Κεφάλαιο 1ο

Συναρτήσεις

Μετά το τέλος της μελέτης του 1ου κεφαλαίου, ο μαθητής θα πρέπει να γνωρίζει:

- ✓ Τον ορισμό της συνάρτησης και τον τρόπο εύρεσης του πεδίου ορισμού της.
- ✓ Τις πράξεις μεταξύ συναρτήσεων, τις γραφικές παραστάσεις βασικών συναρτήσεων και τους ορισμούς της μονοτονίας και των ακροτάτων συνάρτησης.
- ✓ Την έννοια του ορίου μιας συνάρτησης, τον τρόπο υπολογισμού του και τις ιδιότητές του.
- ✓ Τον ορισμό της συνεχούς συναρτήσης.
- ✓ Τον ορισμό της παραγώγου μιας συνάρτησης f σε σημείο x_o, τη γεωμετρική της ερμηνεία και τον τρόπο υπολογισμού της.
- ✓ Τον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης, τους κανόνες παραγώγισης και τον τρόπο εφαρμογής τους στην εύρεση του τύπου της.
- ✓ Τον τρόπο εφαρμογής των κανόνων παραγώγισης για την εύρεση της μονότονίας και των ακροτάτων μιας συνάρτησης.

Συνοπτική θεωρία:

- ✓ Ισότητα συναρτήσεων: $f = g \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ A_f = A_g \end{cases}$
- ✓ Πράξεις με συναρτήσεις:
  - Συνάρτηση άθροισμα: $S = f + g$, με $S(x) = f(x) + g(x)$, $x \in A_f \cap A_g$
  - Συνάρτηση διαφορά: $D = f - g$, με $D(x) = f(x) – g(x)$, $x \in A_f \cap A_g$
  - Συνάρτηση γινόμενο: $P = f \cdot g$, με $P(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in A_f \cap A_g$
  - Συνάρτηση πηλίκο: $R = \frac{f}{g}$, με $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in A_f \cap A_g$ και $g(x) \neq 0$
- ✓ Ιδιότητες ορίων: Εφ' όσον υπάρχουν τα $\lim_{x \to x_o} f(x)$ και $\lim_{x \to x_o} g(x)$, ισχύουν:

1. $\lim_{x \to x_o} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \to x_o} f(x)$ **2.** $\lim_{x \to x_o} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_o} f(x) \pm \lim_{x \to x_o} g(x)$

3. $\lim\limits_{x\to x_o}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_o} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_o} g(x)$

4. $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_o} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_o} g(x)}$

5. $\lim\limits_{x\to x_o}[f(x)]^{\nu} = \left[\lim\limits_{x\to x_o} f(x)\right]^{\nu}$

6. $\lim\limits_{x\to x_o}\sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{\lim\limits_{x\to x_o} f(x)}$

✓ Συνέχεια συνάρτησης σε σημείο x_o:

- f συνεχής στο $x_o \in A_f \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$

✓ Η έννοια της παραγώγου:

- Ορισμός $f'(x_o) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$
- Η $f'(x_o)$ παριστάνει:
  α. την κλίση της εφαπτόμενης ευθείας της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_o, f(x_o))$.
  β. Το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f ως πρός x όταν $x = x_o$.
- Στιγμιαία ταχύτητα σώματος που κινείται ευθύγραμμα:
  $$\upsilon(t) = s'(t)$$
- Στιγμιαία επιτάχυνση σώματος που κινείται ευθύγραμμα:
  $$\alpha(t) = \upsilon'(t) = s''(t)$$

✓ Παράγωγος συνάρτησης - Κανόνες παραγώγισης:

Α. Κανόνες παραγώγισης βασικών συναρτήσεων:

1. $(c)' = 0$ **2.** $(x)' = 1$ **3.** $(x^{\nu})' = \nu x^{\nu-1}$ **4.** $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

5. $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$ **6.** $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$ **7.** $(\varepsilon\varphi x)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

