0	1	$+\infty$
f (x)	↘		↗

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(1) = e$, άρα

$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow$ **$f(x) \geq e$, για κάθε $x > 0$**.

γ. $\int_{x^2+1}^{x^2+2} f(x)\,dx = \int_{x^2+3}^{x^2+2} f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx \Leftrightarrow$

$\int_{x^2+1}^{x^2+2} f(x)\,dx - \int_{x^2+3}^{x^2+2} f(x)\,dx - \int_2^4 f(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow$

$\int_{x^2+1}^{x^2+2} f(x)\,dx + \int_{x^2+2}^{x^2+3} f(x)\,dx - \int_2^4 f(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow$

$\int_{x^2+1}^{x^2+3} f(x)\,dx - \int_2^4 f(x)\,dx = 0$.

Προφανής λύση η $x = 1$ **(1)**.

Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = \int_{x^2+1}^{x^2+3} f(x)\,dx - \int_2^4 f(x)\,dx$, $x > 0$.

Είναι $g'(x) = \left[\int_{x^2+1}^{x^2+3} f(x)\,dx - \int_2^4 f(x)\,dx\right]'$

$= 2x \cdot f(x^2+3) - 2x \cdot f(x^2+1)$

$= 2x \cdot \left[f(x^2+3) - f(x^2+1)\right] > 0$

διότι • $x > 0$ και

• $1 \le 1 + x^2 < 3 + x^2 \overset{f \uparrow \text{ στο } (1,+\infty)}{\Leftrightarrow}$

$f(1+x^2) < f(3+x^2) \Leftrightarrow$

$f(x^2+3) - f(x^2+1) > 0$

Άρα η g είναι γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και

η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια το πολύ ρίζα **(2)**.

Από (1) και (2) προκύπτει ότι η $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα τη $\mathbf{x = 1}$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Είναι $z = \alpha + \beta i$ και $z_2 - z_1 = \gamma \in IR \Leftrightarrow z_2 = \gamma + \alpha + \beta i$.

$z_2 = \dfrac{2 - \bar{z}_1}{2 + \bar{z}_1} \Leftrightarrow \alpha + \gamma + \beta i = \dfrac{2 - \alpha + \beta i}{2 + \alpha - \beta i} \Leftrightarrow$

$(\alpha + \gamma + \beta i)(2 + \alpha - \beta i) = 2 - \alpha + \beta i \Leftrightarrow$

$2\alpha + \alpha^2 - \alpha\beta i + 2\gamma + \alpha\gamma - \beta\gamma i + 2\beta i + \alpha\beta i + \beta^2 - 2 + \alpha - \beta i = 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha^2 + 3\alpha + \beta^2 + 2\gamma + \alpha\gamma - 2) + (\beta - \beta\gamma)i = 0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \alpha^2 + 3\alpha + \beta^2 + 2\gamma + \alpha\gamma - 2 = 0 \quad \textbf{(1)} \\ \beta - \beta\gamma = 0 \Leftrightarrow \beta\gamma = \beta \overset{\beta \neq 0}{\Leftrightarrow} \gamma = 1. \end{cases}$

Άρα $\mathbf{z_2 - z_1 = 1}$.

β. (1) $\overset{\gamma = 1}{\Rightarrow} \alpha^2 + 3\alpha + \beta^2 + 2 + \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha = 0$

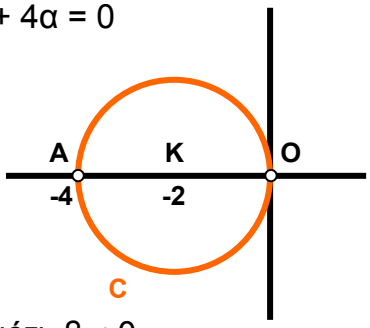
$C: x^2 + y^2 + 4x = 0$

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 16 > 0$, άρα ο C είναι κύκλος

με κέντρο $K(-2, 0)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

Είναι $z_1 = \alpha + \beta i$ και $\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha = 0$,

άρα η εικόνα του z_1 κινείται στον κύκλο C.



