Κεφάλαιο 3ο
Πιθανότητες

Μετά το τέλος της μελέτης του 3ου κεφαλαίου, ο μαθητής θα πρέπει να γνωρίζει:

- ✓ Τα βασικά στοιχεία από τη θεωρία συνόλων.
- ✓ Τον τρόπο εύρεσης του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης.
- ✓ Τον κλασικό και τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας.
- ✓ Τους κανόνες λογισμού πιθανοτήτων.

Συνοπτική θεωρία:

✓ **Κλασικός ορισμός πιθανότητας:** Σε ένα πείραμα τύχης με ισοπίθανα αποτελέσματα ορίζουμε σαν πιθανότητα ενδεχομένου A τον αριθμό:

$$P(A)=\frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

✓ **Αξιωματικός ορισμός πιθανότητας:** Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_\nu\}$ δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε ένα πραγματικό αριθμό $P(\omega_i)$ τέτοιον ώστε:

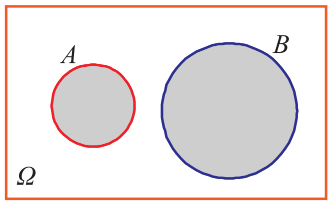
$$0 \le P(\omega_i) \le 1 \qquad \text{και} \qquad \sum_{i=1}^{\nu} P(\omega_i) = 1$$

Ο αριθμός $P(\omega_i)$ ονομάζεται πιθανότητα του απλού ενδεχομένου $\{\omega_i\}$. Η πιθανότητα ενός σύνθετου ενδεχομένου $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_\kappa\} \neq \varnothing$ ορίζεται ώς άθροισμα $\sum_{i=1}^{\kappa} P(\alpha_i)$ ενώ σαν πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου $\varnothing$ ορίζεται ο αριθμός $P(\varnothing) = 0$.

Κανόνες λογισμού πιθανοτήτων
• Αν $A \cap B = \varnothing$, τότε: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (απλός προσθετικός νόμος).
• $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (προσθετικός νόμος).
• $P(A') = 1 - P(A)$
• Αν $A \subseteq B$, τότε: $P(A) \le P(B)$
• $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

- **ΘΕΩΡΙΑ 6 (Απλός προσθετικός νόμος):**
  Να δείξετε ότι για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα ενδεχόμενα Α και Β δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Απόδειξη:



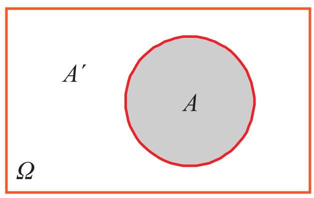
$A \cup B$

Αν $N(A) = \kappa$ και $N(B) = \lambda$ τότε επειδή τα Α και Β είναι ασυμβίβαστα το ενδεχόμενο $A \cup B$ έχει κ+λ στοιχεία δηλαδή $N(A \cup B) = \kappa + \lambda = N(A) + N(B)$.

Άρα:

$$P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A) + N(B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} = P(A) + P(B)$$

- **ΘΕΩΡΙΑ 7:**
  Να δείξετε ότι για τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α΄ ενός δειγματικού χώρου Ω , ισχύει :
  $$P(A') = 1 - P(A).$$



Απόδειξη:

Επειδή $A \cap A' = \varnothing$, δηλαδή τα Α και Α΄ είναι ασυμβίβαστα από τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε:

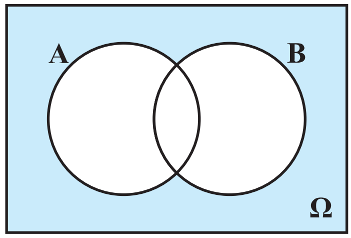
$$P(A \cup A') = P(A) + P(A') \Leftrightarrow P(\Omega) = P(A) + P(A') \Leftrightarrow 1 = P(A) + P(A') \Leftrightarrow$$
$$P(A') = 1 - P(A)$$

- **ΘΕΩΡΙΑ 8 (Προσθετικός νόμος):**
  Να δείξετε ότι για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Απόδειξη:

Επειδή στο άθροισμα $N(A) + N(B)$ το πλήθος των στοιχείων του ενδεχόμενου $A \cap B$ λογίζεται δύο φορές, έχουμε:

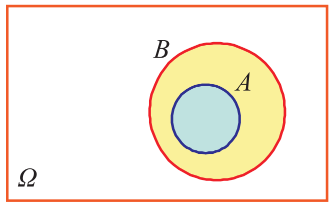
$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B) \Leftrightarrow$$
$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



- **ΘΕΩΡΙΑ 9:**

Να δείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα Α και Β δειγματικού χώρου Ω τέτοια ώστε να είναι $A \subseteq B$ ισχύει:

$$P(A) \le P(B).$$



Απόδειξη:

Επειδή $A \subseteq B$ ισχύει: $N(A) \le N(B) \Leftrightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)} \le \frac{N(B)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow P(A) \le P(B)$

- **ΘΕΩΡΙΑ 10:**

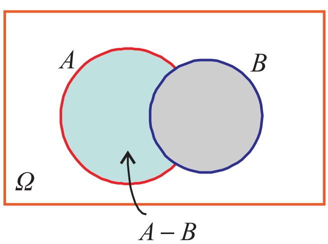
Να δείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα Α και Β δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

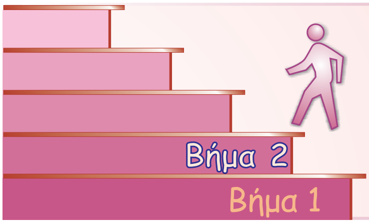
$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

Απόδειξη:

Επειδή τα ενδεχόμενα $A - B$ και $A \cap B$ είναι ασυμβίβαστα και ισχύει $(A - B) \cup (A \cap B) = A$, έχουμε:

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$



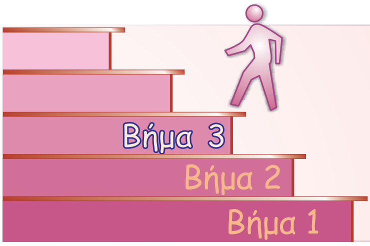


Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις - κλειδιά

Α. Από το σχολικό βιβλίο

Να λύσω τις ασκήσεις:

σ. 144: Ασκήσεις Α΄ ομάδας: 1, 4
σ. 145: Ασκήσεις Α΄ ομάδας: 5, 7
σ. 146: Ασκήσεις Β΄ ομάδας: 1, 2, 3
σ. 155: Ασκήσεις Α΄ ομάδας: 3, 5, 6, 10, 11
σ. 156: Ασκήσεις Α ομάδας: 12, 13 Β΄ ομάδας: 2, 4, 5, 6