8. $(\sigma\varphi x)' = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$ **9.** $(e^x)' = e^x$ **10.** $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

Β. Παράγωγος και πράξεις:

1. $(cf(x))' = cf'(x)$ **2.** $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

3. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ **4.** $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

Γ. Παράγωγος σύνθετων συναρτήσεων: $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

1. $(\varphi(x)^{\nu})' = \nu\varphi(x)^{\nu-1}\varphi'(x)$ **2.** $\left(\sqrt{\varphi(x)}\right)' = \dfrac{\varphi'(x)}{2\sqrt{\varphi(x)}}$

3. $(\eta\mu\varphi(x))' = \sigma\upsilon\nu\varphi(x)\cdot\varphi'(x)$ **4.** $(\sigma\upsilon\nu\varphi(x))' = -\eta\mu\varphi(x)\cdot\varphi'(x)$

5. $(\varepsilon\varphi\varphi(x))' = \dfrac{\varphi'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi(x)}$ **6.** $(\sigma\varphi\varphi(x))' = -\dfrac{\varphi'(x)}{\eta\mu^2\varphi(x)}$

7. $(e^{\varphi(x)})' = e^{\varphi(x)}\varphi'(x)$ **8.** $(\ln\varphi(x))' = \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$

Μαθαίνουμε τις αποδείξεις

Βήμα 1

- **ΘΕΩΡΙΑ 1:**

Να δείξετε ότι η παράγωγος της σταθεράς συνάρτησης f(x) = c ισούται με 0.

Απόδειξη:

Για $h \neq 0$ έχουμε: $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{c-c}{h} = 0$

- **ΘΕΩΡΙΑ 2:**

Να δείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης f(x) = x ισούται με 1.

Απόδειξη:

Για $h \neq 0$ έχουμε:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$$

- **ΘΕΩΡΙΑ 3:**

Να δείξετε ότι: (cf(x))΄ = cf΄(x)

Απόδειξη:

Έστω η συνάρτηση: F(x) = cf(x). Τότε για $h \neq 0$ έχουμε:

$$(cf(x))' = F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] = c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = cf'(x)$$

- **ΘΕΩΡΙΑ 4:**

Να δείξετε ότι: (f(x) + g(x))΄ = f΄(x) + g΄(x)

12. **Μαθαίνουμε τις αποδείξεις** **Βήμα 1ο**

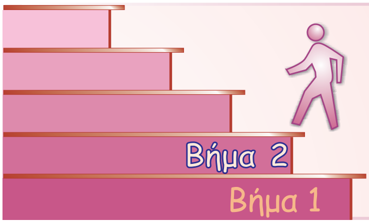
Απόδειξη:

Έστω η συνάρτηση: F(x) = f(x) + g(x). Τότε για $h \neq 0$ έχουμε:

$$\left(f(x)+g(x)\right)' = F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x))}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} =$$

$$= f'(x)+g'(x)$$

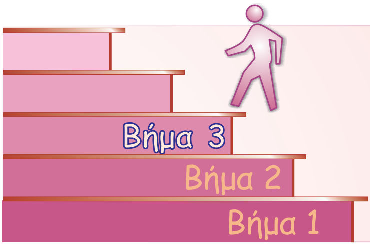


Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις - κλειδιά

Α. Από το σχολικό βιβλίο

Να λύσω τις ασκήσεις:

Σελ. 17:	Ασκήσεις Α΄ Ομάδας 6, 7	
Σελ. 18:	Ασκήσεις Α΄ Ομάδας 8, 9	Β΄ Ομάδας 2, 3, 5
Σελ. 26:	Ασκήσεις Α΄ Ομάδας 1, 3	
Σελ. 27:	Ασκήσεις Α΄ Ομάδας 5	
Σελ. 36:	Ασκήσεις Α΄ Ομάδας 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 16	
Σελ. 37:	Ασκήσεις Α΄ Ομάδας 17, 21, 22	Β΄ Ομάδας 1
Σελ. 38:	Ασκήσεις	Β΄ Ομάδας 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10
Σελ. 45:	Ασκήσεις Α΄ Ομάδας 1, 3, 6, 9, 10	
Σελ. 46:	Ασκήσεις	Β΄ Ομάδας 2, 3, 4, 6
Σελ. 47:	Ασκήσεις	Β΄ Ομάδας 8, 10
Σελ. 48:	Γενικές Ασκήσεις 2, 3	



Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. Εστω η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\begin{cases} 2x^2-1 & ,x\le 2 \\ 3x-\alpha & ,x>2 \end{cases}$

α. Να βρεθεί το x ∈ R ώστε η γραφική της παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο A(3,4).

β. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η f είναι θετική.

Λύση:

α. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο A(3,4) , άρα:

$$f(3)=4 \Leftrightarrow 3\cdot 3-\alpha=4 \Leftrightarrow \alpha=5$$

β. Για $x\le 2$ έχουμε: $f(x)>0 \Leftrightarrow 2x^2-1>0 \Leftrightarrow x^2>\frac{1}{2} \Leftrightarrow x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ η $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$

Για x > 2 έχουμε: $f(x)>0 \Leftrightarrow 3x-5>0 \Leftrightarrow x>\frac{5}{3}$

Άρα f(x) > 0 για $x\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$

2. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x)=\frac{3x}{(x^2-1)(e^x+1)}$ **β.** $g(x)=\sqrt{\frac{3(x-1)}{(x^2+1)(x-3)}}$ **γ.** $h(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x^2-4}-\ln(5-x)$

Λύση:

α. Πρέπει: $(x^2-1)(e^x+1)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1\neq 0 \\ e^x+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1)\neq 0 \\ e^x\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq -1 \\ x\in R \end{cases}$

Άρα: $A_f=R-\{-1,+1\}$

β. Πρέπει: $(x^2+1)(x-3)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1\neq 0 \\ x-3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\neq -1 \\ x\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R \\ x\neq 3 \end{cases}$

Επίσης:

$$\frac{3(x-1)}{(x^2+1)(x-3)}\geq 0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x^2+1)(x-3)\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 1 \text{ ή } x\geq 3$$

Άρα το πεδίο ορισμού της g είναι το : $A_g=(-\infty,1]\cup(3,+\infty)$.

γ. Πρέπει να ισχύουν συγχρόνως : $x^2-4\neq 0$, $x+2\geq 0$ και $5-x>0$.

Είναι $x^2-4\neq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2\neq 0 \\ \text{και} \\ x-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -2 \\ \text{και} \\ x\neq 2 \end{cases}$

Επίσης: $x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -2$ και $5-x>0 \Leftrightarrow x<5$. Άρα το πεδίο ορισμού της h είναι το : $A_h=(-2,2)\cup(2,5)$.

3. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2-|x-3|\right)$ **β.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x}{x+1}$ **γ.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+9x-9}{x-1}$

δ. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(\eta\mu x+|\sigma\upsilon\nu x-1|\right)$ **ε.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}$

Λύση:

α. $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2-|x-3|\right)=3\cdot 2^2-|2-3|=11$

β. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x}{x+1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}x=-1$

γ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+9x-9}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2(x-1)+9(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2+9)(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+9)=10$

δ. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(\eta\mu x+|\sigma\upsilon\nu x-1|\right)=\eta\mu\dfrac{\pi}{4}+\left|\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{4}-1\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\left|\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1\right|=1$

ε. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(\sqrt{x+2}-1)(\sqrt{x+2}+1)}{(x+1)(\sqrt{x+2}+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+2-1}{(x+1)(\sqrt{x+2}+1)}=$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{x+2}+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{(\sqrt{x+2}+1)}=\frac{1}{2}$$

4. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=10$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ όταν:

α. $g(x) = 3f(x) - 1$ β. $g(x)=\sqrt{3f(x)+6}$ γ. $g(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)-5}$ $f(x)\neq 5$

Λύση:

α. $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)=\lim\limits_{x\to x_o}[3f(x)-1]=3\lim\limits_{x\to x_o} f(x)-1=3\cdot 10-1=29$

β. $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)=\lim\limits_{x\to x_o}\sqrt{3f(x)+6}=\sqrt{3\lim\limits_{x\to x_o} f(x)+6}=\sqrt{3\cdot 10+6}=6$

γ. $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)=\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)}{f(x)-5}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_o} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_o} f(x)-5}=\dfrac{10}{10-5}=2$

5. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + αx$, $x\in R$, $α\in R$. Να βρείτε την $f'(1)$ με τον ορισμό της παραγώγου. Κατόπιν να προσδιορίσετε το $α\in R$ ώστε ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x όταν x = 1 να είναι ίσος με 5.

Λύση:

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2+\alpha(1+h)-(1^2+\alpha\cdot 1)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2h+1+\alpha h+\alpha-1-\alpha}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(h+2+\alpha)}{h}=\lim_{h\to 0}(h+2+\alpha)=2+\alpha$$

Ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x όταν x = 1 είναι ίσος με 5 άρα:

$f'(1)=5\Leftrightarrow 2+\alpha=5\Leftrightarrow \alpha=3$

6. Εστω ρόμβος που έχει τη μεγάλη διαγώνιο τετραπλάσια από τη μικρή. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού συναρτήσει της μικρής διαγωνίου δ όταν δ = 3.

Λύση:

Έστω Δ και δ η μεγάλη και η μικρή διαγώνιος αντίστοιχα.

Τότε: $E=\dfrac{\Delta\cdot\delta}{2}$, άρα: $E(\delta)=\dfrac{4\delta\cdot\delta}{2}=2\delta^2 \quad \delta>0$

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού συναρτήσει της μικρής διαγωνίου δ είναι:

$E'(\delta)=(2\delta^2)'=4\delta$. Για $\delta=3$ έχουμε: $E'(3)=(4\cdot 3)=12$.

7. **Η θέση ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα, δίνεται συναρτήσει του χρόνου από τον τύπο $S(t)=(t+1)^2+5$, όπου το t μετριέται σε sec και το S σε μέτρα. Να βρείτε:**

α. Τη μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα [0, 5] sec.

β. Τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού, όταν t = 2,5 sec.

Λύση:

α. $\bar{\upsilon}=\dfrac{S_{\tau\varepsilon\lambda.}-S_{\alpha\rho\chi.}}{t_{\tau\varepsilon\lambda.}-t_{\alpha\rho\chi.}}=\dfrac{S(5)-S(0)}{5-0}=\dfrac{(5+1)^2+5-(0+1)^2-5}{5}=\dfrac{35}{5}=7\ m/s$

β. $\upsilon(t)=S'(t)=\left((t+1)^2+5\right)'=2(t+1)(t+1)'=2(t+1)$. Άρα: $\upsilon(2{,}5)=2(2{,}5+1)=7\ m/s$

8. **Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^2+4x-6$, $x\in\mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε το σημείο Α της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο οποίο:**

α. Η εφαπτομένη της σχηματίζει γωνία 45ο με τον άξονα x΄x.

β. Η εφαπτομένη είναι παράλληλη με την ευθεία: y = 2x + 7.

Λύση:

α. Είναι $f'(x)=(x^2+4x-6)'=2x+4$. Έστω $(x_o, f(x_o))$ το ζητούμενο σημείο.

Τότε: $f'(x_o)=\lambda_{\varepsilon\varphi.}$, άρα: $2x_o+4=1 \Leftrightarrow x_o=-\dfrac{3}{2}$ (διότι $\lambda_{\varepsilon\phi}=\varepsilon\phi 45^o \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon\phi}=1$).

