

Κεφάλαιο 9°

Μετρικές σχέσεις

Ο μαθητής που έχει μελετήσει την ενότητα των μετρικών σχέσεων θα πρέπει να είναι σε θέση:

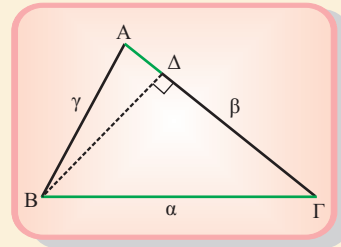
- ✓ Να γνωρίζει και να εφαρμόζει τις μετρικές σχέσεις:
 - στα ορθογώνια τρίγωνα
 - σε τυχαία τρίγωνα → γενίκευση Πυθαγορείου θεωρήματος
→ θεωρήματα διαμέσων
 - στον κύκλο
- ✓ Να χρησιμοποιεί τους παραπάνω τύπους για να υπολογίζει τις πλευρές, τις διαμέσους και άλλα στοιχεία ενός τριγώνου.
- ✓ Να αναγνωρίζει το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του (αμβλυγώνιο κ.τ.λ.) όταν δίνονται οι τρεις πλευρές του.
- ✓ Να εφαρμόζει τους τύπους για τις τέμνουσες κύκλου καθώς και τις ιδιότητες των εγγράψιμων τετραπλεύρων.

Μετρικές σχέσεις σε τυχαίο τρίγωνο.

Θεώρημα I (Γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος για πλευρά που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία)

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές, επί την προβολή της άλλης επάνω σε αυτήν.

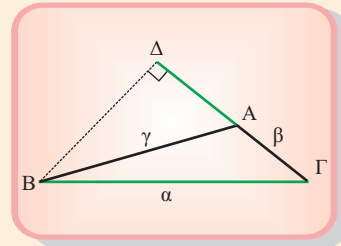
Για παράδειγμα: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \Delta\Delta$



Θεώρημα II (Γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος για πλευρά που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία)

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές, επί την προβολή της άλλης πάνω σ' αυτήν.

Για παράδειγμα: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot \Delta\Delta$



Πόρισμα

i. $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} > 1^L$ ii. $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} = 1^L$ iii. $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} < 1^L$

Νόμος Συνημιτόνων

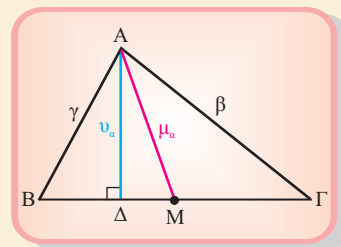
Σε κάθε τρίγωνο ABΓ ισχύει:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos A, \quad \beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\cos B, \quad \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos \Gamma$$

Θεώρημα III (1° θεώρημα διαμέσων)

Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών τριγώνου, ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου, που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς.

Για παράδειγμα: $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_a^2 + \frac{\alpha^2}{2}$



Θεώρημα IV (2° θεώρημα διαμέσων)

Η διαφορά των τετραγώνων των δύο πλευρών ενός τριγώνου, ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς, επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου στην πλευρά αυτή.

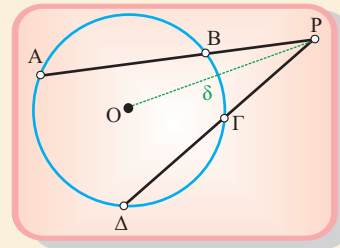
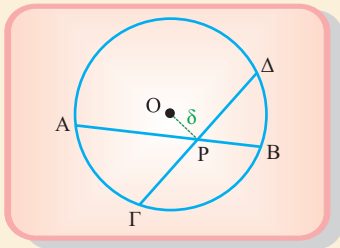
Για παράδειγμα: $\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot \Delta\text{M}$ ($\beta > \gamma$)

Τύποι διαμέσων:

$$\mu_{\alpha}^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}$$

$$\mu_{\beta}^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4}$$

$$\mu_{\gamma}^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}$$

Μετρικές σχέσεις σε κύκλο.**Θεώρημα I**

Αν οι χορδές AB και ΓΔ ενός κύκλου ή οι προεκτάσεις τους, τέμνονται σ' ένα σημείο P, τότε ισχύει:

$$PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta$$

Εφαρμογή 1 (αντίστροφο του θεωρήματος I)

Αν δύο ευθύγραμμα τμήματα AB και ΓΔ ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο P έτσι ώστε: $PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta$, τότε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία A, B, Γ και Δ είναι εγγράψιμο.