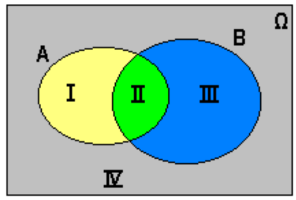


Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. Να επαληθευτούν οι παρακάτω ισότητες με τα διαγράμματα του Venn:

α. $(A\cap B)\cap(A\cap B')=\varnothing$

β. $(A\cap B')\cup(B\cap A')=(A\cup B)\cap(A\cap B)'$



Λύση:

α. Από το παραπάνω διάγραμμα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} A\cap B\to \text{περιοχη II}\\ A\cap B'\to \text{περιοχη I}\end{array}\right\}\Rightarrow (A\cap B)\cap(A\cap B')=\varnothing$$

β. Από το παραπάνω διάγραμμα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} A\cap B'\to \text{περιοχη I}\\ B\cap A'\to \text{περιοχη III}\end{array}\right\}\Rightarrow (A\cap B)\cup(B\cap A')\to \text{περιοχη I και III}$$

$$\left.\begin{array}{l} A\cup B\to \text{περιοχη I,II και III}\\ (A\cap B)'\to \text{περιοχη I,III και IV}\end{array}\right\}\Rightarrow (A\cup B)\cap(A\cap B)'\to \text{περιοχη I και III}$$

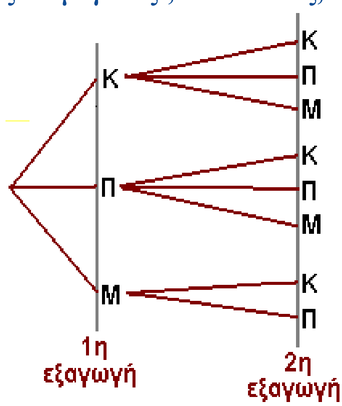
Άρα: $(A\cap B')\cup(B\cap A')=(A\cup B)\cap(A\cap B)'$

2. Σε ένα κουτί υπάρχουν , 6 σφαίρες όμοιες ως πρός το μέγεθος , 3 κόκκινες, 2 πράσινες και 1 μαύρη σφαίρα.

α. Επιλέγουμε τυχαία 2 σφαίρες διαδοχικά χωρίς επανατοποθέτηση. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος.

β. Να επαναληφθεί το ερώτημα (α) αν οι πράσινες σφαίρες είναι αριθμημένες.

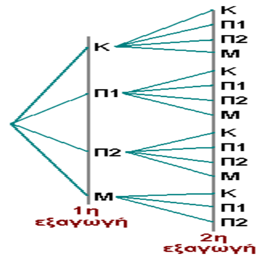
γ. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος στο ερώτημα (β) αν οι 2 σφαίρες επιλεχθούν ταυτόχρονα.



Λύση:

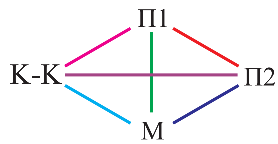
α. Το πείραμα διεξάγεται σε δυο διαδοχικές επαναλή-

ψεις, άρα ισχύει το διπλανό δενδροδιάγραμμα.
Ο δειγματικός χώρος Ω είναι:
Ω={ΚΚ, ΚΠ, ΚΜ, ΠΚ, ΠΠ, ΠΜ, ΜΚ, ΜΠ}



β. Έστω ότι οι πράσινες σφαίρες είναι αριθμημένες με τους αριθμούς 1 και 2. Τότε έχουμε το διπλανό δενδροδιάγραμμα. Ο δειγματικός χώρος Ω είναι:
Ω={ΚΚ, ΚΠ1, ΚΠ2, ΚΜ, Π1Κ, Π1Π1, Π1Π2, Π1Μ, Π2Κ, Π2Π1, Π2Π2, Π2Μ, ΜΚ, ΜΠ1, ΜΠ2}

γ. Στην ταυτόχρονη επιλογή σφαιρών τα ζεύγη χρωμάτων δεν είναι διατεταγμένα. Τότε έχουμε το διπλανό σχήμα. Ο δειγματικός χώρος Ω είναι:
Ω={ΚΠ1, ΚΠ2, ΚΜ, Π1Π2, Π1Μ, Π2Μ, ΚΚ}



3. Η πιθανότητα συμμετοχής ενός παίκτη ποδοσφαίρου Α στην Εθνική ομάδα είναι 50% και ενός άλλου παίκτη Β είναι 25%. Η πιθανότητα να μην συμμετέχει τουλάχιστον ένας από τους δύο είναι 30%. Να βρεθεί η πιθανότητα να συμμετέχουν:

α. και οι δύο παίκτες. **β. μόνο ο παίκτης Α.**

Λύση:

Έχουμε $P(A)=0{,}5$, $P(B)=0{,}25$ και $P\big((A\cup B)'\big)=0{,}1$. Τότε

$$P(A\cup B)=1-P\big((A\cup B)'\big)=1-0{,}3=0{,}7$$

α. Από προσθετικό νόμο έχουμε:

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0{,}5+0{,}25-0{,}7=0{,}05$$

β. $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0{,}5-0{,}05=0{,}45$

4. Έστω Α, Β ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω. Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(A\cup B)$, $P(A\cap B)$, $P(A)$ και $P(B)$ **αν είναι ρίζες της εξίσωσης:**

$$(2x-1)^2(12x^3+13x^2-20x+4)=0$$

Λύση:

$$(2x-1)^2(12x^3+13x^2-20x+4)=0 \Leftrightarrow (2x-1)^2=0 \text{ ή } (12x^3+13x^2-20x+4)=0$$

$$(2x-1)^2=0 \Leftrightarrow (2x-1)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \text{ διπλή ρίζα}$$

Εφαρμόζουμε το σχήμα Horner, για την $12x^3+13x^2-20x+4=0$.

12	13	-20	4	-2
	-24	22	-4	
12	-11	2	0	

Άρα: $12x^3+13x^2-20x+4=0 \Leftrightarrow (x+2)(12x^2-11x+2)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ ή } x=\frac{-(-11)\pm\sqrt{25}}{2\cdot 12}=\begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ x=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Επειδή

$A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$ έπεται $P(A\cap B)\le P(A)\le P(A\cup B)$ και

$A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B$ έπεται $P(A\cap B)\le P(B)\le P(A\cup B)$, έχουμε:

$P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$ και $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$.

