Κεφάλαιο 4°

Θεωρία αριθμών

Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο της θεωρίας αριθμών θα πρέπει να είναι σε θέση:

Να γνωρίζει:

- την αποδεικτική μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής για την οποία πρέπει να γίνει κατανοητό ότι η αλήθεια ενός ισχυρισμού $P(\nu)$ για $\nu = 1$ και η μετάβαση από την αλήθεια $P(\nu)$ στην αλήθεια του $P(\nu+1)$ διασφαλίζουν την αλήθεια του ισχυρισμού για κάθε θετικό ακέραιο ν.
- τη γνωστή ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης μόνο στην περίπτωση των θετικών ακεραίων.

Με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται η άσκηση των μαθητών στην αποδεικτική διαδικασία και η κατανόηση της έννοιας του αλγορίθμου.

Με την επίλυση των ασκήσεων και των προβλημάτων, αυτού ιδιαίτερα του κεφαλαίου, θα δοθεί η ευκαιρία εξάσκησης των μαθητών:

- Στη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.
- Στη ευθεία απόδειξη.
- Στη μέθοδο της "εις άτοπον απαγωγής".

ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ : Τύποι - Βασικές έννοιες

Μαθηματική επαγωγή

Θεώρημα

Έστω $P(\nu)$ ένας ισχυρισμός που αναφέρεται στους θετικούς ακέραιους. Αν

α. ο ισχυρισμός είναι αληθής για τον ακέραιο 1 δηλαδή ο $P(1)$ είναι αληθής

και

β. η αλήθεια του $P(\nu)$ συνεπάγεται την αλήθεια του $P(\nu+1)$ για κάθε ν.

Τότε ο ισχυρισμός $P(\nu)$ αληθεύει για όλους τους θετικούς ακέραιους ν.

Ευκλείδια διαίρεση

Θεώρημα

Αποδεικνύεται ότι για οποιουσδήποτε ακέραιους α και β, $\beta \neq 0$, ισχύει το παρακάτω θεώρημα και διατυπώνεται ως εξής :

Αν α και β ακέραιοι με $\beta \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι κ και υ τέτοιοι ώστε:

$$\alpha = \kappa\beta + \upsilon, \quad 0 \leq \upsilon < |\beta|$$

- Η διαδικασία εύρεσης των κ, υ λέγεται **ευκλείδεια ή αλγοριθμική διαίρεση του α με τον β** και συμβολίζουμε α : β.
- Η ισότητα α = κβ + υ με $0 \leq \upsilon < |\beta|$, λέγεται **ταυτότητα της αλγοριθμικής διαίρεσης του α με τον β.**
- Ο κ λέγεται **πηλίκο** και ο υ **υπόλοιπο** της διαίρεσης αυτής, ενω ο α **διαιρετέος** και ο β **διαιρέτης**.
- Η διαίρεση λέγεται **τέλεια** αν το υπόλοιπο είναι ίσο με 0.

Βασικές προτάσεις

- Το άθροισμα ή η διαφορά δύο άρτιων είναι άρτιος.
- Το άθροισμα ή η διαφορά δύο περιττών είναι άρτιος.
- Αν η διαφορά δύο ακέραιων είναι άρτιος τότε και το άθροισμα είναι άρτιος και αντίστοιχα, αν η διαφορά δύο ακέραιων είναι περιττός τότε και το άθροισμα είναι περιττός.
- Το άθροισμα ή η διαφορά ενός άρτιου και ενός περιττού είναι περιττός.
- Το γινόμενο δύο άρτιων είναι άρτιος.
- Το γινόμενο δύο περιττών είναι περιττός.

- Το γινόμενο ενός άρτιου και ενός περιττού είναι άρτιος.
- Το γινόμενο δύο διαδοχικών ακέραιων είναι άρτιος.
- Αν α άρτιος τότε α^{ν}, $\nu \in N^*$ είναι άρτιος.
- Αν α περιττός τότε α^{ν}, $\nu \in N^*$ είναι περιττός.
- Το άθροισμα πεπερασμένου πλήθους άρτιων είναι άρτιος.
- Το άθροισμα άρτιου πλήθους περιττών είναι άρτιος.
- Το άθροισμα περιττού πλήθους περιττών είναι περιττός.
- Το γινόμενο δύο ή περισσοτέρων ακέραιων είναι άρτιος, αν και μόνο αν, ένας τουλάχιστον παράγοντας είναι άρτιος.
- Το γινόμενο δύο ή περισσοτέρων ακεραίων είναι περιττός, αν και μόνο αν, όλοι οι παράγοντες είναι περιττοί.

Διαιρετότητα

Ορισμός

Έστω α,β δυο ακέραιοι με $\beta \neq 0$. Θα λέμε ότι **ο β διαιρεί τον α** και θα γράφουμε $\beta|\alpha$ όταν η διαίρεση του α με τον β είναι τέλεια. Δηλαδή όταν υπάρχει ακέραιος κ ώστε $\alpha = \kappa\beta$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ακόμη ότι:

- α διαιρείται με τον β
- α πολλαπλάσιο του β
- β είναι διαιρέτης του α
- β είναι παράγοντας του α

Αν β δεν διαιρεί τον α τότε γράφουμε $\beta \nmid \alpha$

Επισήμανση : Στο εξης όταν χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\beta|\alpha$ οι αριθμοί α, β είναι ακέραιοι και $\beta \neq 0$, αν αυτό δεν αναφέρεται.

