# Κεφάλαιο 2ο

## Ευθεία

**Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο της ευθείας θα πρέπει να είναι σε θέση:**

- ✓ Να βρίσκει τον συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας.
- ✓ Να διατυπώνει τις συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας δύο ευθειών, και να προσδιορίζει τις διάφορες μορφές της εξίσωσης ευθείας.
- ✓ Να μπορεί να γράφει το σύνολο των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και που αποτελείται από την κατακόρυφη ευθεία $x=x_0$ και τις κατακόρυφες ευθείες $y-y_0=\lambda(x-x_0)$, $\lambda\in R$. Την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$, με $x_1\neq x_2$, που δίνεται από τον τύπο $y-y_0=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_0)$, ο οποίος προκύπτει από την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από ένα σημείο και έχει γνωστό συντελεστή διεύθυνσης.
- ✓ Να αντιμετωπίζει το πρόβλημα της συγγραμμικότητας τριών σημείων διανυσματικά ή εξετάζοντας αν η εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα δύο σημεία επαληθεύεται και από τις συντεταγμένες του τρίτου σημείου.
- ✓ Να προσδιορίζει τη γωνία δύο ευθειών με τον προσδιορισμό της γωνίας αντίστοιχων παράλληλων διανυσμάτων.

## ΕΥΘΕΙΑ: Τύποι - Βασικές έννοιες

### Εξίσωση ευθείας

**α.** Η εξίσωση ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι:

$$\varepsilon: y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$

**β.** Η εξίσωση ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$

με $x_1 \neq x_2$ είναι: • $\varepsilon:\ y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, όπου $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \lambda_\varepsilon = \lambda_{\overline{AB}}$

ή • $x = x_1$ αν $x_2 = x_1$

**γ.** Η εξίσωση της ευθείας (ε) που τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0, β) είναι $\varepsilon:\ y = \lambda x + \beta$, όπου λ ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε)

**δ.** Η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο O(0, 0) και δεν είναι ο άξονας y΄y είναι: $\varepsilon:\ y = \lambda x$

**ε.** Η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $A(x_o, y_o)$ και είναι παράλληλη στον άξονα x΄x είναι: $\varepsilon: y = y_0$

**στ.** Η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $A(x_o, y_o)$ και είναι παράλληλη στον άξονα y΄y είναι: $\varepsilon: x = x_0$

### Η ΕΞΙΣΩΣΗ $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A \neq 0$ η $B \neq 0$

Κάθε ευθεία έχει εξίσωση της μορφής: $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A \neq 0$ η $B \neq 0$ (1) και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.

**Παρατηρήσεις:** Αν $B \neq 0$ τότε:

**α.** Η ευθεία με εξίσωση (1) έχει συντελεστή διεύθυνσης: $\lambda = -\dfrac{A}{B}$ .

**β.** Η ευθεία με εξίσωση (1) είναι παράλληλη στο μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{\delta}_1 = (B, -A)$ ή στο $\vec{\delta}_2 = (-B, A)$.

**γ.** Η ευθεία με εξίσωση (1) είναι κάθετη στο μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{k} = (A, B)$.

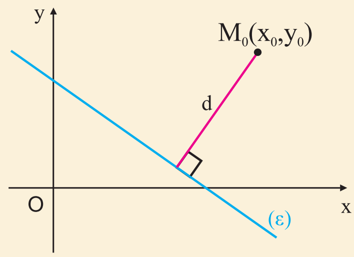
## Απόσταση σημείου απο ευθεία

**1.** Η απόσταση d ενός σημείου $M_0(x_0, y_0)$ από μία ευθεία με εξίσωση:

$$Ax + By + \Gamma = 0, \ |A| + |B| \neq 0$$

δίνεται από τον τύπο:

$$d = d(M_0, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$




## Εμβαδόν τριγώνου

**2.** Αν είναι γνωστές οι κορυφές τριγώνου ΑΒΓ, το εμβαδόν του δίνεται από τον τύπο:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})\right|$$

όπου $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})$ είναι η ορίζουσα των συντεταγμένων των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. Ισοδύναμα ισχύει: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{B\Gamma})\right| = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{\Gamma A}, \overrightarrow{\Gamma B})\right|$

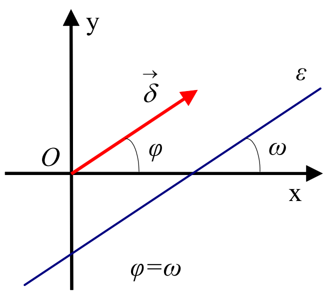

**ΘΕΩΡΙΑ 1** ***Αποδείξτε ότι:***

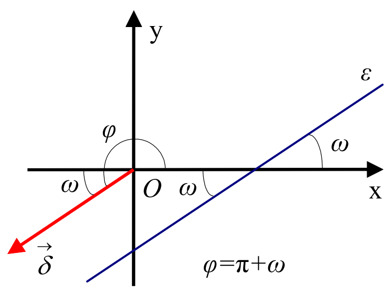
***"Όταν μια ευθεία και ένα διάνυσμα είναι παράλληλα, έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης".***

*Απόδειξη*

Έστω διάνυσμα $\vec{\delta}$ παράλληλο σε μια ευθεία $\varepsilon$. Αν $\varphi$ και $\omega$ είναι οι γωνίες που σχηματίζουν το διάνυσμα $\vec{\delta}$ και η ευθεία $\varepsilon$ με τον άξονα $x'x$ αντιστοίχως, τότε θα ισχύει $\varphi=\omega$ ή $\varphi=\pi+\omega$. Επομένως εφ$\varphi$ = εφ$\omega$. Άρα:

"Όταν μια ευθεία και ένα διάνυσμα είναι παράλληλα, έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης".




**ΘΕΩΡΙΑ 2** ***Αποδείξτε ότι:***

***ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία*** $A(x_1,y_1)$ ***και*** $B(x_2,y_2)$***, με*** $x_1 \neq x_2$ ***είναι*** $\lambda=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

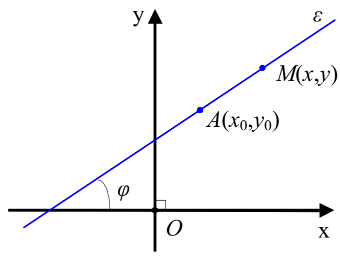
*Απόδειξη*

Έστω $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δύο σημεία της ευθείας $\varepsilon$.Τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $\varepsilon$ είναι ίσος με το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, δηλαδή ίσος με $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

**ΘΕΩΡΙΑ 3** ***Έστω $Oxy$ ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $A(x_0, y_0)$ ένα σημείο του επιπέδου. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.***

*Απόδειξη*

Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων $Oxy$ στο επίπεδο και $A(x_0, y_0)$ ένα σημείο του επιπέδου. Ζητάμε την εξίσωση της ευθείας $\varepsilon$ που διέρχεται από το σημείο $A$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda$. Ένα σημείο $M(x, y)$ διαφορετικό του $A(x_0, y_0)$ ανήκει στην $\varepsilon$, αν και μόνο αν, το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι παράλληλο στην ευθεία $\varepsilon$, δηλαδή αν και μόνο αν, το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ και η ευθεία $\varepsilon$ έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.