5. Έστω Α, Β ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω με πιθανότητες P(A) = 0,8 και P(B) = 0,4. Να αποδείξετε ότι:

α. τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα **β.** $0,2\le P(A\cap B)\le 0,4$

Λύση:

α. Έστω ότι τα Α,Β είναι ασυμβίβαστα. Τότε από τον προσθετικό νόμο έχουμε: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0,8+0,4=1,2>1$ που είναι **άτοπο.** Άρα τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

β. Επειδή $A\cap B\subseteq B$ έπεται $P(A\cap B)\le P(B)\Leftrightarrow P(A\cap B)\le 0,4$ **(1)**

Επίσης:

$P(A\cup B)\le 1\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)\le 1\Leftrightarrow P(A\cap B)\ge P(A)+P(B)-1\Leftrightarrow$

$P(A\cap B)\ge 0,4+0,8-1\Leftrightarrow P(A\cap B)\ge 0,2$ **(2)**

Από **(1)** και **(2)** έχουμε: $0,2\le P(A\cap B)\le 0,4$

6. Έστω δειγματικός χώρος $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$ και τα ενδεχόμενα $A=\{\omega_1,\omega_2\}$ με $P(A)=1/4$, $B=\{\omega_2,\omega_3\}$ με $P(B)=1/8$ και $\Gamma=\{\omega_2\}$ με $P(\Gamma)=1/12$. Να υπολογιστεί η $P(\omega_4)$.

Λύση:

Είναι: $P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1$

$$P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)=1 \Leftrightarrow P(\omega_4)=1-P(\omega_1)-P(\omega_2)-P(\omega_3)=$$

$$=1-\left(P(\omega_1)+P(\omega_2)\right)-\left(\frac{1}{8}-P(\omega_2)\right)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{12}=\frac{17}{24}$$

7. **Ένα κουτί περιέχει 40 λευκές κάρτες (Λ) και άγνωστο πλήθος από πράσινες (Π) και μπλε (Μ). Αν η πιθανότητα να επιλεγεί τυχαία μια πράσινη κάρτα είναι 25% και μια μπλε κάρτα 35% να βρεθούν:**

α. το πλήθος όλων των καρτών στο κουτί

β. πόσες πράσινες και πόσες μπλε κάρτες υπάρχουν στο κουτί.

Λύση:

α. Έστω Λ, Π, Μ τα ενδεχόμενα να επιλέξουμε λευκή, πράσινη, μπλέ κάρτα αντίστοιχα και $N(\Pi) = x$ και $N(M) = y$ το πλήθος των πράσινων και μπλέ καρτών αντίστοιχα . Τότε επειδή τα ενδεχόμενα Λ,Π,Μ είναι ασυμβίβαστα ισχύει:

$$P(\Pi)+P(M)+P(\Lambda)=1 \Leftrightarrow 0,25+0,35+\frac{40}{x+y+40}=1 \Leftrightarrow \frac{40}{x+y+40}=0,4 \Leftrightarrow$$

$x + y + 40 = 100$. Άρα το κουτί περιέχει 100 κάρτες .

β. Από την τελευταία σχέση έχουμε $x + y = 60$ άρα είναι:

$P(\Pi)=0,25 \Leftrightarrow \dfrac{x}{100}=0,25 \Leftrightarrow x=25$. Άρα υπάρχουν 25 πράσινες κάρτες.

Και συνεπώς έχουμε $y = 60 - 25 = 35$ μπλέ κάρτες.

8. **Έστω Ω ο δειγματικός χώρος του πειράματος “της ρίψης ενός ζαριού”. Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου:**

$$A=\{x\in\Omega : \text{το δείγμα } "x^3,\ 5-2x^2,\ 7-2x^2,\ -12,\ -7x" \text{ να έχει } \bar{x}=-2\}$$

Λύση:

Είναι: $\bar{x}=\dfrac{x^3+5-2x^2+7-2x^2-12-7x}{5}=\dfrac{x^3-4x^2-7x}{5}=-2$

Άρα: $x^3-4x^2-7x=-10 \Leftrightarrow x^3-4x^2-7x+10=0$

Με σχήμα Horner έχουμε:

1	-4	-7	10	1
	1	-3	-10	
1	-3	-10	0	

Άρα η εξίσωση γίνεται: $(x-1)(x^2-3x-10)=0$

$\Delta=(-3)^2-4\cdot1\cdot(-10)=49$ $\quad x_{1,2}=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{49}}{2\cdot1}\to\begin{cases}x_1=5\\x_2=-2\notin\Omega\end{cases}$

Άρα A = {1, 5} και $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

9. Σε ένα κουτί υπάρχουν:
30 κόκκινες σφαίρες αριθμημένες ανά 10 με τους αριθμούς 1,2 και 3.
40 πράσινες σφαίρες αριθμημένες ανά 10 με τους αριθμούς 1,2,3 και 4.
20 λευκές σφαίρες αριθμημένες ανά 5 με τους αριθμούς 2,4,6 και 8.
30 μαύρες σφαίρες αριθμημένες ανά 5 με τους αριθμούς 1,2,3,4,5 και 6.
Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

Α: επιλέγουμε μια σφαίρα με άρτιο αριθμό.

Β: επιλέγουμε μια κόκκινη σφαίρα.

Γ: επιλέγουμε μια κόκκινη σφαίρα με άρτιο αριθμό.

Δ: αν επιλέξουμε μια σφαίρα με άρτιο αριθμο τότε είναι κόκκινη

Λύση:

Κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα διπλής εισόδου:

Χρώμα – Αριθμ.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Σύνολο**
Κόκκινο	10	10	10	0	0	0	0	0	30
Πράσινο	10	10	10	10	0	0	0	0	40
Λευκό	0	5	0	5	0	5	0	5	20
Μαύρο	5	5	5	5	5	5	0	0	30
Σύνολο	25	30	25	20	5	10	0	5	120

$P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{30+20+10+5}{120}=\dfrac{65}{120}$ $\qquad P(B)=\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}=\dfrac{30}{120}=\dfrac{1}{4}$

$P(\Gamma)=P(A\cap B)=\dfrac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\dfrac{10}{120}=\dfrac{1}{12}$ $\qquad P(\Delta)=\dfrac{N(B)}{N(A)}=\dfrac{30}{65}$

