# ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

- Παραγοντοποίηση είναι η διαδικασία κατά την οποία ένα άθροισμα το μετατρέπουμε σε γινόμενο.

## ΒΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΜΕ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

1. Κοινός παράγοντας
2. Γνωστή ταυτότητα
3. Ομαδοποίηση των όρων
4. Συμπλήρωση του τετραγώνου
5. Συνδυαστικές περιπτώσεις.

## 1. Κοινός παράγοντας

Ο κοινός παράγοντας βγαίνει από <u>όλους</u> τους όρους του αθροίσματος.

i) Από τους αριθμούς ο Μ.Κ.Δ τους
ii) Από τις μεταβλητές οι ίδιες με το μικρότερο εκθέτη
iii) Από τις παρενθέσεις οι ίδιες με το μικρότερο εκθέτη.

**Παράδειγμα 1: Να παραγοντοποιηθούν**

i) $18x^2 - 6\psi^2 = 6(3x^2 - \psi^2)$

ii) $3x^2\psi = 6x\psi^2 + 2x^3 = x\left(3x\psi - 6\psi^2 + 2x^2\right)$

iii) $9x^2 * (x-1)^3 - 6x^3 \cdot (x-1)^2 = \underbrace{3x^2 \cdot (x-1)^2}_{\text{Κοινος παραγοντας}}\left[\cdot 3(x-1) - 2x\right] = 3x^2 \cdot (x-1)^2 \cdot (x-3)$

## 2. Γνωστή ταυτότητα

Η παράσταση που μας δίνεται είναι το ανάπτυγμα κάποιας από τις ταυτότητες που γνωρίζουμε.

$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2$ (3 όροι)

$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha-\beta)^2$ (3 όροι)

$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ (2 όροι)

$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ (2 όροι)

$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ (2 όροι)

$\chi^2 + (\alpha+\beta)\chi + \alpha\beta = (\chi+\alpha)(\chi+\beta) \longrightarrow$ τριώνυμο

$\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3$

$\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 = (\alpha-\beta)^3$

άθροισμα $\xrightarrow{\text{ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ}}$ γινόμενο

## 3. Ομαδοποίηση των όρων

i) Χωρίζουμε τους όρους σε ομάδες
ii) Κάθε ομάδα έχει το ίδιο πλήθος όρων
iii) Από κάθε ομάδα βγάζουμε κοινό παράγοντα
iv) Βγάζουμε παράγοντα την παρένθεση.

Παρατήρηση: 1 Αν δεν πραγματοποιείται το τελευταίο βήμα τότε κάνουμε ομαδοποίηση των όρων από την αρχή.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2:** Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις
i) αx+αy+βx+βy ii) $x^3+x^2+x+1$

Λύση
i) $\underbrace{\alpha x+\alpha y}_{\alpha}+\underbrace{\beta x+\beta y}_{+\beta}=\alpha(x+y)+\beta(x+y)=(x+y)(\alpha+\beta)$

ii) $\underbrace{x^3+x^2}_{x^2}+\underbrace{x+1}_{+1}=x^2(x+1)+1(x+1)=(x+1)(x^2+1)$

Παρατήρηση 2: Αν η αλγεβρική παράσταση αποτελείται από περιττό πλήθος όρων τότε η ομαδοποίηση των όρων είναι πιο δύσκολή. Τότε γράφουμε τον ένα όρο ως άθροισμα και έχουμε άρτιο πλήθος όρων.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ :** $2x^2+6x+4=2x^2+2x+4x+4=2x(x+1)+4(x+1)=(x+1)(2x+4)$

## 4 . Συμπλήρωση του τετραγώνου

i) Συμπληρώνουμε την ποσότητα που έχουμε για παραγοντοποίηση προσθέτοντας και αφαιρώντας κάποιον όρο ώστε να δημιουργήσουμε τέλειο τετράγωνο (δηλαδή μια από τις ταυτότητες $(\alpha+\beta)^2$ ή $(\alpha-\beta)^2$ ) και διαφορά τετραγώνων.
ii) Στη συνέχεια δημιουργείται διαφορά τετραγώνων.

**Παράδειγμα 3:** Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις
i) $\alpha^2+2\alpha\beta-8\beta^2$ ii) $\alpha^2+2\alpha-15$ iii) $x^4+9-3x^2$

Λύση:
i) $\alpha^2+2\alpha\beta-8\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-\beta^2-8\beta^2=(\alpha+\beta)^2-9\beta^2=$
$(\alpha+\beta)^2-(3\beta)^2=(\alpha+\beta+3\beta)(\alpha+\beta-3\beta)=(\alpha+4\beta)(\alpha-2\beta)$
ii) $\alpha^2+2\alpha-15=\alpha^2+2\alpha+1-1-15=(\alpha+1)^2-16=(\alpha+1)^2-4^2=$
$=(\alpha+1+4)(\alpha+1-4)=(\alpha+5)(\alpha-3)$
iii) $x^4+9-3x^2=x^4+6x^2-6x^2+9-3x^2=x^4+6x^2+9-3x^2-6x^2=(x^2+3)^2-9x^2=$
$=(x^2+3)^2-(3x)^2=(x^2+3+3x)(x^2+3-3x)$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:** Το τέλειο τετράγωνο στην περίπτωση iii) δημιουργείται με δύο τρόπους.

$$x^4+9-3x^2=x^4+6x^2-6x^2+9-3x^2=\begin{cases} x^4+6x^2+9-6x^2-3x^2=(x^2+3)^2-9x^2 \{\text{Διαφορα} \\ x^4-6x^2+9+6x^2-3x^2=(x^2-3)^2+3x^2 \{\text{Αθροισμα} \end{cases}$$

με μια διαφορά και με ένα άθροισμα. Πρέπει να πάρουμε τη διαφορά για να δημιουργήσουμε διαφορά τριγώνων.

## 4. Συνδιαστικές περιπτώσεις

**Παράδειγμα 4$^{ο}$ :** Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις : i) $\alpha^2x^2-\beta^2x^2-\alpha^2y^2+\beta^2y^2$
ii) $\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2+2\alpha\beta+2\gamma\delta$ iv) $x^4+1$
Λύση:
i) $\alpha^2x^2-\beta^2x^2-\alpha^2y^2+\beta^2y^2=x^2(\alpha^2-\beta^2)-y^2(\alpha^2-\beta^2)=(\alpha^2-\beta^2)(x^2-y^2)$
$=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(x-y)(x+y)$
ii) $\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2+201\beta+2\gamma\delta=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-\gamma^2-\delta^2+2\gamma\delta=$

$= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - (\gamma^2 + \delta^2 - 2\gamma\delta = (\alpha+\beta)^2 - (\gamma-\delta)^2 = [(\alpha+\beta)+(\gamma-\delta)]\cdot[(\alpha+\beta)-(\gamma-\delta)] =$

$= (\alpha+\beta+\gamma-\delta)(\alpha+\beta-\gamma+\delta)$

iv) $x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 - 2x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 + 1 + \sqrt{2}x)(x^2 + 1 - \sqrt{2}x)$