

Κεφάλαιο 2°

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Μετά το τέλος της μελέτης του 2ου κεφαλαίου, ο μαθητής θα πρέπει να γνωρίζει:

- ✓ Τις βασικές έννοιες της στατιστικής όπως πληθυσμός, δείγμα κ.λ.π. καθώς και τις κατηγορίες των μεταβλητών.
- ✓ Τους ορισμούς της απόλυτης, σχετικής, και αθροιστικής συχνότητας.
- ✓ Τον τρόπο κατασκευής πινάκων συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων και των γραφικών τους παραστάσεων (Ραβδόγραμμα, Διάγραμμα συχνοτήτων, Κυκλικό Διάγραμμα, Σημειόγραμμα και Χρονόγραμμα).
- ✓ Τη διαδικασία της ομαδοποίησης των παρατηρήσεων σε ιστοπλάτεις κλάσεις και την κατασκευή πίνακα συχνοτήτων, αθροιστικών συχνοτήτων και των αντίστοιχων Ιστογραμμάτων.
- ✓ Την έννοια της καμπύλης συχνοτήτων και τη μορφή της σε συγκεκριμένες κατανομές.
- ✓ Τον ορισμό και τον τρόπο υπολογισμού των μέτρων θέσης και διασποράς μιας κατανομής (μέση τιμή, σταθμικός μέσος, διάμεσος, εύρος, διακύμανση, τυπική απόκλιση.) καθώς και τις ιδιότητες της τυπικής απόκλισης στην κανονική κατανομή.
- ✓ Τον ορισμό του συντελεστή μεταβολής και του ομοιογενούς δείγματος.

Τυπολόγιο

Σχετική συχνότητα: $f_i = \frac{v_i}{v}$, $i=1, \dots, \kappa$

Αθροιστική συχνότητα: $N_1 = v_1$ και $N_i = N_{i-1} + v_i$, $i=2 \dots \kappa$

Αθροιστική σχετική συχνότητα:

$$F_1 = f_1 \text{ και } F_i = F_{i-1} + f_i, \quad i=2, \dots, \kappa \quad \text{ή} \quad F_i = \frac{N_i}{v}, \quad i=1, \dots, \nu$$

Επίκεντρη γωνία κυκλικού τομέα: $\hat{\phi}_i = f_i \cdot 360^\circ = \frac{v_i}{v} \cdot 360$

Μέση τιμή: $\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{\nu} t_i$ $\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{\kappa} x_i v_i$ $\bar{x} = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i f_i$

Σταθμικός μέσος: $\bar{x}_\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i}$

Διάμεσος: $\delta = x_{\frac{\nu+1}{2}}$ αν $\nu =$ περιττός, $\delta = \frac{x_{\frac{\nu}{2}} + x_{\frac{\nu}{2}+1}}{2}$ αν $\nu =$ άρτιος

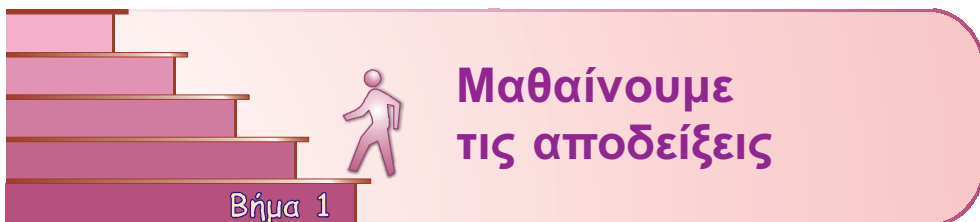
Εύρος: $R = x_{\max} - x_{\min}$

$$\text{Διακύμανση: } s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{\nu} (t_i - \bar{x})^2 \qquad s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i \right)^2}{v} \right\} = \bar{x}^2 - \bar{x}^{-2}$$

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{\kappa} (t_i - \bar{x})^2 v_i \qquad s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} x_i v_i \right)^2}{v} \right\}$$

Τυπική απόκλιση: $s = \sqrt{s^2}$

Συντελεστής μεταβολής: $CV = \frac{s}{|\bar{x}|}$



- **ΘΕΩΡΙΑ 5:** Να δείξετε ότι ισχύει: i) $f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_k = 1$,
ii) $0 \leq f_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, \kappa$

Απόδειξη:

$$i) f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_k = \frac{v_1}{v} + \frac{v_2}{v} + \frac{v_3}{v} + \dots + \frac{v_k}{v} = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_k}{v} = \frac{v}{v} = 1$$

$$ii) 0 \leq v_i \leq v \Leftrightarrow 0 \leq \frac{v_i}{v} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq f_i \leq 1$$



Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις - κλειδιά

A. Από το σχολικό βιβλίο

Να λύσω τις ασκήσεις:

Σελ. 79: Ασκήσεις Α΄ Ομάδας 4, 5, 7, 8

Σελ. 80: Ασκήσεις Α΄ Ομάδας 10, 11, 12

Σελ. 81: Ασκήσεις Α΄ Ομάδας 14

Σελ. 83: Ασκήσεις Β΄ Ομάδας 7

Σελ. 100: Ασκήσεις Α΄ Ομάδας 3, 4, 5, 6, 7

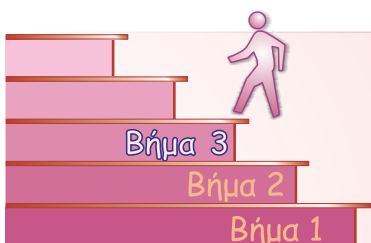
Σελ. 101: Ασκήσεις Α΄ Ομάδας 9, 10, 12

Σελ. 102: Ασκήσεις Α΄ Ομάδας 17, 19, 20

Σελ. 103: Ασκήσεις Β΄ Ομάδας 2, 3, 4, 5

Β΄ Ομάδας 2, 4

Β΄ Ομάδας 1



Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. Οι παρακάτω αριθμοί είναι το πλήθος των τηλεφωνικών κλήσεων που πραγματοποίησαν σε μία μέρα 30 συνδρομητές.

2	4	8	5	6	1	8	1	1	6
4	2	5	4	6	9	9	1	5	7
8	3	7	1	1	2	6	4	7	6

Να κατασκευάσετε:

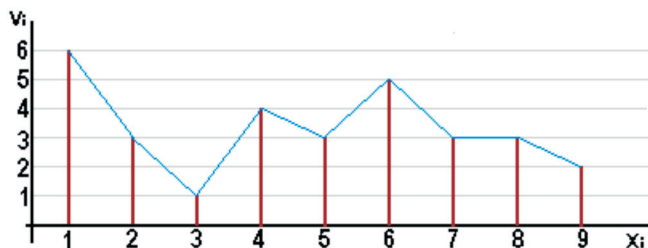
- Τους πίνακες συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων.
- Το διάγραμμα συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο.
- Να βρεθεί το ποσοστό των συνδρομητών που πραγματοποίησαν:
 - τουλάχιστον 6 κλήσεις.
 - το πολύ 5 κλήσεις.
 - από 4 έως και 7 κλήσεις.

Λύση:

- α. Ο πίνακας συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων είναι ο ακόλουθος:

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i	$f_i \%$	$F_i \%$
1	6	0,200	6	0,200	20,0	20,0
2	3	0,100	9	0,300	10,0	30,0
3	1	0,034	10	0,334	3,40	33,4
4	4	0,133	14	0,467	13,3	46,7
5	3	0,100	17	0,567	10,0	56,7
6	5	0,166	22	0,733	16,6	73,3
7	3	0,100	25	0,833	10,0	83,3
8	3	0,100	28	0,933	10,0	93,3
9	2	0,067	30	1	6,70	100,0
Σύνολο:	30	1			100,0	

- β. Το διάγραμμα συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο είναι το παρακάτω:



γ. Το ποσοστό των συνδρομητών που πραγματοποίησαν:

1. τουλάχιστον 6 κλήσεις είναι: $100\% - F_5\% = 100\% - 56,7\% = 43,3\%$

2. το πολύ 5 κλήσεις είναι: $F_5\% = 56,7\%$

3. από 4 έως και 7 κλήσεις είναι: $F_7\% - F_3\% = 83,3\% - 46,7\% = 36,6\%$

2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και κατόπιν να κατασκευάσετε το πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων.

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$
1						10
2		0,075				
3			80			40
4	50					
5						
Σύνολο:						

Λύση:

$$\text{Έχουμε: } F_4\% = \frac{N_4}{v} 100 \Leftrightarrow v = \frac{N_4}{F_4\%} 100 = \frac{80}{40} 100 = 200$$

$$\text{Επίσης: } F_1 = \frac{F_1\%}{100} = 0,1 = f_1 \text{ άρα:}$$

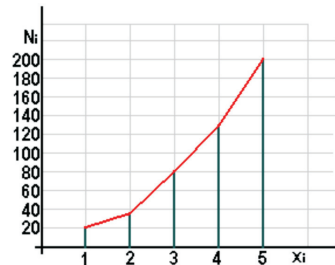
$$v_1 = f_1 \cdot v = 200 \cdot 0,1 = 20 = N_1 \text{ και } v_2 = f_2 \cdot v = 200 \cdot 0,075 = 15$$

$$\text{Τότε: } N_2 = v_1 + v_2 = 20 + 15 = 35 \quad v_3 = N_3 - N_2 = 80 - 35 = 45$$

$$\text{και } v_5 = v - (v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = 200 - 130 = 70$$

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i	$f_i \%$	$F_i \%$
1	20	0,100	20	0,100	10	10
2	15	0,075	35	0,175	7,5	17,5
3	45	0,225	80	0,400	22,5	40
4	50	0,250	130	0,650	25	65
5	70	0,350	200	1	35	100
Σύνολο:	200	1			100	

Στο διπλανό διάγραμμα φαίνεται το πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων:



- 3.** Σε κάποιους ασθενείς χορηγήθηκε ένα νέο αντιπυρετικό φάρμακο. Σε έλεγχο που διενεργήθηκε ανά μία ώρα καταγράφηκαν τα ποσοστά των ασθενών στους οποίους παρατηρήθηκε πτώση του πυρετού. Τα ποσοστά φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

Ώρα:	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00	17:00	18:00
Ποσοστό:	0	15	20	35	40	40	45