Τα σημεία $A(-4, 0)$ και $O(0, 0)$ εξαιρούνται διότι $\beta \neq 0$.

Άρα ο ζητούμενος γ.τ. είναι

ο κύκλος C χωρίς τα σημεία A και O.

γ. $z_1^2 = (\alpha + \beta i)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i$

$z_1^2 \in I \Leftrightarrow Re(z_1^2) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2$
και επειδή $\alpha\beta > 0$, θα είναι $\alpha = \beta$ **(2)**.

Είναι $\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 4\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\alpha(\alpha + 2) = 0$
και επειδή $\alpha\beta > 0$, θα είναι $\alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2$.

Από (2) έχουμε $\alpha = \beta = -2$, άρα $\mathbf{z_1 = -2 - 2i}$.

$$(z_1 + 1 + i)^{20} = (-2 - 2i + 1 + i)^{20} = (-1 - i)^{20} = (1 + i)^{20}$$
$$= \left[(1 + i)^2\right]^{10} = (2i)^{10}$$
$$(\bar{z}_1 + 1 - i)^{20} = (-2 + 2i + 1 - i)^{20} = (-1 + i)^{20} = (1 - i)^{20}$$
$$= \left[(1 - i)^2\right]^{10} = (-2i)^{10} = (2i)^{10}$$

Άρα $(z_1 + 1 + i)^{20} - (\bar{z}_1 + 1 - i)^{20} = (2i)^{10} - (2i)^{10} = 0$.

ΜΑΪΟΣ 2008

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in IR^*$ είναι παραγωγίσιμη στο IR^* και ισχύει $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

Α.2. Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με **Σωστό** ή **Λάθος**.*

α. Αν μια συνάρτηση $f : A \to IR$ είναι 1−1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y$, $y \in f(A)$.

β. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το D_f.

γ. Όταν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$, με $\alpha, \beta, \gamma \in IR$ και $\alpha \neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο C.

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παρ/μη στο IR και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x)>0$, για κάθε $x \in IR$.

ε. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx$.

ΘΕΜΑ 2ο

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν $\left|(i + 2\sqrt{2})z\right| = 6$ και $|w - (1 - i)| = |w - (3 - 3i)|$, τότε να βρείτε:

α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.

β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w.

γ. την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

δ. την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \cdot \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$, για όλες τις πραγματικές τιμές του α.

δ. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x + 1) > f(x + 1) - f(x)$, για κάθε $x>0$.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο IR για την οποία ισχύει

$$f(x) = (10x^3 + 3x)\int_0^2 f(t)\,dt - 45.$$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 20x^3 + 6x - 45$.

β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο IR. Να αποδείξετε ότι $g''(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{g'(x) - g'(x - h)}{h}$.

γ. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει ότι $\lim\limits_{h \to 0} \frac{g(x + h) - 2 \cdot g(x) + g(x - h)}{h^2} = f(x) + 45$ και $g(0) = g'(0) = 1$, τότε

i. να αποδείξετε ότι $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$,

ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1−1.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ 2008

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. 18ο θέμα θεωρίας σελίδα 14
Α.2. Θεωρία σελίδα 21
Β. α. ΣΩΣΤΟ, **β.** ΣΩΣΤΟ, **γ.** ΛΑΘΟΣ, **δ.** ΛΑΘΟΣ, **ε.** ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ 2ο

α. $\left|(i + 2\sqrt{2})z\right| = 6 \Leftrightarrow \left|i + 2\sqrt{2}\right| \cdot |z| = 6 \Leftrightarrow$

$\sqrt{1^2 + (2\sqrt{2})^2} \cdot |z| = 6 \Leftrightarrow 3 \cdot |z| = 6 \Leftrightarrow |z| = 2$

Άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

ο κύκλος με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

β. Ο γ.τ. των εικόνων του w είναι **η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος AB με $A(1, -1)$ και $B(3, -3)$.**