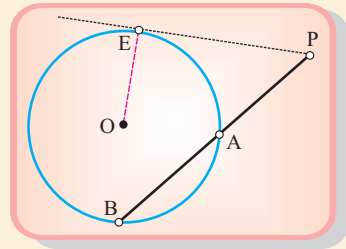
Παρατήρηση 1

Αν το σημείο P βρίσκεται **εντός του κύκλου** τότε είναι: $PA \cdot PB = R^2 - \delta^2$
όπου $\delta = OP$ (O το κέντρο του κύκλου) και R η ακτίνα του κύκλου.

Αν το σημείο P βρίσκεται **εκτός του κύκλου** τότε: $PA \cdot PB = \delta^2 - R^2$

Θεώρημα II

Αν από ένα εξωτερικό σημείο P κύκλου (O,R), φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα PE και μία ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα σημεία A και B, ισχύει: $PE^2 = PA \cdot PB$



Εφαρμογή 2 (αντίστροφο του θεωρήματος II)

Αν θεωρήσουμε ευθεία ε και τρία σημεία της P, A, B, όπου το σημείο P βρίσκεται εκτός του τμήματος AB και ένα σημείο E εκτός της ε τέτοιο ώστε να ισχύει: $PE^2 = PA \cdot PB$, το τμήμα PE είναι εφαπτόμενο στον κύκλο που ορίζουν τα σημεία A, B, E.

Ορισμός

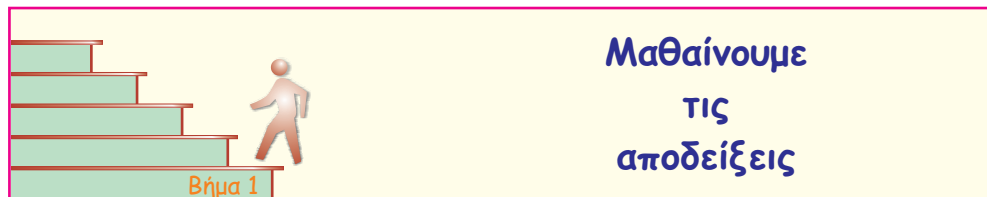
Έστω P σημείο του επιπέδου του κύκλου (O,R), με $\delta = OP$. Η διαφορά $\delta^2 - R^2$ λέγεται **δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O,R)** και συμβολίζεται $\Delta_{(O,R)}^P$.

Είναι $\Delta_{(O,R)}^P = \delta^2 - R^2$

Παρατήρηση 2

Το πρόσημο του αριθμού $\delta^2 - R^2$ καθορίζει τη θέση του P ως προς τον κύκλο. Συγκεκριμένα:

- α. Αν το σημείο P βρίσκεται εντός του κύκλου είναι: $\Delta_{(O,R)}^P < 0$
- β. Αν το σημείο P βρίσκεται εκτός του κύκλου είναι: $\Delta_{(O,R)}^P > 0$
- γ. Αν το σημείο P είναι σημείο του κύκλου είναι: $\Delta_{(O,R)}^P = 0$
- δ. Αν το σημείο P συμπίπτει με το κέντρο του κύκλου είναι: $\Delta_{(O,R)}^P = -R^2$



Θεώρημα 1 Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1^\perp$).

Φέρνουμε το ύψος $A\Delta$.

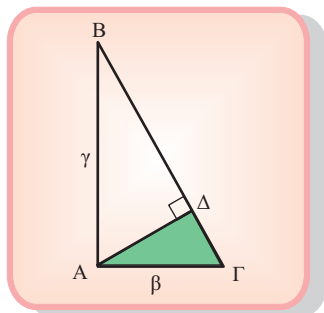
Θα αποδείξουμε ότι $AG^2 = B\Gamma \cdot \Delta\Gamma$ (1)

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Gamma\Delta$ είναι όμοια αφού έχουν:

$\hat{A} = \hat{\Delta} = 1^\perp$ και $\hat{\Gamma}$ κοινή (2 γωνίες ίσες).