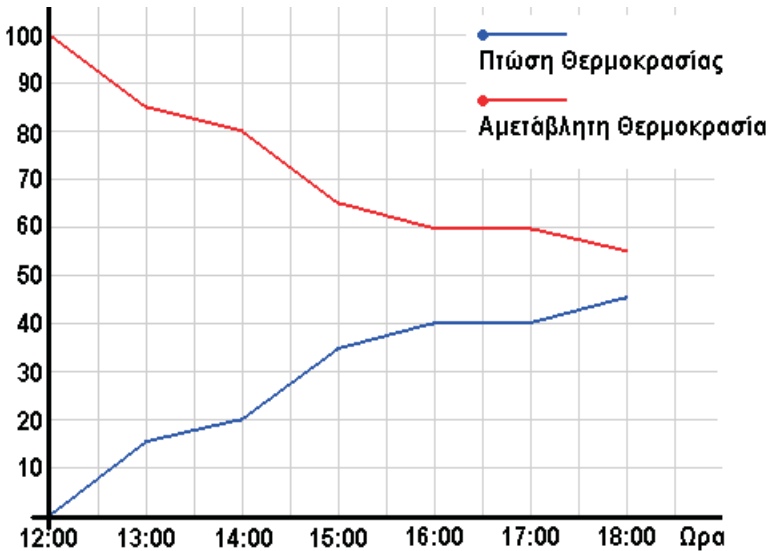
Να κατασκευασθεί το χρονόγραμμα των ποσοστών των ασθενών στους οποίους παρατηρήθηκε πτώση του πυρετού καθώς και το χρονόγραμμα των ποσοστών των ασθενών στους οποίους η θερμοκρασία δεν σημείωσε πτώση.

Λύση:

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τα ποσοστά των ασθενών στους οποίους παρατηρήθηκε πτώση του πυρετού καθώς και τα ποσοστά των ασθενών στους οποίους η θερμοκρασία δεν σημείωσε πτώση:

Ώρα:	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00	17:00	18:00
Πτώση:	0	15	20	35	40	40	45
Αμετάβλ.	100	85	80	65	60	60	55

Το χρονόγραμμα των ποσοστών των ασθενών στους οποίους παρατηρήθηκε πτώση του πυρετού καθώς και το χρονόγραμμα των ποσοστών των ασθενών στους οποίους η θερμοκρασία δεν σημείωσε πτώση είναι το ακόλουθο:



4. Σε ένα κυκλικό διάγραμμα ο κυκλικός τομέας της τιμής A έχει κεντρική γωνία ίση με 120° . Αν η μεταβλητή που μελετούμε παίρνει τιμές A, B, Γ, Δ και η τιμή A έχει διπλάσια σχετική συχνότητα από την B και τριπλάσια από την Γ, να κατασκευάσετε το αντίστοιχο ραβδόγραμμα.

Λύση:

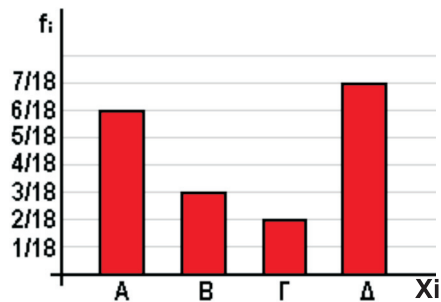
Έχουμε:

$$\phi_A = f_A \cdot 360^\circ \Leftrightarrow f_A = \frac{\phi_A}{360^\circ} = \frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3}$$

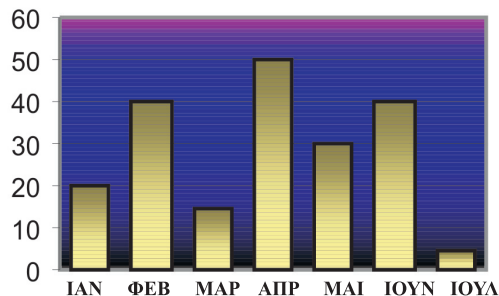
$$\text{Επίσης: } f_A = 2f_B \Leftrightarrow f_B = \frac{f_A}{2} = \frac{1}{6}$$

$$f_A = 3f_\Gamma \Leftrightarrow f_\Gamma = \frac{f_A}{3} = \frac{1}{9}$$

$$f_\Delta = 1 - (f_A + f_B + f_\Gamma) \Leftrightarrow f_\Delta = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} \right) \Leftrightarrow f_\Delta = \frac{7}{18}$$



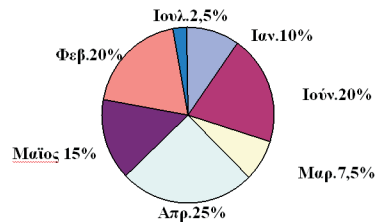
5. Οι πωλήσεις σε χιλιάδες τεμάχια ενός προϊόντος φαίνονται στο διπλανό ραβδόγραμμα. Να κατασκευάσετε το κυκλικό διάγραμμα.