10. Σε ένα κουτί υπάρχουν 3 κόκκινες, 2 πράσινες και 1 μαύρη σφαίρα. Επιλέγουμε τυχαία δύο σφαίρες διαδοχικά. Έστω τα ενδεχόμενα Α: οι σφαίρες έχουν το ίδιο χρώμα.και Β: η μία σφαίρα είναι μαύρη. Έστω η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+[P(B)+P(A)]x}{x^3+x}, & x\neq0\\ P(A\cup B), & x=0\end{cases}$$

Να εξετάσετε τη συνέχεια της συνάρτησης f στο $x_0=0$, αν η δειγματοληψία γίνει:
α. με επανατοποθέτηση **β. χωρίς επανατοποθέτηση**

Λύση:

Για τη συνέχεια στο 0 έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+[P(B)+P(A)]x}{x^3+x} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x[x+P(B)+P(A)]}{x(x^2+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{x+P(B)+P(A)}{x^2+1} =$$

$= P(B)+P(A)$ και $f(0)=P(A\cup B)$

Είναι η f συνεχής στο μηδέν , αν και μόνον αν , $P(B)+P(A)=P(A\cup B)$.

α. Αν η δειγματοληψία γίνει με επανατοποθέτηση τότε μπορεί να υπάρξει σαν απλό ενδεχόμενο το ζεύγος (Μ,Μ) το οποίο είναι κοινό για τα δύο ενδεχόμενα δηλαδή: $A\cap B\neq\varnothing$.

Από τον προσθετικό νόμο ισχύει: $P(A)+P(B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)$, δηλαδή: $\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$, άρα η f δεν είναι συνεχής στο 0.

β. Αν η δειγματοληψία γίνει χωρίς επανατοποθέτηση τότε δεν μπορεί να υπάρξει σαν απλό ενδεχόμενο το ζεύγος (Μ,Μ) δηλ. $A\cap B=\varnothing$. Άρα από τον προσθετικό νόμο ισχύει:

$P(A)+P(B)=P(A\cup B)$, δηλαδή $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

που σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο 0.

11. Αν $0 < P(A) < 1$ να δείξετε ότι: $\frac{1}{P(A)}+\frac{1}{P(A')}\geq 4$.

Λύση:

$$\frac{1}{P(A)}+\frac{1}{P(A')}\geq 4 \Leftrightarrow \frac{P(A')+P(A)}{P(A')P(A)}\geq 4 \Leftrightarrow P(A')+P(A)\geq 4P(A)\,P(A') \Leftrightarrow$$

$1 \geq 4P(A)\,[1 - P(A)] \Leftrightarrow 1\geq 4P(A) - 4P^2(A) \Leftrightarrow 4P^2(A) - 4P(A) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$ $(2P(A) - 1)^2 \geq 0$, που ισχύει.

12. Έστω Ω δειγματικός χώρος που αποτελείται από το σύνολο των ριζών της εξίσωσης $(x - 10)(x - 11)\ldots(x - 20) = 0$. Αν το Ω αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και $\lambda\in\Omega$, να βρεθεί η πιθανότητα η εξίσωση $y^2 - 8y + \lambda = 0$ να μην έχει πραγματικές ρίζες.

Λύση:

Αφού το Ω αποτελείται από το σύνολο των ριζών της εξίσωσης:

$$(x - 10)(x - 11)\ldots(x - 20) = 0$$

τότε είναι : $\Omega=\{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$.

Η εξίσωση: $y^2 - 8y + \lambda = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες όταν $\Delta < 0$, δηλ. όταν

$$(-8)^2 - 4\lambda < 0 \Leftrightarrow 64 - 4\lambda < 0 \Leftrightarrow -4\lambda < -64 \Leftrightarrow \lambda > 16$$

Αφού $\lambda \in \Omega$ για να μην έχει πραγματικές ρίζες η εξίσωση πρέπει να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο $A = \{17, 18, 19, 20\}$.

Άρα: $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{4}{10} = 0,4$.

13. Αν Χ ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω και $|P(X)+2| - |P(X)-3| = 8\lambda$, $\lambda \in R$ να δείξετε ότι $|\lambda| \le \dfrac{1}{8}$.

Λύση:

Ισχύει $0 \le P(X) \le 1 \Leftrightarrow 2 \le P(X) + 2 \le 3$. Άρα: $|P(x)+2| = P(x)+2$.

Επίσης $0 \le P(X) \le 1 \Leftrightarrow -3 \le P(X) - 3 \le -2$. Άρα: $|P(x)-3| = -P(x)+3$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε

$P(X) + 2 - (-P(X) + 3) = 8\lambda \Leftrightarrow P(X) + 2 + P(X) - 3 = 8\lambda \Leftrightarrow$

$2P(X) = 8\lambda + 1 \Leftrightarrow P(x) = \dfrac{8\lambda+1}{2}$.

Όμως: $0 \le P(X) \le 1$ δηλ. $0 \le \dfrac{8\lambda+1}{2} \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 8\lambda + 1 \le 2 \Leftrightarrow -1 \le 8\lambda \le 1 \Leftrightarrow$

$-1/8 \le \lambda \le 1/8 \Leftrightarrow |\lambda| \le \dfrac{1}{8}$

14. Σε μία έρευνα μεταξύ των μαθητών μίας τάξης διαπιστώθηκε ότι το 50% δεν είχε διαβάσει φυσική, το 70% δεν είχε διαβάσει μαθηματικά και το 80% δεν είχε διαβάσει και τα δύο μαθήματα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων.

α. Ένας μαθητής έχει διαβάσει φυσική.

β. Ένας μαθητής έχει διαβάσει μαθηματικά.

γ. Ένας μαθητής έχει διαβάσει και τα δύο μαθήματα.

δ. Ένας μαθητής έχει διαβάσει τουλάχιστον ένα από τα δύο μαθήματα.

ε. Ένας μαθητής έχει διαβάσει μόνο φυσική.

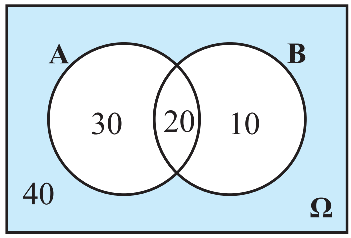
στ. Ένας μαθητής έχει διαβάσει μαθηματικά και φυσική.

ζ. Ένας μαθητής δεν έχει διαβάσει κανένα από τα δύο μαθήματα.

η. Ένας μαθητής έχει διαβάσει μόνο μαθηματικά ή μόνο φυσική (ακριβώς ένα από τα δύο μαθήματα).