Επειδή $\overrightarrow{AM} = (x - x_0, y - y_0)$, έχουμε $\lambda_{\overrightarrow{AM}} = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$.

Επομένως, το σημείο $M(x, y)$ ανήκει στην $\varepsilon$, αν και μόνο αν, ισχύει:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \lambda \text{ ή } y - y_0 = \lambda(x - x_0).$$

Η τελευταία εξίσωση επαληθεύεται και από το σημείο $A(x_0, y_0)$. Άρα η εξίσωση της ευθείας $\varepsilon$ είναι:

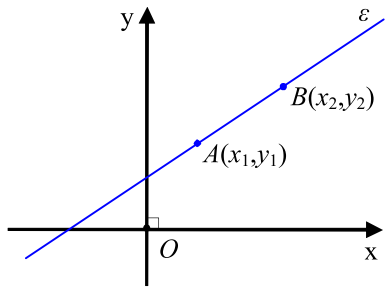
$$\boxed{y - y_0 = \lambda(x - x_0)}$$

**ΘΕΩΡΙΑ 4** ***Έστω $Oxy$ ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία του επιπέδου. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $\varepsilon$ που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.***

***Απόδειξη***

Έστω $\varepsilon$ η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.

Αν $x_1 \neq x_2$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ και επομένως η εξίσωση $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ γράφεται:




$$\boldsymbol{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

Όταν $x_1 = x_2 = x_0$ δηλαδή η ευθεία $\varepsilon$ είναι κατακόρυφη, δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας. Τότε η εξίσωση της κατακόρυφης ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ βρίσκεται αμέσως, αφού κάθε σημείο της $M$ έχει τετμημένη $x_0$. Δηλαδή η εξίσωσή της είναι: $\boxed{x = x_0}$.

**ΘΕΩΡΙΑ 5** ***Αποδείξτε ότι:***
***Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής***

$$Ax + By + \Gamma = 0 \quad \textbf{\textit{με}} \quad A \neq 0 \quad \textbf{\textit{ή}} \quad B \neq 0 \qquad \textbf{\textit{(1)}}$$

***και αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.***

***Απόδειξη***

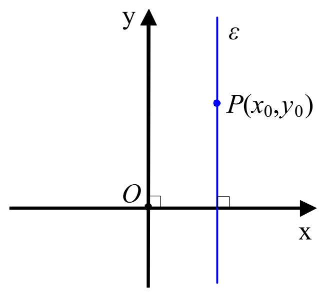
Έστω $\varepsilon$ μια ευθεία στο καρτεσιανό επίπεδο.

Αν η ευθεία $\varepsilon$ τέμνει τον άξονα $yy'$ στο σημείο $\Sigma(0, \beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda$, τότε θα έχει εξίσωση $y = \lambda x + \beta$, η οποία γράφεται

$$\lambda x + (-1)y + \beta = 0$$

Αν η ευθεία $\varepsilon$ είναι κατακόρυφη και διέρχεται από το σημείο $P(x_0, y_0)$, τότε θα έχει εξίσωση $x = x_0$, η οποία γράφεται ισοδύναμα :

$$x+0\cdot y+(-x_0)=0.$$




Βλέπουμε, δηλαδή, ότι και στις δύο περιπτώσεις η εξίσωση της ευθείας $\varepsilon$ παίρνει τη μορφή

$$Ax+By+\Gamma=0 \text{ με } A\neq 0 \text{ ή } B\neq 0.$$

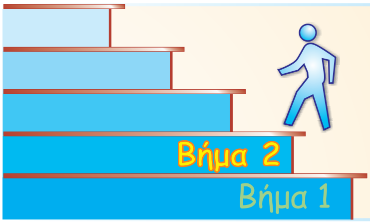
- Αντιστρόφως, έστω η εξίσωση

$$Ax+By+\Gamma=0 \quad \text{με} \quad A\neq 0 \quad \text{ή} \quad B\neq 0.$$

— Αν $B\neq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται $y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{\Gamma}{B}$, που είναι εξίσωση ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\dfrac{A}{B}$ και η οποία τέμνει τον άξονα $yy'$ στο σημείο $\left(0,-\dfrac{\Gamma}{B}\right)$.

— Αν $B=0$, τότε, λόγω της υπόθεσης, είναι $A\neq 0$ και η εξίσωση γράφεται $x=-\dfrac{\Gamma}{A}$, που είναι εξίσωση ευθείας που είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ στο σημείο του $P\left(-\dfrac{\Gamma}{A},0\right)$.

Έτσι σε όλες τις περιπτώσεις η εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ με $A\neq 0$ ή $B\neq 0$ παριστάνει ευθεία.

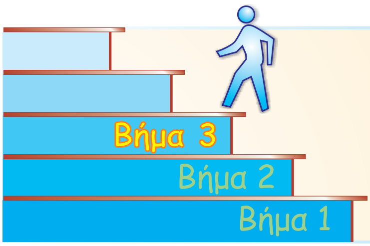



## Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις "κλειδιά"

### Α. Από το σχολικό βιβλίο

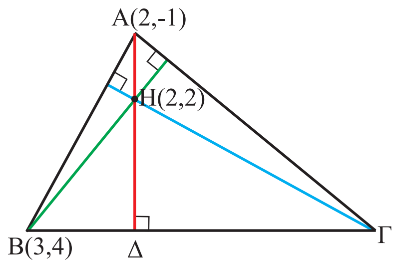
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.**

| | | |
|---|---|---|
| **§ 2.1:** | Α΄ Ομάδα: | 3, 7 |
| | Β΄ Ομάδα: | 1, 3, 5 |
| **§ 2.2** | Α΄ Ομάδα: | 4, 5, 6 |
| | Β΄ Ομάδα: | 1, 2, 4, 6 |
| **§ 2.3** | Α΄ Ομάδα: | 6, 8, 9, 10 |
| | Β΄ Ομάδα: | 1, 3, 4, 8, 10 |
| Γενικές ασκήσεις: | | 1, 2, 6 |




# Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

**1.** **Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Η ορθόκεντρό του. Αν είναι Α(2,–1), Β(3,4) και Η(2,2), να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ και τις συντεταγμένες της κορυφής Γ.**




**Λύση:**

$\lambda_{AB}=\dfrac{4+1}{3-2}=5$, άρα η ΑΒ έχει εξίσωση: $y+1=5(x-2)\Leftrightarrow 5x-y-11=0$

Επειδή $x_A=x_H=2$, η ΑΔ έχει εξίσωση: $x=2$.

Επειδή $B\Gamma\perp A\Delta$ και η ΒΓ διέρχεται από το Β(3,4), η ΒΓ έχει εξίσωση: $y=4$

Είναι $\lambda_{BH}=\dfrac{4-2}{3-2}=2$, οπότε $\lambda_{BH}\lambda_{A\Gamma}=-1\Leftrightarrow\lambda_{A\Gamma}=-\dfrac{1}{2}$, άρα η ΑΓ έχει εξίσωση:

$$y+1=-\frac{1}{2}(x-2)\Leftrightarrow 2y+2=-x+2\Leftrightarrow x+2y=0$$

Για να βρούμε τις συντεταγμένες του Γ λύνουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l}y=4\\ x+2y=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}y=4\\ x=-2y\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{array}{l}y=4\\ x=-8\end{array}\qquad \text{Άρα } \Gamma(-8,4).$$

**2.** **Δίνεται η εξίσωση: $(2\lambda-1)x+(\lambda-3)y+3\lambda+6=0$ (1), $\lambda\in\mathbb{R}$.**

**i.** **Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ η (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.**

**ii.** **Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την (1) διέρχονται από ένα σταθερό σημείο.**

**Λύση:**

**i.** Η (1) είναι εξίσωση της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$ με $A=2\lambda-1$ και $B=\lambda-3$.