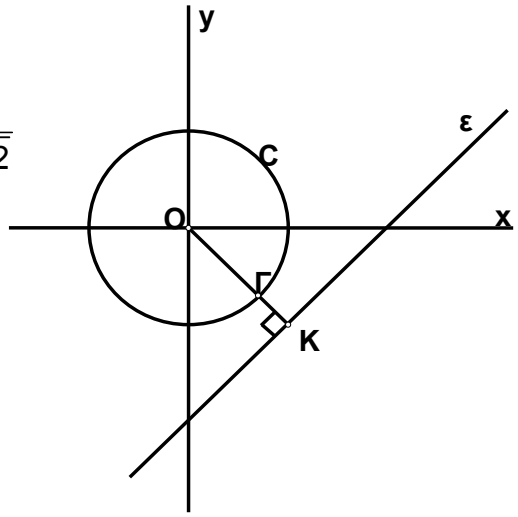
$|w - (1 - i)| = |w - (3 - 3i)| \overset{w = x + yi}{\Leftrightarrow} |x + yi - 1 + i| = |x + yi - 3 + 3i| \Leftrightarrow$

$\sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 3)^2} \Leftrightarrow$

$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = (x - 3)^2 + (y + 3)^2 \Leftrightarrow$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 \Leftrightarrow$

$4x - 4y - 16 = 0 \Leftrightarrow$ **$x - y - 4 = 0$ (ε)**



γ. $|w|_{min} = (OK) = d(O, \varepsilon) = \dfrac{|0 - 0 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}}$

άρα $|w|_{min} = 2\sqrt{2}$

δ. Το $|z - w|$ είναι η απόσταση των εικόνων των z και w

$|z - w|_{min} = (ΓK) = (OK) - (OΓ)$

$= (OK) - \rho = 2\sqrt{2} - 2$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x\ln x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\text{L' Hospital}}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} (-x) = 0 = f(0),$

άρα η f είναι συνεχής στο 0.

β. Για $x > 0$ είναι $f'(x) = (x\ln x)' = \ln x + 1$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f΄(x)		-	0	+	
f (x)		↘		↗	

• Στο $\Delta_1 = [0 , 1/e)$ η f είναι συνεχής και γν. φθίνουσα.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ \lim\limits_{x\to\frac{1}{e}^-} f(x) \overset{f\ \text{συνεχής}}{=} f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\ln\frac{1}{e} = -\frac{1}{e} \end{array}\right\} \text{άρα } f(\Delta_1) = \left(-\frac{1}{e}, 0\right].$$

• Στο $\Delta_2 = [1/e , +\infty)$ η f είναι συνεχής και γν. αύξουσα.

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x) = +\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x) = +\infty$

άρα $f(\Delta_2) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

Επομένως $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$

γ. $x = e^{\frac{\alpha}{x}} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x = \ln e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow$

$x\ln x = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις :

• Αν $\alpha < -\frac{1}{e}$, τότε $\alpha \notin f(A)$, άρα η εξίσωση δεν έχει ρίζες.

• Αν $\alpha = -\frac{1}{e}$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \notin f(\Delta_1) \\ \alpha \in f(\Delta_2),\ f \uparrow \text{ στο } \Delta_2 \end{array}\right\} \text{ άρα η εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα.}$$

• Αν $-\frac{1}{e} < \alpha < 0$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \in f(\Delta_1),\ f \downarrow \text{ στο } \Delta_1 \\ \alpha \in f(\Delta_2),\ f \uparrow \text{ στο } \Delta_2 \end{array}\right\} \text{ άρα η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες}$$

• Αν $\alpha = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \in f(\Delta_1),\ f \downarrow \text{ στο } \Delta_1 \\ \alpha \in f(\Delta_2),\ f \uparrow \text{ στο } \Delta_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{και επειδή η ρίζα στο } \Delta_1 \text{ είναι το } 0, \\ \text{άρα η εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα}\end{array}$$

• Αν $\alpha > 0$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \notin f(\Delta_1) \\ \alpha \in f(\Delta_2),\ f \uparrow \text{ στο } \Delta_2 \end{array}\right\} \text{ άρα η εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα.}$$

δ. $f'(x) = \ell n x + 1,\ x > 0.$

$f''(x) = (\ell n x + 1)' = \dfrac{1}{x} > 0$, άρα η f' είναι γν. αύξουσα στο $(0\ ,\ +\infty)$