Λύση:

Έστω τα ενδεχόμενα:



Α: έχει διαβάσει φυσική, οπότε: Α΄: δεν έχει διαβάσει φυσική.
Β: έχει διαβάσει μαθηματικά, οπότε: Β΄: δεν έχει διαβάσει μαθηματικά.
Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος σχηματίζουμε το διπλανό διάγραμμα Venn απο το οποίο προκύπτουν άμεσα οι απαντήσεις στα ερωτήματα.

Είναι $P(A')=\frac{50}{100}$, $P(B')=\frac{70}{100}$

$A \cap B$: έχει διαβάσει και τα δύο μαθήματα.

Οπότε $(A \cap B)'$: δεν έχει διαβάσει και τα δύο μαθήματα. Άρα: $P((A\cap B)')=\frac{80}{100}$

α. $P(A) = 1 - P(A')$ δηλαδή: $P(A)=1-\frac{50}{100}=\frac{50}{100}$

β. $P(B) = 1 - P(B')$ δηλαδή: $P(B)=1-\frac{70}{100}=\frac{30}{100}$

γ. Έχει διαβάσει και τα δύο μαθήματα: $A \cap B$. Άρα: $P(A \cap B) = 1 - P((A \cap B)')$

δηλαδή: $P(A\cap B)=1-\frac{80}{100}=\frac{20}{100}$

δ. Έχει διαβάσει τουλάχιστον ένα από τα δύο μαθήματα: $A \cup B$.

Άρα: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

δηλαδή: $P(A\cup B)=\frac{50}{100}+\frac{30}{100}-\frac{20}{100}=\frac{60}{100}$

ε. Έχει διαβάσει μόνο φυσική $A - B = A \cap B'$ Άρα: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

δηλαδή: $P(A-B)=\frac{50}{100}-\frac{20}{100}=\frac{30}{100}$

στ. Έχει διαβάσει μαθηματικά και όχι φυσική: $B - A = B \cap A'$

Άρα: $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$

δηλαδή: $P(B-A)=\frac{30}{100}-\frac{20}{100}=\frac{10}{100}$

ζ. Δεν έχει διαβάσει κανένα από τα δύο μαθήματα $(A \cup B)'$

Άρα: $P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B)$ δηλαδή: $P((A\cup B)')=1-\frac{60}{100}=\frac{40}{100}$

η. Έχει διαβάσει μόνο μαθηματικά ή μόνο φυσική: $(B - A) \cup (A - B)$.

Τα $A - B$, $B - A$ είναι ασυμβίβαστα.

Άρα $P((A - B) \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A)$ δηλαδή:

$$P((A-B)\cup(B-A))=\frac{30}{100}+\frac{10}{100}=\frac{40}{100}$$

15. **Η πιθανότητα να επιλεγεί ένας μαθητής στη θεατρική ομάδα του σχολείου του είναι 1/6 ενώ η πιθανότητα να μην επιλεγεί στην ομάδα μουσικής είναι 4/5. Η πιθανότητα να επιλεγεί και στις δύο ομάδες είναι 1/10. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:**

α. Να επιλεγεί τουλάχιστον σε μια από τις δύο ομάδες.

β. Να επιλεγεί μόνο στη θεατρική ομάδα.

γ. Να επιλεγεί μόνο στη ομάδα μουσικής.

δ. Να επιλεγεί μόνο σε μια από τις δύο ομάδες.

ε. Να μην επιλεγεί σε καμία ομάδα.

ζ. Να επιλεγεί σε μια το πολύ ομάδα.

Λύση:

Ορίζω τα ενδεχόμενα:
Α: "να επιλεγεί στη θεατρική ομάδα"
Β: "να επιλεγεί στην ομάδα μουσικής"

Τότε: $P(A)=\frac{1}{6}$ $\quad P(B')=\frac{4}{5}\Leftrightarrow 1-P(B)=\frac{4}{5}\Leftrightarrow P(B)=\frac{1}{5}$ $\quad P(A\cap B)=\frac{1}{10}$

α. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\overset{5}{\frac{1}{6}}+\overset{6}{\frac{1}{5}}-\overset{3}{\frac{1}{10}}=\frac{5+6-3}{30}=\frac{80}{30}=\frac{4}{15}$

β. $P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\overset{5}{\frac{1}{6}}-\overset{3}{\frac{1}{10}}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$

γ. $P(B\cap A')=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\overset{2}{\frac{1}{5}}-\overset{1}{\frac{1}{10}}=\frac{1}{10}$

δ. $P[(A-B)\cup(B-A)]=P(A-B)+P(B-A)$ αφού $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$

$=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)$

$=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=\overset{5}{\frac{1}{6}}+\overset{6}{\frac{1}{5}}-2\cdot\overset{3}{\frac{1}{10}}=\frac{5+6-6}{30}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$

ε. $P(A\cup B)'=1-P(A\cap B)=\overset{15}{1}-\overset{1}{\frac{4}{15}}=\frac{11}{15}$

ζ. $P(A\cap B)'=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

16. **Για τα ενδεχόμενα Α,Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι P(A – B) = 0,6 και P(B – A) = 0,4. Να δείξετε ότι τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ασυμβίβαστα.**

Λύση:

Έστω ότι τα ενδεχόμενα Α, Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

Τότε: $A\cap B\neq\varnothing$ άρα $P(A\cap B)\neq 0$

$$P(A-B)=0,6\Leftrightarrow P(A)-P(A\cap B)=0,6\Leftrightarrow P(A)=0,6+P(A\cap B)\quad \textbf{(1)}$$

και: $P(B-A)=0,4\Leftrightarrow P(B)-P(A\cap B)=0,4\Leftrightarrow P(B)=0,4+P(A\cap B)$ **(2)**

Η σχέση $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ από τις **(1)** και **(2)** γράφεται:

$P(A\cup B)=0,6+P(A\cap B)+0,4+P(A\cap B)-P(A\cap B)$

$P(A\cup B)=1+P(A\cap B)>1$ άτοπο.

Επομένως τα Α, Β είναι ασυμβίβαστα (αφού $P(A\cap B)\neq 0$).