Επειδή το σύστημα: $\begin{cases} 2\lambda-1=0 \\ \lambda-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\frac{1}{2} \\ \lambda=3 \end{cases}$ είναι αδύνατο άρα δεν υπάρχει

$\lambda\in R$ ώστε να είναι συγχρόνως A = 0 και B = 0.

Επομένως η (1) είναι εξίσωση ευθείας για κάθε $\lambda\in R$.

**ii.** Για $\lambda=0$ η (1) γίνεται: $-x-3y+6=0\ :(\varepsilon_1)$

Για $\lambda=1$ η (1) γίνεται: $x-2y+9=0\ :(\varepsilon_2)$

Βρίσκουμε το σημείο τομής των $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$:

$$\left.\begin{matrix} -x-3y+6=0 \\ x-2y+9=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} -5y+15=0 \\ x-2y+9=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y=-3 \\ x-2(-3)+9=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow y=3, x=-3$$

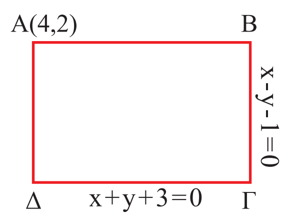
Άρα οι ευθείες $(\varepsilon_1)$ και $(\varepsilon_2)$ τέμνονται στο σημείο Μ(–3,3)

Το σημείο Μ(–3,3) επαληθεύει την (1) αφού:

$$-3(2\lambda-1)+3(\lambda-3)+3\lambda+6=0 \Leftrightarrow -6\lambda+3+3\lambda-9+3\lambda+6=0 \Leftrightarrow 0=0.$$

Άρα όλες οι ευθείες της εξίσωσης (1) διέρχονται από το σταθερό σημείο Μ(–3,3).

**3. Οι δύο πλευρές ορθογωνίου παρ/μου ΑΒΓΔ έχουν εξισώσεις: $x+y+3=0$ και $x-y-1=0$ και η μία κορυφή του Α(4,2). Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του ορθογωνίου καθώς και του σημείου τομής των διαγωνίων του.**




**Λύση:**

Το σημείο Α(4,2) δεν επαληθεύει τις δοθείσες εξισώσεις άρα πρόκειται για τις εξισώσεις των πλευρών ΒΓ και ΓΔ.

Έστω $\Gamma\Delta: x+y+3=0\ (1)$ και $B\Gamma: x-y-1=0\ (2)$. Οι συντεταγμένες του Γ είναι η λύση του συστήματος του (1) και (2).

Έχουμε: $\left.\begin{matrix} \Gamma\Delta: x+y+3=0 \\ B\Gamma: x-y-1=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x=-1 \\ y=-2 \end{matrix}\right\}$ Άρα $\Gamma(-1,-2)$.

$\lambda_{\Gamma\Delta}=-1=\lambda_{AB}\ (\Gamma\Delta // AB)$.

Άρα η ΑΒ έχει εξίσωση: $y-2=-1(x-4) \Leftrightarrow x+y-6=0$.

Οι συντεταγμένες του Β δίνονται από τη λύση του συστήματος: $\begin{cases} x+y-6=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$

Έχουμε: $\left.\begin{matrix} x+y-6=0 \\ x-y-1=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x=\frac{7}{2} \\ y=\frac{5}{2} \end{matrix}\right\}$ Άρα $B\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)$.

$\lambda_{B\Gamma}=1=\lambda_{A\Delta}$ $(A\Delta // B\Gamma)$.

Άρα η εξίσωση της ΑΔ είναι: $y-2=1(x-4) \Leftrightarrow x-y-2=0$

Οι συντεταγμένες του Δ δίνονται από την επίλυση του (Σ): $\left.\begin{matrix} x-y-2=0 \\ x+y+3=0 \end{matrix}\right\}$

Έχουμε: $\left.\begin{matrix} x-y-2=0 \\ x+y+3=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{5}{2} \end{matrix}\right\}$ Άρα $\Delta\left(-\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right)$.

Το σημείο τομής των διαγωνίων του είναι το μέσο τους. Το μέσο της ΒΔ είναι:

$$K\left(\frac{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}}{2},\frac{\frac{5}{2}-\frac{5}{2}}{2}\right) \quad ή \quad K\left(\frac{3}{2},0\right)$$

**4. Δίνεται η εξίσωση: $x^2-y^2+8x+16=0$.**

**i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει δύο ευθείες (η) και (θ).**
**ii. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (η) και (θ) είναι κάθετες.**
**iii. Να βρείτε σημείο Κ(α,β), $\alpha>0$ και $\beta>0$ τέτοιο ώστε το διάνυσμα $\vec{\delta}_1=(4,\alpha)$ να είναι παράλληλο προς μία από τις δύο ευθείες (η) και (θ) και το διάνυσμα $\vec{\delta}_2=(-8,2\beta)$ να είναι παράλληλο προς την άλλη ευθεία.**
**iv. Να βρείτε την εξίσωση κύκλου που διέρχεται από το σημείο Κ και το κέντρο του βρίσκεται στην αρχή των αξόνων Ο(0,0).**

**Λύση:**

i. $x^2-y^2+8x+16=0 \Leftrightarrow (x^2+8x+16)-y^2=0 \Leftrightarrow (x+4)^2-y^2=0 \Leftrightarrow$

$(x+4-y)(x+4+y)=0 \Leftrightarrow x+4-y=0$ ή $x+4+y=0$

Άρα οι ευθείες είναι οι $(\eta): x-y+4=0$ και $(\theta): x+y+4=0$.

**ii.** $$\left.\begin{aligned}\lambda_\eta=-\frac{1}{-1}=1\\ \lambda_\theta=-\frac{1}{1}=-1\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow \lambda_\eta\cdot\lambda_\theta=-1\Leftrightarrow(\eta)\perp(\theta)$$

**iii.** $\vec{\delta}_1=(4,\alpha)$ και $\lambda_{\vec{\delta}_1}=\frac{\alpha}{4}$. Έχουμε: $\vec{\delta}_1 // \eta\Leftrightarrow\lambda_{\vec{\delta}_1}=\lambda_\eta\Leftrightarrow\frac{\alpha}{4}=1\Leftrightarrow\alpha=4$

$\vec{\delta}_2=(-8,2\beta)$ και $\lambda_{\vec{\delta}_2}=-\frac{2\beta}{8}=-\frac{\beta}{4}$.

Έχουμε: $\vec{\delta}_2 // \theta\Leftrightarrow\lambda_{\vec{\delta}_2}=\lambda_\theta\Leftrightarrow-\frac{\beta}{4}=-1\Leftrightarrow\beta=4$. Άρα $K(4,4)$.