Από Θ.Μ.Τ. για την f στο διάστημα $[x\ ,\ x+1]$, $x > 0$

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x\ ,\ x+1)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x + 1 - x} = f(x+1) - f(x)$$

Είναι $x < \xi < x + 1$ και f' είναι γνησίως αύξουσα,

άρα $f'(\xi) < f'(x+1) \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Έστω ότι $\int_0^2 f(x)\,dx = \alpha \in IR.$

Άρα $f(x) = \alpha(10x^3 + 3x) - 45 = 10\alpha x^3 + 3\alpha x - 45.$

Είναι $\alpha = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (10\alpha x^3 + 3\alpha x - 45)\,dx$

$$= \left[\frac{10\alpha x^4}{4} + \frac{3\alpha x^2}{2} - 45x\right]_0^2 = 40\alpha + 6\alpha - 90 = 46\alpha - 90$$

$\alpha = 46\alpha - 90 \Leftrightarrow \alpha = 2$, άρα $f(x) = 20x^3 + 6x - 45.$

β. $$g''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h) - g'(x)}{h} \underset{\substack{\text{όταν } h\to 0,\\ \text{τότε } t\to 0}}{\overset{h=-t}{=}} \lim_{t\to 0}\frac{g'(x-t) - g'(x)}{-t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{g'(x) - g'(x-t)}{t} = \lim_{h\to 0}\frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$$

γ. i. $$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} \underset{\text{L' Hospital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{2h}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h) - g'(x) + g'(x) - g'(x-h)}{h}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h) - g'(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[g''(x) + g''(x)\right] = g''(x)$$

$f(x) + 45 = 20x^3 + 6x$

- $g''(x) = 20x^3 + 6x \Leftrightarrow g''(x) = (5x^4 + 3x^2)'$,
  άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + c_1$
  και για $x = 0$, $g'(0) = c_1 = 1$, άρα $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$
- $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 \Leftrightarrow g'(x) = (x^5 + x^3 + x + c_2)'$,
  άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $g(x) = x^5 + x^3 + x + c_2$
  και για $x = 0$, $g(0) = c_2 = 1$, άρα $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$

ii. $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$, για κάθε $x \in IR$.

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο IR, άρα η g είναι "1 - 1".

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΙΟΥΛΙΟΥ 2008

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha , \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha , \beta]$, τότε να αποδείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

Β. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος****.*

α. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1 - 1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

β. Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

γ. Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

δ. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί, τότε : $\alpha + \beta i = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$.

ε. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha , x_0) \cup (x_0 , \beta)$ και ℓ ένας πραγματικός αριθμός.
Τότε ισχύει η ισοδυναμία : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - \ell) = 0$.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 + \beta z + \gamma = 0$, όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί.

α. Να αποδείξετε ότι $\beta = -1$ και $\gamma = 1$.

β. Να αποδείξετε ότι $z_1^3 = -1$.

γ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w, για τον οποίο ισχύει $|w| = |z_1 - \bar{z}_1|$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\ln x$, $x > 0$.

α. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x) \geq 1$, για κάθε $x > 0$.

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

γ. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{f(x)}, & x > 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$

i. Να βρείτε την τιμή του k έτσι ώστε η g να είναι συνεχής.

ii. Αν $k = -\dfrac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0 , e)$.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0 , +\infty)$ για την οποία ισχύει $f(x) > 0$, για κάθε $x \geq 0$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt,\ x \in [0 , +\infty)$ και $h(x) = \dfrac{F(x)}{\int_0^x t \cdot f(t)\,dt},\ x \in (0 , +\infty)$.

α. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 e^{t-1}[f(t) + F(t)]\,dt = F(1)$.

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

γ. Αν $h(1) = 2$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(t)\,dt < 2\int_0^2 t \cdot f(t)\,dt$.

ii. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(t)\,dt = \dfrac{1}{2}F(1)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΙΟΥΛΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1.

Α.2.

Β. α. Σωστό, **β.** Λάθος, **γ.** Σωστό, **δ.** Λάθος, **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ 2ο

α. ***1ος τρόπος***

Αν $z_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ είναι η μια ρίζα, τότε η άλλη ρίζα είναι η $z_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$.