Επίσης: $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2+4\left(-\dfrac{3}{2}\right)-6=-\dfrac{39}{4}$, άρα: $(x_o,f(x_o))=\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{39}{4}\right)$.

β. Αφού η εφαπτομένη είναι παράλληλη με την ευθεία $y=2x+7$ είναι $\lambda_{\varepsilon\varphi.}=2$.

Έστω $(x_o, f(x_o))$ το ζητούμενο σημείο. Τότε: $f'(x_o)=\lambda_{\varepsilon\phi}\Leftrightarrow 2x_o+4=2\Leftrightarrow x_o=-1$

$f(-1)=(-1)^2+4(-1)-6=-9$. Άρα: $(x_o, f(x_o))=(-1,-9)$.

9. Να προσδιορίσετε τον αριθμό $\alpha \in R$ ώστε η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\dfrac{\alpha e^x+e^{-x}}{e^x+1}$,να έχει εφαπτομένη στη θέση $x_o=\ln 3$, κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $y=-3x+3$. Κατόπιν να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης.

Λύση:

Λόγω καθετότητας της εφαπτόμενης με την ευθεία $y = -3x + 3$ ισχύει:

$$\lambda_{\varepsilon\phi}\cdot(-3)=-1\Leftrightarrow\lambda_{\varepsilon\phi}=\frac{1}{3}$$

$$f'(x)=\left(\frac{\alpha e^x+e^{-x}}{e^x+1}\right)'=\frac{(\alpha e^x+e^{-x})'(e^x+1)-(\alpha e^x+e^{-x})(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}=$$

$$\frac{(\alpha e^x-e^{-x})(e^x+1)-(\alpha e^x+e^{-x})e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{\alpha e^x-2-e^{-x}}{(e^x+1)^2}$$, οπότε είναι :

$$f'(\ln 3)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{\alpha e^{\ln 3}-2-e^{-\ln 3}}{(e^{\ln 3}+1)^2}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{3\alpha-2-\frac{1}{3}}{(3+1)^2}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 9\alpha-7=16\Leftrightarrow\alpha=\frac{23}{9}$$

$$f(\ln 3)=\frac{\frac{23}{9}e^{\ln 3}+e^{-\ln 3}}{e^{\ln 3}+1}=\frac{\frac{23}{9}\cdot 3+\frac{1}{3}}{3+1}=2$$

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτόμενης. Τότε: $2=\frac{1}{3}\ln 3+\beta\Leftrightarrow\beta=\ln\left(\frac{e^2}{\sqrt[3]{3}}\right)$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η : $y=\frac{1}{3}x+\ln\left(\frac{e^2}{\sqrt[3]{3}}\right)$.

10. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^{\alpha x}$.

α. Να δείξετε ότι: $\alpha f'(x) - f''(x) = 0$, για κάθε $x\in R$.

β. Να βρείτε τις τιμές του α, ώστε να ισχύει η σχέση: $f''(x) + 2f'(x) = 3f(x)$, για κάθε $x\in R$.

Λύση:

α. Έχουμε: $f'(x)=(e^{\alpha x})'=e^{\alpha x}(\alpha x)'=\alpha e^{\alpha x}=\alpha f(x)$

και: $f''(x)=(\alpha f(x))'=\alpha f'(x)=\alpha^2 f(x)$ άρα: $\alpha f'(x)-f''(x)=\alpha^2 f(x)-\alpha^2 f(x)=0$

β. Από το ερώτημα (α) έχουμε:

$$f''(x)+2f'(x)=3f(x)\Leftrightarrow \alpha^2 f(x)+2\alpha f(x)=3f(x)\Leftrightarrow(\alpha^2+2\alpha-3)f(x)=0 \overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow}$$
$$\alpha^2+2\alpha-3=0\Leftrightarrow \alpha=-3 \;\; \eta \;\; \alpha=1$$

11. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα (αν υπάρχουν) της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = (2x - x^2)e^x$.