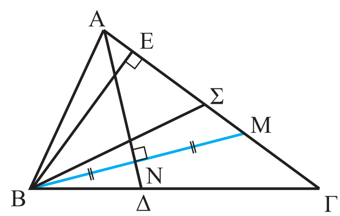
**iv.** Αν ρ είναι η ακτίνα του κύκλου, τότε:

$$\rho=|\overrightarrow{KO}| \text{ ή } \rho=\sqrt{4^2+4^2}\Leftrightarrow\rho=\sqrt{32}\Leftrightarrow\rho=4\sqrt{2}$$

Άρα η εξίσωση του κύκλου θα είναι: $x^2+y^2=\left(4\sqrt{2}\right)^2$

**5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου γνωρίζουμε:**

- **την εξίσωση της διχοτόμου ΑΔ:** $3x+y=10$
- **την εξίσωση του ύψους ΒΕ:** $x-y=6$
- **την εξίσωση της διάμεσου ΒΣ:** $13x-3y=8$




**Να βρείτε:**

**α. Τις συντεταγμένες της κορυφής Β.**
**β. Το συμμετρικό του Β ως προς την ΑΔ έστω Μ.**
**γ. Την εξίσωση της ΑΓ.**
**δ. Τις συντεταγμένες των κορυφών Α και Γ.**

**Λύση:**

**α.** Οι συντεταγμένες της κορυφής Β δίνονται από την λύση του συστήματος:

$$\begin{cases}x-y=6\\13x-3y=8\end{cases}$$

Έχουμε: $\begin{cases}x-y=6\\13x-3y=8\end{cases}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-7\end{cases}$. Άρα $B(-1,-7)$.

**β.** *Εύρεση της εξίσωσης της ΒΜ*

$BM\perp A\Delta\Leftrightarrow\lambda_{BM}\lambda_{A\Delta}=-1\Leftrightarrow\lambda_{BM}(-3)=-1\Leftrightarrow\lambda_{BM}=\frac{1}{3}$ άρα η εξίσωση της ΒΜ είναι $y+7=\frac{1}{3}(x+1) \Leftrightarrow 3y+21=x+1 \Leftrightarrow -x+3y+20=0$

Για την εύρεση των συντεταγμένων του μέσου Ν του ΒΜ λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases}-x+3y=-20\\3x+y=10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3x+9y=-60\\3x+y=10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}10y=-50\\x=3y+20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-5\\x=5\end{cases}$$ , άρα N(5,-5).

*Εύρεση των συντεταγμενων του Μ*

Αν Μ(α,β) τότε το μέσο του ΒΜ γράφεται και $N\left(\frac{\alpha-1}{2},\frac{\beta-7}{2}\right)$ ,όμως N(5,-5),οπότε $\frac{\alpha-1}{2}=5$ και $\frac{\beta-7}{2}=-5 \Leftrightarrow \alpha=11$ και $\beta=-3$ , άρα M(11,-3).

**γ.** Επειδή ΑΔ διχοτόμος και Μ το συμμετρικό του Β ως προς την ΑΔ (γνωρίζουμε από τη Γεωμετρία) το Μ βρίσκεται πάνω στην ΑΓ.

Ισχύει $BE \perp A\Gamma$ άρα : $\lambda_{A\Gamma}\lambda_{BE}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Gamma}1=-1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Gamma}=-1$

Η εξίσωση της ΑΓ είναι: $y+3=-(x-11) \Leftrightarrow y=-x+8$

**δ.** Οι συντεταγμένες του Α βρίσκονται από την επίλυση του συστήματος:

$$\begin{cases}3x+y=10\\x+y=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x+y=10\\-x-y=-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x=2\\y=8-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=7\end{cases}$$ άρα Α(1,7).

Το Γ ανήκει στην ΑΓ: y=–x+8, άρα θα είναι της μορφής Γ(α,-α+8) οπότε το μέσο Σ της ΑΓ είναι το $\Sigma\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{-\alpha+15}{2}\right)$. Το Σ ανήκει και στην $B\Sigma: 13x-3y=8$

οπότε: $13\frac{\alpha+1}{2}-3\frac{15-\alpha}{2}=8 \Leftrightarrow 13\alpha+13-45+3\alpha=16 \Leftrightarrow 16\alpha=48 \Leftrightarrow \alpha=3$ .

Οπότε : Γ(3,5).

**6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Γ(2,3), $\upsilon_\alpha: 3x-5y+6=0$ και $\mu_\alpha: x-11y+2=0$ . Βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του.**

**Λύση**

Για την εύρεση των συντεταγμένων του Α λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases}3x-5y=-6\\x-11y=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x-5y=-6\\-3x+33y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}28y=0\\x=-2+11y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\x=-2\end{cases}$$ , άρα Α(-2,0)

*Εύρεση της εξίσωσης της ΑΓ*

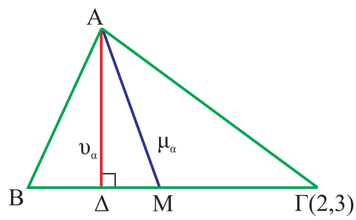
Ισχύει $\lambda_{A\Gamma} = \dfrac{3-0}{2-(-2)} = \dfrac{3}{4}$ άρα $A\Gamma:\ y = \dfrac{3}{4}(x+2)$.

*Εύρεση της εξίσωσης της ΒΓ*

Ισχύει: $\upsilon_\alpha \perp B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{\upsilon_\alpha}\lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \dfrac{3}{5}\lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{B\Gamma} = \dfrac{-5}{3}$ άρα $B\Gamma:\ y-3 = -\dfrac{5}{3}(x-2)$.

*Εύρεση των συντεταγμένων του Β*

Το Β ανήκει στην ΒΓ άρα θα είναι της μορφής $B\left(\alpha, \dfrac{-5\alpha+19}{3}\right)$ οπότε το μέσο της ΒΓ θα είναι το $M\left(\dfrac{\alpha+2}{2}, \dfrac{28-5\alpha}{6}\right)$ το οποίο ανήκει στην




$\mu_\alpha : x-11y+2=0$ οπότε:

$\dfrac{\alpha+2}{2} - 11\dfrac{28-5\alpha}{6} + 2 = 0 \Leftrightarrow 3(\alpha+2) - 11(28-5\alpha) + 12 = 0 \Leftrightarrow$

$3\alpha + 6 - 308 + 55\alpha + 12 = 0 \Leftrightarrow 58\alpha = 290 \Leftrightarrow \alpha = 5$ άρα Β(5,-2).

*Εύρεση της εξίσωσης της ΑΒ*

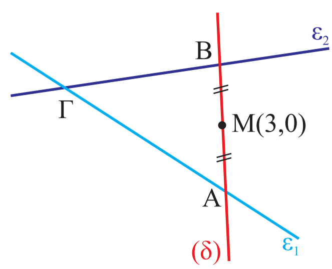
Ισχύει $\lambda_{AB} = \dfrac{-2-0}{5-(-2)} = \dfrac{-2}{7}$, άρα $AB:\ y = -\dfrac{2}{7}(x+2)$ .

