Κεφάλαιο 3ο

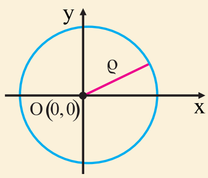
Κωνικές τομές

Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο των κονικών τομών θα πρέπει να είναι σε θέση:

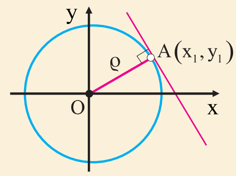
- Να προσδιορίζει την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων. Με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου υπολογίζονται οι συντεταγμένες του κέντρου και η ακτίνα του κύκλου που παριστάνει η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$.
- Να προσδιορίζει την εξίσωση της εφαπτομένης ενός κύκλου σε ένα σημείο του από την ιδιότητά της να είναι κάθετη στην ακτίνα που αντιστοιχεί στο σημείο επαφής.
- Να γνωρίζει τον ορισμό της παραβολής και να βρίσκει την εξίσωσή της με άξονα των τετμημένων τον άξονα συμμετρίας της και άξονα των τεταγμένων τη μεσοκάθετη της απόστασης της εστίας της από τη διευθετούσα.
- Να γνωρίζει τον ορισμό της έλλειψης και της υπερβολής και να βρίσκει τις εξισώσεις των εφαπτομένων τους. Τονίζεται ιδιαίτερα η έννοια της εκκεντρότητας και η σημασία της για τη μορφή της έλλειψης.

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ: Τύποι - Βασικές έννοιες

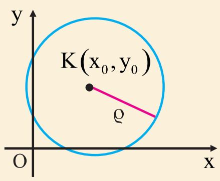
Α. ΚΥΚΛΟΣ



Εξίσωση κύκλου με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ: $\boxed{x^2+y^2=\rho^2}$



Εξίσωση εφαπτομένης κύκλου με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ στο σημείο $A(x_1,y_1)$: $\boxed{xx_1+yy_1=\rho^2}$



Εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ: $\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2}$

Η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0 \quad (1),\ A, B, \Gamma \in R$

- **Αν $A^2+B^2-4\Gamma>0$:** η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο:

$$K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right) \text{ και ακτίνα } \quad \rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}.$$

- **Αν $A^2+B^2-4\Gamma=0$:** η (1) παριστάνει το σημείο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$.
- **Αν $A^2+B^2-4\Gamma<0$:** η εξίσωση (1) είναι αδύνατη .

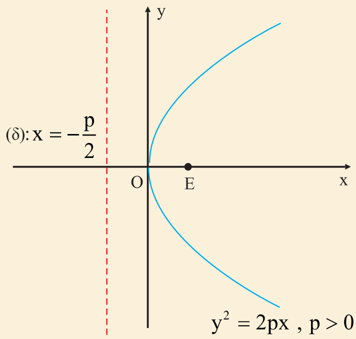
Β. ΠΑΡΑΒΟΛΗ

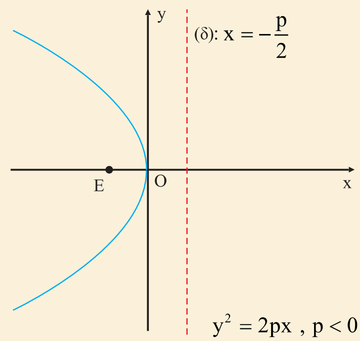
Ορισμός

Παραβολή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από μια σταθερή ευθεία (δ) που λέγεται **διευθετούσα** της παραβολής και από ένα σταθερό σημείο Ε που λέγεται **εστία** της παραβολής. Τα σημεία που ικανοποιούν την προηγούμενη ιδιότητα ανήκουν σε μια καμπύλη που φαίνεται στα επόμενα σχήματα.

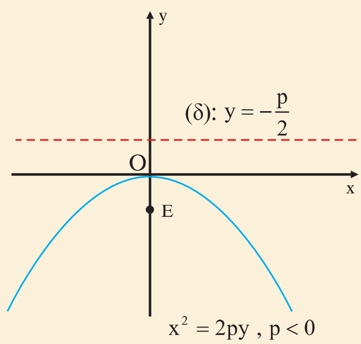
Εξίσωση παραβολής και γραφική παράσταση

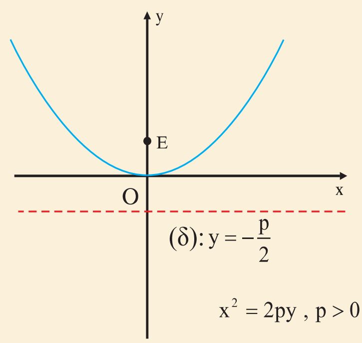
1. Με κορυφή $O(0,0)$, εστία $E\left(\frac{p}{2},0\right)$, και διευθετούσα $\delta:\ x=-\frac{p}{2}$ $\qquad y^2=2px$





2. Με κορυφή $O(0,0)$, εστία $E\left(0,\frac{p}{2}\right)$, και διευθετούσα $\delta:\ y=-\frac{p}{2}$ $\qquad x^2=2py$

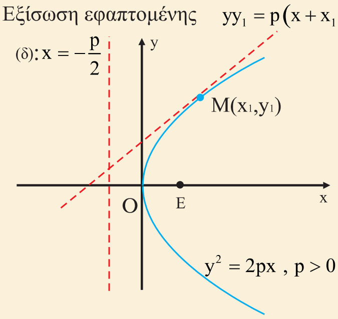




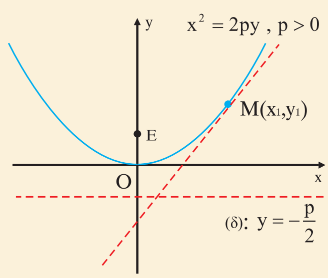
Εφαπτομένη της παραβολής $y^2=2px$ στο σημείο $M_1(x_1,y_1)$: $\quad yy_1=p(x+x_1)$

Εφαπτομένη της παραβολής $x^2=2py$ στο σημείο $M_1(x_1,y_1)$: $\quad xx_1=p(y+y_1)$

Εξίσωση εφαπτομένης $yy_1=p(x+x_1)$

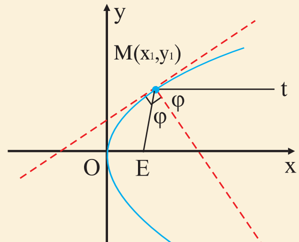


Εξίσωση εφαπτομένης $xx_1=p(y+y_1)$



Ανακλαστική ιδιότητα παραβολής

Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας παραβολής στο σημείο επαφής Μ διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν η ημιευθελια ΜΕ και η ημιευθεία Mt, που είναι ομόρροπη της ΟΕ, όπου Ε η εστία της παραβολής



σχήμα 1

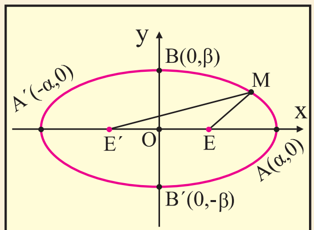
Γ. ΕΛΛΕΙΨΗ

Ορισμός: Έλλειψη με εστίες τα σημεία Ε΄ και Ε είναι ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα Ε΄ και Ε είναι σταθερό και μεγαλύτερο του ΕΕ΄. Το σταθερό αυτό άθροισμα το συμβολίζουμε με 2α, ενώ την εστιακή απόσταση ΕΕ΄ με 2γ. Δηλαδή Αν Μ σημείο της έλλειψη: $(ME)'+(ME)=2\alpha$

Εξίσωση έλλειψης και γραφική παράσταση

Η εξίσωση της έλλειψης ως προς σύστημα συντεταγμένων Οxy με άξονα x΄x την ευθεία που διέρχεται από τα Ε και Ε΄ και άξονα y΄y την μεσοκάθετο του ΕΕ΄ είναι:

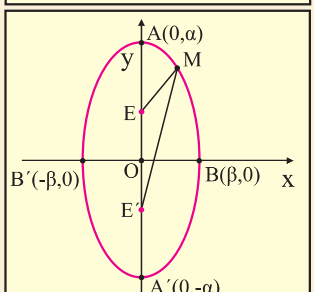
$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,\ \ \text{όπου}\ \ \beta^2=\alpha^2-\gamma^2\ \ (\text{σχήμα 2})$$



σχήμα 2

Ο **μικρός άξονας** ΒΒ΄ της έλλειψης έχει μήκος 2β.
Η εξίσωση της έλλειψης ως προς σύστημα συντεταγμένων Οxy με άξονα y΄y την ευθεία που διέρχεται από τα Ε και Ε΄ και άξονα x΄x την μεσοκάθετο του ΕΕ΄ είναι:

$$\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1,\ \ \text{όπου}\ \ \beta^2=\alpha^2-\gamma^2\ \ (\text{σχήμα 3})$$

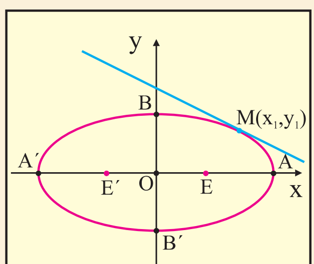


σχήμα 3

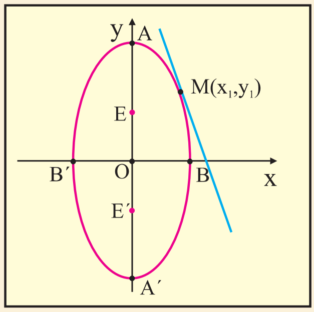
Εξίσωση εφαπτομένης

Έστω η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,\ \alpha>\beta$.
Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης C στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ είναι:

$$\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1$$



σχήμα 4



Έστω η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1,\ \alpha>\beta$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης C στο σημείο της M(x_1,y_1) είναι: $\frac{xx_1}{\beta^2}+\frac{yy_1}{\alpha^2}=1$

Εκκεντρότητα έλλειψης

Έστω η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

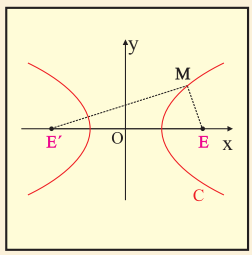
Ονομάζουμε **εκκεντρότητα** της έλλειψης C *το λόγο της εστιακής απόστασης προς το μήκος του μεγάλου άξονα* και τη συμβολίζουμε με: $\varepsilon=\frac{2\gamma}{2\alpha}=\frac{\gamma}{\alpha}$.

Είναι $0<\varepsilon<1$ και αποδεικνύεται ότι : $\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$

Δ. ΥΠΕΡΒΟΛΗ

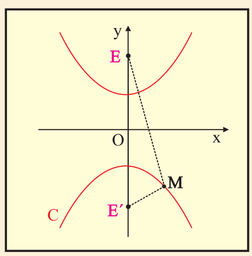
Ορισμός: Υπερβολή με εστίες τα σημεία Ε΄ και Ε είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από τα Ε΄ και Ε είναι σταθερή και μικρότερη του Ε΄Ε. Το απόλυτο της διαφοράς αυτής το συμβολίζουμε με 2α και την εστιακή απόσταση με 2γ. Δηλαδή αν Μ το σημείο της υπερβολής: $|(ME)'-(ME)|=2\alpha$

Εξίσωση υπερβολής και γραφική παράσταση.



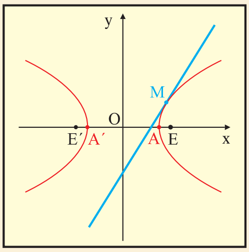
Η εξίσωση της υπερβολής ως προς σύστημα συντεταγμένων Oxy με άξονα x΄x την ευθεία που διέρχεται από τα Ε και Ε΄ και άξονα y΄y την μεσοκάθετο του ΕΕ΄ είναι:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \quad \text{, όπου } \beta^2=\gamma^2-\alpha^2.$$

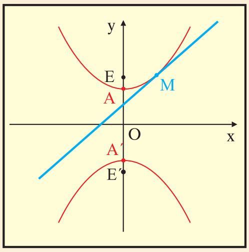


Η εξίσωση της υπερβολής ως προς σύστημα συντεταγμένων Oxy με άξονα y΄y την ευθεία που διέρχεται από τα Ε και Ε΄ και άξονα x΄x την μεσοκάθετο του ΕΕ΄ είναι: $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$, όπου $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2$

Εξίσωση εφαπτομένης



Έστω η υπερβολή C με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής C στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ είναι: $\frac{xx_1}{\alpha^2}-\frac{yy_1}{\beta^2}=1$



Έστω η υπερβολή C με εξίσωση $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής C στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ είναι: $\frac{yy_1}{\alpha^2}-\frac{xx_1}{\beta^2}=1$

Ασύμπτωτες υπερβολής

Η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ έχει ασύμπτωτες τις ευθείες:

$$\varepsilon_1 : y=\frac{\beta}{\alpha}x \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : y=-\frac{\beta}{\alpha}x$$

Εκκεντρότητα υπερβολής

Έστω η υπερβολή C με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Ονομάζουμε **εκκεντρότητα** της υπερβολής και τη συμβολίζουμε με **ε** το λόγο $\varepsilon=\frac{2\gamma}{2\alpha}=\frac{\gamma}{\alpha}$. Είναι $\varepsilon>1$.