Επομένως έχουν τις πλευρές τους ανάλογες:

$$\frac{AG}{B\Gamma} = \frac{\Delta\Gamma}{AG} \Leftrightarrow AG^2 = B\Gamma \cdot \Delta\Gamma$$



Ομοίως αποδεικνύεται ότι: $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$

Γενικά λοιπόν ισχύει:

$$\beta^2 = \alpha \cdot \Delta\Gamma \quad (2) \quad \text{και} \quad \gamma^2 = \alpha \cdot B\Delta \quad (3)$$

Πόρισμα

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ο λόγος των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους στην υποτείνουσά του.

Απόδειξη

Διαιρούμε τις σχέσεις (2) και (3) κατά μέλη: $\frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{\alpha \cdot \Delta\Gamma}{\alpha \cdot B\Delta} \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{\Delta\Gamma}{B\Delta}$

Θεώρημα 2 (Πυθαγόρειο θεώρημα) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών του.

Απόδειξη

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

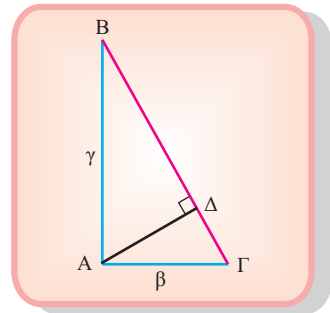
$$AB^2 + AG^2 = BG^2 \quad \text{ή} \quad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα έχουμε:

$$AB^2 = BG \cdot BD \quad \text{και} \quad AG^2 = BG \cdot GD.$$

Με πρόσθεση των ισοτήτων κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} AB^2 + AG^2 &= BG \cdot BD + BG \cdot GD = BG(BD + GD) = \\ &= BG \cdot BG = BG^2 \end{aligned}$$

**Θεώρημα 3** (Αντίστροφο του Πυθαγορείου)

Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει: $AB^2 + AG^2 = BG^2$, τότε η γωνία \hat{A} είναι ορθή.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ABΓ στο οποίο ισχύει:

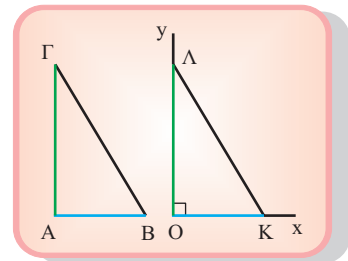
$$AB^2 + AG^2 = BG^2 \quad (1)$$

Παίρνουμε ορθή γωνία $x\hat{O}y$ και στις πλευρές της Ox και Oy παίρνουμε αντίστοιχα σημεία K, Λ έτσι ώστε $OK = AB$ και $OL = AG$. (2)

Αφού το τρίγωνο KOL είναι ορθογώνιο, ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$$KL^2 = OK^2 + OL^2 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} KL^2 = AB^2 + AG^2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} KL^2 = BG^2 \Leftrightarrow KL = BG$$

Τα τρίγωνα ABΓ και LOK είναι ίσα αφού έχουν και τις τρεις πλευρές ίσες. Επομένως έχουν και τις γωνίες τους ίσες, δηλαδή $\hat{A} = \hat{O} = 1^{\circ}$.

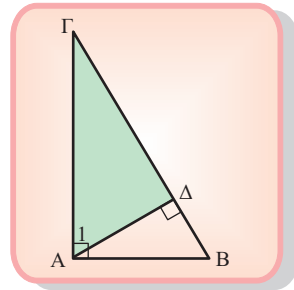
**Θεώρημα 4** Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, ισούται με το γινόμενο των προβολών των καθέτων πλευρών του στην υποτείνουσα.**Απόδειξη**

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ και το ύψος του ΑΔ.

Θα δείξουμε ότι: $AD^2 = DB \cdot DG$

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΓΔ$. Είναι όμοια αφού έχουν: $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 1^\perp$ και $\hat{A}_1 = \hat{B}$ (έχουν τις πλευρές τους κάθετες ή δίνοντας μια άλλη αιτιολόγηση: είναι συμπληρωματικές της γωνίας $\hat{\Gamma}$)
Επομένως οι πλευρές τους είναι ανάλογες:

$$\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΔΓ}{ΑΔ} \Leftrightarrow ΑΔ^2 = ΔΒ \cdot ΔΓ$$