Τύποι Vieta

$$\left.\begin{array}{l} S = z_1 + z_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2} = 1 \\ S = \dfrac{-\beta}{\alpha} = \dfrac{-\beta}{1} = -\beta \end{array}\right\} \Rightarrow -\beta = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta = -1}$$

$$\left.\begin{array}{l} P = z_1 \cdot z_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1 + 3}{4} = 1 \\ P = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{\gamma}{1} = \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\gamma = 1}$$

2ος τρόπος

Αν $z_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ είναι η ρίζα της εξίσωσης $z^2 + \beta z + \gamma = 0$, τότε

$$\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \beta \cdot \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} + \gamma = 0 \Leftrightarrow \frac{1 + 2\sqrt{3}i - 3}{4} + \beta \cdot \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} + \gamma = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{\beta + \beta\sqrt{3}i}{2} + \gamma = 0 \Leftrightarrow -1 + \sqrt{3}i + \beta + \beta\sqrt{3}i + 2\gamma = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\beta + 2\gamma - 1) + (\beta\sqrt{3} + \sqrt{3})i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0 \\ \beta + 2\gamma - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\beta = -1} \\ \boldsymbol{\gamma = 1} \end{cases}$$

β. Το z_1 είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 - z + 1 = 0$, άρα $z_1^2 - z_1 + 1 = 0$

1ος τρόπος

$(z_1 + 1)(z_1^2 - z_1 + 1) = 0 \Leftrightarrow z_1^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{z_1^3 = -1}$

2ος τρόπος

$z_1^2 - z_1 + 1 = 0 \Leftrightarrow z_1^2 = z_1 - 1$ **(1)**

(1) $\Rightarrow z_1^3 = z_1^2 - z_1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} z_1^3 = z_1 - 1 - z_1 \Leftrightarrow \mathbf{z_1^3 = -1}$

3ος τρόπος

$$z_1^2 - z_1 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_1 \cdot (z_1 - 1) = -1 \\ z_1^2 = z_1 - 1 \end{cases} \Rightarrow z_1 \cdot z_1^2 = -1 \Leftrightarrow \mathbf{z_1^3 = -1}$$

4ος τρόπος

$$z_1^3 = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{(1 + i\sqrt{3})^3}{8} = \frac{1 + 3\sqrt{3}i + 3(\sqrt{3}i)^2 + (\sqrt{3}i)^3}{8}$$

$$= \frac{1 + 3\sqrt{3}i - 9 - 3\sqrt{3}i}{8} = \frac{-8}{8} = -1$$

γ. $|w| = |z_1 - \bar{z}_1| \Leftrightarrow |w| = |2\mathrm{Im}(z_1) \cdot i| \Leftrightarrow |w| = \left|2\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i\right| \Leftrightarrow$

$|w| = \sqrt{3}$, άρα ο γ.τ. των εικόνων του w είναι

ο κύκλος με κέντρο Ο (0 , 0) και ακτίνα $\rho = \sqrt{3}$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. $f'(x) = (x^2 - 2\ln x)' = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x}$, $x > 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 2}{x} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 1$

x	0	1	$+\infty$
f´(x)	-	○	+
f (x)	↘		↗

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το f (1) = 1, άρα

$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow$ **$f(x) \geq 1$, για κάθε $x > 0$.**

β. • $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 - 2\ln x) = +\infty$

άρα έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία **x = 0** (**y´y**).

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - 2\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$, διότι

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{L'Hospital}}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} x = +\infty.$$

άρα δεν έχει οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες.

γ.i. $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{f(x)} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{\text{L'Hospital}}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{f'(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{2x-\frac{2}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{2x^2-2} = -\dfrac{1}{2}$

$g(0) = k$

Για να είναι η g συνεχής στο $x_0 = 0$ πρέπει $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = g(0) \Leftrightarrow$ $\mathbf{k = -\dfrac{1}{2}}$.

ii. • η g είναι συνεχής στο $[0, e]$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ g(0) = -\dfrac{1}{2} < 0 \\ g(e) = \dfrac{\ln e}{f(e)} = \dfrac{1}{e^2-2} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(0)\cdot g(e) < 0$$

Από Θ. Bolzano **υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της $g(x) = 0$ στο $(0, e)$**.