Λύση:

Έχουμε $A_f = R$ και:

$$f'(x)=\left((2x-x^2)e^x\right)'=(2x-x^2)'e^x+(2x-x^2)(e^x)'=(2-2x)e^x+(2x-x^2)e^x=(2-x^2)e^x$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow(2-x^2)e^x=0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}2-x^2=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$$.

Το πρόσημο της f ΄ φαίνεται στον επόμενο πίνακα :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
f΄(x)		−	0	+	0	−	
f(x)		↘		↗		↘	
			Τ.Ε		Τ.Μ		

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα απο τα διαστήματα $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right],\left[\sqrt{2},+\infty\right)$ ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x=-\sqrt{2}$ και τοπικό μέγιστο στο $x=\sqrt{2}$.

Η τιμή του ελαχίστου είναι $f\left(-\sqrt{2}\right)=\left(-2\sqrt{2}-2\right)e^{-\sqrt{2}}$,ενώ η τιμή του μεγίστου είναι $f\left(\sqrt{2}\right)=\left(2\sqrt{2}-2\right)e^{\sqrt{2}}$.

12. Εστω η ευθεία y = x - 3. Βρείτε το σημείο της ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεών του από τα σημεία Α(1,1) και Β(1,5) να είναι ελάχιστο.

Λύση:

Έστω Μ(x,y) σημείο της ευθείας. Τότε θα είναι Μ(x, x - 3). Είναι

$$(AM)^2+(BM)^2=\left(\sqrt{(x-1)^2+(x-3-1)^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x-1)^2+(x-3-5)^2}\right)^2=$$

$$=2(x-1)^2+(x-4)^2+(x-8)^2=4x^2-28x+82=f(x)\,,\;\; x\in R$$

$f'(x) = \left(4x^2 - 28x + 82\right)' = 8x - 28$ και $f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow 8x - 28 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{7}{2}$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα

απο όπου προκύπτει ότι η f έχει

ελάχιστο στο x = 7/2 το f (7/2) = 33.

x	$-\infty$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(\frac{7}{2}) = 33$	$\nearrow$	

Άρα το σημείο της ευθείας που έχει ελάχιστο άθροισμα τετραγώνων των αποστάσεων

απο τα σημεία Α και Β είναι το $M\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

13. **Το κόστος κατασκευής x τεμαχίων ενός προϊόντος ημερησίως με 0 < x < 1000 δίνεται από τον τύπο:**

$$K(x) = \frac{x^2}{2} + 50x + 50 \quad \text{ευρώ.}$$

Αν κάθε τεμάχιο πωλείται 2000 - x ευρώ, πόσα τεμάχια πρέπει να παράγονται ημερησίως, ώστε να έχουμε το μέγιστο κέρδος;

Λύση:

Το κέρδος από πώληση x τεμαχίων είναι:

$$P(x) = x(2000 - x) - \left(\frac{x^2}{2} + 50x + 50\right) = -\frac{3x^2}{2} + 1950x - 50, \quad 0 < x < 1000$$

Είναι

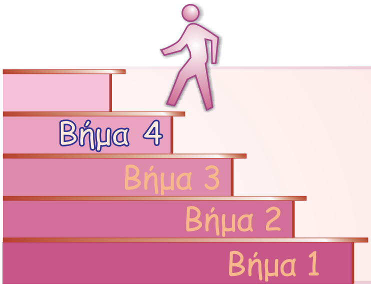
$$P'(x) = \left(-\frac{3x^2}{2} + 1950x - 50\right)' = -3x + 1950$$

Οπότε $P'(x) \ge 0 \Leftrightarrow -3x + 1950 \ge 0 \Leftrightarrow x \le 650$.

Κατασκευάζουμε τον πίνακα :

x	0		650		1000
P'(x)		+	0	—	
P(x)		$\nearrow$	Μεγ.(650,P(650))	$\searrow$	

Άρα για να έχουμε το μέγιστο κέρδος πρέπει να παράγονται 650 τεμάχια ημερησίως.