Λύση:

Κατασκευάζουμε τον παρακάτω βοηθητικό πίνακα:

x_i	v_i	f_i	$\varphi_i = f_i \cdot 360^\circ$
Ιανουάριος	20	0,1	36
Φεβρουάριος	40	0,2	72
Μάρτιος	15	0,075	27
Απρίλιος	50	0,25	90
Μάιος	30	0,15	54
Ιούνιος	40	0,2	72
Ιούλιος	5	0,025	9
	200	1,000	360



6. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει των αριθμό πελατών που επισκέφθηκαν ένα κατάστημα σε μία χρονική περίοδο 100 ημερών.

α. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Αριθμός Πελατών	v_i	f_i	$f_i \%$	N_i	F_i	$F_i \%$
30 – 40	8					
40 – 50	12					
50 – 60	25					
60 – 70	16					
70 – 80	6					
80 – 90	20					
90 – 100	13					
	100					

β. Να κάνετε:

1. Το ιστόγραμμα συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο
2. Το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων % και το αντίστοιχο πολύγωνο

γ. Να βρείτε το ποσοστό των ημερών στις οποίες επισκέφθηκαν το κατάστημα:

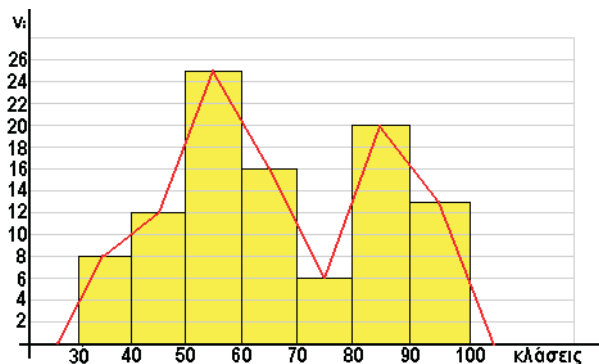
1. Λιγότεροι από 50 πελάτες
2. Από 35 έως 75 πελάτες
3. Από 43 έως 63 πελάτες.

Λύση:

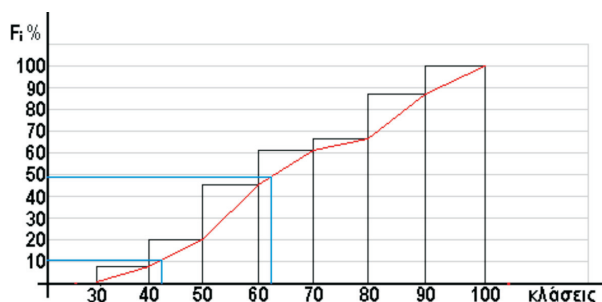
α. Ο πίνακας συχνοτήτων είναι ο ακόλουθος:

Αριθμός Πελατών	v_i	f_i	$f_i \%$	N_i	F_i	$F_i \%$
30 – 40	8	0,08	8	8	0,08	8
40 – 50	12	0,12	12	20	0,20	20
50 – 60	25	0,25	25	45	0,45	45
60 – 70	16	0,16	16	61	0,61	61
70 – 80	6	0,06	6	67	0,67	67
80 – 90	20	0,20	20	87	0,87	87
90 – 100	13	0,13	13	100	1	100
	100	1	100			

β. 1. Το ιστόγραμμα συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο είναι:



2. Το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων % και το αντίστοιχο πολύγωνο είναι:



γ. 1. Λιγότεροι από 50 πελάτες: Από τον πίνακα είναι: $F_2\% = 20\%$

2. Από 35 έως 75 πελάτες: Από τις κεντρικές τιμές είναι: $F_4\% + \frac{f_5\%}{2} - \frac{f_1\%}{2} = 59\%$

3. Από 43 έως 63 πελάτες: Με γραφική επίλυση στο ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων % είναι: $50,3\% - 12\% = 38,3\%$

7. Να υπολογιστεί η συχνότητα που λείπει στον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων αν γνωρίζουμε ότι:

α. η μέση τιμή είναι ίση με 3,02

β. η διάμεσος είναι ίση με 3,5

Τιμές x_i	1	2	3	4	5
Συχνότητα v_i	23	17	20		25

Λύση:

x_i	v_i	$x_i v_i$
1	23	23
2	17	34
3	20	60
4	ω	4ω
5	25	125
	$85+\omega$	$242+4\omega$

$$\alpha. \bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^5 x_i v_i \Leftrightarrow 3,02 = \frac{1}{85 + \omega} (242 + 4\omega) \Leftrightarrow 256,7 + 3,02\omega = 242 + 4\omega \Leftrightarrow$$

$$14,7 = 0,98\omega \Leftrightarrow \omega = 15$$

β. Επειδή καμία από τις παρατηρήσεις δεν ισούται με 3,5 προφανώς η διάμεσος υπολογίζεται σαν το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων οι οποίες είναι διαδοχικοί αριθμοί έστω α και $\alpha + 1$. Τότε:

$$\frac{\alpha + \alpha + 1}{2} = 3,5 \Leftrightarrow 2\alpha + 1 = 7 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

Δηλαδή το 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες ή ίσες του 3 και το άλλο 50% είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 4, οπότε: $23 + 17 + 20 = \omega + 25$. Άρα $\omega = 35$.

8. Η βαθμολογία στα 10 μαθήματα ενός μαθητή είναι:

10, 11, 19, 10, 10, 15, 15, 15, 11, 10. Να υπολογίσετε:

α. Τη μέση τιμή.