ΘΕΜΑ 4ο

α. $\int_0^1 e^{t-1}\cdot[f(t) + F(t)]\,dt = \int_0^1 e^{t-1}\cdot[F'(t) + F(t)]\,dt$

$$= \int_0^1 [e^{t-1}\cdot F'(t) + e^{t-1}\cdot F(t)]\,dt$$

$$= \int_0^1 [e^{t-1}\cdot F(t)]'\,dt$$

$$= \left[e^{t-1}\cdot F(t)\right]_0^1 = e^0\cdot F(1) - e^{-1}\cdot F(0)$$

$$= 1\cdot F(1) - e^{-1}\cdot 0 = F(1)$$

$$\boxed{F'(x) = \left[\int_0^x f(x)\,dx\right]' = f(x)}$$

β. Για $x > 0$ είναι :

$$h'(x) = \left(\frac{F(x)}{\int_0^x t\cdot f(t)dt}\right)' = \frac{F'(x)\cdot\int_0^x t\cdot f(t)dt - F(x)\cdot\left[\int_0^x t\cdot f(t)dt\right]'}{\left[\int_0^x t\cdot f(t)dt\right]^2}$$

$$= \frac{f(x)\cdot\int_0^x t\cdot f(t)dt - F(x)\cdot x\cdot f(x)}{\left[\int_0^x t\cdot f(t)dt\right]^2} = \frac{f(x)\cdot\left[\int_0^x t\cdot f(t)dt - x\cdot F(x)\right]}{\left[\int_0^x t\cdot f(t)dt\right]^2} < 0, \text{ διότι}$$

- $f(x) > 0$
- $\left[\int_0^x t\cdot f(t)dt\right]^2 > 0$
- Θεωρούμε τη συνάρτηση φ, με $\varphi(x) = \int_0^x t\cdot f(t)dt - x\cdot F(x),\ x \ge 0$

Είναι $\varphi'(x) = \left[\int_0^x t\cdot f(t)dt - x\cdot F(x)\right]' = x\cdot f(x) - F(x) - x\cdot F'(x)$

$= x\cdot f(x) - F(x) - x\cdot f(x) = -F(x) < 0$

διότι $f(x) > 0$ και $F(x) = \int_0^x f(t)dt > 0$, για $x > 0$

Επομένως η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$

Για $x > 0 \overset{\varphi\downarrow}{\Leftrightarrow} \varphi(x) < \varphi(0) \Leftrightarrow \int_0^x t\cdot f(t)dt - x\cdot F(x) < 0$

γ. $2 > 1 \overset{h\downarrow}{\Leftrightarrow} h(2) < h(1) \Leftrightarrow \dfrac{F(2)}{\int_0^2 t\cdot f(t)dt} < 2 \Leftrightarrow \dfrac{\int_0^2 f(t)dt}{\int_0^2 t\cdot f(t)dt} < 2$

και επειδή $\int_0^2 t\cdot f(t)dt > 0$, αφού $f(x) > 0$ και $2 > 0$

$$\int_0^2 t\cdot f(t)dt \cdot \frac{\int_0^2 f(t)dt}{\int_0^2 t\cdot f(t)dt} < 2\cdot\int_0^2 t\cdot f(t)dt \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 f(t)dt < 2\int_0^2 t\cdot f(t)dt$$

δ. $h(1) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{F(1)}{\int_0^1 t\cdot f(t)dt} = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 t\cdot f(t)dt = \dfrac{F(1)}{2}$ **(1)**

Είναι $\int_0^1 F(t)dt = \int_0^1 (t)'\cdot F(t)dt = \left[t\cdot F(t)\right]_0^1 - \int_0^1 t\cdot F'(t)dt$

$$= F(1) - \int_0^1 t\cdot f(t)dt \overset{(1)}{=} F(1) - \frac{F(1)}{2} = \frac{F(1)}{2}$$