Λύνουμε μόνοι μας

1. Εστω η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\begin{cases} x^2-\alpha x, & x<4 \\ \dfrac{\beta x+1}{x-3}, & x\geq \alpha \end{cases}$

α. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta \in R$ ώστε $A_f = R$ και η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο A(5,8).

β. Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.

2. **Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:**

α. $f(x)=\left|\dfrac{2x-1}{(\eta\mu x-2)(e^{2x}-1)}\right|$ **β.** $g(x)=\dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{(x^2-1)e^x}}$ **γ.** $h(x)=\dfrac{\sqrt{100-x^2}}{\ln\left|x^2-4\right|}$

....

....

....

3. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$ β. $\lim\limits_{x \to 10} \dfrac{x^3 - 12x^2 + 21x - 10}{x - 10}$ γ. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2 - 4}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις με $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ όταν:

α. $g(x) = 3[f(x)]^2 - 1$ β. $g(x) = \sqrt{\dfrac{f(x) - 1}{f(x) + 1}}$

Κατόπιν να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{2f^2(x) - g(x)}{f(x_o) + g(x_o)}$ στις περιπτώσεις (α) και (β).

....

....

....

....

....

....

....

24. **Λύνουμε μόνοι μας** **Βήμα 4ο**

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5. **Αν $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ να βρείτε τα όρια:**

α. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ **β.** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x^2 - 9}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} & ,x\neq 0\\ 4\alpha+1 & ,x=0\end{cases}$.

Αν $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+6)=\alpha$, να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

7. **Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 4x^2 + \alpha x + 1$, $x\in R$, $\alpha\in R$. Να βρείτε την $f'(2)$ χωρίς να χρησιμοποιήσετε κανόνες παραγώγισης. Κατόπιν να προσδιορίσετε το $\alpha\in R$ ώστε η κλίση της εφαπτόμενης στο σημείο $(2,f(2))$ να είναι ίση με 8.**

8. **Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού και του ύψους ισοπλεύρου τριγώνου συναρτήσει της πλευράς του όταν αυτή ισούται με 10.**

9. Η θέση ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα, δίνεται συναρτήσει του χρόνου από τον τύπο $S(t)=\frac{t^3}{3}-\frac{5t^2}{2}+6t-1$, όπου το t μετριέται σε s και το S σε μέτρα. Να βρείτε:

α. Τη μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα [0, 4] s

β. Τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού, όταν t = 1 s.

γ. Το συνολικό διάστημα που διανύθηκε σε χρόνο 10 s.

10. **Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^2 + x\ln x$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης στο σημείο $A(1,f(1))$.**

11. **Δίνεται η f με $f(x)=\dfrac{2x-3}{x}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της C_f της f. Κατόπιν να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου στο οποίο η εφαπτόμενη περνά από το σημείο (1,1).**

12. **Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α,β∈R ώστε η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{\alpha x^3+\beta}{x}$ να έχει εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία y = 3x και η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο Α(2,2). Κατόπιν να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης.**

13. **Έστω f, g παραγωγίσιμες στο R με f΄, g΄ συνεχείς. Αν ισχύουν:**
α. για κάθε $x \in R$: $f'(x) - g'(x) = 4(x - 2)$ β. $f(2) - g(2) = 0$
να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g δέχονται κοινή εφαπτόμενη σε κοινό σημείο. Κατόπιν να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης και τις συντεταγμένες του σημείου.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

14. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$, $x > 0$. Να δείξετε ότι:

$$f''(x) = \frac{f(x) - 2f'(x)}{4x} \quad \text{για κάθε } x \in R.$$

15. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3e^{-x}$, $x \in R$. Να βρεθούν τα α, β, $\gamma \in R$ ώστε να ισχύει $\alpha f''(x) + \beta f'(x) + \gamma f(x) = 12xe^{-x}$, για κάθε $x \in R$.