β. Τη διακύμανση.

γ. Την τυπική απόκλιση.

δ. Το εύρος.

ε. Το συντελεστή μεταβολής.

Λύση:

Κατασκευάζουμε τον διπλανό πίνακα:

x_i	v_i	$x_i v_i$	x_i^2	$x_i^2 v_i$
10	4	40	100	400
11	2	22	121	242
15	3	45	225	675
19	1	19	361	361
	10	126		1678

$$\alpha. \bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^4 x_i v_i = \frac{1}{10} 126 = 12,6$$

$$\beta. s^2 = \frac{1}{10} \left[\sum_{i=1}^4 x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^4 x_i v_i \right)^2}{10} \right] = \frac{1}{10} \left(1678 - \frac{126^2}{10} \right) = 167,8 - 158,76 = 9,04$$

$$\gamma. s = \sqrt{9,04} \approx 3$$

$$\delta. R = x_{\max} - x_{\min} = 19 - 10 = 9$$

$$\epsilon. CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{3}{12,6} = 0,238 = 23,8\%$$

9. Μια κανονική κατανομή έχει μέση τιμή 30 και τυπική απόκλιση 5. Να βρεθεί το ποσοστό των παρατηρήσεων που περιέχονται στα διαστήματα:

α. (25,35)

β. (30,35)

γ. (20,40)

δ. (20,30)

ε. (15,45)

Είναι το δείγμα ομοιογενές;

Λύση:

Επειδή η κατανομή είναι κανονική ισχύει:

α. Το διάστημα $(25, 35) = (\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ περιέχει το 68% των παρατηρήσεων περίπου.

β. Το διάστημα $(30, 35) = (\bar{x}, \bar{x} + s)$ περιέχει το $68\%/2 = 34\%$ των παρατηρήσεων περίπου.

γ. Το διάστημα $(20, 40) = (\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ περιέχει το 95% των παρατηρήσεων περίπου.

δ. Το διάστημα $(20, 30) = (\bar{x} - 2s, \bar{x})$ περιέχει το $95\%/2 = 47,5\%$ των παρατηρήσεων περίπου.

ε. Το διάστημα $(15, 45) = (\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$ περιέχει το 99,7% των παρατηρήσεων περίπου.

Υπολογίζουμε το συντελεστή μεταβολής: $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{5}{30} \approx 0,166 = 16,6\%$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

10. Σε ένα δείγμα μιας ποσοτικής μεταβλητής έχουμε $\sum_{i=1}^v t_i^2 = 100$, $\sum_{i=1}^v t_i = 4\sqrt{30}$ και $s = \sqrt{5}$. Να βρεθεί το μέγεθος του δείγματος αν $v > 10$.

Λύση:

Από τον τύπο της διακύμανσης έχουμε:

$$s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^v t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^v t_i \right)^2}{v} \right] \Leftrightarrow (\sqrt{5})^2 = \frac{1}{v} \left[100 - \frac{(4\sqrt{30})^2}{v} \right] \Leftrightarrow 5v^2 = 100v - 480 \Leftrightarrow$$

$$v^2 - 20v + 96 = 0 \Leftrightarrow v = 8 \quad \text{ή} \quad v = 12 \quad \text{Επειδή } v > 10 \text{ έχουμε τελικά } v = 12.$$

11. Οι τιμές πώλησης δέκα ηλεκτρικών συσκευών (σε ευρώ) είναι: 265, 280, 280, 310, 400, 310, 280, 350, 280 και 265.

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

β. Εάν τα είδη πωληθούν με 10% έκπτωση, ποια από τα παραπάνω μεγέθη θα αλλάξουν και ποιες θα είναι οι τιμές τους μετά την αλλαγή που θα υποστούν;

γ. Εάν οι πελάτες επιβαρυνθούν με 10 € επιπλέον στη τιμή αγοράς για έξοδα μεταφοράς, ποια από τα παραπάνω μεγέθη του ερωτήματος β. θα αλλάξουν και ποιες θα είναι οι τιμές τους μετά την αλλαγή που θα υποστούν;

Λύση:

Διατάσσουμε τις τιμές κατά αύξουσα σειρά:

265, 265, 280, 280, 280, 280, 280, 310, 310, 350, 400

α. Είναι $\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{1}{10} 3020 = 302$ και $\delta = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{280 + 280}{2} = 280$

β. Οι τιμές με την έκπτωση είναι οι : $y_i = 0,9x_i$, με $i = 1, \dots, 10$. Άρα έχουμε :

$$\bar{y} = 0,9\bar{x} = 271,8 \quad \text{και} \quad \delta_y = \frac{y_5 + y_6}{2} = \frac{0,9x_5 + 0,9x_6}{2} = 0,9 \frac{x_5 + x_6}{2} = 0,9\delta_x = 252$$

γ. Οι τιμές με την επιβάρυνση είναι οι $w_i = y_i + 10$, $i = 1, \dots, 10$. Άρα έχουμε :

$$\bar{w} = \bar{y} + 10 = 281,8 \quad \text{και}$$

$$\delta_w = \frac{w_5 + w_6}{2} = \frac{y_5 + 10 + y_6 + 10}{2} = \frac{y_5 + y_6}{2} + 10 = \delta_y + 10 = 262$$

12. Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι τιμές x_i μιας μεταβλητής και οι αντίστοιχες συχνότητες τους v_i και για τη μέση τιμή ισχύει: $\bar{x} \leq 2$.