Συνέπειες του ορισμού

- Αν $\beta|\alpha$ τότε $-\beta|\alpha$
- $\pm 1|\alpha$, $\alpha \in Z$, $\pm\alpha|\alpha, \alpha \in Z^*$
- $\beta|0$ για κάθε $\beta \in Z^*$
- $\beta|\alpha$ τότε $\kappa\beta|\kappa\alpha$, $\kappa \in Z^*$

Θεώρημα

Έστω α,β,γ ακέραιοι.Ισχύουν τα παρακάτω:

- Αν $\alpha|\beta$ και $\beta|\alpha$ τότε: $\alpha = \pm\beta$
- Αν $\alpha|\beta$ και $\beta|\gamma$ τότε: $\alpha|\gamma$
- Αν $\alpha|\beta$ τότε $\alpha|\lambda\beta$ για κάθε $\lambda \in Z$
- Αν $\alpha|\beta$ και $\alpha|\gamma$ τότε: $\alpha|(\beta + \gamma)$
- Αν $\alpha|\beta$ και $\beta \neq 0$ τότε: $|\alpha| \leq |\beta|$

Σαν συνέπεια του πιο πάνω θεωρήματος ισχύει:

Αν α/β και α/γ τότε α / (κβ + λγ) , για κάθε κ, $\lambda \in Z$
δηλ.ότι "αν ένας ακέραιος α διαιρεί δύο άλλους ακεραίους β και γ διαιρεί και ένα οποιοδήποτε γραμμικό συνδυασμό των β και γ. "

Πρόταση 1

Θεωρούμε την ευκλείδεια διαίρεση του α με τον β και έστω κ και υ το πηλίκο και το υπόλοιπο αντίστοιχα.
i. Αν ένας ακέραιος x διαιρεί και τον α και τον β τότε διαιρεί και τον υ.
ii. Αν ένας ακέραιος x διαιρεί και τον β και τον υ τότε διαιρεί και τον α.

Πρόταση 2

Έστω α, β, γ, x, y ακέραιοι. Αν γ|α και $\gamma \mid (x\alpha \pm y\beta)$ τότε $\gamma \mid y\beta$

Μαθαίνουμε τις αποδείξεις

Βήμα 1

ΘΕΩΡΙΑ 1 **Έστω α, β, γ ακέραιοι. Αποδείξτε τις ακόλουθες ιδιότητες:**

(i) Αν $\alpha|\beta$ **και** $\beta|\alpha$, **τότε** $\alpha=\beta$ **ή** $\alpha=-\beta$.

(ii) Αν $\alpha|\beta$ **και** $\beta|\gamma$, **τότε** $\alpha|\gamma$.

(iii) Αν $\alpha|\beta$, **τότε** $\alpha|\lambda\beta$ **για κάθε ακέραιο** λ.

(iv) Αν $\alpha|\beta$ **και** $\alpha|\gamma$, **τότε** $\alpha|(\beta+\gamma)$.

(v) Αν $\alpha|\beta$ **και** $\beta\neq 0$, **τότε** $|\alpha|\leq|\beta|$.

Απόδειξη

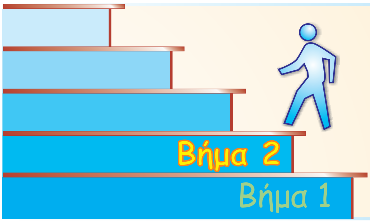
(i) Επειδή $\alpha|\beta$ και $\beta|\alpha$, υπάρχουν ακέραιοι κ,λ, τέτοιοι, ώστε $\beta=\kappa\alpha$ και $\alpha=\lambda\beta$, οπότε $\alpha=\kappa\lambda\alpha$ και επομένως, $\kappa\lambda=1$, που σημαίνει ότι $\kappa=\lambda=1$ ή $\kappa=\lambda=-1$, δηλαδή ότι $\alpha=\beta$ ή $\alpha=-\beta$.

(ii) Επειδή $\alpha|\beta$ και $\beta|\gamma$, υπάρχουν ακέραιοι κ, λ, τέτοιοι, ώστε $\beta=\kappa\alpha$ και $\gamma=\lambda\beta$, οπότε $\gamma=\lambda\kappa\cdot\alpha$ δηλαδή $\alpha|\gamma$.

(iii) Επειδή $\alpha|\beta$ υπάρχει ακέραιος κ, τέτοιος, ώστε $\beta=\kappa\alpha$, οπότε $\lambda\beta=\lambda\kappa\cdot\alpha$ δηλαδή $\alpha|\lambda\beta$.

(iv) Επειδή $\alpha|\beta$ και $\alpha|\gamma$, υπάρχουν ακέραιοι κ,λ, τέτοιοι, ώστε $\beta=\kappa\alpha$ και $\gamma=\lambda\alpha$, οπότε $\beta+\gamma=(\kappa+\lambda)\alpha$ δηλαδή $\alpha|(\beta+\gamma)$.

(v)Επειδή $\alpha|\beta$ και $\beta\neq 0$, υπάρχει ακέραιος $\kappa\neq 0$ με $\beta=\kappa\alpha$. Επομένως, $|\beta|=|\kappa|\cdot|\alpha|\geq|\alpha|$, αφού $|\kappa|\geq 1$.

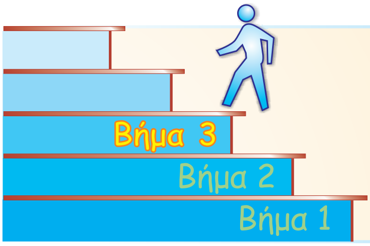


Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις "κλειδιά"

Α. Από το σχολικό βιβλίο

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.

§ 4.1	Α΄ Ομάδα:	3
	Β΄ Ομάδα:	1
§ 4.2	Α΄ Ομάδα:	1, 2
	Β΄ Ομάδα:	1, 3, 5
§ 4.3	Α΄ Ομάδα:	3
	Β΄ Ομάδα:	1, 2, 5, 6



Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. Να δείξετε ότι για κάθε ν θετικό ακέραιο ισχυεί: $1+3+5+...+(2\nu-1)=\nu^2$

Λύση:

Έστω $P(\nu)$ η ισότητα που θέλουμε να δείξουμε .