Αποδεικνύεται ότι: $\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$

Μαθαίνουμε τις αποδείξεις

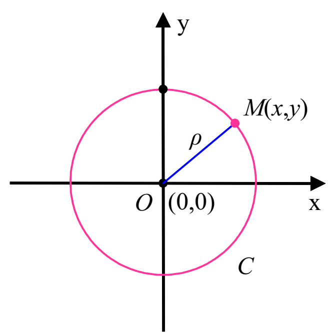
Βήμα 1

A. Κύκλος

ΘΕΩΡΙΑ 1 ***Αποδείξτε ότι ο κύκλος με κέντρο το σημείο*** $O(0,0)$ ***και ακτίνα*** ρ ***έχει εξίσωση:*** $x^2 + y^2 = \rho^2$ **.**

Απόδειξη

Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων Oxy στο επίπεδο και τον κύκλο C με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα ρ. Ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν ,απέχει από το κέντρο του O απόσταση ίση με την ακτίνα ρ, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει:



$$(\mathrm{OM}) = \rho \qquad (1)$$

Επειδή $(\mathrm{OM}) = \sqrt{x^2 + y^2}$ η σχέση (1) γράφεται:

$\sqrt{x^2 + y^2} = \rho$ ή, ισοδύναμα, $x^2 + y^2 = \rho^2$.

ΘΕΩΡΙΑ 2 ***Αποδείξτε ότι, η εφαπτομένη του κύκλου*** $x^2 + y^2 = \rho^2$ ***στο σημείο του*** $A(x_1, y_1)$ ***έχει εξίσωση*** $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

Απόδειξη

Έστω ε η εφαπτομένη του κύκλου C : $x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$. Ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στην ε, αν και μόνο αν $OA \perp AM$, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$. (1)

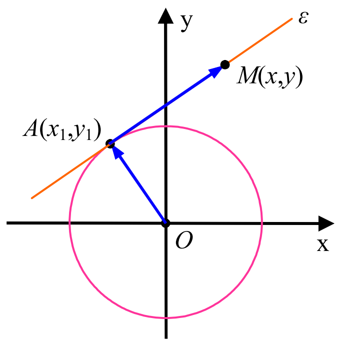
Επειδή $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1)$ και $\overrightarrow{AM}=(x-x_1,y-y_1)$.

η (1) γράφεται διαδοχικά:

$$x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)=0 \qquad ή$$

$xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2$ ή $xx_1+yy_1=\rho^2$,

αφού $x_1^2+y_1^2=\rho^2$.



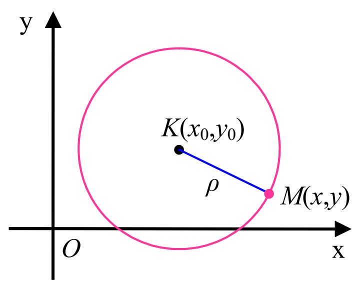
ΘΕΩΡΙΑ 3 ***Αποδείξτε ότι, ο κύκλος με κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση:***

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2}$$

Απόδειξη

Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων Oxy στο επίπεδο και C τον κύκλο με κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ. Ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν η απόστασή του από το κέντρο K του κύκλου είναι ίση με ρ, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει :

$$(KM)=\rho \qquad (1)$$



Επειδή είναι, $(KM)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

η σχέση (1) γράφεται:

$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\rho$ ή, ισοδύναμα, $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$.

ΘΕΩΡΙΑ 4 ***Αποδείξτε ότι, η εξίσωση $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$ (1) γράφεται στη μορφή:***

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0 \qquad (2)$$

και να εξετάσετε πότε μια εξίσωση της μορφής (2) παριστάνει κύκλο;

Απόδειξη

Αναπτύσσουμε τις ταυτότητες και η εξίσωση (1) γράφεται:

$$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+(x_0^2+y_0^2-\rho^2)=0,$$

δηλαδή παίρνει τη μορφή

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0,$$

όπου θέσαμε : $A=-2x_0$, $B=-2y_0$ και $\Gamma=x_0^2+y_0^2-\rho^2$.

Αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής (2) γράφεται διαδοχικά:

$$(x^2+Ax)+(y^2+By)=-\Gamma$$

$$\left(x^2+2\frac{A}{2}x+\frac{A^2}{4}\right)+\left(y^2+2\frac{B}{2}y+\frac{B^2}{4}\right)=-\Gamma+\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}$$

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4\Gamma}{4}.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

— Αν $A^2+B^2-4\Gamma>0$, η εξίσωση (2) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{\frac{A^2+B^2-4\Gamma}{4}}=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$.

— Αν $A^2+B^2-4\Gamma=0$, η εξίσωση (2) παριστάνει ένα μόνο σημείο, το $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$.

— Αν $A^2+B^2-4\Gamma<0$, η εξίσωση (2) είναι αδύνατη, δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία $M(x,y)$ των οποίων οι συντεταγμένες να την επαληθεύουν.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0,\quad \text{με}\quad A^2+B^2-4\Gamma>0 \qquad (\mathrm{I})$$

και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της μορφής (Ι) παριστάνει κύκλο.

Β. Παραβολή

ΘΕΩΡΙΑ 1 ***Γράψτε την εξίσωση της παραβολής με άξονα συμμετρίας τον χχ΄και αποδείξτε ότι η παραβολή βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει η διευθετούσα δ και η εστία της Ε.***

Απόδειξη

Η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον χχ΄ έχει εξίσωση :

$$y^2 = 2px$$

Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι τα p και x (με $x \neq 0$) είναι ομόσημα. Άρα, κάθε φορά η παραβολή βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει ο άξονας $y'y$ και η εστία E. Επομένως, η παραβολή βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει η διευθετούσα δ και η εστία E.

ΘΕΩΡΙΑ 2 ***Αποδείξτε ότι η κάθετη από την εστία στη διευθετούσα είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής.***

Απόδειξη

Αν το σημείο $M_1(x_1, y_1)$ είναι σημείο της παραβολής $y^2 = 2px$, δηλαδή, αν $y_1^2 = 2px_1$, τότε και το σημείο $M_2(x_1, -y_1)$ θα είναι σημείο της ίδιας παραβολής, αφού ισχύει : $(-y_1)^2 = y_1{}^2 = 2px_1$. Αυτό σημαίνει ότι ο άξονας $x'x$ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής.. Επομένως , η κάθετη από την εστία στη διευθετούσα είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής .(και λέγεται **άξονας** της παραβολής.)

Γ. Έλλειψη

ΘΕΩΡΙΑ 1 ***Γράψτε την εξίσωση της έλλειψης και αποδείξτε ότι η έλλειψη περιέχεται στο ορθογώνιο που ορίζουν οι ευθείες $x=-\alpha$, $x=\alpha$ και $y=-\beta$, $y=\beta$.***

Απόδειξη

Η εξίσωση της έλλειψης είναι $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.Από την εξίσωση της έλλειψης, έχουμε $\frac{x^2}{\alpha^2}=1-\frac{y^2}{\beta^2}\leq 1$ οπότε $x^2-\alpha^2\leq 0$ και άρα $-\alpha\leq x\leq \alpha$. Ομοίως $-\beta\leq y\leq \beta$.

Άρα, η έλλειψη περιέχεται στο ορθογώνιο που ορίζουν οι ευθείες $x=-\alpha$, $x=\alpha$ και $y=-\beta$, $y=\beta$.

ΘΕΩΡΙΑ 2 ***Τι ονομάζουμε εκκεντρότητα ε έλλειψης ;***

Αποδείξτε ότι για την εκκεντρότητα ισχύει $\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$.

Ποιες ελλείψεις λέγονται όμοιες;

Απόδειξη

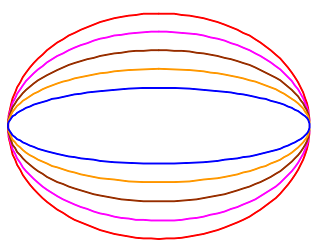
Εκκεντρότητα της έλλειψης είναι μια παράμετρος που καθορίζει τη μορφή της έλλειψης . Ονομάζουμε **εκκεντρότητα** της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και τη συμβολίζουμε με *ε*, το λόγο $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}<1$. Επειδή $\gamma=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$, είναι $\varepsilon=\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha}$, οπότε $\varepsilon^2=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}=1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$ και άρα

$$\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{1-\varepsilon^2}\,. \qquad (1)$$

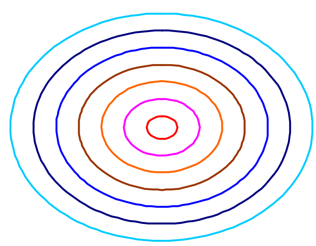
Επομένως, όσο μεγαλώνει η εκκεντρότητα τόσο μικραίνει ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ και συνεπώς τόσο πιο επιμήκης γίνεται η έλλειψη .(σχ.(1))

Όταν η εκκεντρότητα ε τείνει στο μηδέν, τότε ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ τείνει στο 1 και επομένως η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος. Όταν, όμως, η εκκεντρότητα ε τείνει στη μονάδα, τότε ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ τείνει στο 0 και επομένως η έλλειψη τείνει να εκφυλιστεί σε ευθύγραμμο τμήμα.

Όμοιες λέγονται οι ελλείψεις που έχουν την ίδια εκκεντρότητα, άρα ίδιο λόγο $\frac{\beta}{\alpha}$. (Σχ. 2).



(1)



(2)

Δ. Υπερβολή

ΘΕΩΡΙΑ 1 **Γράψτε την εξίσωση της υπερβολής με εστίες στον άξονα χ΄χ και αποδείξτε ότι η υπερβολή αποτελείται από δύο χωριστούς κλάδους.**

Απόδειξη

Η εξίσωση της υπερβολής είναι $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Από την εξίσωση της υπερβολής, έχουμε

$$\frac{x^2}{\alpha^2}=1+\frac{y^2}{\beta^2}\geq 1,$$

οπότε

$$x^2-\alpha^2\geq 0$$

και άρα

$$x\leq -\alpha \quad \text{ή} \quad x\geq \alpha .$$

Επομένως, τα σημεία της υπερβολής βρίσκονται έξω από την ταινία των ευθειών $x=-\alpha$ και $x=\alpha$, πράγμα που σημαίνει ότι η υπερβολή αποτελείται από δύο χωριστούς κλάδους.

ΘΕΩΡΙΑ 2

Τι ονομάζουμε εκκεντρότητα ε υπερβολής ;

Αποδείξτε ότι για την εκκεντρότητα ισχύει $\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$.

Ποια η σχέση της εκκεντρότητας με τον συντελεστή διεύθυνσης της ασύμπτωτης αυτής;

Πόση είναι η εκκεντρότητα μιας ισοσκελούς υπερβολής;

Απόδειξη

Η παράμετρος που καθορίζει το σχήμα της υπερβολής είναι η εκκεντρότητα.

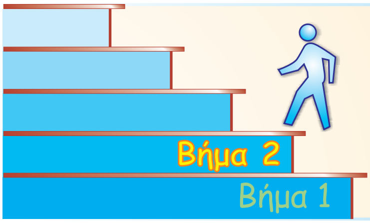
Ονομάζουμε **εκκεντρότητα** της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, και τη συμβολίζουμε με *ε*, το λόγο $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}>1$. Επειδή $\gamma=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, είναι $\varepsilon=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha}$, οπότε

$$\varepsilon^2=1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \text{ και άρα, } \frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{\varepsilon^2-1}. \tag{1}$$

Επομένως, η εκκεντρότητα *ε* προσδιορίζει το συντελεστή διεύθυνσης της ασυμπτώτου της, δηλαδή χαρακτηρίζει το ορθογώνιο βάσης,. Άρα και τη μορφή της ίδιας της υπερβολής. Όσο η εκκεντρότητα μικραίνει και τείνει να γίνει ίση με 1, ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$, άρα και το β, μικραίνει και τείνει να γίνει ίσο με 0. Κατά συνέπεια, όσο πιο μικρή είναι η εκκεντρότητα της υπερβολής τόσο πιο επίμηκες είναι το ορθογώνιο βάσης και κατά συνέπεια τόσο πιο κλειστή είναι η υπερβολή.

Στην περίπτωση της ισοσκελούς υπερβολής είναι $\alpha=\beta$, οπότε :

$$\sqrt{\varepsilon^2-1}=1\Leftrightarrow\varepsilon^2=2\Leftrightarrow\varepsilon=\sqrt{2}.$$

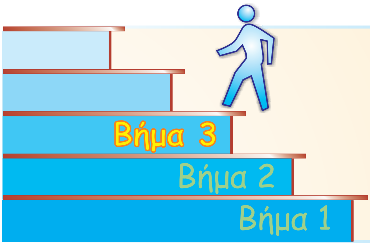


Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις “κλειδιά”

Α. Από το σχολικό βιβλίο

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.