**7. Δίνονται οι ευθείες:**

$(\varepsilon_1): y = 2x-3$ **και** $(\varepsilon_2): y+x+3=0$

**α. Βρείτε την ευθεία (δ) που περνάει από το Μ(3, 0) και τέμνει τις $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ στα Α, Β αντίστοιχα ώστε το Μ να είναι μέσο του ΑΒ.**

**β. Αν Γ το κοινό σημείο των $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ βρείτε το εμβαδόν του ΑΒΓ.**




**Λύση:**

**α. Εύρεση της εξίσωσης ΑΒ.**

Το Α ανήκει στην $\varepsilon_1 : y = 2x-3$ άρα θα είναι την μορφής Α(α,2α–3). Το Β ανήκει στην $\varepsilon_2 : y = -x-3$, άρα θα είναι την μορφής Β(β,–β–3) οπότε το μέσο του

ΑΒ θα είναι το $M\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{2\alpha-\beta-6}{2}\right)$ όμως μας δίνεται ότι το Μ είναι Μ (3, 0) άρα:

$$\begin{cases}\frac{\alpha+\beta}{2}=3\\ \frac{2\alpha-\beta-6}{2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=6\\ 2\alpha-\beta=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3\alpha=12\\ \beta=2\alpha-6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=4\\ \beta=2\end{cases}$$ , οπότε: $A(4, 5)$, $B(2,-5)$

και $\lambda_{AB}=\frac{5-(-5)}{4-2}=\frac{10}{2}=5$ , άρα η ΑΒ έχει εξίσωση: $y=5(x-3)\Leftrightarrow y=5x-15$.

**β.** Για την εύρεση των συντεταγμένων του Γ λύνουμε το σύστημα:

$\begin{cases}\varepsilon_1: y=2x-3\\ \varepsilon_2: y=-x-3\end{cases}$ , που έχει λύση $\begin{cases}x=0\\ y=-3\end{cases}$, οπότε Γ(0, -3).

*Έυρεση του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ*

Ισχύουν $\overrightarrow{A\Gamma}=(-4,-8)$ και $\overrightarrow{AB}=(-2,-10)$ οπότε:

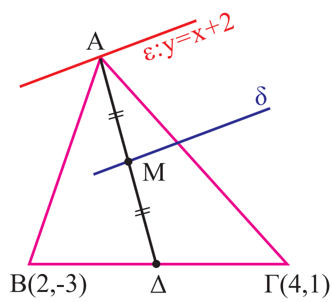
$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\det\left(\overrightarrow{A\Gamma},\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}=\begin{vmatrix}-4 & -8\\ -2 & -10\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(40-16)=12\,\tau.\mu.$$

**8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Β(2, -3) και Γ(4, 1) ενω η κορυφή Α κινείται στην ευθεία $\varepsilon: x-y+2=0$ και Μ το μέσο της διαμέσου ΑΔ**

**α. Δείξτε ότι το Μ κινείται σε ευθεία (δ) παράλληλη στην (ε).**

**β. Βρείτε την απόσταση του Μ από την (ε).**

**γ. Αν (ΑΒΓ) = 10τ.μ. βρείτε το Μ.**




**Λύση**

**α.** • Το Α ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: y=x+2$ άρα θα είναι της μορφής Α(α, α+2), $\alpha\in R$

ενω το μέσο Δ της ΒΓ είναι το $\Delta\left(\frac{2+4}{2}=3, \frac{-3+1}{2}=-1\right)$ άρα το μέσο της ΑΔ είναι το $M\left(\frac{\alpha+3}{2}, \frac{\alpha+1}{2}\right)$.

• Αν τώρα Μ(x, y) τότε $\begin{cases}x=\frac{\alpha+3}{2}\\ y=\frac{\alpha+1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=2x-3\\ \alpha=2y-1\end{cases}$ άρα το Μ κινείται στην ευθεία

$\delta: 2x-3=2y-1 \Leftrightarrow y=x-1$ που βέβαια είναι παράλληλη με την (ε) $(\lambda_\varepsilon=\lambda_\delta)$

**β.** Ισχύει: $d(M,\varepsilon)=\dfrac{\left|\dfrac{\alpha+3}{2}-\dfrac{\alpha+1}{2}+2\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|\alpha+3-\alpha-1+4|}{2\sqrt{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

**γ.** Ισχύουν: $\overrightarrow{B\Gamma}=(4-2,\,1-(-3))=(2,4)$

$\overrightarrow{BA}=(\alpha-2,\,\alpha+2-(-3))=(\alpha-2,\,\alpha+5)$

οπότε: $\det(\overrightarrow{B\Gamma},\overrightarrow{BA})=\begin{vmatrix}2 & 4\\ \alpha-2 & \alpha+5\end{vmatrix}=2(\alpha+5)-4(\alpha-2)=-2\alpha+18$

όμως: $(AB\Gamma)=10\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}|-2\alpha+18|=10\Leftrightarrow |-2\alpha+18|=20\Leftrightarrow$

$-2\alpha+18=20\Leftrightarrow -2\alpha=2\Leftrightarrow \alpha=-1$ ή $-2\alpha+18=-20\Leftrightarrow -2\alpha=-38\Leftrightarrow \alpha=19$

Άρα: M(1,0) ή M(11,10)

**9. Δίνεται η εξίσωση (ε): $(\lambda-2)x-(2\lambda+1)y+2-\lambda=0$.**

**i. Δείξτε ότι για κάθε τιμή του $\lambda\in R$ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθείες που περνάνε από το ίδιο σημείο, το οποίο να βρείτε.**

**ii. Βρείτε για ποια τιμή του λ η απόσταση του A(2, 2) από την ευθεία (ε) είναι $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$**

**iii. Βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in R$ η ευθεία (ε) είναι**

- **παράλληλη στον x΄x**
- **παράλληλη στον y΄y**
- **περνάει από το O(0, 0)**

**iv. Αν $\lambda_1$, $\lambda_2$ δύο τιμές του λ ώστε $\lambda_1\lambda_2=-1$, δείξτε ότι οι αντίστοιχες ευθείες $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ που προκύπτουν από την (ε) για τις τιμές $\lambda_1$, $\lambda_2$ τέμνονται κάθετα.**

**Λύση:**

**i.** Επειδή το σύστημα $\begin{cases}\lambda-2=0\\ 2\lambda+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=2\\ \lambda=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ είναι αδύνατο, η εξίσωση (ε) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in R$.

***1ος τρόπος***

- Για $\lambda=2$ παίρνουμε την ευθεία με εξίσωση ε: y = 0
- Για $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ παίρνουμε την ευθεία με εξίσωση δ: x = 1

οι οποίες τέμνονται στο σημείο K(1, 0). Από το σημείο K διέρχονται και όλες οι άλλες ευθείες που παριστάνει η (ε), αφού οι συντεταγμένες του Κ επαληθεύουν την (ε) διότι : $(\lambda-2)1-(2\lambda+1).0+2-\lambda=0 \Leftrightarrow 0\lambda=0 \Leftrightarrow 0=0$, που ισχύει.