Η $P(\nu)$ αληθεύει για $\nu=1$ αφού $(2\cdot 1-1)=1^2$.

Θα δείξουμε ότι αν $P(\nu)$ είναι αληθής δηλαδή ισχύει $1+3+5+...+(2\nu-1)=\nu^2$ (1). θα είναι επίσης αληθής η $P(\nu+1)$. Δηλαδή με τη βοήθεια της (1) θα δείξουμε ότι $1+3+5+...+(2\nu-1)+(2\nu+1)=(\nu+1)^2$ με τη βοήθεια της (1) έχουμε διαδοχικά:

$$1+3+5+...+(2\nu-1)+(2\nu+1)=\nu^2+2\nu+1=(\nu+1)^2.$$

Άρα η πρόταση αληθεύει για κάθε θετικό ακέραιο.

2. Έστω $P(\nu)$ ο ισχυρισμός $2+4+...+2\nu=\nu(\nu+1)-1$

i. Να δείξετε ότι η αλήθεια του P(ν) συνεπάγεται την αλήθεια του $P(\nu+1)$.

ii. Αληθεύει τελικά ο ισχυρισμός $P(\nu)$ για κάθε θετικό ακέραιο;

Λύση

i. Επειδή ο $P(\nu)$ είναι αληθής, διαδοχικά έχουμε:

$$2+4+...+2\nu+2(\nu+1)=\nu(\nu+1)-1+2(\nu+1)=(\nu+1)(\nu+2)-1$$

άρα ο $P(\nu+1)$ είναι αληθής.

ii. Όχι, διότι θα έπρεπε να είναι αληθής ο ισυρισμός και για $\nu=1$ η ισότητα γράφεται $2=1\cdot 2-1 \Leftrightarrow 2=1$, που δεν ισχύει.

3. Να δείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ισχύει $10^\nu+3\cdot 4^{\nu+2}+5=9\cdot\mu$, όπου μ ακέραιος.

Λύση

Έστω P(ν) η ισότητα που θέλουμε να δείξουμε για $\nu=1$, επειδή:

$10^1+3\cdot 4^{1+2}+5=10+192+5=207=23\cdot 9$, άρα P(1) αληθής.

Θα δείξουμε ότι αν P(ν) αληθής δηλαδή αν $10^\nu+3\cdot 4^{\nu+2}+5=9\cdot\mu$ (1)

Θα είναι επίσης αληθής και η $P(\nu+1)$.

Δηλαδή θα δείξουμε ότι: $10^{\nu+1}+3\cdot 4^{(\nu+1)+2}+5=9\cdot\rho$ (ρ ακέραιος)

Από τη σχέση (1) έχουμε: $10^\nu=9\mu-3\cdot 4^{\nu+2}-5$ (2)

Άρα: $10^{\nu+1}+3\cdot 4^{(\nu+1)+2}+5=10^\nu\cdot 10+3\cdot 4^{\nu+2}\cdot 4+5=$

$=10\cdot\left(9\mu-3\cdot 4^{\nu+2}-5\right)+3\cdot 4^{\nu+2}\cdot 4+5=$

$=90\cdot\mu-30\cdot 4^{\nu+2}-50+3\cdot 4^{\nu+2}\cdot 4+5=$

$=90\mu-18\cdot 4^{\nu+2}-45=9\left(10\mu-2\cdot 4^{\nu+2}-5\right)$

$=9\cdot\rho$ όπου $\rho=10\mu-2\cdot 4^{\nu+2}-5$ είναι ακέραιος αριθμός.

4. Να δείξετε ότι το άθροισμα τεσσάρων διαδοχικών ακέραιων είναι άρτιος αλλά δεν διαιρείται ακριβώς με το 4.

Λύση:

Αν α, β, γ, δ διαδοχικοί ακέραιοι πρέπει $\beta=\alpha+1$, $\gamma=\alpha+2$ και $\delta=\alpha+3$

έστω $\lambda=\alpha+\beta+\gamma+\delta=\alpha+\alpha+1+\alpha+2+\alpha+3=4\alpha+6$, τότε $\lambda=2\cdot(2\alpha+3)$, άρα άρτιος, ενώ $\lambda=4\alpha+4+2=4(\alpha+1)+2$ δηλαδή αν διαιρεθεί με το 4 αφήνει υπόλοιπο 2.

5. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $9^{25}+25^9$ με το 8.

Λύση:

$9^{25}-1=(9-1)\cdot(9^{24}+9^{23}+\ldots+1)=8\cdot\mu$ όπου $\mu=9^{24}+9^{23}+\ldots+1$ ακέραιος

$25^9-1=(25-1)\cdot\left(25^8+25^7+\ldots+25+1\right)=3\cdot 8\cdot\nu$

όπου $\nu=25^8+25^7+\ldots+25+1$ ακέραιος άρα $9^{25}+25^9=8\mu+1+3\cdot 8\cdot\nu+1$

$=8(\mu+3\nu)+2$, δηλαδή το υπόλοιπο της διαίρεσης του $9^{25}+25^9$ με το 8 είναι το 2.

6. Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς ν για τους οποίους ο αριθμός $A=\dfrac{1+\nu\left(\nu^2+2\right)}{4}$ είναι ακέραιος.

Λύση:

Είναι $\nu = 4\kappa + \upsilon$, όπου $\upsilon = 0,1,2$ ή 3.