17. **Θεωρούμε τις συναρτήσεις:**
$f(x) = 4(x – 1)(x^2 – 5x + 6)$ και $g(x) = 1/3x^3 – 5x^2 + 16x + 2004$
Έστω Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.
Ορίζουμε τα ενδεχόμενα: $A = \{x\in\Omega\ /\ f(x) = 0\}$ και
$B = \{y\in\Omega\ /$ y είναι θέση ακρότατου της $g(x)\}$.
Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων: Α, Β, $A\cap B$, $A\cup B$, Α – Β, Β – Α

Λύση:

$f(x)=0\Leftrightarrow 4(x-1)\cdot(x^2-5x+6)=0\Leftrightarrow x=1\in\Omega$ ή $x^2-5x+6=0\Leftrightarrow$

$x=1$ ή $x=2$ ή $x=3$

Άρα: $A = \{x\in\Omega\ /\ f(x) = 0\} = \{1, 2, 3\}$

Είναι $g'(x)=x^2-10x+16$ και $g'(x)=0\Leftrightarrow x^2-10x+16=0\Leftrightarrow x=8$ ή $x=2$

Άρα $B = \{y\in\Omega$ / y είναι θέση ακρότατου της $g(x)\} = \{2, 8\}$. Αφού έχουμε δειγματικό χώρο που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα ισχύει:

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{3}{10}\qquad P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

Αφού: $A\cap B=\{2\}$ είναι $P(A\cap B)=\dfrac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\dfrac{1}{10}$

$A \cup B = \{1,2,3,8\}$ άρα $P(A \cup B) = \dfrac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$

$A - B = \{1,3\}$ άρα $P(A - B) = \dfrac{N(A - B)}{N(\Omega)} = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$

$B - A = \{8\}$ άρα $P(B - A) = \dfrac{N(B - A)}{N(\Omega)} = \dfrac{1}{10}$.

18. Σε ένα συνέδριο μαθηματικών συμμετέχουν Έλληνες, Γάλλοι και Άγγλοι μαθηματικοί. Από τους σύνεδρους επιλέγεται τυχαία ένας για τη θέση του συντονιστή του συνεδρίου. Αν στο συνέδριο συμμετέχουν 25 Έλληνες, ενώ οι πιθανότητες να επιλεγεί Γάλλος είναι 1/3 και Άγγλος είναι 1/4, να βρεθεί το πλήθος των συνέδρων.

Λύση:

Ορίζω τα ενδεχόμενα:
Ε: "ο σύνεδρος είναι Έλληνας" με: $N(E) = 25$
Γ: "ο σύνεδρος είναι Γάλλος" με: $N(\Gamma) = x$ και $P(\Gamma) = 1/3$
Α: "ο σύνεδρος είναι Άγγλος" με: $N(A) = y$ και $P(A) = 1/4$.

Αφού: $P(\Gamma) = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+y+25} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 3x = x+y+25 \Leftrightarrow 2x - y = 25$ **(1)**

Αφού: $P(A) = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{y}{x+y+25} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 4y = x+y+25 \Leftrightarrow -x+3y = 25$ **(2)**

Από το σύστημα των **(1)** και **(2)** έχουμε: $\begin{cases} 2x - y = 25 \\ -x + 3y = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = 20 \\ y = 15 \end{matrix}$

Άρα όλοι οι σύνεδροι είναι: $x + y + 25 = 20 + 15 + 25 = 60$

19. Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_\nu\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Η πιθανότητα των στοιχειωδών ενδεχομένων δίνεται από τη σχέση:

$$P(\omega_\kappa) = \frac{3\kappa - 1}{40} \text{ για } \kappa = 1, 2, 3, ..., \nu.$$

α. Να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

β. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$.

Λύση:

α. Αφού $P(\Omega) = 1 \Leftrightarrow P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + ... + P(\omega_\nu) = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{40} + \frac{5}{40} + \frac{8}{40} + ... \frac{3\nu - 1}{40} = 1 \Leftrightarrow 2 + 5 + 8 + ... + (3\nu - 1) = 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\nu\cdot(2+3\nu-1)}{2}=40 \Leftrightarrow \nu\cdot(3\nu+1)=80 \Leftrightarrow 3\nu^2+\nu-80=0 \Leftrightarrow \nu=5 \text{ ή } \nu=-\frac{32}{6}$$

Η $\nu = -32/6$ απορρίπτεται.

Άρα ο δειγματικός χώρος είναι ο $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\}$

β. $P(A)=P(\omega_1)+P(\omega_3)+P(\omega_5)=\frac{2}{40}+\frac{8}{40}+\frac{14}{40}=\frac{24}{40} \Leftrightarrow P(A)=\frac{3}{5}$

20. Σε ένα μη αμερόληπτο ζάρι οι πιθανότητες εμφάνισης κάθε έδρας δίνονται από τη σχέση:

$P(1) = 3P(2) = 3P(3) = 4P(4) = 6P(5) = 2P(6)$ (1)

α. Να βρεθούν οι πιθανότητες εμφάνισης της κάθε έδρας.

β. Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου:

$A=\{x\in\Omega / x$ θέση ακροτάτου της $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+2004\}$

γ. Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου:

$B = \{\kappa\in\Omega$ / η εξίσωση $x^2+\kappa x+1=0$ να έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες$\}$.

Λύση:

α. Αφού $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ έχω $P(\Omega)=1 \Leftrightarrow$

$$P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=1\Leftrightarrow$$

$$P(1)+\frac{1}{3}P(1)+\frac{1}{3}P(1)+\frac{1}{4}P(1)+\frac{1}{6}P(1)+\frac{1}{2}P(1)=1\Leftrightarrow$$

$$12P(1)+4P(1)+4P(1)+3P(1)+2P(1)+6P(1)=12 \Leftrightarrow 31P(1)=12 \Leftrightarrow P(1)=\frac{12}{31}$$

Από τη σχέση **(1)** έχω:

$$P(2)=\frac{1}{3}P(1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{31}=\frac{4}{31} \Leftrightarrow P(2)=\frac{4}{31}$$

$$P(3)=\frac{1}{3}P(1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{31}=\frac{4}{31} \Leftrightarrow P(3)=\frac{4}{31}$$

$$P(4)=\frac{1}{4}P(1)=\frac{1}{4}\cdot\frac{12}{31}=\frac{3}{31} \Leftrightarrow P(4)=\frac{3}{31}$$

$$P(5)=\frac{1}{6}P(1)=\frac{1}{6}\cdot\frac{12}{31}=\frac{2}{31} \Leftrightarrow P(5)=\frac{2}{31}$$

$$P(6)=\frac{1}{2}P(1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{31}=\frac{6}{31} \Leftrightarrow P(6)=\frac{6}{31}$$

β. Είναι $f'(x) = x^2 - 4x + 3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$x = 1$ ή $x = 3$