***2ος τρόπος***

Έστω $K(x_0,y_0)$ το κοινό σημείο όλων των ευθειών με την πιο πάνω εξίσωση τότε:

Για κάθε $\lambda \in R$ ισχύει:

$$(\lambda-2)x_0-(2\lambda+1)y_0+2-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda x_0-2x_0-2\lambda y_0-y_0+2-\lambda=0 \Leftrightarrow$$

$$(x_0-2y_0-1)\lambda-2x_0-y_0+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0-2y_0=1 \\ 2x_0+y_0=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0-2y_0=1 \\ 4x_0+2y_0=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=0 \end{cases}$$

Άρα Κ(1,0).

**ii.** Ισχύει: $$d(A,\varepsilon)=\frac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{|2(\lambda-2)-2(2\lambda+1)+2-\lambda|}{\sqrt{(\lambda-2)^2+(2\lambda+1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{5}|3\lambda+4|=3\sqrt{5\lambda^2+5} \Leftrightarrow |3\lambda+4|=3\sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow$$

$$|3\lambda+4|^2=9(\lambda^2+1) \Leftrightarrow 9\lambda^2+24\lambda+16=9\lambda^2+9 \Leftrightarrow \lambda=-\frac{7}{24}$$

**iii.** Η (ε) παριστάνει ευθεία:

**i.** παράλληλη στον x΄x ,αν και μόνον αν: $\begin{cases} \lambda-2=0 \\ 2\lambda+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=2 \\ \lambda\neq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \lambda=2$

**ii.** παράλληλη στον y΄y ,αν και μόνον αν: $\begin{cases} \lambda-2\neq 0 \\ 2\lambda+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda\neq 2 \\ \lambda=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \lambda=-\frac{1}{2}$

**iii.** που περνάει από το Ο(0,0) αν: $(\lambda-2)\cdot 0-(2\lambda+1)\cdot 0+2-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=2$

**iv.** Η $\varepsilon_1$ έχει εξίσωση: $(\lambda_1-2)x-(2\lambda_1+1)y+2-\lambda_1=0$

και το διάνυσμα: $\vec{\delta}=(2\lambda_1+1,\ \lambda_1-2)$ είναι παράλληλο στην $\varepsilon_1$.

Η $(\varepsilon_2)$ έχει εξίσωση: $(\lambda_2-2)x-(2\lambda_2+1)y+2-\lambda_2=0$ και ένα διάνυσμα παράλληλο στην $(\varepsilon_2)$ είναι το $\vec{\delta_2}=(2\lambda_2+1,\lambda_2-2)$.

Ισχύει: $$\vec{\delta_1}\cdot\vec{\delta_2}=(2\lambda_1+1)(2\lambda_2+1)+(\lambda_1-2)(\lambda_2-2)=$$
$$=4\lambda_1\lambda_2+2\lambda_1+2\lambda_2+1+\lambda_1\lambda_2-2\lambda_1-2\lambda_2+4=$$
$$=5\lambda_1\lambda_2+5=5(-1)+5=0$$
Άρα $\vec{\delta_1}\perp\vec{\delta_2}$ οπότε και $\varepsilon_1\perp\varepsilon_2$.

**10. Δίνονται οι εξισώσεις:** **i.** $\lambda x - y + 1 = 0$ **ii.** $(\lambda+1)x-(1-\lambda)y+4=0$

**α. Δείξτε ότι και οι δύο εξισώσεις παριστάνουν ευθεία για κάθε τιμή του** $\lambda \in R$ ·

**β. Βρείτε για ποιες τιμές των λ η ευθεία με εξίσωση την i. είναι παράλληλη στην ευθεία:** $\zeta_1 : 4x - 2y + 3 = 0$ .

**γ. Βρείτε για ποιες τιμές των λ η ευθεία με εξίσωση την ii. είναι κάθετη στην ευθεία:** $\zeta_2 : x - 3y + 4 = 0$ .

**δ. Δείξτε ότι οι ευθείες που βρήκατε στα β. και γ. τέμνονται και βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν.**

**ε. Δείξτε ότι όλες οι ευθείες με εξίσωση την ii. διέρχονται από το ίδιο σημείο.**

**Λύση**

**α.** Οι εξισώσεις i. και ii. παριστάνουν ευθείες για κάθε τιμή του $\lambda \in R$ αφού τα συστήματα: $\begin{cases}\lambda = 0\\ 1 = 0\end{cases}$ και $\begin{cases}\lambda + 1 = 0\\ 1-\lambda = 0\end{cases}$ είναι αδύνατα.

**β.** Η **i.** γράφεται y = λx + 1 και η ($\zeta_1$) $y = 2x + \frac{3}{2}$ άρα θα είναι παράλληλες όταν λ = 2.

**γ.** Το $\vec{\delta} = (1-\lambda, \lambda+1)$ είναι παράλληλο στην ευθεία με εξίσωση την **ii.** ενω το $\vec{\sigma} = (3,1) \parallel \zeta_2$ και ισχύει:

$$\vec{\delta} \perp \vec{\sigma} \Leftrightarrow \vec{\delta}\cdot\vec{\sigma} = 0 \Leftrightarrow 3(1-\lambda)+\lambda+1 = 0 \Leftrightarrow 3-3\lambda+\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

**δ.** • Αν λ = 2 η **i.** δίνει την ευθεία $\varepsilon_1 : 2x - y + 1 = 0$ και το διάνυσμα $\vec{v} = (1,2) \parallel \varepsilon_1$ .

• Αν λ = 2 η **ii.** δίνει την ευθεία $\varepsilon_2 : 3x + y + 4 = 0$ και το διάνυσμα $\vec{w} = (-1,3) \parallel \varepsilon_2$

και βέβαια ισχύει: $\text{συν}\left(\widehat{\vec{v},\vec{w}}\right) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|} = \frac{-1+6}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5\sqrt{50}}{50} = \frac{\sqrt{50}}{10} = \frac{5\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Άρα η οξεία γωνία των ευθειών είναι $45^0$.

**ε.** Αν $M(x_0, y_0)$ το κοινό σημείο των ευθειών με εξίσωση την ii.

$(\lambda+1)x_0 - (1-\lambda)y_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda x_0 + x_0 - y_0 + \lambda y_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$(x_0 + y_0)\lambda + x_0 - y_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + y_0 = 0\\ x_0 - y_0 = -4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2\\ y_0 = 2\end{cases}$

Άρα το κοινό σημείο όλων των ευθειών με εξίσωση την **ii** είναι το M(-2, 2).

**11.** **Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις:**

$$\varepsilon_1 : A_1x+B_1y+\Gamma_1=0,\left(A_1\neq 0 \text{ ή } B_1\neq 0\right),$$

$$\varepsilon_2 : A_2x+B_2y+\Gamma_2=0,\ \left(A_2\neq 0 \text{ ή } B_2\neq 0\right) \text{ με } A_1B_2\neq A_2B_1$$

**και η εξίσωση** $\varepsilon: \ (A_1-A_2)x+(B_1-B_2)y+\Gamma_1-\Gamma_2=0$.

**Να αποδειχθεί ότι:**

**α.** **Οι ευθείες $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ τέμνονται σε σημείο Μ .**

**β.** **Η εξίσωση ε παριστάνει ευθεία .**

**γ.** **Οι ευθείες $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ και ε διέρχονται από το ίδιο σημείο .**

**δ.** **Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη προς τη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$ των αξόνων τότε $A_1+B_1=A_2+B_2$.**

**ε.** **Αν $A_1^2+B_1^2=A_2^2+B_2^2$ τότε η ευθεία ε είναι μια από τις διχοτόμους των γωνιών $\left(\widehat{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\right)$.**

**Λύση:**

**α.** ***1ος τρόπος.***

Τα κοινά σημεία των ευθειών $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$A_1x+B_1y=-\Gamma_1 \text{ και } A_2x+B_2y=-\Gamma_2$$

Η ορίζουσα του συστήματος είναι $D=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=A_1B_2-A_2B_1\neq 0$ ,άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση , δηλαδή οι ευθείες $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ τέμνονται σε σημείο Μ.