Αν $\upsilon = 0$ τότε $A=\dfrac{1+\nu(\nu^2+2)}{4} = \dfrac{1+4\kappa\cdot(16\kappa^2+2)}{4} = \kappa\cdot(16\kappa^2+2)+\dfrac{1}{4} \notin Z$

Αν $\upsilon=1$ τότε $\nu = 4\kappa+1$ τότε:

$$A=\frac{1+(4\kappa+1)\cdot(16\kappa^2+8\kappa+1+2)}{4} = \frac{1+(4\kappa+1)\cdot(4\rho+3)}{4}, \text{όπου } \rho = 4\kappa^2+2\kappa,\ \rho\in Z$$

$$\text{Άρα: } A = \frac{1+16\kappa\rho+12\kappa+4\rho+3}{4} = \frac{4(4\kappa\rho+3\kappa+\rho+1)}{4}, \text{ άρα } A = 4\kappa\rho+3\kappa+\rho+1 \in Z$$

Όμοια δείχνουμε ότι αν $\nu = 4\kappa+2$ ή $\nu = 4\kappa+3$ ο Α δεν είναι ακέραιος.

Άρα πρέπει $\nu = 4\kappa+1$, με $\kappa \in Z$.

7. Δείξτε ότι $64 \mid 3^{2\nu+2} - 8\nu - 9$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Λύση:

Θέτουμε P(ν) την ισότητα $3^{2\nu+2} - 8\nu - 9 = 9\cdot 9^{\nu} - 8\nu - 9 = \pi o\lambda 64$

• Για $\nu = 1$ η ισότητα P(1) είναι $9\cdot 9^1 - 8\cdot - 9 = 64 = \pi o\lambda 64$ αληθής.

• Έστω ότι η ισότητα P(ν) είναι αληθής δηλ. υποθέτουμε ότι ισχύει:

$9\cdot 9^{\nu} - 8\nu - 9 = \pi o\lambda 64 \Leftrightarrow 9\cdot 9^{\nu} - 8\nu - 9 = 64\kappa \Leftrightarrow 9\cdot 9^{\nu} = 8\nu + 9 + 64\kappa$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$

θα δείξουμε ότι η ισότητα P(ν+1) είναι επίσης αληθής δηλ. θα δείξουμε ότι ισχύει:

$$9\cdot 9^{\nu+1} - 8(\nu+1) - 9 = \pi o\lambda 64$$

πράγματι: $x = 9\cdot 9^{\nu+1} - 8(\nu+1) - 9$

$x = 9\cdot 9\cdot 9^{\nu} - 8\nu - 8 - 9$

$x = 9(8\nu + 9 + 64\kappa) - 8\nu - 17$

$x = 72\nu + 81 + 9\cdot 64\kappa - 8\nu - 17$

$x = 9\cdot 64\kappa + 64\nu + 64$

$x = 64(9\kappa + \nu + 1)$

$x = 64\zeta$ με $\zeta = 9\kappa + \nu + 1 \in \mathbb{Z}$ άρα $64 \mid x$.

8. Δείξτε ότι $11 \mid 3^{2\nu+2} + 2^{6\nu+1}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Λύση:

Θέτουμε $P(\nu)$ την ισότητα $3^{2\nu+2}+2^{6\nu+1}=9\cdot 9^{\nu}-2\cdot 64^{\nu}=\pi o\lambda 11$

• Για $\nu=1$ η ισότητα $P(1)$ είναι $81+128=209=\pi o\lambda 11$ αληθής.

• Έστω ότι η ισότητα $P(\nu)$ είναι αληθής δηλ. υποθέτουμε ότι ισχύει

$9\cdot 9^{\nu}+2\cdot 64^{\nu}=\pi o\lambda 11 \Leftrightarrow 9\cdot 9^{\nu}+2\cdot 64^{\nu}=11\kappa \Leftrightarrow\ 9\cdot 9^{\nu}=11\kappa-2\cdot 64^{\nu}$ με $\kappa\in\mathbb{Z}$

θα δείξουμε ότι και η ισότητα $P(\nu+1)$ είναι επίσης αληθής δηλ. θα δείξουμε ότι

ισχύει: $9\cdot 9^{\nu+1}+2\cdot 64^{\nu+1}=\pi o\lambda 11$

πράγματι:

$$x=9\cdot 9^{\nu+1}+2\cdot 64^{\nu+1}$$
$$x=9\cdot 9\cdot 9^{\nu}+2\cdot 64\cdot 64^{\nu}$$
$$x=9\left(11\kappa-2\cdot 64^{\nu}\right)+128\cdot 64^{\nu}$$
$$x=11\cdot 9\kappa-18\cdot 64^{\nu}+128\cdot 64^{\nu}$$
$$x=11\cdot 9\kappa-110\cdot 64^{\nu}$$
$$x=11\left(9\kappa-10\cdot 64^{\nu}\right)$$

$x=11\zeta$ με $\zeta=9\kappa-10\cdot 64^{\nu}\in\mathbb{Z}$ άρα $11|x$.

9.α. **Αν ακέραιος α διαιρείται με το 10 και αφήνει υπόλοιπο 7, βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του α με τους 2, 5, 20.**

β. **Το 525 διαιρείται με τον θετικό ακέραιο β και δίνει πηλίκο 19. Βρείτε το β και το υπόλοιπο της διαίρεσης.**

γ. **Αν** $\alpha,\beta,\gamma\in N$ **και ισχύει** $\alpha+4\beta+12\gamma=231$ **ενώ ακόμα ισχύουν** $\alpha<4$ **και** $\beta<3$, **βρείτε τα α, β, γ.**

δ. **Ο ακέραιος x διαιρείται με το 11 και αφήνει υπόλοιπο 3 ενώ όταν διαιρείται με το 8 αφήνει υπόλοιπο 2. Βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του x με το 88.**

Λύση:

α. Ισχύει $\alpha=10\kappa+7$ με $\kappa\in Z$ οπότε

• $\alpha=10\kappa+6+1=2(5\kappa+3)+1=2\rho+1$ με $\rho=5\kappa+3\in Z$ άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του α με το 2 είναι 1.

• $\alpha=10\kappa+5+2=5(2\kappa+1)+2=5f+2$ με $f=2\kappa+1\in Z$ άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του α με το 5 είναι 2.