§ 3.1	Α΄ Ομάδα:	4, 5
	Β΄ Ομάδα:	2, 3, 6, 7, 10
§ 3.2	Α΄ Ομάδα:	2, 5,6
	Β΄ Ομάδα:	1, 3, 5, 6, 8
§ 3.3	Α΄ Ομάδα:	1, 2, 6
	Β΄ Ομάδα:	2, 3, 4, 7, 8
§ 3.4	Α΄ Ομάδα:	1, 2, 4, 7
	Β΄ Ομάδα:	1, 2, 4, 5

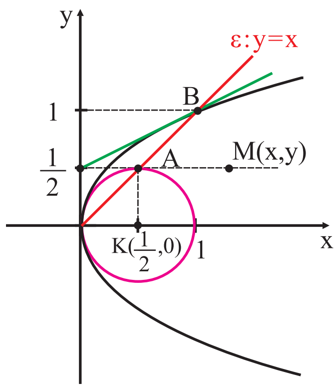


Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. Θεωρούμε την $y^2 = x$ και τον κύκλο $x^2 + y^2 - x = 0$. Φέρνουμε τη διχοτόμο της $x\hat{O}y$ που τέμνει τον κύκλο στο Α και την παραβολή στο Β. Φέρνουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου και της παραβολής στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Να δείξετε ότι τέμνονται στον άξονα y΄y.

Λύση:

Η $y^2 = x$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 - x = 0$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $O(0,0)$ αφού είναι η μοναδική λύση του συστήματος των εξισώσεών τους.



Η παραβολή $y^2 = x$ έχει $\rho = \frac{1}{2}$ ενώ ο κύκλος $x^2 + y^2 - x = 0$ έχει κέντρο $K\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{1}{2}$. Έστω η ευθεία (ε): $y = x$ (διχοτόμος της $x\hat{O}y$).

Η (ε) τέμνει τον κύκλο στο σημείο Α του οποίου οι συντεταγμένες προκύπτουν από τη λύση του συστήματος: $\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ Άρα $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Η (ε) τέμνει την παραβολή στα σημεία των οποίων οι συντεταγμένες προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y^2 = x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = y \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - y = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(y-1) = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ή } y = 1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0,\ x = 0 \\ y = 1,\ x = 1 \end{cases}$$

Άρα τα σημεία τομής είναι: O(0,0) και $B(1,1)$.

Βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο A:

Έχουμε $\overrightarrow{KA}=\left(0,\frac{1}{2}\right)$ και $\overrightarrow{AM}=\left(x-\frac{1}{2},y-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{2x-1}{2},\frac{2y-1}{2}\right)$ όπου $M(x,y)$ τυχαίο σημείο της εφαπτομένης.

Τότε ισχύει: $\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{AM}=0\Leftrightarrow 0\cdot\frac{2x-1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2y-1}{2}=0\Leftrightarrow$

$$\frac{2y-1}{4}=0\Leftrightarrow 2y=1\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}\quad(1)$$

Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο B(1,1) έχει εξίσωση:

$$yy_1=\rho(x+x_1)\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}(x+1)\Leftrightarrow x-2y+1=0\quad(2)$$

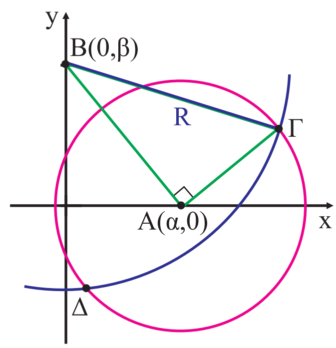
Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε: $x=0,\ y=\frac{1}{2}$

Άρα το σημείο τομής τους είναι το $\Gamma\left(0,\frac{1}{2}\right)$ και βρίσκεται πάνω στον άξονα y΄y.

2. Δίνεται κύκλος C_1 με εξίσωση:

$$\mathbf{x^2+y^2-2\alpha x+\alpha^2-\rho^2=0,\ \alpha>0}$$ **και**

κέντρο Α. Έστω μεταβλητό σημείο Β του ημιάξονα Oy. Αποδείξτε ότι οι κύκλοι που γράφουμε με κέντρο το Β και ακτίνα ΒΓ, όπου Γ το σημείο τομής των κύκλων με τον C_1, τέτοιο ώστε η γωνία ΒΑΓ να είναι ορθή, διέρχονται από σταθερά σημεία.



Λύση:

Ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2-2\alpha x+\alpha^2-\rho^2=0$ (1), έχει κέντρο $A(\alpha,0)$ και ακτίνα ρ. Έστω $B(0,\beta)$ σημείο πάνω στον Oy τότε:

$$C_2: x^2+(y-\beta)^2=R^2\Leftrightarrow x^2+y^2+\beta^2-2\beta y=R^2\quad(2)$$

Έστω Γ και Δ τα σημεία τομής των δύο κύκλων.

$\lambda_{AB}=\frac{-\beta}{\alpha}$ οπότε $\lambda_{A\Gamma}=\frac{\alpha}{\beta}$ και η ευθεία ΓΔ έχει εξίσωση:

$$y=\frac{\alpha}{\beta}(x-\alpha)\Leftrightarrow \beta y=\alpha x-\alpha^2 \Leftrightarrow 2\beta y-2\alpha x+\alpha^2+\alpha^2=0 \ \ (3)$$

Η ΓΔ είναι κοινή χορδή των δύο κύκλων άρα η εξίσωσή της δίνεται εκτός από την (3) και από την αφαίρεση της (2) από την (1).

Έχουμε: $$2\beta y-2\alpha x+\alpha^2-\beta^2-\rho^2+R^2=0\overset{(3)}{\Leftrightarrow}R^2=\alpha^2+\beta^2+\rho^2$$

την οποία αν αντικαταστήσουμε στην (2) έχουμε: $x^2+y^2-2\beta y=\rho^2+\alpha^2$ (4)

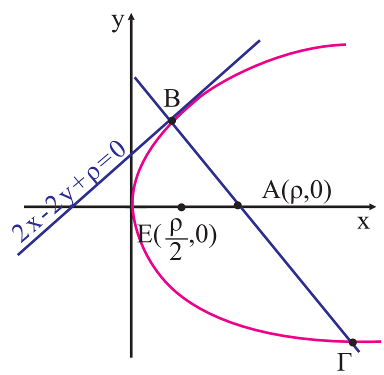
Η (4) είναι μια οικογένεια κύκλων η οποία περνάει από τα σταθερά σημεία $K\left(-\sqrt{\rho^2+\alpha^2},0\right)$ και $\Lambda\left(\sqrt{\rho^2+\alpha^2},0\right)$ διότι: Για $\beta=0$ και $\beta=1$ αντίστοιχα η (4) γίνεται $x^2+y^2=\rho^2+\alpha^2$ και $x^2+y^2-2y=\rho^2+\alpha^2$.

Από τη λύση των δύο τελευταίων εξισώσεων βρίσκουμε τα K και Λ τα οποία επαληθεύουν την (4).

3. Δίνεται η παραβολή $y^2=2\rho x,\ \rho>0$ το σημείο $A\left(d(E,\delta),0\right)$ όπου δ η διευθετούσα της παραβολής. Και η ευθεία $(\varepsilon): 2x-2y+\rho=0$.

i. Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) είναι εφαπτόμενη της παραβολής σε ένα σημεία Β.

ii. Αν η ευθεία ΑΒ τέμνει την παραβολή σε ένα άλλο σημείο Γ (εκτός του Β) να δείξετε ότι $A\Gamma=2AB$.



Λύση:

Έχουμε $d(E,\delta)=\rho$.

Άρα το σημείο Α είναι $A(\rho,0)$.

i. Για να εφάπτεται η ευθεία $2x-2y+\rho=0$ στην $y^2=2\rho x$ πρέπει να υπάρχει σημείο (x_1,y_1) ώστε η ευθεία $yy_1=\rho(x+x_1)\Leftrightarrow y=\frac{\rho}{y_1}x+\frac{\rho x_1}{y_1}$ να ταυτίζεται με την $2x-2y+\rho=0\Leftrightarrow y=x+\frac{\rho}{2}$. Οι ευθείες αυτές ταυτίζονται αν:

$$\frac{\rho}{y_1}=1 \quad \text{και} \quad \frac{\rho x_1}{y_1}=\frac{\rho}{2},\ \text{δηλαδή αν}\ x_1=\frac{\rho}{2}\ ,\ y_1=\rho$$

Το σημείο $\left(\frac{\rho}{2},\rho\right)$ είναι σημείο της παραβολής, άρα η ευθεία εφάπτεται της παραβολής στο $B\left(\frac{\rho}{2},\rho\right)$.

ii. Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα $A(\rho,0)$ και $B\left(\frac{\rho}{2},\rho\right)$ είναι:

$$y=\frac{\rho}{\frac{\rho}{2}-\rho}(x-\rho)\Leftrightarrow y=-2(x-\rho)\Leftrightarrow 2x+y-2\rho=0$$

Το σημείο Γ είναι ένα από τα σημεία τομής της παραβολής με την ευθεία ΑΒ (το άλλο είναι το Β).

Λύνουμε το σύστημα: $\begin{cases} y^2=2\rho x \\ 2x+y-2\rho=0 \end{cases}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\begin{cases} y^2+\rho y-2\rho^2=0 & (1) \\ x=\dfrac{2\rho-y}{2} & (2) \end{cases}$

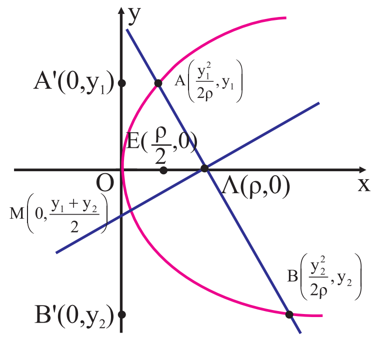
Η (1) έχει λύσεις $y_1=-2\rho$ ή $y_2=\rho$ οπότε για $y=-2\rho$ έχουμε από την (2) $x=2\rho$. Άρα $\Gamma(2\rho,-2\rho)$ (για $y=\rho$ παίρνουμε $B\left(\frac{\rho}{2},\rho\right)$) οπότε:

$(AB)=\sqrt{\left(\frac{\rho}{2}-\rho\right)^2+\rho^2}=\frac{\rho\sqrt{5}}{2}$ και $(A\Gamma)=\sqrt{\rho^2+4\rho^2}=\rho\sqrt{5}$. Άρα $A\Gamma=2AB$.

4. Δίνεται η παραβολή $y^2=2\rho x,\ \rho>0$ και δύο σημεία της Α και Β εκατέροθεν του άξονα συμμετρίας της. Φέρνουμε τις προβολές Α΄ και Β΄ των Α, Β στον άξονα y΄y. Αν Λ είναι το συμμετρικό της κορυφής Ο της παραβολής ως προς την εστία Ε και Μ το μέσο του Α΄Β΄, να δείξετε ότι οι ευθείες ΑΒ και ΜΛ είναι κάθετες.

Λύση:

Τα σημεία Α και Β ανήκουν στην $y^2=2\rho x$, άρα έχουν συντεταγμένες $A\left(\frac{y_1^2}{2\rho},y_1\right)$, $B\left(\frac{y_2^2}{2\rho},y_2\right)$. Το Λ είναι $\Lambda(\rho,0)$. Τότε $A'(0,y_1)$ και $B'(0,y_2)$ ενώ το Μ ως μέσο του Α΄Β΄ είναι: $M\left(0,\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$.



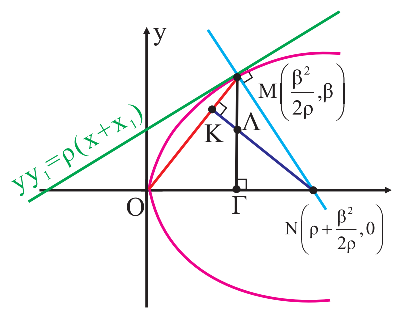
$$\lambda_{AB}=\frac{y_1-y_2}{\dfrac{y_1^2-y_2^2}{2\rho}}=\frac{2\rho}{y_1+y_2}$$

$$\lambda_{M\Lambda}=\frac{\dfrac{y_1+y_2}{2}}{-\rho}=-\frac{y_1+y_2}{2\rho}$$

Οπότε $\lambda_{AB}\cdot\lambda_{M\Lambda}=-1$, άρα $AB\perp M\Lambda$.

5. **Έστω Μ ένα σημείο της παραβολής $y^2=2\rho x$ με $\rho>0$. Έστω η κάθετος στο Μ στην εφαπτόμενη της παραβολής στο σημείο Μ, η οποία τέμνει τον x΄x στον Ν. Φέρνουμε από το Ν την κάθετο ΝΚ στην ΟΜ και από το Μ την κάθετο ΜΓ στον x΄x οι οποίες τέμνονται στο Λ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής τους.**

Λύση:



Έστω $M\left(\dfrac{\beta^2}{2\rho},\beta\right)$, $\beta\neq0$, άρα το $M\neq O(0,0)$.

Η εφαπτομένη $yy_1=\rho(x+x_1)$ στο Μ έχει συντελεστή $\lambda=\dfrac{\rho}{y_1}=\dfrac{\rho}{\beta}$, οπότε $\lambda_{MN}=\dfrac{-\beta}{\rho}$ και η ΜΝ έχει εξίσωση:

$y-\beta=\dfrac{-\beta}{\rho}\left(x-\dfrac{\beta^2}{2\rho}\right)$ η οποία τέμνει τον x΄x στον $N\left(\rho+\dfrac{\beta^2}{2\rho},0\right)$ αφού για $y=0$, $y=\rho+\dfrac{\beta^2}{2\rho}$.