***2ος τρόπος.***

Τα διανύσματα $\vec{\delta_1}=(-B_1,A_1)$ και $\vec{\delta_2}=(-B_2,A_2)$ είναι παράλληλα προς τις ευθείες $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ αντίστοιχα .

Επειδή $\det\left(\vec{\delta_1},\vec{\delta_2}\right)=\begin{vmatrix} -B_1 & A_1 \\ -B_2 & A_2 \end{vmatrix}=-A_2B_1+A_1B_2\neq 0$ τα $\vec{\delta_1}$, $\vec{\delta_2}$ δεν είναι συγγραμμικά, επομένως οι ευθείες $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ δεν είναι παράλληλες ,άρα τέμνονται σε σημείο έστω Μ.

**β.** Για να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $\varepsilon: \ (A_1-A_2)x+(B_1-B_2)y+\Gamma_1-\Gamma_2=0$ παριστάνει ευθεία αρκεί να δείξουμε ότι δεν μηδενίζονται συγχρόνως οι συντελεστές $A_1-A_2$ και $B_1-B_2$.

Πράγματι, αν $A_1-A_2=0$ και $B_1-B_2=0$ τότε $A_1=A_2$ και $B_1=B_2$ οπότε και $A_1B_2 = A_2B_1$, που είναι άτοπο.

Άρα $A_1 - A_2 \neq 0$ ή $B_1 - B_2 \neq 0$ και η εξίσωση ε παριστάνει ευθεία.

**γ.** Έστω $M(x_0, y_0)$ το σημείο τομής των $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$.

Τότε θα είναι $A_1x_0 + B_1y_0 + \Gamma_1 = 0$ και $A_2x_0 + B_2y_0 + \Gamma_2 = 0$.
Αφαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει η εξίσωση

$$(A_1 - A_2)x_0 + (B_1 - B_2)y_0 + \Gamma_1 - \Gamma_2 = 0$$

δηλαδή οι συντεταγμένες $x_0$, $y_0$ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας ε, που σημαίνει ότι η ευθεία ε διέρχεται από το κοινό σημείο M των $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$.

**δ.** Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (-(B_1 - B_2), A_1 - A_2) = (-B_1 + B_2, A_1 - A_2)$ είναι παράλληλο προς την ευθεία ε και το διάνυσμα $\vec{\delta'} = (1,1)$ είναι παράλληλο προς την διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων ,δηλαδή την ευθεία με εξίσωση: $y = x \Leftrightarrow x - y = 0$.
Η ευθεία ε είναι παράλληλη προς την διχοτόμο, άρα έχουμε:

$$\vec{\delta} \parallel \vec{\delta'} \Leftrightarrow \det(\vec{\delta}, \vec{\delta'}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -B_1 + B_2 & A_1 - A_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -B_1 + B_2 - A_1 + A_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$A_1 + B_1 = A_2 + B_2$.

**ε.** Σημείο M(x,y) ανήκει σε μια από τις διχοτόμους των γωνιών $(\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2})$ ,αν και μόνον, αν ισχύει:

$$d(M, \varepsilon_1) = d(M_2, \varepsilon_2) \Leftrightarrow \frac{|A_1x + B_1y + \Gamma_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_2^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + \Gamma_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (I)$$

και επειδή $A_1^2 + B_1^2 = A_2^2 + B_2^2$, η (I) γίνεται :

$$|A_1x + B_1y + \Gamma_1| = |A_2x + B_2y + \Gamma_2|.$$

Οπότε:

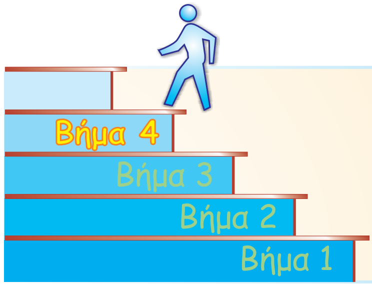
$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 = A_2x + B_2y + \Gamma_2 \text{ ή } A_1x + B_1y + \Gamma_1 = -(A_2x + B_2y + \Gamma_2)$$

και τελικά:

$$(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + \Gamma_1 - \Gamma_2 = 0 \text{ ή } (A_1 + A_2)x + (B_1 + B_2)y + \Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$$

που είναι οι εξισώσεις των δύο διχοτόμων .

Επομένως η ευθεία $\varepsilon: \ (A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + \Gamma_1 - \Gamma_2 = 0$ είναι μια από τις διχοτόμους των γωνιών $(\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2})$.




## Λύνουμε μόνοι μας

**1.** **Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία:**

**i.** **Διέρχεται από το σημείο A(1,2) και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 3$.**

**ii.** **Διέρχεται από το σημείο B(–1,–2) και είναι παράλληλη στην ευθεία $(\delta): -x + y - 1 = 0$.**

**iii.** **Διέρχεται από το σημείο Γ(1,4) και είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): x = 2$.**

**2.** **Ευθεία (ε) σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα Οx γωνία 135° και τέμνει τον y΄y στο σημείο A(0,4).**

**i.** **Να βρείτε την εξίσωση της (ε).**

**ii.** **Να βρείτε την εξίσωση ευθείας (δ) που είναι κάθετη στην (ε) στο σημείο της B(–2,6).**

**3.** **Έστω τα σημεία Κ(–3,1), Λ(5,–1) και Μ(–7,2). Να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά βρίσκονται στην ίδια ευθεία και στη συνέχεια να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζει η ευθεία αυτή με τους άξονες.**

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

**4.** **Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - 2\lambda)x + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)y + \lambda + 1 = 0$ (1).**

**i.** **Για ποιες τιμές του $\lambda \in R$ παριστάνει ευθεία γραμμή;**

**ii.** **Για ποιες τιμές του $\lambda \in R$ η ευθεία είναι παράλληλη στον x΄x;**

**iii.** **Για ποιες τιμές του $\lambda \in R$ η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο(0,0).**

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

**5.** **Δίνονται τα σημεία Α(1,–1), Β(2,0) και η ευθεία ε: $x + y - 1 = 0$.**

**i.** **Να βρείτε σημείο Μ της ευθείας (ε) ώστε το τρίγωνο ΑΒΜ να είναι ορθογώνιο στο Μ.**

**ii.** **Να βρείτε την εξίσωση του περιγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΜ.**

**6.** **Το Πολεμικό μας Ναυτικό εκτελεί άσκηση με πραγματικά πυρά, σε θαλάσσια περιοχή στο Βόρειο Αιγαίο, η περίμετρος της οποίας περιγράφεται από την εξίσωση: $2x^2+2y^2-4x+8y-40=0$. Την ίδια χρονική στιγμή θαλαμηγός που βρίσκεται στη θέση Θ(2,–10) σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων αποφασίζει να κινηθεί για ανεφοδιασμό σε κάυσιμα με κατεύθυνση νησί που βρίσκεται στη θέση Ν(2,14). Με δεδομένο ότι η θαλαμηγός κινείται σε ευθεία γραμμή πιστεύεται ότι οι επιβάτες της θα κινδυνεύσουν; *(Αιτιολογήστε την απάντησή σας.)***