• Ισχύει $\alpha=10\kappa+7$ με $\kappa\in Z$ άρα $\kappa=2\lambda$ ή $\kappa=2\lambda+1$ με $\lambda\in Z$ οπότε αν:

i. $\kappa = 2\lambda$ έχουμε $\alpha = 20\lambda + 7$.

ii. $\kappa = 2\lambda + 1$ έχουμε $\alpha = 10(2\lambda + 1) + 7 = 20\lambda + 17$ άρα το υπόλοιπο είναι ή 7 ή 17.

β. Ισχύει $525 = 19\beta + \upsilon$ με $0 \le \upsilon < \beta$ άρα θα ισχύει:

$$0 \le 525 - 19\beta < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} 525 - 19\beta < \beta \\ 525 - 19\beta \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta > \dfrac{525}{20} \\ \beta \le \dfrac{525}{19} \end{cases}$$

Άρα $\beta = 27$ οπότε $\upsilon = 525 - 19 \cdot 27 = 525 - 513 = 12$.

γ. Ισχύουν $\begin{matrix} 231 = 4(\beta + 3\gamma) + \alpha \\ \text{με } 0 \le \alpha < 4 \end{matrix}$ άρα το 4 διαιρεί το 231 και δίνει πηλίκο $\beta + 3\gamma$ και υπόλοιπο α όμως $\begin{array}{r|l} 231 & 4 \\ \hline 31 & 57 \\ 3 & \end{array}$ άρα $\alpha = 3$ και $\beta + 3\gamma = 57$ οπότε πάλι ισχύουν $\begin{matrix} 57 = 3\gamma + \beta \\ \text{με } 0 \le \beta < 3 \end{matrix}$

άρα το 3 διαιρεί το 57 και δίνει πηλίκο γ και υπόλοιπο β όμως $\begin{array}{r|l} 57 & 3 \\ \hline 0 & 19 \end{array}$ άρα $\beta = 0$ και $\gamma = 19$.

δ. Ισχύουν:

- $x = 11\kappa + 3$ (με $\kappa \in Z$) άρα $8x = 88\kappa + 24$ οπότε:
- $x = 8\lambda + 2$ (με $\lambda \in Z$) άρα $11x = 88\lambda + 22$

$x = 33x - 32x \Leftrightarrow x = 3 \cdot 11x - 4 \cdot 8x \Leftrightarrow x = 3(88\lambda + 22) - 4(88\kappa + 24) \Leftrightarrow$

$x = 3 \cdot 88\lambda + 66 - 4 \cdot 88\kappa - 96 \Leftrightarrow x = 3 \cdot 88\lambda + 66 - 4 \cdot 88\kappa - 96 \Leftrightarrow$

$x = 3 \cdot 88\lambda - 4 \cdot 88\kappa - 88 + 58 \Leftrightarrow x = 88(3\lambda - 88\kappa - 1) + 58 \Leftrightarrow x = 88f + 58$

με $f = 3\lambda - 88\kappa - 1 \in Z$ άρα το 88 διαιρεί τον x και αφήνει υπόλοιπο 58.

10. α. Δείξτε ότι για κάθε $\alpha \in Z$ ισχύει $3 \mid \alpha(\alpha^2 + 5)$ (ή αλλιώς δείξτε ότι για κάθε $\alpha \in Z$ το κλάσμα $\dfrac{\alpha(\alpha^2 + 5)}{3}$ είναι ακέραιος)

β. Βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in Z$ ισχύει $4 \mid 3\alpha + 5$ (ή αλλιώς βρείτε $\alpha \in Z$ ώστε το κλάσμα $\dfrac{3\alpha + 5}{4}$ να είναι ακέραιος)

γ. Βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in Z$ ισχύει $(\alpha+2)|(3\alpha+1)$ (ή αλλιώς βρείτε $\alpha \in Z$ ώστε το κλάσμα $\frac{3\alpha+1}{\alpha+2}$ να είναι ακέραιος)

δ. Βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in Z$ ισχύει $(\alpha+1)|(\alpha^3+2\alpha+5)$ (ή αλλιώς βρείτε $\alpha \in Z$ ώστε το κλάσμα $\frac{\alpha^3+2\alpha+5}{\alpha+1}$ να είναι ακέραιος)

Λύση:

α. $\alpha \in Z$ άρα $\alpha = 3\kappa$ ή $\alpha = 3\kappa+1$ ή $\alpha = 3\kappa+2$.

- Αν $\alpha = 3\kappa$ τότε $x = \alpha(\alpha^2+5) = 3\kappa(9\kappa^2+5) = 3f$ με $f = \kappa(9\kappa^2+5) \in Z$ άρα $3|x$.
- Αν $\alpha = 3\kappa+1$ τότε:

  $x = \alpha(\alpha^2+5) = (3\kappa+1)(9\kappa^2+6\kappa+1+5) = (3\kappa+1)(9\kappa^2+6\kappa+6) =$

  $3(3\kappa+1)(3\kappa^2+2\kappa+2) = 3\sigma$ με $\sigma = (3\kappa+1)(3\kappa^2+2\kappa+2)$ άρα $3|x$.
- Αν $\alpha = 3\kappa+2$ τότε:

  $x = \alpha(\alpha^2+5) = (3\kappa+2)(9\kappa^2+12\kappa+4+5) = (3\kappa+2)(9\kappa^2+12\kappa+9) =$

  $3(3\kappa+2)(3\kappa^2+4\kappa+3) = 3\varphi$ με $\varphi = (3\kappa+2)(3\kappa^2+4\kappa+3)$ άρα $3|x$.

  Δηλαδή $3|\alpha(\alpha^2+5)$ για κάθε $\alpha \in Z$.