Βήμα 4ο Λύνουμε μόνοι μας 35.

16. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης f με: $f(x) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2} + \eta\mu^2 x$ στο $[0,2\pi]$

17. **Να μελετηθεί η μονοτονία και να βρεθούν αν υπάρχουν τα ακρότατα της συνάρτησης f με τύπο: $f(x) = x\sqrt{x-3}$**

18. **Έστω συνάρτηση f με $f''(x) = 2(3x + 1)$ για κάθε $x \in R$. Να βρεθεί η f αν παρουσιάζει στο σημείο $(-1,f(-1))$ ακρότατο και η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,1)$.**

19. **Έστω η παραβολή $y = x^2$. Βρείτε το σημείο της ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεών του από τα σημεία $Α(1,3)$ και $Β(1,6)$ να είναι ελάχιστο.**

20. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο περιμέτρου 10 cm και x μια από τις οξείες γωνίες του.

α. Να εκφράσετε την υποτείνουσα του τριγώνου συναρτήσει του x.

β. Δείξτε ότι η υποτείνουσα γίνεται ελάχιστη όταν το τρίγωνο γίνεται ισοσκελές.

21. Το κόστος κατασκευής x τεμαχίων ενός προϊόντος ημερησίως δίνεται από τον τύπο $K(x) = 5x + 500$ €. Αν κάθε τεμάχιο πωλείται $(1000 - 2x)$ €, πόσα τεμάχια πρέπει να παράγονται ημερησίως, ώστε να έχουμε το μέγιστο κέρδος και ποιό θα είναι αυτό;

22. **Εστω η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 3$, $\alpha, \beta \in R$**

α. Να βρεθούν τα α,β ώστε η εφαπτόμενη στο σημείο Α(2,3) να σχηματίζει γωνία 45^0 με τον άξονα xx΄.

β. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης στο Α(2,3).

23. **α. Βρείτε ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού τέτοιο ώστε: $f(2) = 4$, $f'(1) = 3$ και $f''(1) = 2$.**

β. Έστω οι συναρτήσεις f, g με $g(x) = (x^3 + 1)\,f(x) + 2x$. Αν $f'(0) = 4$ να βρείτε την $g'(0)$.

Ελέγχουμε τη γνώση μας

Θέμα 1ο

Α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο: $f(x)=\dfrac{2x^2-2}{(x-1)(x^2+1)}$

Β. Να βρεθεί το $\alpha\in R$ ώστε η συνάρτηση με τύπο: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-20}{x^2-16}, & x\neq \pm 4\\ 5\alpha-2, & x=4\end{cases}$

να είναι συνεχής στο σημείο $x_0=4$. Είναι η f συνεχής για $x\neq 4$;

Θέμα 2ο

Α. Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = 2\eta\mu x + \ln x$ **β.** $g(x) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x + 1}$

γ. $h(x) = \ln x(x^4 + x)$ **δ.** $s(x) = \eta\mu(x^2 + e^x)$

....

....

....

....

....

....

....

....

Β. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης στο σημείο $x_0 = 4$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Θέμα 3ο

Α. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x$. Να βρείτε τα $\alpha,\beta \in R$ ώστε η f να έχει μέγιστο στο $x_0 = 2$ και $f''(1) = 0$.

....

....

....

....

....

Β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 4x^3 + x^2 + 5x - 10$ δεν έχει ακρότατα και να βρείτε τη μονοτονία της.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Θέμα 4ο

Α. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + \lambda x + 2$, $\lambda \in R$.

α. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A(1,f(1)).

β. Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in R$ ώστε η παραπάνω εφαπτόμενη να διέρχεται από το σημείο B(2,-4).

γ. Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in R$ η εφαπτόμενη διέρχεται από σταθερό σημείο.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Β. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x)=\ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)+\frac{6}{x+1}$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....