Η ΟΜ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{OM}=\dfrac{\beta}{\dfrac{\beta^2}{2\rho}}=\dfrac{2\rho}{\beta}$ οπότε $\lambda_{NK}=\dfrac{-\beta}{2\rho}$ $(OM\perp NK)$

και η ΝΚ έχει εξίσωση: $y=\frac{-\beta}{2\rho}\left(x-\rho-\frac{\beta^2}{2\rho}\right)$ (1)

Η κάθετος ΜΓ έχει εξίσωση: $x=\frac{\beta^2}{2\rho}$ (2)

Το σημείο τομής Λ της ΝΚ και ΜΓ είναι η λύση του (Σ) των (1), (2) η οποία δίνει

$x=\frac{\beta^2}{2\rho}$ (3) και $y=\frac{\beta}{2}\Leftrightarrow 2y=\beta$ (4). Η (3) από (4) δίνει $x=\frac{4y^2}{2\rho}\Leftrightarrow x\rho=2y^2$,

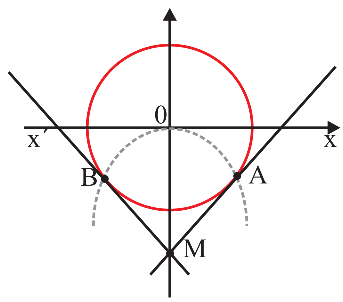
$y^2=\frac{\rho}{2}x$ που είναι εξίσωση παραβολής εκτός $O(0,0)$.

6. Δίνεται κύκλος $d: x^2+y^2=25$

α. Βρείτε τις εφαπτομένες του d που άγονται από το σημείο Μ(0, -10)

β. Βρείτε την εξίσωση της παραβολής με κορυφή το 0(0,0) η οποία περνάει από τα σημεία επαφής Α, Β του d και των εφαπτομένων.

γ. Δείξτε ότι οι εφαπτομένες της παραβολής τέμνονται σε σημείο του Οy.



Λύση

α. Η εφαπτομένη ε του d στο τυχαίο του $N(x_0,y_0)$ έχει εξίσωση $x_0x+y_0y=25$ και θα περνάει από το $M(0,-10)$ αν και μόνο αν $-10y_0=25\Leftrightarrow y_0=-5/2$

• Όμως $N(x_0y_0)\in d\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2=25\Leftrightarrow x_0^2+\frac{25}{4}=25\Leftrightarrow x_0^2=\frac{75}{4}\Leftrightarrow x_0=\pm\frac{5}{2}\sqrt{3}$ οπότε

i. Αν $x_0=\frac{5}{2}\sqrt{3}$ και $y_0=-\frac{5}{2}$ τότε $A\left(\frac{5\sqrt{3}}{2},-\frac{5}{2}\right)$ το σημείο επαφής των d και της εφαπτομένης $\frac{5\sqrt{3}}{2}x-\frac{5}{2}y=25\Leftrightarrow\sqrt{3}x-y=10$

ii. Αν $x_0=-\frac{5}{2}\sqrt{3}$ και $y_0=-\frac{5}{2}$ τότε $B\left(\frac{-5\sqrt{3}}{2},-\frac{5}{2}\right)$ το σημείο επαφής d και της εφαπτομένης $\frac{-5\sqrt{3}}{2}x-\frac{5}{2}y=25\Leftrightarrow -\sqrt{3}x-y=10$

β. Αφού η παραβολή περνάει από τα Α, Β θα είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ άρα θα έχει εξίσωση $x^2 = 2py$ οπότε θα ισχύει:

$\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2p\frac{-5}{2} \Leftrightarrow \frac{75}{4} = -5p \Leftrightarrow p = -\frac{15}{4}$ άρα $x^2 = -\frac{15}{2}y$ η εξίσωση της παραβολής η οποία έχει εστία $E\left(0, -\frac{15}{8}y\right)$ και διευθετούσα την $\delta: y = \frac{15}{8}$

γ. • Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $A\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ έχει εξίσωση:

$$\frac{5\sqrt{3}}{2}x = -\frac{15}{4}\left(y - \frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow 4\sqrt{3}x + 6y = 15$$

• Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $B\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ έχει εξίσωση:

$$-\frac{5\sqrt{3}}{2}x = -\frac{15}{4}\left(y - \frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow 4\sqrt{3}x - 6y = -15$$

Λύνουμε τώρα το σύστημα $\begin{cases} 4\sqrt{3}x + 6y = 15 \\ 4\sqrt{3}x - 6y = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$. Άρα οι εφαπτομένες τέμνονται στο σημείο $K\left(0, \frac{5}{2}\right)$.

7. Δίνεται κύκλος με κέντρο Κ(–1,0) ο οποίος διέρχεται από το σημείο $A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

i. Βρείτε την εξίσωση του κύκλου και της εφαπτομένης (ε) στο σημείο του Α.

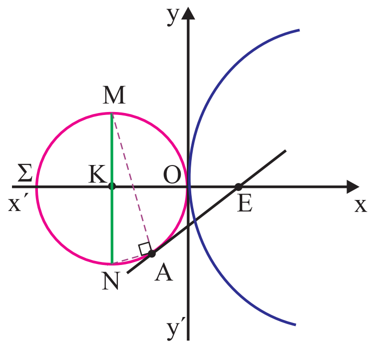
ii. Αν η (ε) διέρχεται από την εστία της παραβολής που έχει άξονα συμμετρίας τον Ox, βρείτε την εξίσωση της παραβολής και μετά το εμβαδόν του ΑΜΝ με Μ, Ν τα σημεία που η διευθέτουσα τέμνει τον κύκλο.

iii. Ο κύκλος τέμνει τον ημιάξονα Ox΄ στο σημείο Σ. Να βρείτε τις εφαπτομένες της παραβολής που άγονται από το Σ.

Λύση:

i. • Η ακτίνα του κύκλου είναι:

$$\rho=\sqrt{\left(-1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$$



Άρα η εξίσωσή του είναι η:

$(x+1)^2+y^2=1$

• Αν $P(x,y)$ σημείο της εφαπτομένης (ε) του κύκλου στο σημείο του $A\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ θα ισχύει:

$$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{KA}\Leftrightarrow\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{KA}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AP}=\left(x+\frac{1}{2},y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{KA}=\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0\Leftrightarrow x+\frac{1}{2}-\sqrt{3}y-\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow x-\sqrt{3}y-1=0$$ η εξίσωση της (ε)

ii. • Η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον Ox άρα θα έχει εξίσωση $y^2=2\rho x$ (με $\rho>0$) οπότε θα έχει εστία $E\left(\frac{\rho}{2},0\right)\in(\varepsilon)\Leftrightarrow\frac{\rho}{2}-1=0\Leftrightarrow\rho=2$. Άρα $x=-\frac{\rho}{2}=-1$ η διευθέτουσα της παραβολής.

• Αν $x=-1$ η εξίσωση του κύκλου γίνεται $y^2=1\Leftrightarrow y=\pm1$ οπότε $M(-1,1)$ και $N(-1,-1)$ τα κοινά σημεία της διευθέτουσας και του κύκλου. Το κέντρο ανήκει στην MN, άρα η MN είναι διάμετρος και $\overset{\Delta}{MAN}=90^o$, οπότε:

$$(AMN)=\frac{1}{2}(AM)(AN)\Leftrightarrow(AMN)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\sqrt{\frac{1}{4}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2}\Leftrightarrow$$

$$(AMN)=\frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}\Leftrightarrow(AMN)=\frac{1}{2}\text{ τ.μ.}$$

iii. Ο κύκλος τέμνει τον Ox΄ στο $\Sigma(-2,0)$

• Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $\Lambda(x,y)$ έχει εξίσωση $y_1y=2(x+x_1)$ και θα περνάει από το $\Sigma(-2,0)$ αν και μόνο αν $2(-2+x_1)=0\Leftrightarrow x_1=2$.

• Το $\Lambda(x_1,y_1)$ ανήκει στην παραβολή άρα $y_1^2=4x_1\Leftrightarrow y_1^2=8\Leftrightarrow y_1=\pm2\sqrt{2}$ οπότε

i. Αν $x_1 = 2$ και $y_1 = 2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}y = 2(x+2) \Leftrightarrow \sqrt{2}y = x+2$ η μία εφαπτομένη

ii. Αν $x_1 = 2$ και $y_1 = -2\sqrt{2}$, $-2\sqrt{2}y = 2(x+2) \Leftrightarrow -\sqrt{2}y = x+2$ η άλλη εφαπτομένη

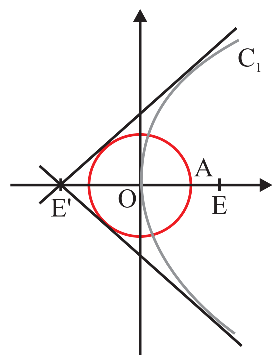
8. Δίνεται η παραβολή $C_1 : y^2 = 4x$ και Ε η εστία της. Ακόμα δίνεται ο κύκλος C_2 με κέντρο Ο(0,0) που τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox στο σημείο Α για το οποίο ισχύει: $\sqrt{2}|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OE}|$

i. Βρείτε την εξίσωση του C_2.

ii. Βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των C_1, C_2.

iii. Βρείτε την γωνία των εφαπτόμενων

Λύση



i. Έστω $x^2 + y^2 = R^2$ (με $R > 0$) η εξίσωση του C_2 τότε το σημείο Α είναι το $A(R,0)$ οπότε:

$$\sqrt{2}|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OE}| \Leftrightarrow \sqrt{2}\sqrt{R^2} = \sqrt{1^2} \Leftrightarrow R = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Άρα $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ η εξίσωση του C_2.

ii. • Η εφαπτόμενη (ε) της C_1 στο σημείο της $N(x_0, y_0)$ έχει εξίσωση:

$$y_0 y = 2(x + x_0) \Leftrightarrow 2x - y_0 y + 2x_0 = 0$$

• Άρα η (ε) θα εφάπτεται και του C_2 αν και μόνο αν:

$$d(0,\varepsilon) = R \Leftrightarrow \frac{|2x_0|}{\sqrt{4+y_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{(x_0>0)}{\Leftrightarrow} 2\sqrt{2}x_0 = \sqrt{4+y_0^2} \Leftrightarrow 8x_0^2 = 4 + y_0^2 \Leftrightarrow y_0^2 = 8x_0^2 - 4$$

• Το $N(x_0, y_0)$ ανήκει στην C_1 άρα:

$y_0^2 = 4x_0 \Leftrightarrow 8x_0^2 - 4 = 4x_0 \Leftrightarrow 2x_0^2 - x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 > 0$ οπότε $y_0^2 = 4 \Leftrightarrow y_0 = \pm 2$ άρα $2x - 2y + 2 = 0$ και $2x + 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = x+1$ και $y = -x-1$ οι εξισώσεις των εφαπτομένων.

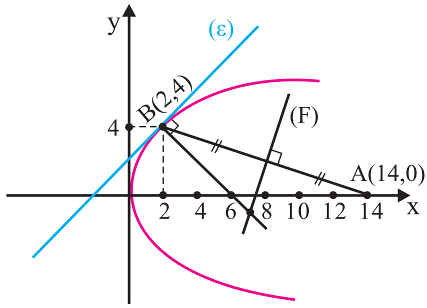
iii. Οι εφαπτόμενες τέμνονται κάθετα στο σημείο $E'(-1,0)$ δηλαδή πάνω στην διευθέτουσα $x = -1$ της C_1

9. Δίνονται τα σημεία $A(14,0)$ και $B(2,4)$ και η παραβολή $y^2 = 8x$

α. Βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ΑΒ.

β. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο Β.

γ. Βρείτε την εξίσωση του κύκλου που περνάει από τα Α, Β και εφάπτεται της εφαπτόμενης της παραβολής στο Β.



Λύση

α. Το μέσο του ΑΒ είναι το $\left(\frac{14+2}{2},\frac{0+4}{2}\right)$ ή $(8,2)$ και αν f η μεσοκάθετος του ΑΒ ισχύει $\lambda_f \lambda_{AB}=-1 \Leftrightarrow \lambda_f \frac{4-0}{2-14}=-1 \Leftrightarrow \lambda_f=3$ άρα $y-2=3(x-8) \Leftrightarrow y=3x-22$ η εξίσωση της f.

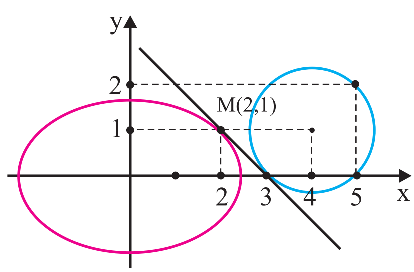
β. Η παραβολή έχει $\rho=4$ άρα η εφαπτομένη (ε) της παραβολής στο σημείο της $B(2,4)$ έχει εξίσωση $4y=4(x+2) \Leftrightarrow y=x+2$.