β. $\alpha \in Z$ άρα $\alpha = 4\kappa+\upsilon$ με $\upsilon = 0,1,2,3$ τότε $x = 3\alpha+5 \Leftrightarrow x = 3(4\kappa+\upsilon)+5 \Leftrightarrow$
$x = 12\kappa+3\upsilon+5 \Leftrightarrow x = 12\kappa+4+3\upsilon+1 \Leftrightarrow x = 4(3\kappa+1)+3\upsilon+1 = 4\rho+3\upsilon+1$ με
$\rho = 3\kappa+1 \in Z$

- Αν $\upsilon = 0$ τότε $x = 4\rho+1$ άρα $4\nmid x$.
- Αν $\upsilon = 1$ τότε $x = 4\rho+4 \Leftrightarrow x = 4(\rho+1)$ άρα $4|x$.
- Αν $\upsilon = 2$ τότε $x = 4\rho+7 \Leftrightarrow x = 4\rho+8+2 \Leftrightarrow x = 4(\rho+2)+2$ άρα $4\nmid x$.
- Αν $x = 4\rho+10 \Leftrightarrow x = 4\rho+8+2 \Leftrightarrow x = 4(\rho+2)+2$ άρα $4\nmid x$.

Οπότε $4|3\alpha+5$ αν και μόνο αν $\alpha = 4\kappa+1$.

γ. Ισχύει $3\alpha+1 = 3\alpha+6-5 = 3(\alpha+2)-5$ άρα το κλάσμα $\frac{3\alpha+1}{\alpha+2} = 3-\frac{5}{\alpha+2}$ είναι ακέραιος αν και μόνο αν $\alpha+2|5$, άρα:

$\alpha+2=1$ ή $\alpha+2=-1$ ή $\alpha+2=5$ ή $\alpha+2=-5 \Leftrightarrow \alpha=-1$ ή $\alpha=-3$ ή $\alpha=3$ ή $\alpha=-7$

δ. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner βρίσκουμε ότι:

$$\alpha^3+2\alpha+5 = (\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+3)+2$$

Οπότε: $\frac{\alpha^3+2\alpha+5}{\alpha+1}=\alpha^2-\alpha+3+\frac{2}{\alpha+1}$, θα είναι ακέραιος αν και μόνο αν $\alpha+1|2$

οπότε: $\alpha+1=1$ ή $\alpha+1=-1$ ή $\alpha+1=2$ ή $\alpha+1=-2$

$\alpha=0$ ή $\alpha=-2$ ή $\alpha=1$ ή $\alpha=-3$.

11.α. Αν $7|3\alpha+2$ με $\alpha\in Z$ δείξτε ότι $\alpha=7\lambda+4$ (δηλ. το α διαιρείται με το 7 και αφήνει υπόλοιπο 4).

β. Αν $17|3\alpha+2\beta$ με $\alpha,\beta\in Z$ δείξτε ότι $17|5\alpha+9\beta$.

γ. Δίνονται οι ακέραιοι α, β. Αν οι 3α, β διαιρούμενοι με το 5 δίνουν το ίδιο υπόλοιπο δείξτε ότι $5|\alpha+3\beta$ και $25|3\alpha^2+8\alpha\beta-3\beta^2$.

δ. Αν $\alpha,\beta\in Z$ και $3|2\alpha+\beta$ και $3|5\alpha+3\beta$ δείξτε ότι $9|\alpha\beta$.

Λύση

α. Ισχύει $7|3\alpha+2$ άρα $3\alpha+2=7\kappa$ (με $\kappa\in Z$) $\Leftrightarrow$

$\alpha=\frac{7\kappa-2}{3}\Leftrightarrow\alpha=2\kappa+\frac{\kappa-2}{3}$ όμως $\alpha\in Z$ άρα $\frac{\kappa-2}{3}\in Z$ άρα $3|\kappa-2$ άρα $\kappa-2=3\lambda$ (με $\lambda\in Z$) οπότε $\kappa=3\lambda+2$ άρα:

$$\alpha=2(3\lambda+2)+\frac{3\lambda+2-2}{3}\Leftrightarrow\alpha=6\lambda+4+\lambda\Leftrightarrow\alpha=7\lambda+4$$

β. Ισχύει $17|3\alpha+2\beta$ άρα: $3\alpha+2\beta=17\kappa$ με $\kappa\in Z$

$$\beta=\frac{17\kappa-3\alpha}{2}\quad ή\quad \beta=8\kappa-\alpha+\frac{\kappa-\alpha}{2}$$

Όμως $\beta\in Z$ άρα $\frac{\kappa-\alpha}{2}\in Z$ οπότε $2|\kappa-\alpha$ άρα $\kappa-\alpha=2\lambda$ (με $\lambda\in Z$) οπότε $\alpha=\kappa-2\lambda$ άρα $\beta=7\kappa+3\lambda$

οπότε: $x=5\alpha+9\beta$ $x=5(\kappa-2\lambda)+9(7\kappa+3\lambda)$

$x=5\kappa-10\lambda+63\kappa+27\lambda$

$x=68\kappa+17\lambda$

$x=17(4\kappa+\lambda)$

$x=17\zeta$ με $\zeta=(4\kappa+\lambda)\in Z$, άρα $17|x=5\alpha+9\beta$.