α. Να αποδείξετε ότι: $\kappa \geq 12$

β. Αν η διάμεσος της κατανομής είναι $\delta = 2$, να βρείτε τα κ και λ .

x_i	v_i
1	κ
2	5
3	λ
4	2
5	1
Σύνολο	25

Λύση:

$$\alpha. \text{ Έχουμε } \kappa + 5 + \lambda + 2 + 1 = 25 \Rightarrow \lambda = 17 - \kappa \quad (1)$$

$$\text{Επίσης: } \bar{x} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1 \cdot \kappa + 2 \cdot 5 + 3 \cdot \lambda + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1}{25} \leq 2 \Leftrightarrow \kappa + 10 + 3\lambda + 8 + 5 \leq 50 \Leftrightarrow$$

$$\kappa + 3\lambda \leq 27 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \kappa + 3(17 - \kappa) \leq 27 \Leftrightarrow \kappa + 51 - 3\kappa \leq 27 \Rightarrow 2\kappa \geq 24 \Leftrightarrow \kappa \geq 12 \quad (2)$$

β. Επειδή το σύνολο των παρατηρήσεων είναι περριτό ($n = 25$), η διάμεσος θα ισούται με τη μεσαία παρατήρηση αν διαταχθούν σε αύξουσα σειρά (άρα είναι $t_{13} = 2$), οπότε οι παρατηρήσεις με τιμή 1 θα είναι το πολύ 12.

$$\text{Δηλαδή ισχύει: } \kappa \leq 12 \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) προκύπτει $\kappa = 12$ και λόγω της (1) $\lambda = 5$.

13. Έστω ένα σύνολο n παρατηρήσεων με τιμές x_1, x_2, x_3 και x_4 και αντίστοιχες συχνότητες v_i (απόλυτες), f_i (σχετικές), N_i (αθροιστικές) και F_i (αθροιστικές σχετικές). Να βρείτε τη διάμεσο των αριθμών $0, 1, n, v_1, f_3, N_1, N_4, F_3, F_4$.

Λύση:

Ισχύουν:

$$0 \leq f_i \leq 1 \text{ άρα } 0 \leq f_3$$

$$F_3 = f_1 + f_2 + f_3 \text{ άρα } f_3 \leq F_3$$

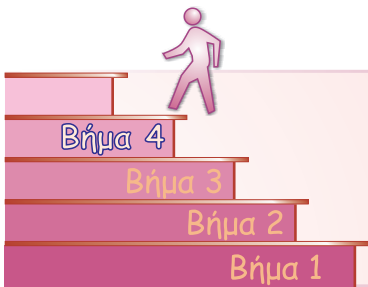
$$F_4 = F_3 + f_4 = 1 \text{ άρα } F_3 \leq F_4 = 1$$

$$\text{Η μεταβλητή παίρνει την τιμή } x_1 \text{ άρα } v_1 \geq 1 \text{ και } N_1 = v_1 \text{ άρα } 1 \leq v_1 = N_1$$

$$N_4 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = n \text{ άρα } v_1 = N_1 \leq N_4 = n$$

Έτσι οι εννιά αριθμοί σε αύξουσα σειρά είναι: $0, f_3, F_3, F_4, 1, v_1, N_1, N_4, n$.

Η διάμεσος αφού το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περριτό, ισούται με τη μεσαία παρατήρηση, δηλαδή $\delta = 1$.



Λύνουμε μόνοι μας

1. Οι παρακάτω αριθμοί είναι το πλήθος επισκέψεων σε μουσεία που πραγματοποίησαν στη διάρκεια μιας σχολικής χρονιάς 25 σχολεία.

1	5	6	3	4	2	5	2	2	4
4	5	1	2	3	6	3	3	4	5
3	2	5	1	1					

Να κατασκευάσετε:

- α. Τους πίνακες συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων.
- β. Το διάγραμμα συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο.
- γ. Να βρεθεί το ποσοστό των σχολείων που πραγματοποίησαν:
 1. τουλάχιστον 2 επισκέψεις.
 2. το πολύ 4 επισκέψεις.
 3. από 3 έως και 5 επισκέψεις.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και κατόπιν να κατασκευάσετε το πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων.

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i	$f_i \%$	$F_i \%$
1	16	0,4				
2			20			
3	10		30			
4				0,9		
5						
Σύνολο:						

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Η θερμοκρασία μιας μηχανής αυξάνεται καθώς αυτή εργάζεται. Σε έλεγχο που διενεργήθηκε ανά μία ώρα καταγράφηκαν οι θερμοκρασίες σε βαθμούς Κελσίου. Οι θερμοκρασίες φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

Ωρα:	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00	17:00	18:00
Ποσοστ.	30	45	40	45	60	60	55

Να κατασκευασθεί το χρονογράμμα των θερμοκρασιών της μηχανής. Να συμπληρώσετε το χρονογράμμα αν στις επόμενες 3 ώρες η θερμοκρασία παρουσιάζει 25% αύξηση επί της προηγούμενης τιμής της.