γ. Η κάθετη (δ) στην (ε) στο σημείο της $B(2,4)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\delta=-1$ και άρα εξίσωση $y-4=-(x-2)$ στο $y=-x+6$

Το κέντρο του ζητούμενου κύκλου βρίσκεται στις (f) και (δ) (δηλαδή στην μεσοκάθετο της χορδής του ΑΒ και στην κάθετο την εφαπτομένη του στο σημείο επαφής Β) άρα λύνουμε την εξίσωση $-x+6=3x-22 \Leftrightarrow 4x=28 \Leftrightarrow x=7$, άρα $y=-1$, δηλαδή $K(7,-1)$.

Η ακτίνα του κύκλου είναι η $R=(KA)=\sqrt{(14-7)^2+(-1)^2}=\sqrt{50}$ άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι η: $(x-7)^2+(y+1)^2=50$

10. Δίνεται έλλειψη με εστίες στον x΄x η οποία διέρχεται από το σημείο Μ(2,1) και έχει εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



α. Βρείτε την εξίσωσή της και την εφαπτομένη της (ε) στο Μ.

β. Βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται της (ε) στο σημείο που αυτή τέμνει τον x΄x και διέρχεται από το σημείο Σ(5,2).

γ. Βρείτε την εξίσωση της παραβολής με εστία τον x΄x που περνάει από το σημείο Μ και την εφαπτομένη της στο Μ έστω (σ).

δ. Βρείτε το συνημίτονο της οξείας γωνίας (ε), (σ).

Λύση

α. Αφού οι εστίες της έλλειψης βρίσκονται στον x΄x θα έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ οπότε:

- $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\gamma^2=\alpha^2 \Leftrightarrow$

  $2\left(\alpha^2-\beta^2\right)=\alpha^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2-2\beta^2=\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2=2\beta^2$

- $M(2,1)$ ανήκει στην έλλειψη άρα: $\frac{4}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow \frac{4}{2\beta^2}+\frac{1}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow \frac{3}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow \beta^2=3$

  άρα $\alpha^2=6$ οπότε $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ η εξίσωση της έλλειψης και $x+y=3$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) στο Μ.

β. Η ε τέμνει τον x΄x στο $A(3,0)$

Εύρεση της ευθείας (δ) που είναι κάθετη στην (ε) στο σημείο της Α

Ισχύει $\varepsilon \perp \delta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \lambda_\delta=-1 \Leftrightarrow (-1)\lambda_\delta=-1 \Leftrightarrow \lambda_\delta=1$ άρα $y=x-3$ η εξίσωση της (δ).

Εύρεση της μεσοκαθέτου (f) του ΑΣ

Το μέσο του ΑΣ είναι το $N(4,1)$ και $\lambda_f \lambda_{A\Sigma}=-1 \Leftrightarrow \lambda_f \frac{2-0}{5-3}=-1 \Leftrightarrow \lambda_f=-1$ άρα:

$$y-1=-(x-4) \Leftrightarrow y=-x+5$$

Εύρεση του κέντρου του κύκλου Κ

Το κέντρο Κ βρίσκεται στις ευθείες (δ) και (f) άρα λύνουμε την εξίσωση $x-3=-x+5 \Leftrightarrow 2x=8 \Leftrightarrow x=4$ άρα $y=1$ οπότε $K(4,1)$

Εύρεση της ακτίνας του κύκλου R

Ισχύει $R=(KA)=\sqrt{(3-4)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$, άρα η εξίσωση του κύκλου είναι:

$$(x-4)^2+(y-1)^2=2$$

γ. Αφού η παραβολή έχει εστία στον x΄x θα έχει εξίσωση $y^2=2\rho x$ και επειδή περνάει από το σημείο $M(2,1)$ θα ισχύει $1=4\rho \Leftrightarrow \rho=\frac{1}{4}$ άρα $y^2=\frac{1}{2}x$ οπότε η εφαπτομένη (σ) της παραβολής στο σημείο της Μ έχει εξίσωση:

$$y=\frac{1}{4}(x+2)\Leftrightarrow 4y=x+2\Leftrightarrow x-4y+2=0$$

δ. Το $\vec{\delta_1}=(-1,1)//(\varepsilon)$ και το $\vec{\delta_2}=(4,1)//(\sigma)$ και ισχύει:

$$\text{συν}\left(\vec{\delta_1},\vec{\delta_2}\right)=\frac{\vec{\delta_1}\cdot\vec{\delta_2}}{\left|\vec{\delta_1}\right|\cdot\left|\vec{\delta_2}\right|}=\frac{-4+1}{\sqrt{2}\sqrt{17}}=\frac{-3}{\sqrt{34}}$$

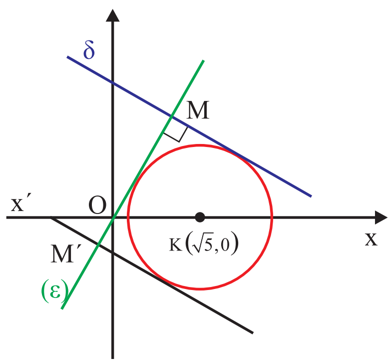
Άρα το ζητούμενο συνημίτονο της οξείας γωνίας των (ε), (σ) ισούται με $\frac{3}{\sqrt{34}}$.

11. Ο κύκλος d_1 έχει κέντρο στον θετικό ημιάξονα Οx και ακτίνα p>0. Η ευθεία $\varepsilon: y=2x$ είναι ασύμπτωτη της υπερβολής $d_2:\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{16}=1$ και εφάπτεται του κύκλου d_1.

α. Βρείτε τις εξισώσεις των d_1 και d_2.

β. Βρείτε τα σημεία της (ε) από τα οποία η εφαπτόμενες του d_1 τέμνουν κάθετα την (ε).

γ. Βρείτε την εξίσωση της παραβολής που περνάει από το σημείο Μ του πρώτου τεταρτημόριου του β. ερωτήματος και έχει άξονα συμμετρία τον x΄x.



Λύση

α. • Έστω $K(\alpha,0)$ με $\alpha>0$ το κέντρο του d_1 τότε η εξίσωση του είναι:

$$(x-\alpha)^2+y^2=p^2$$

• Οι ασύμπτωτες της d_2 έχουν εξισώσεις $y=\pm\frac{4}{p}x$, όμως μας δίνεται ότι η (ε) είναι ασύμπτωτη της d_2 άρα: $\frac{4}{p}=2\Leftrightarrow p=2$

• Η (ε) ακόμα εφάπτεται του κύκλου d_1 άρα:

$$d(\kappa,\varepsilon)=p\Leftrightarrow\frac{|2\alpha-0|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\Leftrightarrow\frac{2\alpha}{\sqrt{5}}=2\Leftrightarrow\alpha=\sqrt{5}\text{ άρα:}$$

$$d_1:\left(x-\sqrt{5}\right)^2+y^2=4 \text{ και } d_2:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$$

β. Έστω Μ το ζητούμενο σημείο της (ε) τότε θα είναι της μορφής $M\left(x_1,2x_1\right)$ και (δ) η ζητούμενη εφαπτομένη η οποία θα έχει σ.δ. $-\frac{1}{2}$ (διότι $\delta\perp\varepsilon$) άρα θα έχει εξίσωση $y-2x_1=-\frac{1}{2}\left(x-x_1\right)\Leftrightarrow 2y-4x_1=-x+x_1\Leftrightarrow x+2y-5x_1=0$ και επειδή εφάπτεται του d θα ισχύει:

$$d\left(\kappa,\delta\right)=2\Leftrightarrow\frac{\left|\sqrt{5}-5x_1\right|}{\sqrt{5}}=2\Leftrightarrow\left|\sqrt{5}-5x_1\right|=2\sqrt{5}\Leftrightarrow\sqrt{5}-5x_1=2\sqrt{5} \quad \text{ή}$$

$$\sqrt{5}-5x_1=-2\sqrt{5}\Leftrightarrow x_1=-\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ ή } x_1=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα $M'\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{-2\sqrt{5}}{5}\right)$ και $M\left(\frac{3\sqrt{5}}{5},\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$

γ. Έστω $y^2=2\kappa x$ η ζητούμενη παραβολή τότε $\frac{36}{5}=2\kappa\frac{3\sqrt{5}}{5}\Leftrightarrow\kappa=\frac{6}{\sqrt{5}}$ άρα $y^2=\frac{12}{\sqrt{5}}x$ η ζητούμενη εξίσωση.

12. Δίνεται η υπερβολή $d:\frac{16x^2}{25}-y^2=1$ και η ευθεία $\varepsilon: y=\frac{4}{3}x$

α. Αν το σημείο Μ της υπερβολής απέχει από μια εστία d απόσταση 2 βρείτε πόσο απέχει το Μ από την άλλη εστία.

β. Βρείτε σημείο της d με θετικές συντεταγμένες το οποίο να απέχει από την (ε) απόσταση 1.

γ. Βρείτε τις εφαπτόμενες της d που είναι παράλληλες στην ε.

Λύση

α. Η υπερβολή d έχει $\alpha=\frac{5}{4}$ και για κάθε σημείο Μ της d (από ορισμό) ισχύει:

$$\left|(ME)-(ME')\right|=2\alpha\Leftrightarrow\left|2-(ME')\right|=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2-(ME')=\frac{5}{2} \text{ ή } 2-(ME')=\frac{-5}{2}\Leftrightarrow$$

$$(ME')=-\tfrac{1}{2} \text{ αδύνατη} \quad \text{ή} \quad (ME')=\frac{9}{2}$$

β. • Έστω $N(x_0,y_0)\in d$ τότε $\frac{16x_0^2}{25}-y_0^2=1 \Leftrightarrow x_0^2=\frac{25}{16}\left(y_0^2+1\right) \Leftrightarrow x_0=\frac{5}{4}\sqrt{y_0^2+1}$ αφού $x_0>0$

• Όμως ισχύει:

$$d(M,\varepsilon)=1 \Leftrightarrow \frac{\left|4x_0-3y_0\right|}{\sqrt{4^2+(3)^2}}=1 \Leftrightarrow \left|4\frac{5}{4}\sqrt{y_0^2+1}-3y_0\right|=5 \Leftrightarrow \left|5\sqrt{y_0^2+1}-3y_0\right|=5 \Leftrightarrow$$

$$5\sqrt{y_0^2+1}-3y_0=5 \quad \text{ή} \quad 5\sqrt{y_0^2+1}-3y_0=-5$$

$$5\sqrt{y_0^2+1}=3y_0+5 \quad \text{ή} \quad 5\sqrt{y_0^2+1}=3y_0-5 \quad (y_0>5/3)$$

$$25\left(y_0^2+1\right)=9y_0^2+25+30y_0 \ \text{ή} \ 25\left(y_0^2+1\right)=9y_0^2+25-30y_0$$

$$16y_0^2-30y_0=0 \quad \text{ή} \quad 16y_0^2+30y_0=0$$

$$\underset{\text{Απορ.}}{y_0=0} \ \text{ή} \ y_0=\frac{15}{8} \ \text{ή} \ \underset{\text{Απορ.}}{y_0=0} \ \text{ή} \ \underset{\text{Απορ.}}{y_0=-\frac{15}{8}} \quad \text{άρα} \quad N\left(\frac{85}{32},\frac{15}{18}\right).$$

γ. • Η εφαπτομένη (δ) της d στο σημείο του $K(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $16x_1x-25y_1y=25$ και άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{16x_1}{25y_1}$ και επειδή είναι παράλληλη με την (ε) θα ισχύει:

$$\frac{16x_1}{25y_1}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow x_1=\frac{25y_1}{12}$$

• Το $K(x_1,y_1)\in d$ άρα $16x_1^2-25y_1^2=25 \Leftrightarrow \frac{25^2y_1^2}{9}-25y_1^2=25$

$$\frac{25y_1^2}{9}-y_1^2=1 \Leftrightarrow 16y_1^2=9 \Leftrightarrow y_1^2=\frac{9}{16} \Leftrightarrow y_1=\pm 3/4$$ οπότε:

i. Αν $y_1=\frac{3}{4}$ τότε $x_1=\frac{25}{16}$ άρα $25x-25\frac{3}{4}x=25 \Leftrightarrow 4x-3y=4$ η μια εφαπτομένη

ii. Αν $y_1=-\frac{3}{4}$ τότε $x_1=-\frac{25}{16}$ άρα $-4x+3y=4$ η άλλη εφαπτομένη.

13. Το σημείο M(x,y) απέχει από το A(4,0) τα 4/3 της απόστασής του από την ευθεία $x=\frac{9}{4}$.

α. **Δείξτε ότι το Μ κινείται σε υπερβολή με εξίσωση: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$.**

β. **Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής που περνάνε από το σημείο Β(3,2).**

Λύση

α. Ισχύει: $(MA)=\frac{4}{3}d(M,\varepsilon)\Leftrightarrow\sqrt{(x-4)^2+y^2}=\frac{4}{3}\frac{|4x-9|}{4}\Leftrightarrow$

$$3\sqrt{(x-4)^2+y^2}=|4x-9|\Leftrightarrow 9\left((x-4)^2+y^2\right)=(4x-9)^2\Leftrightarrow$$

$$9\left(x^2+16-8x+y^2\right)=16x^2+81-72x\Leftrightarrow 9x^2+144-72x+9y^2=16x^2+81-72x\Leftrightarrow$$

$$63=7x^2-9y^2\Leftrightarrow 1=\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}\quad(1)$$

Άρα το Μ βρίσκεται σε υπερβολή C με την εξίσωση (1).