**Ας υποθέσουμε ότι στην θέση Μ(1,–4) υπάρχει και άλλος ένας σταθμός ανεφοδιασμού. Μετά τη λήξη της άσκησης, ο καπετάνιος της θαλαμηγού ποιον από τους δύο σταθμούς θα πρέπει να επιλέξει ώστε να διανύσει τη μικρότερη δυνατή απόσταση;**

**(Θεωρήστε ότι η θαλαμηγός ξεκινάει από το σημείο Θ(2,–10).**

**7.** **Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις:**

$$\varepsilon_1 : \lambda x-(\lambda-3)y=\lambda-2 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : (\lambda+3)x-\lambda y=\lambda$$

**i.** **Να δείξετε ότι οι ($\varepsilon_1$) και ($\varepsilon_2$) τέμνονται για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.**

**ii.** **Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων τομής τους.**

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

**8.** **Έστω τα σημεία Α(κ+2, λ–2) και Β(λ,κ), $\kappa,\lambda \in \mathbb{R}$.**

**i.** **Να δείξετε ότι το μέσο Μ του ΑΒ κινείται σε ευθεία (ε) της οποίας να βρείτε την εξίσωση.**

**ii.** **Δείξτε ότι η ευθεία (ε) είναι κάθετη στην ΑΒ.**

**iii.** **Βρείτε την απόσταση του σημείου Δ(–3,–3) από την ευθεία (ε).**

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

**9.** **Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α(3,6) και η βάση του ΒΓ έχει εξίσωση: $4x - 3y - 9 = 0$. Αν το σημείο Μ(3,1) είναι το μέσο της ΒΓ και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι 45 τ.μ. :**

**i.** **να υπολογίσετε την d(Α,ΒΓ),**

**ii.** **να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ,**

**iii.** **να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.**

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

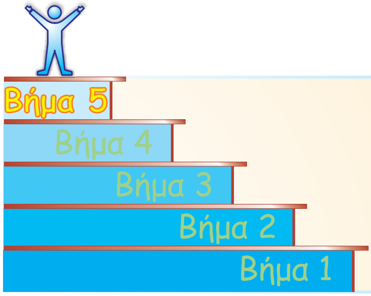
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................

**10.** **Οι συντεταγμένες ενός σημείου Μ(x,y) επαληθεύουν την εξίσωση:**

$$x^2+4y^2-3x-6y+4xy+2=0$$

**i.** **Να αποδείξετε ότι το Μ κινείται σε δύο ευθείες $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$.**
**ii.** **Να αποδείξετε ότι $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$.**
**iii.** **Να βρείτε την απόσταση των δύο ευθειών.**

..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................
..........................................................................................................................................




# Ελέγχουμε τη γνώση μας

## Θέμα $1^{0}$

**Α. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με την ένδειξη Σ (σωστό) ή Λ (λάθος).**

**1.** Οι ευθείες $\lambda^2 x - \lambda y = 0\ (\lambda \neq 0)$ και $x + \lambda y = 1$ είναι κάθετες.

**2.** Η $2^{η}$ από τις προηγούμενες είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta} = (1, \lambda)$.

**3.** Η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία (1, 4), (4, 7):

**α.** Έχει συντελεστή διεύθυνσης 1

**β.** Είναι παράλληλη προς την ευθεία $x + 2y = \alpha$

**γ.** Τέμνει τον άξονα x στο σημείο (1, 0).

**4.** Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία $x + 2y - 4 = 0$ με τον άξονα $x'x$ είναι αμβλεία.

**5.** Η ευθεία με εξίσωση $\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu} = 1,\ \lambda, \mu \neq 0$ τέμνει τους άξονες στα σημεία (0, λ) και (μ, 0).

**6.** Τα διανύσματα $\vec{u} = (\beta, -\alpha)$ και $\vec{v} = (-\beta, \alpha)$ είναι παράλληλα στην ευθεία:

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

**7.** Το διάνυσμα $\vec{u} = (\beta, -\alpha)$ είναι παράλληλο στην ευθεία: $\alpha x + \beta y + \gamma = 0,\ \beta \neq 0$.

**8.** Το συμμετρικό του σημείου (0, 0) ως προς την ευθεία $x + y = 1$ είναι το (0, 1).

**9.** Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο (4, 2) και σχηματίζει γωνία 135° με τον θετικό ημιάξονα είναι $x - y = 2$.

**10.** Η ευθεία που σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα των x είναι $x + y = 4$.

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

*(Μονάδες 10)*

**Β.** Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από την αρχή των αξόνων και απέχουν από το σημείο Α (2,1) απόσταση ίση με 1.

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

*(Μονάδες 15)*

## Θέμα $2^0$

**Α** Δίνονται τα σημεία Α (–2, 1) και Β (4, 6). Να βρείτε το σύνολο των σημείων Μ για τα οποία το εμβαδόν του τριγώνου ΜΑΒ είναι ίση με 2 τ.μ.

**Β.** Θεωρούμε τα σημεία Α (–4, 0), Β (2, 0) και Γ (–1, 4). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ (x, y) για τα οποία ισχύει: $(\text{ΜΒΓ})=\frac{1}{2}(\text{ΑΒΓ})$.

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

*(Μονάδες 25)*

## Θέμα $3^0$

**Α.** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής των ευθειών $\lambda x+(\lambda-1)y=2\lambda$ και $(\lambda+1)x+\lambda y=2\lambda+1$ για όλες τις τιμές του $\lambda\in R$ .

**Β.** Ορθή γωνία στρέφεται γύρω από το σημείο Α(2,1) και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες στα σημεία Β, Γ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου του ΒΓ.

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

*(Μονάδες 25)*

## Θέμα 4⁰

Σε ένα χάρτη με καρτεσιανό σύστημα αξόνων Oxy ένα πλοίο ξεκινά από κάποιο λιμάνι Λ και κατευθύνεται προς το λιμάνι O. Το ραντάρ θέσης του πλοίου δίνει για κάθε χρονική στιγμή συντεταγμένες $\Pi_1(t-30, 2t-40)$, $t \geq 0$.

**α.** Πού βρίσκεται το λιμάνι Λ στον χάρτη;

**β.** Πόσο απέχει το λιμάνι Λ από το λιμάνι O;

**γ.** Βρίσκεται το πλοίο στη σωστή πορεία για το λιμάνι O;

**δ.** Αν η θέση ενός άλλου πλοίου προσδιορίζεται από το σημείο $\Pi_2(t-20, t+10)$, $t \geq 0$ υπάρχει περίπτωση τα πλοία να συναντηθούν;

**ε.** Ποια είναι η απόστασή τους τη χρονική στιγμή t = 10;

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

*(Μονάδες 25)*