Άρα: $A = \{1, 3\}$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

και

$$P(A) = P(1) + P(3) = \frac{12}{31} + \frac{4}{31} \Leftrightarrow P(A) = \frac{16}{31}$$

γ. Αφού η εξίσωση: $x^2 + \kappa x + 1 = 0$ έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες πρέπει:

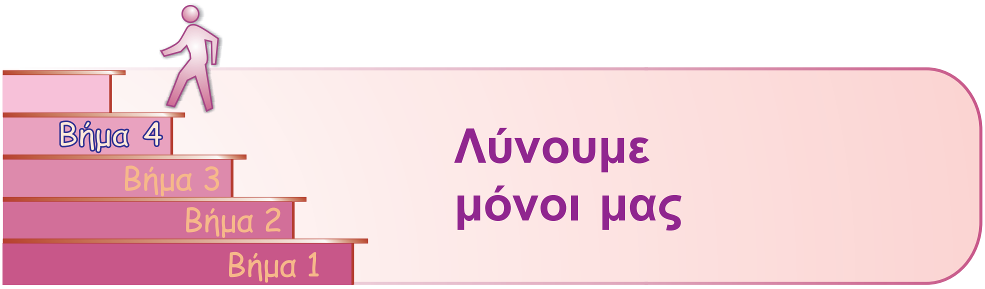
$\Delta > 0 \Leftrightarrow \kappa^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \kappa \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

επειδή $\kappa \in \Omega$, είναι:
$\kappa = 3$ ή $\kappa = 5$ ή $\kappa = 6$.

Άρα: $B = \{3, 4, 5, 6\}$
και:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$\kappa^2 - 4$		+	0	−	0	+	

$$P(B) = P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = \frac{4}{31} + \frac{3}{31} + \frac{2}{31} + \frac{6}{31} \Leftrightarrow P(B) = \frac{15}{31}$$



1. **Ενα κουτί περιέχει 2 λευκές, 2 κόκκινες και μια μαύρη σφαίρα. Επιλέγουμε διαδοχικά και χωρίς επανατοποθέτηση μια σφαίρα. Αν το πείραμα τύχης σταματά μόλις επιλέξουμε την μαύρη σφαίρα να βρεθούν:**

α. ο δειγματικός χώρος Ω.

β. το ενδεχόμενο Α: η πρώτη σφαίρα είναι κόκκινη.

2. **Τρείς ταχυδρόμοι πρόκειται να μοιράσουν επιστολές στις οδούς Πανεπιστημίου, Ακαδημίας και Σταδίου. Για την οδό Πανεπιστημίου υπάρχει ένας σάκος, για την Ακαδημίας δύο σάκοι και για την Σταδίου ένας σάκος. Δίνουμε με σειρά ένα σάκο τυχαία σε κάθε ταχυδρόμο.**
Να βρεθεί το ενδεχόμενο Α: ο ταχυδρόμος της οδού Πανεπιστημίου πήρε λάθος σάκο.

3. **Ένας μαθητής λύνοντας ασκήσεις μαθηματικών αποφάσισε να λύσει το πολύ 4 ασκήσεις ή να σταματήσει όταν λύσει 3 ασκήσεις σωστά. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος Ω. Αν για κάθε άσκηση που λύνει σωστά χρειάζεται 15 λεπτά και για κάθε αποτυχημένη προσπάθεια απασχολείται 10 λεπτά, να βρεθεί ο ελάχιστος και ο μέγιστος χρόνος μελέτης.**

4. **Ένας σάκος περιέχει 5 κόκκινες κάρτες με τον αριθμό 1, 15 πράσινες κάρτες με τον αριθμό 2, 20 λευκές κάρτες με τον αριθμό 3 και 30 μπλέ κάρτες με τον αριθμό 4. Επιλέγουμε μια κάρτα στην τύχη. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:**

Α: η κάρτα δεν είναι χρώματος μπλέ.

Β: η κάρτα έχει άρτιο αριθμό.

Γ: η κάρτα είναι χρώματος κόκκινου ή έχει περιττό αριθμό.

5. Αν $P(A\text{-}B)=\frac{1}{5}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{10}$ και $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$ να βρεθούν οι $P(A)$ και $P(B)$.

6. **Αν Α,Β ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι ισχύει:**

$$2[P(A)]^2+2P[(B)]^2 \geq 2P(A \cup B)-1$$

7. **Αν Α,Β ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω με $A \cap B = \varnothing$, να αποδείξετε ότι ισχύει: $2P(A \cap B) \le P(A) + P(B) \le 1 + P(A \cap B)$**

8. Αν Α,Β ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω με $P(A)=\frac{5}{12}$ και $P(B)=\frac{3}{4}$ να δείξετε ότι:

α. τα ενδεχόμενα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

β. ισχύει $\frac{2}{12}\le P(A\cap B)\le\frac{5}{12}$

9. Αν A,B ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω με $P(A\cup B) = 3P(A\cap B)$ και $P(B) = 2P(A)$ να βρεθεί ο λόγος: $\dfrac{N(A\cup B)}{N(A)}$

10. Αν Α,Β ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω με $P(A')=\frac{1}{2}$ και $P(B')=\frac{2}{3}$

α. εξετάστε αν τα ενδεχόμενα Α΄και Β΄ είναι ασυμβίβαστα

β. Αν $P(A'\cup B')=\frac{11}{12}$ να υπολογίσετε την $P(A'\cap B')$

γ. δείξτε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

δ. να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A\cap B')$ και $P(A\cup B')$

11. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ και τα ενδεχόμενα $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ και $B = \{\omega_2, \omega_3\}$.

Αν $P(A) = \dfrac{5}{12}$, $P(B) = \dfrac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \dfrac{2}{3}$ και $P(A - B) = \dfrac{1}{12}$ να βρεθούν οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων ω_1, ω_2, ω_3 και ω_4.

12. Αν Α, Β ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω και $P(A) = 3/4$ και $P(B) = 3/8$ να δείξετε ότι:

α. Α, Β όχι ασυμβίβαστα β. $P(A \cup B) \geq 3/4$ γ. $1/8 \leq P(A \cap B) \leq 3/8$

13. **Αν Α, Β ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω και P(A), P(B) ρίζες της εξίσωσης: $6x^3 + 5x^2 - 12x + 4 = 0$ με P(A) < P(B) να δείξετε ότι:**
α) Α, Β όχι ασυμβίβαστα β) $1/6 \le P(A \cap B) \le 1/2$ γ) $2/3 \le P(A \cup B) \le 1$

14. Σε ένα νοσοκομείο νοσηλεύονται 300 ασθενείς και η κατάσταση της υγείας τους χαρακτηρίζεται σαν σοβαρή ή μέτρια. Αν από τους ασθενείς οι 40 είναι ανασφάλιστοι, οι 70 βρίσκονται σε σοβαρή κατάσταση και οι 220 είναι ασφαλισμένοι με μέτρια κατάσταση υγείας να βρεθούν οι πιθανότητες ένας νοσηλευόμενος που επιλέγεται τυχαία:

α. να είναι ανασφάλιστος ή να βρίσκεται σε σοβαρή κατάσταση.