β. • Η εφαπτομένη της C στο σημείο $N(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση:

$\frac{x_1x}{9}-\frac{y_1y}{7}=1\Leftrightarrow 7x_1x-9y_1y=63$ και θα περνάει από το σημείο $B(3,2)$ αν και μόνο αν $21x_1-18y_1=63\Leftrightarrow x_1=\frac{21+6y_1}{7}$.

• Το σημείο $N(x_1,y_1)$ ανήκει στην C:

$$\frac{x_1^2}{9}-\frac{y_1^2}{7}=1\Leftrightarrow 7x_1^2-9y_1^2=63\Leftrightarrow 7\frac{(21+6y_1)^2}{49}-9y_1^2=63\Leftrightarrow$$

$$(21+6y_1)^2-63y_1^2=441\Leftrightarrow 441+36y_1^2+252y_1-63y=441\Leftrightarrow$$

$$-27y_1^2+252y_1=0\Leftrightarrow y_1(-27y_1+252)=0\Leftrightarrow y_1=0 \text{ ή } y_1=\frac{28}{3}.$$

Οπότε αν $y_1=0$ τότε $x_1=3$ άρα $x=3$ η μία εφαπτομένη.

Αν $y_1=\frac{28}{3}$ τότε $x_1=11$ άρα $77x-84y=63$ η άλλη εφαπτομένη.

14. **Η έλλειψη C_1 έχει εστία Ε (1, 0) και η υπερβολή C_2 έχει εστία $K\left(\sqrt{5},0\right)$ ενώ έχουν την ίδια κορυφή Α (α, 0).**

α. **Βρείτε τις εξισώσεις των C_1, C_2 αν γνωρίζετε ότι το ορθογώνιο βάσης της υπερβολής έχει εμβαδόν 8 τ.μ.**

β. Βρείτε τις εφαπτομένες της C_2 που άγονται από το Ε (1, 0).

γ. Αν η εφαπτομένη της C_1 στο σημείο της $M(1,3/2)$ εφάπτεται και του κύκλου C: $(x+1)^2+(y-2)^2=\rho^2$ με ρ > 0 βρείτε την ακτίνα του.

Λύση

α. Αν $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ η εξίσωση της C_1 τότε $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{k^2}=1$ η εξίσωση της C_2 οπότε ισχύουν:

- $\alpha^2=\gamma^2+\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2=\beta^2+1$
- $\gamma_1^2=\alpha^2+\kappa^2 \Leftrightarrow 5=\alpha^2+\kappa^2$ ($2\gamma_1$, η εστιακή απόσταση της C_2)
- και $4\alpha\kappa=8 \Leftrightarrow \alpha\kappa=2$ οπότε

$$5=\alpha^2+\kappa^2 \Leftrightarrow 5=\alpha^2+\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2 \Leftrightarrow 5=\alpha^2+\frac{4}{\alpha^2} \Leftrightarrow \alpha^4-5\alpha^2+4=0 \Leftrightarrow$$

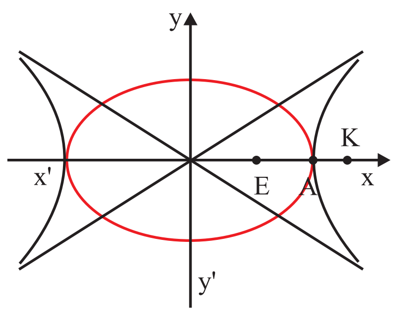
$$\alpha^2=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow \alpha^2=\frac{5\pm3}{2} \Leftrightarrow \alpha^2=4 \quad ή$$

$\alpha^2=1 \Leftrightarrow \alpha=2$ ή $\alpha=1$

όμως α > γ άρα $\alpha=2$ οπότε $\kappa=1$ και $\beta^2=3$

άρα:

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ η εξίσωση της C_1 και $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ η εξίσωση της C_2



β. • Η εφαπτομένη της C_2 στο σημείο της $N(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση :

$\frac{x_1x}{4}-y_1y=1 \Leftrightarrow x_1x-4y_1y=4$ και θα περνάει από το σημείο Ε (1, 0) αν και μόνο αν $x_1=4$

• Το $N(x_1,y_1)$ ανήκει στην C_2 άρα: $\frac{x_1^{\;2}}{4}-y_1^{\;2}=1 \Leftrightarrow 4-y_1^2=1 \Leftrightarrow y_1^{\;2}=3 \Leftrightarrow y_1=\pm\sqrt{3}$

οπότε αν:

i. $x_1=4$ και $y_1=\sqrt{3}$, τότε $4x-4\sqrt{3}y=4 \Leftrightarrow x-\sqrt{3}y=1$, η μια εφαπτομένη

ii. $x_1=4$ και $y_1=-\sqrt{3}$, τότε $4x+4\sqrt{3}y=4 \Leftrightarrow x+\sqrt{3}y=1$, η άλλη εφαπτόμενη

γ. • Η εφαπτομένη (δ) της C_1 στο $M\left(1,\frac{3}{2}\right)$ έχει εξίσωση $\frac{x}{4}+\frac{3\cdot y}{2\cdot 3}=1 \Leftrightarrow x+2y-4=0$

• Ο C έχει κέντρο Σ(–1,2) και επειδή η (δ) εφάπτεται του C θα ισχύει:

$$d(\Sigma,\delta)=\rho \Leftrightarrow \frac{|-1+4-4|}{\sqrt{1+4}}=\rho \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}=\rho \Leftrightarrow \rho=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

15.α. Βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει κορυφή το σημείο Α(4,0) και

i. Έχει εκκεντρότητα ε=2.

ii. Έχει ασύμπτωτη την ευθεία y=2x.

iii. Περνάει από το σημείο Μ(8,3).

β. Βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει εστία Ε(4,0) και

i. Έχει εκκεντρότητα ε=5/4.

ii. Έχει ασύμπτωτη y=–1/2 x.

iii. Περνάει από το σημείο $M\left(10,3\sqrt{15}\right)$.

γ. Βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει εστίες στον x΄x και

i. Έχει ασύμπτωτη την y=3/4 x και περνάει από το σημείο Μ(4,1).

ii. Έχει εκκεντρότητα ε=5/3 και περνάει από το σημείο $M\left(4,\frac{4\sqrt{7}}{3}\right)$.

Λύση

α. Έστω $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ η εξίσωση της υπερβολής (αφού έχει κορυφή στον x΄x) $\alpha=4$ και

i. Ισχύει $\varepsilon=2\Leftrightarrow\frac{\gamma}{\alpha}=2\Leftrightarrow\gamma=8$. Όμως $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2\Leftrightarrow 64=16+\beta^2\Leftrightarrow\beta^2=48$ οπότε $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1$ η ζητούμενη εξίσωση.

ii. Η $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ είναι ασύμπτωτη της υπερβολής όμως εμάς μας δίνεται ότι είναι η $y=2x$ άρα $\frac{\beta}{\alpha}=2\Leftrightarrow\beta=8$ οπότε $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$ η ζητούμενη εξίσωση.

iii. Το $M(8,3)$ ανήκει στην υπερβολή άρα:

$$\frac{64}{\alpha^2}-\frac{9}{\beta^2}=1\Leftrightarrow 4-\frac{9}{\beta^2}=1\Leftrightarrow 3=\frac{9}{\beta^2}\Leftrightarrow\beta^2=3$$

Άρα $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{3}=1$ η ζητούμενη εξίσωση.

β. Έστω $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ η εξίσωση της υπερβολής (αφού έχει εστία στον x΄x) τότε $\gamma=4$ και

i. $\varepsilon=\frac{5}{4}\Leftrightarrow\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{5}{4}\Leftrightarrow 4\gamma=5\alpha\Leftrightarrow\alpha=\frac{16}{5}$ ακόμα

$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2\Leftrightarrow\beta^2=\gamma^2-\alpha^2=16-\frac{256}{25}=\frac{144}{25}$ άρα $\frac{25x^2}{256}-\frac{25y^2}{144}=1$ η ζητούμενη εξίσωση.

ii. Η $y=\frac{-\beta}{\alpha}x$ είναι ασύμπτωτη της υπερβολής όμως εμάς μας δίνεται ότι είναι η $y=\frac{-1}{2}x$ άρα:

$-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\alpha=2\beta\Leftrightarrow\alpha^2=4\beta^2\Leftrightarrow\gamma^2-\beta^2=4\beta^2\Leftrightarrow 16=5\beta^2\Leftrightarrow\beta^2=\frac{16}{5}$ οπότε

$\alpha^2=\frac{64}{5}$ άρα $\frac{5x^2}{64}-\frac{5y^2}{16}=1$ η ζητούμενη εξίσωση.

iii. Το σημείο $M\left(10,3\sqrt{15}\right)$ ανήκει στην υπερβολή άρα:

$\frac{100}{\alpha^2}-\frac{135}{\beta^2}=1\Leftrightarrow 100\beta^2-135\alpha^2=\alpha^2\beta^2\Leftrightarrow 100\beta^2-135\left(\gamma^2-\beta^2\right)=\left(\gamma^2-\beta^2\right)\beta^2\Leftrightarrow$

$100\beta^2-135\left(25-\beta^2\right)=25\beta^2-\beta^4\Leftrightarrow\beta^4+210\beta^2-3375=0\Leftrightarrow$

$\beta^2=\frac{-210\pm\sqrt{57600}}{2}\Leftrightarrow\beta^2=\frac{-210\pm 240}{2}\Leftrightarrow\beta^2=15$

Άρα $\alpha^2=10$ οπότε $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{15}=1$ η ζητούμενη εξίσωση.

γ. Έστω $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ η εξίσωση της υπερβολής (αφού έχει εστίες στον x΄x) και

i. • Έχει ασύμπτωτη την $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ όμως μας δίνεται ότι είναι η $y=\frac{3}{4}x$ άρα:

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow 3\alpha=4\beta\Leftrightarrow \alpha=\frac{4\beta}{3}\Leftrightarrow \alpha^2=\frac{16\beta^2}{9}$$

• Το $M(4,1)$ ανήκει στην υπερβολή άρα:

$$\frac{16}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}=1\Leftrightarrow \frac{16\cdot 9}{16\beta^2}-\frac{1}{\beta^2}=1\Leftrightarrow \frac{8}{\beta^2}=1\Leftrightarrow \beta^2=8$$

Άρα $\alpha^2=\frac{128}{9}$ άρα $\frac{9x^2}{128}-\frac{y^2}{8}=1$ η εξίσωση της υπερβολής.

iii. • Έχει εκκεντρότητα: $\varepsilon=\frac{5}{3}\Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha}=\frac{5}{3}\Leftrightarrow 3\gamma=5\alpha\Leftrightarrow 9\gamma^2=25\alpha^2\Leftrightarrow$

$$9\left(\alpha^2+\beta^2\right)=25\alpha^2\Leftrightarrow 9\beta^2=16\alpha^2\Leftrightarrow \beta^2=\frac{16\alpha^2}{9}.$$

• Το $M\left(4,\frac{4\sqrt{7}}{3}\right)$ ανήκει στην υπερβολή άρα:

$$\frac{16}{\alpha^2}-\frac{16\cdot 7}{9\frac{16\alpha^2}{9}}=1\Leftrightarrow \frac{16}{\alpha^2}-\frac{7}{\alpha^2}=1\Leftrightarrow \alpha^2=9 \text{ οπότε } \beta^2=16$$

Άρα $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ η εξίσωση της υπερβολής.

16. Δίνεται η παραβολή $y=\frac{1}{2}x^2$ $\left(x^2=2y,\ \rho=1\right)$ και ένα σημείο της Κ. Να υπολογιστούν:

i. Οι συντεταγμένες του Λ, όπου Λ το σημείο τομής της εφαπτομένης της παραβολής στο Κ με τον xx΄.

ii. Το εμβαδόν του ΟΛΚ τριγώνου.

iii. Να δειχτεί ότι το ύψος του τριγώνου ΟΛΚ από την κορυφή Λ περνά από σταθερό σημείο.

Λύση

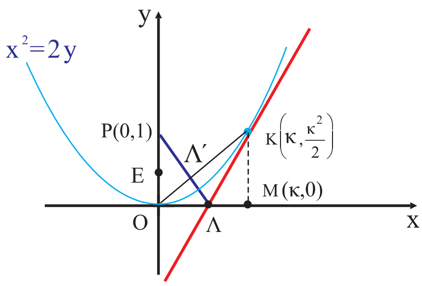
i. Αν κ η τετμημένη του Κ τότε αυτό έχει τεταγμένη $\frac{\kappa^2}{2}$ άρα $K\left(\kappa,\frac{\kappa^2}{2}\right)$

Η εφαπτομένη στο Κ της παραβολής έχει εξίσωση $xx_1=y+y_1$, δηλαδή:

$$x\kappa = y + \frac{\kappa^2}{2} \Leftrightarrow \kappa x - y - \frac{\kappa^2}{2} = 0 \ \ (1)$$

Για $y=0$ η (1) δίνει $x=\frac{\kappa}{2}$ άρα η (1) τέμνει τον $x'x: \Lambda\left(\frac{\kappa}{2},0\right)$.