γ. Ισχύουν $\left|\begin{array}{l}\to 3\alpha=5\kappa+\upsilon\\ \to\beta=5\lambda+\upsilon\end{array}\right.$ με $\kappa,\lambda\in Z$ και $0\le\upsilon<4$ άρα $3\alpha-\beta=5(\kappa-\lambda)$ ή $3\alpha-\beta=5\rho$

με $\rho=\kappa-\lambda\in Z$, $\beta=3\alpha-5\rho$

οπότε: $x=\alpha+3\beta$

$x=\alpha+3(3\alpha-5\rho)$

$x=10\alpha-15\rho$

$x=5(2\alpha-3\rho)$

$x=5\varphi$ με $\varphi=2\alpha-3\rho\in Z$ άρα $5\mid\alpha+3\beta$

Ισχύουν $\left\langle\begin{array}{l}5\mid3\alpha-\beta\\5\mid\alpha+3\beta\end{array}\right.$ άρα $5\cdot5\mid(3\alpha-\beta)(\alpha+3\beta)$ ή $25\mid3\alpha^2+8\alpha\beta-3\beta^2$

δ. • Ισχύουν $\left\langle\begin{array}{l}3\mid2\alpha+\beta\\3\mid5\alpha+3\beta\end{array}\right.$ άρα $3\mid2(5\alpha+3\beta)-5(2\alpha+\beta)=\beta$

• Ισχύουν $\left\langle\begin{array}{l}3\mid2\alpha+\beta\\3\mid5\alpha+3\beta\end{array}\right.$ άρα $3\mid3(2\alpha+\beta)-(5\alpha+3\beta)=\alpha$ άρα $\left\langle\begin{array}{l}3\mid\alpha\\3\mid\beta\end{array}\right.$ οπότε $9\mid\alpha\beta$

12.α. Αν ο ακέραιος α είναι άρτιος δείξτε ότι:

i. $8\mid(\alpha+1)^2-1$ **ii.** $12\mid\alpha^2+(\alpha+1)^2+(\alpha+3)^2-2\alpha+2$

β. Αν $\lambda\in Z$ **και** $x=3\lambda+2$ **και** $y=5\lambda+4$ **:**

i. Βρείτε τους κοινούς διαιρέτες των x, y.

ii. Δείξτε ότι $4\mid x^2-y^2$ **.**

iii. Η διαίρεση του x^2 με το 3 και αφήνει υπόλοιπο 1.

γ. i. Αν ρ περιττός δείξτε ότι $128\mid\rho^4+6\rho^2-7$ **.**

ii. Αν α, β, γ περιττοί δείξτε ότι $8\mid\alpha^2+\beta^2-2\gamma^2$ **.**

Λύση

α. Ο α είναι άρτιος άρα $\alpha=2\kappa$ με $\kappa\in Z$

i. τότε $A=(\alpha+1)^2-1=(2\kappa+1)^2-1=4\kappa^2+4\kappa=$

$4\kappa(\kappa+1)$ όμως* $\kappa(\kappa+1)=2\zeta$, με $\zeta\in Z$.

Άρα $A=4\cdot2\cdot\zeta=8\zeta\Leftrightarrow8\mid A=(\alpha+1)^2-1$

* οι κ, $\kappa+1$ είναι διαδοχικοί ακέραιοι άρα $\kappa\cdot(\kappa+1)=2\zeta$ με $\zeta\in Z$ (εφαρμογή στο βιβλίο)

ii. Τότε: $B = \alpha^2 + (\alpha+1)^2 + (\alpha+3)^2 - 2\alpha + 2$

$$B = \alpha^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1 + \alpha^2 + 6\alpha + 9 - 2\alpha + 2$$

$$B = 3\alpha^2 + 6\alpha + 12$$

$$B = 12\kappa^2 + 12\kappa + 12$$

$$B = 12(\kappa^2 + \kappa + 1) = 12\varphi \text{ με } \varphi = \kappa^2 + \kappa + 1 \in Z$$

Άρα $12 \mid \alpha^2 + (\alpha+1)^2 + (\alpha+3)^2 - 2\alpha + 2$

β.i. Έστω δ κοινός διαιρέτης των x, y τότε

$$\begin{cases} \delta \mid x = 3\lambda + 2 \\ \delta \mid y = 5\lambda + 4 \end{cases} \text{ άρα } \delta \mid 3(5\lambda+4) - 5(3\lambda+2) = 2$$

οπότε $\delta = \pm 1$ ή $\delta = \pm 2$

ii. Έχουμε: $\Gamma = x^2 - y^2 = (3\lambda+2)^2 - (5\lambda+4)^2 = 9\lambda^2 + 12\lambda + 4 - 25\lambda^2 - 40\lambda - 16 =$

$-16\lambda^2 - 28\lambda - 12 = 4(-4\lambda^2 - 7\lambda - 3) = 4\sigma$ με $\sigma = -4\lambda^2 - 7\lambda - 3 \in Z$ άρα $4 \mid \Gamma = x^2 - y^2$

iii. Έχουμε: $x^2 = 9\lambda^2 + 12\lambda + 4 = 9\lambda^2 + 12\lambda + 3 + 1 = 3(3\lambda^2 + 4\lambda + 1) + 1$

$$= 3\mu + 1 \text{ με } \mu = 3\lambda^2 + 4\lambda + 1 \in Z$$

Άρα το 3 διαιρεί το x^2 και αφήνει υπόλοιπο 1

γ.i. Αν ρ περιττός τότε $\rho^2 = 8\nu + 1$ με $\nu \in Z$ (εφαρμογή στο βιβλίο)

άρα $\Delta = \rho^4 + 6\rho^2 - 7 = (8\nu+1)^2 + 6(8\nu+1) - 7 =$

$$64\nu^2 + 16\nu + 1 + 48\nu + 6 - 7 = 64\nu^2 + 64\nu =$$

$$64\nu(\nu+1) = 64 \cdot 2\zeta = 128\zeta \text{ άρα } 128 \mid \Delta$$

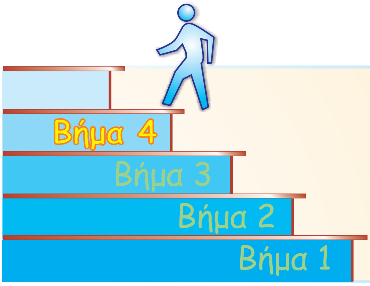
* ν, $\nu + 1$ διαδοχικοί ακέραιοι άρα $\nu(\nu+1) = 2\zeta$

ii. α, β, γ περιττοί άρα $\alpha^2 = 8\kappa + 1$, $\beta^2 = 8\lambda + 1$ και $\gamma^2 = 8\mu + 1$ οπότε

$$E = \alpha^2 + \beta^2 - 2\gamma^2$$

$$E = 2\kappa + 1 + 8\lambda + 1 - 16\mu - 2$$

$$E = 8(\kappa + \lambda - 2\mu) \text{ άρα } 8 \mid E$$



Λύνουμε μόνοι μας

1. **Να δείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει:**

$$1+3+6...+\frac{\nu(\nu+1)}{2}=\frac{\nu(\nu+1)\cdot(\nu+2)}{6}$$

2. **Να δείξετε ότι ο ισχυρισμός $P(\nu):\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}<2$ (εμφανίζονται ν ριζικά) είναι αληθής για κάθε θετικό ακέραιο ν.**