.....

4. Σε ένα κυκλικό διάγραμμα ο κυκλικός τομέας της τιμής A έχει κεντρική γωνία ίση με 60° . Αν η μεταβλητή που μελετούμε παίρνει τιμές A, B, Γ, Δ και η τιμή B σχετική συχνότητα ίση με $0,2$ και η τιμή Δ έχει διπλάσια σχετική συχνότητα από από την Γ , να κατασκευάσετε το κυκλικό διάγραμμα και το αντίστοιχο ραβδόγραμμα.

5. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τα ποσά σε ευρώ που ξοδεύουν 100 μαθητές στο κυλικείο του σχολείου τους σε διάστημα ενός μηνός.

α. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Αριθμός Πελατών	x_i	v_i	f_i	$f_i \%$	N_i	F_i	$F_i \%$
20 – 30		10					
30 – 40		15					
40 – 50		35					
50 – 60		8					
60 – 70		18					
70 – 80		14					
		100					

β. Να κάνετε το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων % και το αντίστοιχο πολύγωνο.

γ. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που ξοδεύουν:

1. Λιγότερο από 30 ευρώ 2. 35 - 55 ευρώ 3. 53 - 73 ευρώ.

δ. Να βρείτε το μέσο ποσό χρημάτων που ξοδεύουν οι μαθητές.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. Οι βαθμοί ενός υποψηφίου σε τέσσερα μαθήματα με άριστα το 10 ήταν 5, 7, 4 και 9. Οι συντελεστές στάθμισης ήταν αντίστοιχα 0.7, 1.2, 1.5 και x . Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του συντελεστή στάθμισης x ώστε ο σταθμικός μέσος του υποψηφίου να υπερβαίνει το 7.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9. Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή συχνοτήτων 70 μαθητών ενός Λυκείου για τον αριθμό των αδελφών τους. Αν $x = 3$ και $CV = 1/3$, να βρεθούν οι τιμές των ακεραίων κ και λ καθώς και η διάμεσος της κατανομής.

Αριθμός αδελφών x_i	1	κ	3	λ	
Συχνότητα v_i	5	20κ	45	30λ	70

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

12. Εξετάστηκε ένα δείγμα 200 ατόμων ως προς τη διάρκεια σε ημέρες των καλοκαιρινών διακοπών του περασμένου έτους και προέκυψε ο διπλανός πίνακας:

α. Να κατασκευάσετε το πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων.

Αριθμός ημερών (x_i)	Αριθμός ατόμων (v_i)
5 – 10	41
10 – 15	54
15 – 20	65
20 – 25	30
25 – 30	10
	200

β. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο της κατανομής και την τυπική απόκλιση.

.....

.....

.....

.....

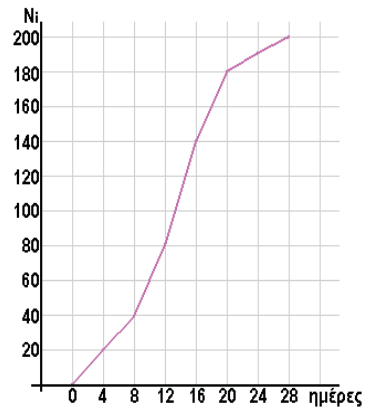
.....

.....

.....

13. Ο υπεύθυνος Marketing μιας ξενοδοχειακής μονάδας πραγματοποίησε μια έρευνα για τον αριθμό ημερών παραμονής των πελατών των ξενοδοχείων. Κατόπιν έδωσε τα στοιχεία της έρευνας με το διπλανό πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.

- α. Πόσοι πελάτες πέρασαν από το ξενοδοχείο;
- β. Να γίνει το πολύγωνο συχνοτήτων και ο πίνακας απολύτων και αθροιστικών συχνοτήτων.
- γ. Να βρεθούν η μέση τιμή, η διάμεσος, η διασπορά, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση.
- δ. Χαρακτηρίστε την κατανομή σαν κανονική, ομοιόμορφη ή κατανομή με θετική ή αρνητική ασυμμετρία.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

14. Σε ένα δείγμα η μεταβλητή παίρνει τις τιμές 1, 2, 3, 4 και 5. Να βρεθεί η διάμεσος σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις με τη βοήθεια των κυκλικών διαγραμμάτων.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

16. Ο διάμεσος βαθμός του Νίκου σε 3 tests είναι 90 ενώ ο μέσος βαθμός του είναι 92. Αν το εύρος των βαθμών είναι 6 ποιοί είναι οι βαθμοί του στα 3 tests;

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

17. Η μέση τιμή μιας κανονικής κατανομής είναι 25 και η διασπορά είναι 5.
Να βρεθεί το ποσοστό των παρατηρήσεων που περιέχονται στα διαστήματα:
α. (20,30) β. (25,35) γ. (10,40) δ. (10,35) ε. (15,40)
Είναι το δείγμα ομοιογενές;

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

18. Οι τιμές πώλησης δέκα ηλεκτρικών συσκευών (σε ευρώ) είναι: 235, 200, 180, 230, 235, 230, 280, 200, 200 και 235.