Σχόλιο: Το γεγονός ότι η τετμημένη του Λ είναι ίση με το μισό της τετμημένης του Κ αποτελεί χαρακτηριστική ιδιότητα κάθε παραβολής $x^2=2\rho y$.



ii. $(O\Lambda K) = \frac{O\Lambda \cdot KM}{2} = \frac{\frac{|\kappa|}{2}\frac{\kappa^2}{2}}{2} = \frac{|\kappa|}{8}$

iii. $\lambda_{OK} = \frac{\kappa}{2}$, οπότε $\lambda_{\Lambda\Lambda'} = \frac{-2}{\kappa}$, $\kappa \neq 0$ οπότε:

$\Lambda\Lambda': y = \frac{-2}{\kappa}\left(x - \frac{\kappa}{2}\right) \Leftrightarrow (y-1)\kappa + 2x = 0$ που είναι η οικογένεια ευθειών που διέρχεται από το σημείο $B(0,1)$ αφού: $\begin{cases} 2x=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$.

17. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-2,2)$ και $\vec{\beta}=(3,2)$

α. Βρείτε το διάνυσμα: $\vec{\gamma} = \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}-\vec{\beta}}\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)$

β. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στο $\vec{\gamma}$ και περνάει από το σημείο Α(2003, 2003).

γ. Αν $\vec{\delta}=(5,4)$ και η ευθεία (ε): $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\delta}\right|x+3y=\lambda$ σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 3/20 τ.μ., βρείτε το λ > 0.

δ. Βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει εστία το σημείο που η (ε) τέμνει τον y΄y και έχει ασύμπτωτη την ευθεία $y=\sqrt{2}x$.

Λύση

α. Ισχύουν:
- $|\vec{\alpha}| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{8}$
- $|\vec{\beta}| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$
- $\vec{\alpha}-\vec{\beta} = (-2,2)-(3,2) = (-5,0)$ άρα $\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right| = 5$

Ισχύει: $\pi\rho o\beta_{(\vec{\alpha}-\vec{\beta})}\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right) // \left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)$ άρα $\pi\rho o\beta_{(\vec{\alpha}-\vec{\beta})}\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right) = \lambda\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)$ (1)

$(\vec{\alpha}-\vec{\beta})(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\pi\rho o\beta_{(\vec{\alpha}-\vec{\beta})}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$ και από (1)

$\vec{\alpha}^2-\vec{\beta}^2=(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\lambda(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|^2-|\vec{\beta}|^2=\lambda|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2\Leftrightarrow 8-13=\lambda 25\Leftrightarrow -5=25\lambda$

$\lambda=-1/5$, οπότε από (1): $\pi\rho o\beta_{(\vec{\alpha}-\vec{\beta})}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=-\frac{1}{5}(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=-\frac{1}{5}(-5,0)=(1,0)=\vec{\gamma}$

β. Το $\vec{\gamma}$ έχει συντελεστή διεύθυνσης λ = 0, άρα η κάθετη ευθεία στον φορέα του θα έχει εξίσωση της μορφής $x=x_0$ και επειδή περνάει από το Α θα είναι η $x=2003$.

γ. Ισχύει $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\delta}=(-2,2)+(3,2)+(5,4)=(6,8)$ άρα $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\delta}|=\sqrt{6^2+8^2}=10$ οπότε

(ε): $10x+3y=\lambda$ που τέμνει τον x΄x στο $B\left(\frac{\lambda}{10},0\right)$ και τον y΄y στο $\Gamma\left(0,\frac{\lambda}{3}\right)$.

Ισχύει: $(OB\Gamma)=\frac{3}{20}\Leftrightarrow\frac{1}{2}(OB)\cdot(O\Gamma)=\frac{3}{20}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot\frac{|\lambda|}{10}\cdot\frac{|\lambda|}{3}=\frac{3}{20}\Leftrightarrow\lambda^2=9\Leftrightarrow\lambda=\pm3$

Άρα: $\lambda=3>0$

δ. Αφού η υπερβολή C΄ έχει εστία στον y΄y θα έχει εξίσωση: $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$, εστία

Ε (0, γ) με $\gamma=1$ και ασύμπτωτη:

$y=\frac{\alpha}{\beta}x$, άρα $\frac{\alpha}{\beta}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\alpha^2=2\beta^2\Leftrightarrow\gamma^2-\beta^2=2\beta^2\Leftrightarrow\gamma^2=3\beta^2\Leftrightarrow 1=3\beta^2\Leftrightarrow\beta^2=\frac{1}{3}$

Άρα $\alpha^2=\frac{2}{3}$ οπότε $\frac{3y^2}{2}-3x^2=1$ η ζητούμενη εξίσωση

18. Δίνεται η ευθεία ε: Αx+Βy+γ=0 με ΑΒ>0 και ΑΓ<0.

i. Να αποδειχθεί ότι η ευθεία ε τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y σε σημεία Κ, Λ που ανήκουν στους θετικούς ημιάξονες Οx και Οy.

ii. Υποθέτουμε ότι η ευθεία ε μεταβάλλεται ώστε να ισχύει πάντα $(OK)+(O\Lambda)=\lambda$, όπου λ>0 σταθερός. Να αποδειχθεί ότι:

α. $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{\lambda}{\Gamma}=0$

β. Η μεσοκάθετος στο ΚΛ περνάει από σταθερό σημείο.

γ. Οι κύκλοι με διάμετρο ΚΛ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία. Για ποια τιμή του λ ο κύκλος περνάει πάντα από το σημείο (2004,2004);

Λύση:

i. Για $y=0$ από την εξίσωση της ευθείας έχουμε: $Ax+\Gamma=0\Leftrightarrow x=-\frac{\Gamma}{A}$

Άρα η ε τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $K\left(-\dfrac{\Gamma}{A},0\right)$. Όμοια για $x=0$ βρίσκουμε $By+\Gamma=0 \Leftrightarrow y=-\dfrac{\Gamma}{B}$. Άρα η ε τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $\Lambda\left(0,-\dfrac{\Gamma}{B}\right)$.

Επειδή ΑΓ<0 είναι $\dfrac{\Gamma}{A}<0 \Leftrightarrow -\dfrac{\Gamma}{A}>0 \Leftrightarrow x_K>0$.
Άρα το σημείο Κ ανήκει στον θετικό ημιάξονα Ox.
Επειδή ΑΒ>0 και ΑΓ<0 συνεπάγεται $AB\cdot A\Gamma<0$ δηλαδή $A^2B\Gamma<0$, επομένως

$$B\Gamma<0 \Leftrightarrow \frac{\Gamma}{B}<0 \Leftrightarrow -\frac{\Gamma}{B}>0 \Leftrightarrow y_K>0$$

Άρα το σημείο Λ ανήκει στον θετικό ημιάξονα Oy.

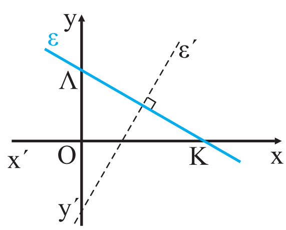
ii.α. $(OK)+(O\Lambda)=\lambda \Leftrightarrow \left|-\dfrac{\Gamma}{A}\right|+\left|-\dfrac{\Gamma}{B}\right|=\lambda$ και επειδή $-\dfrac{\Gamma}{A}>0$, $-\dfrac{\Gamma}{B}>0$ η σχέση γίνεται: $-\dfrac{\Gamma}{A}-\dfrac{\Gamma}{B}=\lambda \Leftrightarrow \dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}+\dfrac{\lambda}{\Gamma}=0$.

β. Αν Κ(α,0), Λ(0,β) τα σημεία τομής τότε το μέσο του ΚΛ είναι το σημείο $M\left(\dfrac{x_K+x_\Lambda}{2},\dfrac{y_K+y_\Lambda}{2}\right)$, δηλαδή $M\left(\dfrac{\alpha}{2},\dfrac{\beta}{2}\right)$.

Από τη σχέση $(OK)+(O\Lambda)=\lambda$ προκύπτει $\alpha+\beta=\lambda \Leftrightarrow \beta=\lambda-\alpha$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΚΛ είναι $\lambda_\varepsilon=\dfrac{0-\beta}{\alpha-0}=-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Αν ε΄ η μεσοκάθετη ευθεία στο ΚΛ τότε:



$$\varepsilon\perp\varepsilon' \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{\varepsilon'}=-1 \Leftrightarrow -\frac{\beta}{\alpha}\lambda_{\varepsilon'}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon'}=\frac{\alpha}{\beta}$$

και επειδή η ε΄ περνάει από το Μ θα έχει εξίσωση:

$$\varepsilon':\ y-\frac{\beta}{2}=\frac{\alpha}{\beta}\left(x-\frac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow 2\beta y-\beta^2=2\alpha x-\alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$2(\lambda-\alpha)y-2\alpha x+(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=0 \Leftrightarrow 2\lambda y-2\alpha y-2\alpha x+\lambda(2\alpha-\lambda)=0 \Leftrightarrow$$

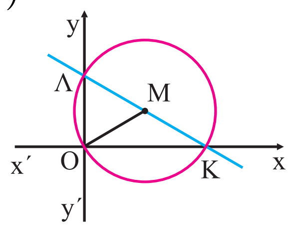
$$2\lambda y-2\alpha y-2\alpha x+2\lambda\alpha-\lambda^2=0 \Leftrightarrow -2\alpha(x+y-\lambda)+\lambda(2y-\lambda)=0.$$

Για να περνάει η ευθεία από ένα σταθερό σημείο αρκεί να υπάρχει ζεύγος (x,y) που επαληθεύει τις σχέσεις: $x+y-\lambda=0$ και $2y-\lambda=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{\lambda}{2}$ και

$$x=\frac{\lambda}{2}.$$

Άρα η ευθεία ε΄ περνάει πάντα από το σημείο $\left(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2}\right)$.

γ. Ο κύκλος με διάμετρο ΚΛ έχει κέντρο το μέσο $M\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right)$ του ΚΛ και ακτίνα:



$$\rho=(OM)=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}.$$

Επομένως ο κύκλος έχει εξίσωση: $C:\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\beta}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$$x^2-\alpha x+\frac{\alpha^2}{4}+y^2-\beta y+\frac{\beta^2}{4}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}\Leftrightarrow x^2+y^2-\alpha x-\beta y=0\Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2-\alpha x-(\lambda-\alpha)y=0\Leftrightarrow x^2+y^2-\lambda y+\alpha(y-x)=0.$$

Για να περνάει ο κύκλος από σταθερό σημείο αρκεί να υπάρχει ζεύγος (x,y) τέτοιο ώστε να επαληθεύει την εξίσωση για κάθε τιμή του α . Αυτό συμβαίνει μόνον όταν ισχύουν συγχρόνως οι σχέσεις:

$$y-x=0 \quad \text{και} \quad x^2+y^2-\lambda y=0\Leftrightarrow y=x \quad \text{και} \quad 2x^2-\lambda x=0\Leftrightarrow y=x \quad \text{και}$$

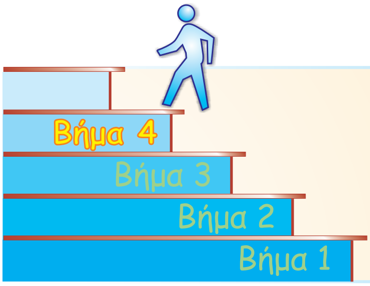
$$x(2x-\lambda)=0\Leftrightarrow y=x \ \text{και}\ \left(x=0 \quad \text{ή} \quad x=\frac{\lambda}{2}\right).$$

Άρα $(x,y)=(0,0)$ ή $(x,y)=\left(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2}\right)$, δηλαδή ο κύκλος C περνάει πάντα από τα σταθερά σημεία O(0,0) και $A\left(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2}\right)$.

Για να περνάει ο κύκλος πάντα από το σημείο (2004,2004) πρέπει το σημείο αυτό να ταυτίζεται με το Α . Επομένως $\frac{\lambda}{2}=2004\Leftrightarrow\lambda=4008$.

Παρατήρηση

Επειδή το τρίγωνο ΟΚΛ είναι ορθογώνιο ο κύκλος με διάμετρο ΚΛ θα περνάει πάντα από το Ο . Δηλαδή το O(0,0) είναι, προφανώς, ένα από τα ζητούμενα σημεία και αρκεί να προσδιοριστεί το δεύτερο σημείο .



Λύνουμε μόνοι μας

1. **Δίνεται ο κύκλος** $c: x^2 + y^2 + 2x = 8$

α. **Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που είναι κάθετες στην ευθεία** $\varepsilon: x + y = 5$

β. **Βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το κέντρο του c και σχηματίζουν με τους άξονες συντεταγμένων τρίγωνο εμβαδού 3 τ.μ.**

γ. **Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζει στον c χορδή με μέσο το Α(1,-2).**

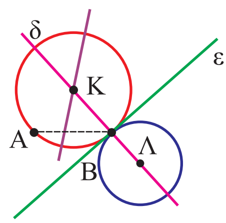
δ. **Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών που διέρχονται από το σημείο Β(-1, 1).**

2. **Δίνονται οι ευθείες:** $\varepsilon_\alpha: \alpha x - y = 0$ **και** $\zeta_\alpha: x + \alpha y = 2$.