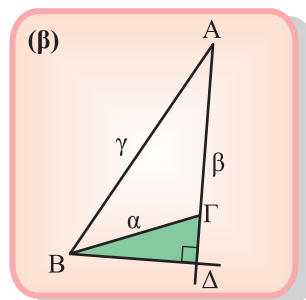
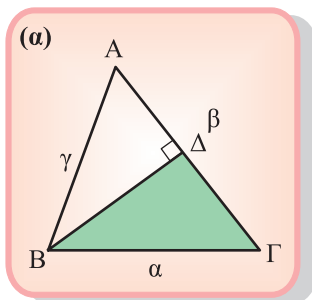
ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΕ ΤΥΧΑΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ

Θεώρημα 1

(Γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος)

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές, επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Απόδειξη



Στα ορθογώνια τρίγωνα $ΔΒΓ$, $ΔΒΑ$ εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα αντίστοιχα: $α^2 = ΔΒ^2 + ΔΓ^2$ και $ΔΒ^2 = γ^2 - ΑΔ^2$. Επειδή είναι $\hat{A} < 1^\perp$ τα σημεία $Δ$, $Γ$ βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του A και ειδικότερα:

- αν $\hat{\Gamma} < 1^\perp$ το $Δ$ είναι μεταξύ των A , $Γ$, οπότε $ΔΓ = β - ΑΔ$. (σχ. α)
- αν $\hat{\Gamma} > 1^\perp$ το $Γ$ είναι μεταξύ των A , $Δ$, οπότε $ΔΓ = ΑΔ - β$. (σχ. β)

Από τις δύο τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι:

$$ΔΓ^2 = (β - ΑΔ)^2 = β^2 + ΑΔ^2 - 2β \cdot ΑΔ$$

Με αντικατάσταση αυτής της σχέσης και της $ΔΒ^2 = γ^2 - ΑΔ^2$ στην $α^2 = ΔΒ^2 + ΔΓ^2$ προκύπτει ότι:

$\alpha^2 = \gamma^2 - \Delta\Delta^2 + \beta^2 + \Delta\Delta^2 - 2\beta \cdot \Delta\Delta = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \Delta\Delta$, δηλαδή η ζητούμενη ισότητα.

- Αν τέλος $\hat{\Gamma} = 1^L$, το Δ συμπίπτει με το Γ και το ορθογώνιο τρίγωνο ΓAB δίνει $\alpha^2 = \gamma^2 - \beta^2$ που γράφεται $\alpha^2 = \gamma^2 + \beta^2 - 2\beta \cdot \Delta\Delta$, αφού $\Delta\Delta = \beta$.

Θεώρημα 2 Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές επί την προβολή της άλλης σε αυτήν.

Απόδειξη

Χωρίς απόδειξη

Πόρισμα

Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν οι ισοδυναμίες:

I. $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} > 1^L$

II. $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} = 1^L$

III. $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} < 1^L$

Απόδειξη της III.

Αποδεικνύουμε ότι αν $\hat{A} < 1^L$ τότε $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$. Σύμφωνα με τη γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος, αφού $\hat{A} < 1^L$ ισχύει $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\Delta\Delta$, άρα: $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$

Απόδειξη του αντιστρόφου:

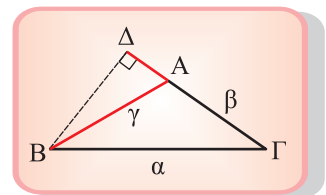
Αν $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ τότε $\hat{A} < 1^L$. Θα εργαστούμε με απαγωγή σε άτοπο:

Έστω ότι η \hat{A} δεν είναι οξεία.

Ας υποθέσουμε ότι $\hat{A} > 1^L$. Τότε σύμφωνα με το I. του πορίσματος, θα ήταν $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, άτοπο γιατί έχουμε

ότι $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$. Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι $\hat{A} = 1^L$.

Τελικά $\hat{A} < 1^L$.