- α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή τη διάμεσο και τη διασπορά.
- β. Εάν τα είδη πουληθούν με 15% έκπτωση, ποια από τα παραπάνω μεγέθη θα αλλάξουν και πώς;
- γ. Εάν οι πελάτες επιβαρυνθούν με 20 € επιπλέον στη τιμή αγοράς για έξοδα μεταφοράς, ποια από τα παραπάνω μεγέθη θα αλλάξουν και πώς;
- δ. Να βρεθεί η διαφορά των συντελεστών μεταβολής των περιπτώσεων α. και γ.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

19. Μια βιομηχανία κατασκευάζει κουτιά με σκοπό τη συσκευασία γάλακτος σε 4 διαφορετικά μεγέθη. Για το 1ο μέγεθος έχουμε ποσοστό συσκευασίας 10% με κόστος 8€ ανά κουτί, για το 2ο μέγεθος έχουμε ποσοστό συσκευασίας 20% με κόστος 6€ ανά κουτί, για το 3ο μέγεθος έχουμε ποσοστό συσκευασίας 30% με κόστος 4€ ανά κουτί και για το 4ο μέγεθος έχουμε ποσοστό συσκευασίας 40% με κόστος 2€ ανά κουτί.

- α. Να βρεθεί το μέσο κόστος συσκευασίας και η τυπική απόκλιση κόστους.
β. Αν το κόστος συσκευασίας αυξηθεί κατά 10% να βρεθεί η νέα τυπική απόκλιση κόστους συσκευασίας καθώς και η μεταβολή του συντελεστή μεταβολής.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

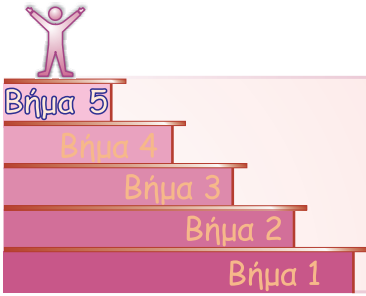
.....

.....

.....

.....

.....



Ελέγχουμε τη γνώση μας

Θέμα 1°

- A. Να χαρακτηρίσετε σαν σωστές ή λανθασμένες τις προτάσεις:**
- Οι αθροιστικές συχνότητες N_i μιας κατανομής εκφράζουν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της συχνότητας v_i .
 - Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής.
 - Το εμβαδόν που περικλείεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον άξονα xx' ισούται με 1.
 - Οι κλάσεις στην ομαδοποίηση είναι διαστήματα της μορφής $[,)$.
 - Οι παρατηρήσεις σε κάθε κλάση θεωρούμε ότι κατανέμονται ομοιόμορφα.
-
- B. Οι αποστάσεις (σε km) των 24 κοινοτήτων ενός νομού από το πλησιέστερο νοσοκομείο είναι: 5, 10, 8, 8, 13, 10, 4, 2, 4, 16, 5, 15, 6, 4, 7, 5, 4, 6, 7, 7, 5, 8, 10, 3.**
- Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων των αποστάσεων.
 - Πόσες κοινότητες απέχουν από το νοσοκομείο περισσότερο από 8 km;
 - Πόσες κοινότητες απέχουν από το νοσοκομείο από 7 έως 13 km;

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

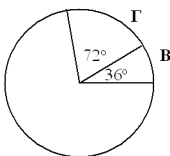
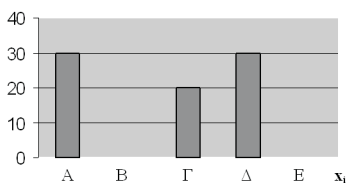
.....

.....

.....

Θέμα 2^ο

Α. Να κάνετε τον πίνακα συχνοτήτων για τα παρακάτω διαγράμματα που αφορούν την ίδια κατανομή συχνοτήτων και να τα συμπληρώσετε.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Θέμα 3^ο

A. Ποιο μέτρο θέσης θα επιλέγατε σαν πιο κατάλληλο για το δείγμα 3 4 5 7 1000, τη μέση τιμή ή τη διάμεσο; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B. Η βαθμολογία ενός μαθητή στα τέσσερα τεστ ενός μαθήματος ήταν (σε εκατοντάβάθμια κλίμακα): 55, 30, 92, 49. Οι συντελεστές βαρύτητας σε καθένα ήταν αντίστοιχα 1, 2, 2 και 3.

- α. Να βρείτε τη μέση επίδοση του μαθητή στα τεστ.
- β. Να αλλάξετε σειρά στους συντελεστές βαρύτητας ώστε ο μαθητής να έχει:
 1. την καλύτερη δυνατή μέση επίδοση.
 2. την χειρότερη δυνατή μέση επίδοση.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Γ. Σε 20 γραπτά μαθητών της Β΄ Λυκείου η μέση τιμή των βαθμών του Α΄ Βαθμολογητή είναι 15. Ο Β΄ βαθμολογητής έβαλε 1 μονάδα λιγότερη σε 12 γραπτά και 3 μονάδες περισσότερες σε 3 γραπτά. Να βρεθεί η μέση τιμή των βαθμών του Β΄ βαθμολογητή.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