3. Έστω $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{\nu+1} = \sqrt{4+\alpha_\nu}$ να δείξετε ότι:

i. $\alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu$ **ii.** $\alpha_\nu < 3$ για κάθε $\nu = 1,2,3,...$

....

....

....

....

....

....

....

....

4. Να αποδείξετε ότι $3^\nu > \nu^3$ για κάθε $\nu \geq 4$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $\sqrt[3]{3} > \sqrt[\nu]{\nu}$ για κάθε $\nu \geq 4$ (ν ακέραιος)

....

....

....

....

....

....

....

....

5. Να δείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ισχύει: $|\eta\mu\nu \cdot x| \leq \nu \cdot |\eta\mu x|$

....

....

....

....

....

....

....

6. Να δείξετε ότι ισχύει η ισότητα: $1\cdot 2+2\cdot 5+...+\nu\cdot(3\nu-1)=\nu^2\cdot(\nu+1)$ για κάθε θετικό ακέραιο.

....

....

....

....

....

....

....

7. Να δείξετε ότι το γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων είναι πάντα πολλαπλάσιο του 3.

....

....

....

....

....

....

....

....

8. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι οι οποίοι όταν διαιρούνται δια 3 δίνουν πηλίκο διπλάσιο του υπολοίπου.

....

....

....

....

....

....

....

9. i. Αν $\alpha \in Z$ και $3|\alpha^2$ να δείξετε ότι $3|\alpha$.

ii. Αν $3|\alpha^2$ τότε και $9|\alpha^2$.

....

....

....

....

....

....

....

10. Έστω $\alpha, \beta \in Z$ και $\beta > 2$. Να αποδείξετε ότι αν $\beta|\alpha^2+1$ τότε ο β δεν διαιρεί τον α^4+1.

....

....

....

....

....

....

....

11. Αν α, β, x είναι ακέραιοι τέτοιοι ώστε $\alpha - \beta = \pi o\lambda 2$ και $x = \alpha^2 + \beta^2$ δείξτε ότι το $\frac{x}{2}$ είναι άθροισμα τερταγώνων δύο ακεραίων αριθμών.

....

....

....

....

....

....

12. **Να βρεθεί ακέραιος α αν είναι γνωστό ότι η διαίρεση του α με το 72 δίνει πηλίκο έναν άρτιο αριθμό λ και υπόλοιπο λ^3.**

....
....
....
....
....
....
....
....

13. **Να βρείτε τη μορφή των ακεραίων ρ για τους οποίους ισχύει $4\rho+1=3\lambda$, $\lambda\in Z$.**

....
....
....
....
....
....
....
....

14. **Αν α και β θετικοί ακέραιοι με $\alpha>\beta$ να αποδειχθεί ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του α με το β είναι μικρότερο του $\alpha/2$.**

....
....
....
....
....

....

....

15. Αν β ακέραιος, να βρεθούν όλοι οι πιθανοί ακέραιοι που διαιρούν συγχρόνως τον $5\beta+3$ και $2\beta-1$.

....

....

....

....

....

....

....

16. Να δείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει: $5 | 3^{3\nu+2}+2^{\nu+4}$.

....

....

....

....

....

....

....

17. Να δείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει: $7 | 3^{2\nu+1}+2^{\nu+2}$

....

....

....

....

....

....

....

18. **Αν ο ν είναι θετικός περιττός ακέραιος τότε να δείξετε ότι:** $\frac{\nu(\nu+1)}{2} | \nu!$

$(\nu! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \nu)$

....

....

....

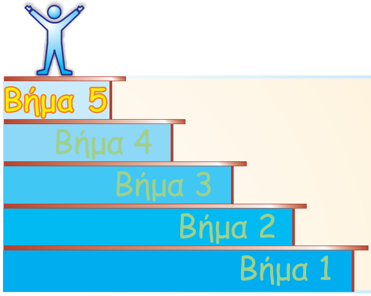
....

....

....

....

....



Ελέγχουμε τη γνώση μας

Θέμα 1ο

Έστω α, β, γ ακέραιοι. Αποδείξτε ότι: Αν $\alpha|\beta$ και $\alpha|\gamma$, τότε $\alpha|(\beta+\gamma)$.

(Μονάδες 25)

Θέμα 2ο

Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό ισχύει: $3\cdot5\cdot17\ldots\left(1+2^{2^{\nu}}\right)=2^{2^{\nu+1}}-1$

(Μονάδες 25)

Θέμα 3^0

Να δείξετε ότι για κάθε $\nu \in Z$ ισχύουν: **i.** $2|\nu^2+\nu$ **ii.** $2|\nu^2-\nu$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

(Μονάδες 25)

Θέμα 4^0

Αν ένας ακέραιος α, δεν είναι πολλαπλάσιο του 5, να δείξετε ότι η διαίρεση του α^2 με το 5 δίνει υπόλοιπο 1 ή 4. Στη συνέχεια να δείξετε ότι αν οι ακέραιοι αριθμοί x και y δεν είναι πολλαπλάσια του 5 τότε $5|x^4-y^4$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

(Μονάδες 25)