ΝΟΜΟΣ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ

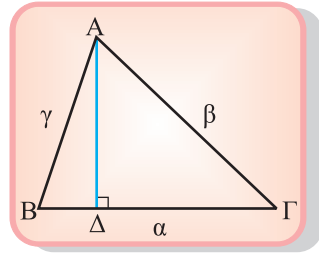
Σύμφωνα με τη γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\Delta\Gamma \quad (1)$$

Είναι: $\text{συν}\Gamma = \frac{\Delta\Gamma}{\beta} \Leftrightarrow \Delta\Gamma = \beta \cdot \text{συν}\Gamma \quad (2)$

Αντικαθιστούμε στην (1) το $\Delta\Gamma$ από τη (2) και έχουμε:

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\text{συν}\Gamma$$



ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΔΙΑΜΕΣΩΝ

Θεώρημα 1 (1° θεώρημα διαμέσων)

Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου, ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου, που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$, η διάμεσος $AM = \mu_\alpha$ και το ύψος $A\Delta$. Αν $A\Gamma > AB$, τότε το ίχνος Δ του ν_α βρίσκεται μεταξύ των σημείων B, M οπότε $\widehat{A\hat{M}\Gamma} > 1^\perp$ και $\widehat{A\hat{M}B} < 1^\perp$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα αμβλείας γωνίας στο τρίγωνο $AM\Gamma$ και το θεώρημα οξείας γωνίας στο τρίγωνο AMB . Τότε θα έχουμε ότι:

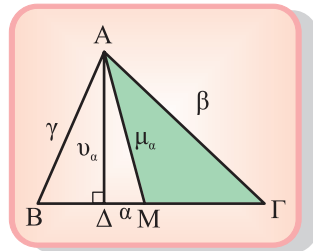
$$\beta^2 = AM^2 + M\Gamma^2 + 2M\Gamma \cdot \Delta M \quad (1)$$

$$\gamma^2 = AM^2 + MB^2 - 2MB \cdot \Delta M \quad (2)$$

Προσθέτουμε τις (1), (2) κατά μέλη και έχουμε:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2AM^2 + M\Gamma^2 + MB^2 \quad (\text{αφού } MB = M\Gamma) \Leftrightarrow \beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + 2\frac{\alpha^2}{4} \Leftrightarrow \beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$$



Θεώρημα 2 Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω στην πλευρά αυτή.

Απόδειξη

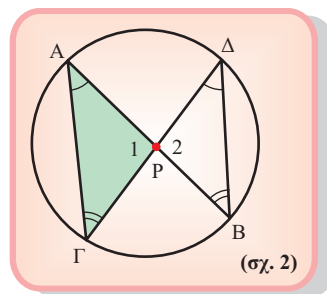
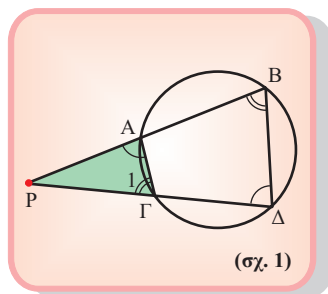
Έστω $AG > AB$. Αφαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) του προηγούμενου θεωρήματος:

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2MG \cdot \Delta M + 2MB \cdot \Delta M \Leftrightarrow \beta^2 - \gamma^2 = 2\frac{\alpha}{2}\Delta M + 2\frac{\alpha}{2}\Delta M \Leftrightarrow \beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha\Delta M$$

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΕ ΚΥΚΛΟ

Θεώρημα 1 Αν δύο χορδές $AB, \Gamma\Delta$ ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε σημείο P , τότε ισχύει: $PA \cdot PB = PG \cdot PD$

Απόδειξη



Τα τρίγωνα $PA\Gamma$ και $PB\Delta$ είναι όμοια αφού:

Στο σχ. 1: • \hat{P} κοινή

• $\hat{B} = \hat{\Gamma}_1$

(Το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι εγγράψιμο και η γωνία του B ισούται με την απέναντι εξωτερική γωνία Γ_1)

και στο σχ. 2: • $\hat{P}_1 = \hat{P}_2$ (κατακορυφήν)

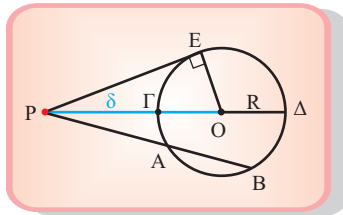
• $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο)

Επομένως:
$$\frac{PA}{PD} = \frac{P\Gamma}{PB} \Leftrightarrow PA \cdot PB = P\Gamma \cdot PD$$

Θεώρημα 2 Αν από εξωτερικό σημείο P κύκλου (O,R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα PE και μία ευθεία τέμνουσα του κύκλου στα σημεία A, B τότε ισχύει:

i. $PA \cdot PB = \delta^2 - R^2$ (όπου $\delta = OP$)

ii. $PA \cdot PB = PE^2$

Απόδειξη

Φέρνουμε την τέμνουσα του κύκλου PO η οποία τον τέμνει στα Γ και Δ.