β. να μην είναι ασφαλισμένος ή να μην βρίσκεται σε σοβαρή κατάσταση.

112. Λύνουμε μόνοι μας Βήμα 4ο

15. **Μετά από ένα τροχαίο ατύχημα το 40% των επιβατών διακομίστηκαν στο κοντινότερο επαρχιακό νοσοκομείο, το 50% των επιβατών διακομίστηκαν σε νοσοκομείο της Αθήνας ενώ το 15% των επιβατών διακομίστηκαν στο κοντινότερο επαρχιακό νοσοκομείο και κατόπιν λόγω της σοβαρότητας του τραυματισμού τους κρίθηκε αναγκαία η μεταφορά τους σε νοσοκομείο της Αθήνας. Αν 12 από τους επιβάτες δεν τραυματίστηκαν καθόλου τότε πόσους επιβάτες συνολικά είχε το όχημα;**

16. **Δύο δρομείς Α και Β συμμετέχουν σε ένα μαραθώνιο. Η πιθανότητα τερματισμού του δρομέα Α είναι κατά 20% μεγαλύτερη από του Β, η πιθανότητα να τερματίσει τουλάχιστον ένας είναι 90% και η πιθανότητα να τερματίσουν και οι δύο είναι 10%. Να βρεθούν οι πιθανότητες τερματισμού των δρομέων.**

17. **Ο Αντώνης και ο Βασίλης συμμετέχουν σε ένα γραπτό διαγωνισμό. Η πιθανότητα να πετύχει ο Αντώνης είναι διπλάσια από την πιθανότητα να πετύχει ο Βασίλης ενώ η πιθανότητα να πετύχει μόνο ένας από τους δύο είναι 75%. Να βρεθούν οι πιθανότητες επιτυχίας των δύο υποψηφίων.**

18. Αν $\Omega = \{2, 6, 10, \ldots 410\}$ και για κάθε $x \in \Omega$ είναι $P(x) = \kappa x$, να βρεθεί ο $\kappa \in R$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

19. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{2, 4, 6, ..., 2\kappa\}$, $\kappa \in N^*$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Αν θεωρήσουμε ότι είναι τιμές μιας μεταβλητής Χ με $\bar{x} = 9$ να υπολογιστεί:

α. το $\kappa \in N^*$ και να προσδιοριστεί ο δειγματικός χώρος Ω.

β. να βρεθεί η διάμεσος και το εύρος των τιμών της μεταβλητής Χ.

γ. να δείξετε ότι $s^2 = \bar{x} + 3$

δ. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

Α: $\alpha \in \Omega$ και α να είναι πολλαπλάσιο του 4 .

Β: $\beta \in \Omega$ και β ρίζα της εξίσωσης $\dfrac{(x^2 - 6x + 8)(x - 3)}{x - 2} = 0$

Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(A - B)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

20. **Δινεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^x - x$.**

α. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Αν Α και Β ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω που συνδέονται με τη σχέση $e^{P(A)} - P(A) = P(B)$ να δείξετε ότι $P(B) = f(P(A))$ και ότι το Β είναι βέβαιο ενδεχόμενο και το Α αδύνατο.

21. **Έστω 5 μονοψήφιοι θετικοί ακέραιοι. Αν οι τέσσερις από αυτούς είναι οι 1, 2, 6, 9 να βρείτε την πιθανότητα η διάμεσος να είναι:**
α. 6 β. 6,5 γ. 5

Ελέγχουμε τη γνώση μας

Θέμα 1ο

Ένα κουτί περιέχει 5 αριθμημένες σφαίρες από το 1 εως το 5. Εξάγουμε διαδοχικά και χωρίς επανατοποθέτηση μια σφαίρα κάθε φορά. Το πείραμα σταματά αν εξαχθεί σφαίρα με άρτιο αριθμό.

α. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης.

β. Να βρεθούν τα ενδεχόμενα:
- Α: έχουν εξαχθεί 3 σφαίρες συνολικά.
- Β: η πρώτη σφαίρα έχει τον αριθμό 5
- Γ: η τελευταία σφαίρα έχει τον αριθμό 2

Θέμα 2ο

Α. Έστω η ρίψη δύο όμοιων ζαριών και x η πιθανότητα να έχουμε δύο ίδιες ενδείξεις, y η πιθανότητα το άθροισμα των ενδείξεων να ισούται με 6. Να υπολογίσετε τη διαφορά x - y.

Β. Έστω δείγμα 5 μονοψήφιων θετικών ακέραιων. Αν οι τέσσερεις από αυτούς είναι οι 1, 2, 6 και 9 να βρεθεί η πιθανότητα η μέση τιμή του δείγματος να είναι μεγαλύτερη από 6.

Θέμα 3ο

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ και $f(x) = \lambda x^4 + \lambda^2 x^2 - 5$, με $\lambda \in \Omega$. Αν το Ω αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα να βρεθεί η πιθανότητα ώστε η γραφική παράσταση της f να έχει στο σημείο με συντεταγμένες (1, f(1)) εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα x΄x.

Θέμα 4ο

Σε μια έρευνα που έγινε βρέθηκε ότι στο 15% των τροχαίων ατυχημάτων που οφείλονται σε μηχανική βλάβη, οφείλονταν σε ανθρώπινο λάθος και σε κακή ποιότητα οδοστρώματος. Το 20% των τροχαίων ατυχημάτων που οφείλονται σε ανθρώπινο λάθος, οφείλονταν και σε μηχανική βλάβη. Το 50% των τροχαίων ατυχημάτων οφείλονται σε ανθρώπινο λάθος. Επίσης το 40% των τροχαίων ατυχημάτων που οφείλονται σε μηχανική βλάβη οφείλονταν και σε ανθρώπινο λάθος. Ποια η πιθανότητα ένα τροχαίο ατύχημα να οφείλεται και στις τρεις παραπάνω αιτίες;