α. **Δείξτε ότι για τις διάφορες τιμές του** $\alpha \in \mathbb{R}$ **οι ευθείες** ε_α **διέρχονται από σταθερό σημείο Α και οι ευθείες** ζ_α **διέρχονται από σταθερό σημείο Β και οι ευθείες θα διέρχονται από σταθερό σημείο Β τα οποία και να προσδιορίσετε.**

β. **Αν Μ(x,y) το σημείο τομής των ε_α, ζ_α δείξτε ότι για τις διάφορες τιμές του** $\alpha \in \mathbb{R}$ **το Μ κινείται σε κύκλο του οποίου να βρείτε την εξίσωση.**

3.α. **Βρείτε την εξίσωση του κύκλου c_1 που περνάει από το σημείο Α(1,3) και εφάπτεται της ευθείας** $(\varepsilon): 4x - 3y + 1 = 0$ **στο σημείο της** $B\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$.



β. **Δίνεται τώρα ο κύκλος** $c_2: x^2 + y^2 - 2x = 0$ **δείξτε ότι οι c_1, c_2 εφάπτονται και βρείτε το κοινό τους σημείο καθώς και την κοινή εφαπτομένη τους.**

4. **Δίνεται η παραβολή** $c: y^2 = 4x$ **και η ευθεία** $f: y = \lambda x - \lambda$ **με** $\lambda \in R$.

α. **Βρείτε για ποιες τιμές του λ η ευθεία f τέμνει την c σε δύο διαφορετικά σημεία.**

β. **Αν** $A(x_1, y_1)$ **και** $B(x_2, y_2)$ **τα κοινά σημεία των c και (f) δείξτε ότι:**

i. $x_1 x_2 = 1$ **ii.** $y_1 y_2 = -4$

iii. **Οι εφαπτομένες της c στα Α, Β τέμνονται κάθετα πάνω στην διευθετούσα (δ) της c.**

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5. **Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 2\rho x$ που περνάει από το σημείο $A(2,4)$.**

α. Δείξτε ότι η εστία της παραβολής είναι η Ε (2, 0).

β. Αν Ε΄ το συμμετρικό του Ε ως προς τον άξονα y΄y. Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{ME}^2 = \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{E'E}$.

γ. Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ευθειών που άγονται από το Α προς τον παραπάνω γεωμετρικό τόπο.

δ. Δείξτε ότι το συνημίτονο της οξείας γωνίας των εφαπτομένων ευθειών ισούται με $\frac{3}{5}$.

....

....

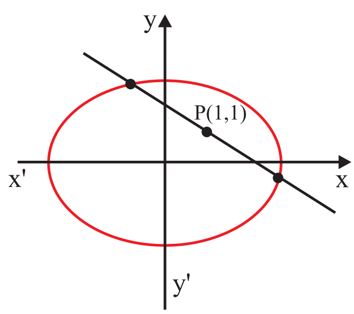
....

....

....

....

6. **Δίνονται τα σημεία Α(–2,0) και Β(2,0)**



α. Αποδείξτε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία το τρίγωνο ΑΒΜ έχει σταθερή περίμετρο 10 είναι έλλειψη.

β. Βρείτε την εξίσωση της χορδής της έλλειψης που έχει μέσο το σημείο P(1,1).

γ. Βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει

κορυφή την εστία της C και ασύμπτωτη την ΟΡ.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

7. **Δίνεται η παραβολή** $C: y^2 = 2\rho x$ **και η ευθεία (ε)** $3y = 2x + 2\rho$

α. **Βρείτε τα κοινά σημεία των (ε) και C έστω Α, Β.**

β. **Βρείτε τις εφαπτόμενες της C στα Α, Β έστω** ε_1, ε_2 **αντίστοιχα.**

γ. **Δείξτε ότι το σημείο τομής Γ των** (ε_1') **και** (ε_2') **που τέμνουν κάθετα τις** ε_1, ε_2 **στα Α, Β αντίστοιχα, βρίσκεται στην C.**

δ. **Βρείτε το εμβαδόν του ΑΒΓ τριγώνου.**

....

....

....

....

....

....

....

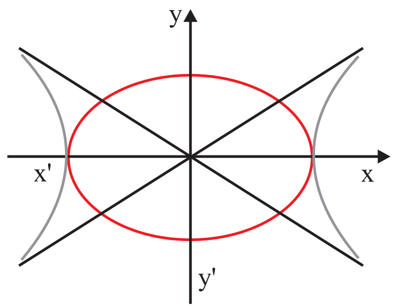
....

....

....

....

8. **Δίνεται η έλλειψη:** $C_1 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$



α. **Βρείτε την εξίσωση της υπερβολής C_2 που έχει εστίες τις κορυφές της C_1 και κορυφές τις εστίες της C_1.**

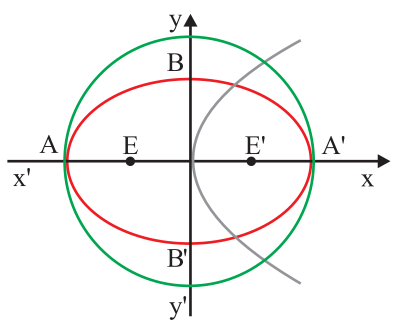
β. **Αν $M(x_0, y_0)$ κοινό σημείο των C_1, C_2 δείξτε ότι $9x_0^2 = 8y_0^2$.**

γ. **Δείξτε ότι οι εφαπτομένες των C_1, C_2 στο Μ. Έχουν συντελεστές διευθύνσεως με γινόμενο - 2.**

δ. **Βρείτε τις εφαπτομένες της C_1 που είναι παράλληλες προς την ασύμπτωτη της C_2 που βρίσκεται στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο.**

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

9. **Δίνεται ο κύκλος $C_1 : x^2 + y^2 = 5$ και η έλλειψη C_2 που έχει μεγάλο άξονα την διάμετρο του C_1 που ορίζει σ' αυτόν ο άξονας x΄x και η οποία τέμνει τον y΄y στο $B(0,2)$.**



α. **Βρείτε την εξίσωση της έλλειψης.**

β. **Βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία, την εστία της έλλειψης που βρίσκεται στον Οx ημιάξονα.**

γ. **Δείξτε ότι οι εφαπτομένες της παραβολής στα σημεία που αυτή τέμνει τον C_1 τέμνονται κάθετα στην άλλη εστία της έλλειψης.**

....

....

....

....

....

....

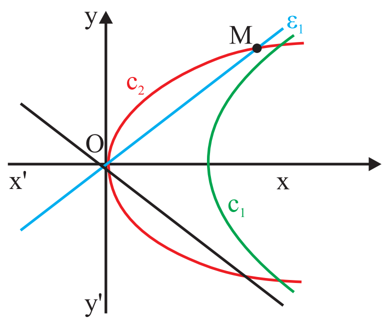
....

....

....

....

10. **Δίνεται η υπερβολή $C_1 : \frac{x^2}{\alpha^2} - y^2 = 1$ και η παραβολή C_2 που έχει εστία, την εστία της υπερβολής που βρίσκεται στον ημιάξονα Οx. Αν η εφαπτομένη της C_2 στο σημείο που την τέμνει η ασύμπτωτη της C_1 που έχει θετικό συντελεστή διευθύνσεως, τέμνει κάθετα το διάνυσμα $\vec{u} = (-1, \alpha^2)$, βρείτε τις εξισώσεις των C_1, C_2.**



....

....

....

....

....

....

....

....

....

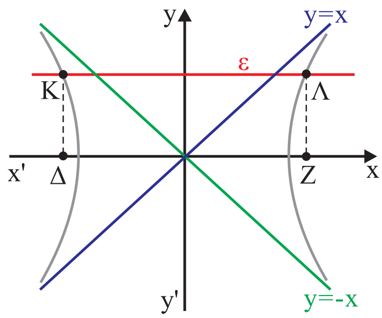
11. **Δίνονται η υπερβολή $C_1 : x^2 - y^2 = \alpha^2$ και η ευθεία (ε) $y = \sqrt{3}\alpha$ που τέμνει την C_1 στα Κ, Λ.**

1. Βρείτε τα Κ, Λ.

2. **Αν M τυχαίο σημείο του x΄x, δείξτε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ έχει σταθερό εμβαδόν.**

3. **Αν Δ, Z οι προβολές των Κ, Λ αντίστοιχα στον x΄x βρείτε τον γεωμετρικό τόπο C_2 των σημείων N του επιπέδου για τα οποία ισχύει $(N\Delta)+(NZ)=6\alpha$ και γράψτε την εξίσωσή του.**

4. **Βρείτε τις εκκεντρότητες των C_1, C_2.**



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

12. **Δίνεται η έλλειψη** $C_1: \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ **και η υπερβολή** $C_2: \frac{x^2}{\alpha}-\frac{y^2}{\beta}=\alpha-\beta$ **.**

Δείξτε ότι:

α. **Η έλλειψη και η υπερβολή έχουν τις ίδιες εστίες.**

β. **Αν** $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ **οι εκκεντρότητες των** C_1, C_2 **δείξτε ότι** $\varepsilon_1^2=\varepsilon_2^2\left(2-\varepsilon_2^2\right)$**.**

γ. **Αν** $M(x_0, y_0)$ **κοινό σημείο των** C_1, C_2 **δείξτε ότι οι εφαπτόμενες των** C_1, C_2 **στο M τέμνονται κάθετα.**

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

13. **Δίνεται υπερβολή με εστίες στον άξονα x΄x η οποία περνάει από το σημείο M(4,1) και έχει ασύμπτωτη την ευθεία $y=\frac{1}{2\sqrt{3}}x$.**

α. **Βρείτε την εξίσωση της υπερβολής και την εφαπτομένη της στο M έστω (ε).**

β. **Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2+y^2-2\alpha x+6y+3=0$ για κάθε $\alpha\in R$ παριστάνει κύκλο και εάν ο κύκλος αυτός εφάπτεται της (ε) βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα του εφόσον α>0.**

γ. **Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OKM.**

....

....

....

....

....

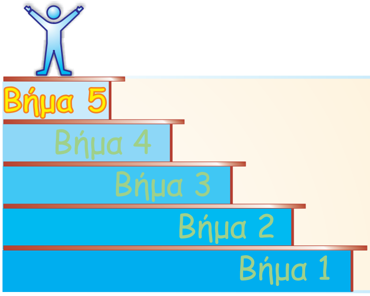
....

....

....

....

....



Ελέγχουμε τη γνώση μας

Θέμα 1ο

Αποδείξτε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$ στο σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1+yy_1=\rho^2$.

....

....

....

....

....

....

....

....

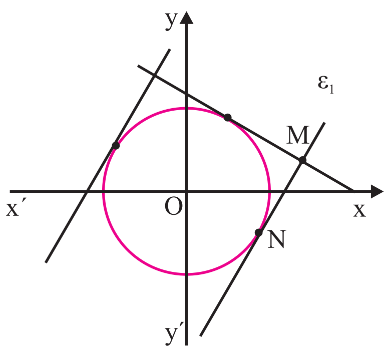
(Μονάδες 25)

Θέμα 2ο

α. Δείξτε ότι οι εφαπτόμενες του κύκλου $c: x^2+y^2=25$ οι οποίες άγονται από το σημείο $M(4\sqrt{2},3\sqrt{2})$ είναι κάθετες.

β. Βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει ευθεία το σημείο Ε στο οποίο τέμνει τον ημιάξονα Οx ο κύκλος.

γ. Βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες του κύκλου και της παραβολής.



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(Μονάδες 25)

Θέμα 3ο

α. Δίνεται η εξίσωση: $\left(\lambda^2+2\right)x^2+3\lambda y^2-6\lambda x+3\lambda y+4=0$ (I)

i. Βρείτε για ποια τιμή του $\lambda\in R$ παριστάνει κύκλο.

β. Δίνεται η εξίσωση: $x^2+y^2+\left(\mu-1\right)x+\mu y=\frac{\mu}{2}+\frac{1}{4}$ (II)

Δείξτε ότι:

i. Για κάθε τιμή του $\mu\in R$ η (II) παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

ii. Οι κύκλοι με εξίσωση την (II) περνάνε από δύο σταθερά σημεία από τα οποία το ένα είναι το κέντρο του κύκλου το **α.** ερωτήματος.

γ. Βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει εστία το άλλο σταθερό σημείο των κύκλων με εξίσωση την (II) και εκκεντρότητα $\varepsilon=2$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(Μονάδες 25)

Θέμα 4ο

Δίνονται οι εξισώσεις $d_1: x^2 + y^2 + 6x + 1 = 0$ και $d_2: y^2 = -4x$.

α. Δείξτε ότι η d_1 παριστάνει κύκλο και βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του. Βρείτε επίσης την εστία και την διαυθετούσα της παραβολής d_2.

β. Βρείτε τα κοινά σημεία Α και Β των d_1, d_2.

γ. Βρείτε τις εφαπτομένες ε_1 και ε_2 της d_2 στα Α, Β και δείξτε ότι εφάπτονται και στον κύκλο d_1.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(Μονάδες 25)