Είναι: $PA \cdot PB = PG \cdot PD = (\delta - R)(\delta + R)$. Άρα $PA \cdot PB = \delta^2 - R^2$ (1)

Το τρίγωνο POE είναι ορθογώνιο στο E (αφού η ακτίνα είναι κάθετη στην εφαπτόμενη). Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα και έχουμε:

$$PE^2 = PO^2 - OE^2 \Leftrightarrow PE^2 = \delta^2 - R^2 \quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει: $PA \cdot PB = PE^2$

**A. Από το σχολικό βιβλίο****ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.**

- σ. 185: Ερωτήσεις Κατανόησης 2
- σ. 186: Αποδεικτικές Ασκήσεις 1,2,3,5
- σ. 194: Ερωτήσεις Κατανόησης 2
- σ. 194: Ασκήσεις Εμπέδωσης 1, 2, 3
- σ. 194: Αποδεικτικές Ασκήσεις 1, 2, 3, 4, 5, 6
- σ. 198: Ασκήσεις Εμπέδωσης 2, 3, 4
- σ. 198: Αποδεικτικές Ασκήσεις 2, 3, 4, 5
- σ. 203: Ασκήσεις Εμπέδωσης 2, 3, 4
- σ. 204: Αποδεικτικές Ασκήσεις 3, 4, 5
- σ. 204: Σύνθετα Θέματα 1, 2, 3



Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

- 1.** Τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου ΑΒΓΔ έχουν λόγο $\sqrt{2}$. Να δείξετε ότι οι προβολές των κορυφών Α και Γ στη διαγώνιο ΒΔ, διαιρούν τη διαγώνιο αυτή σε 3 ίσα τμήματα.

Λύση:

Ισχύει $\frac{AB}{AD} = \sqrt{2}$. Συνεπώς αν θέσουμε $AD = \alpha$, προ-

κύπτει $AB = \alpha\sqrt{2}$. Στο τρίγωνο ΑΔΒ είναι:

$$AD^2 = DE \cdot DB \Leftrightarrow \alpha^2 = DE \cdot DB \quad (1)$$

Από Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε:

$$DB^2 = \alpha^2 + (\alpha\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow DB^2 = 3\alpha^2 \Leftrightarrow DB = \alpha\sqrt{3} \quad (2)$$

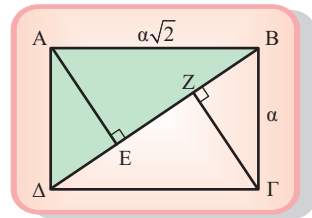
Από τις (1) και (2) έχουμε: $\alpha^2 = DE \cdot \alpha\sqrt{3}$, επομένως:

$$DE = \frac{\alpha^2}{\alpha\sqrt{3}} = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3} = \frac{DB}{3}$$

Ομοίως στο $\triangle B\Gamma$ έχουμε:

$$B\Gamma^2 = ZB \cdot BD \Leftrightarrow \alpha^2 = ZB \cdot \alpha\sqrt{3} \Leftrightarrow ZB = \frac{\alpha^2}{\alpha\sqrt{3}} \Leftrightarrow ZB = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3} = \frac{DB}{3}.$$

Συνεπώς θα είναι και $EZ = \frac{DB}{3}$ επομένως $DE = EZ = ZB$.



- 2.** Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) δίνονται: $\mu_a = \lambda$ και $\beta = \lambda\sqrt{3}$

Να υπολογιστούν οι γωνίες \hat{B} και $\hat{\Gamma}$ καθώς και το ύψος u_a

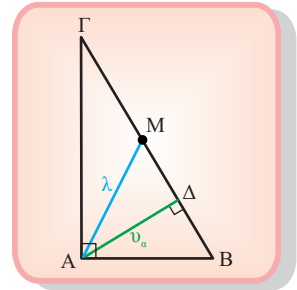
Λύση:

Ισχύει $B\Gamma = 2\mu_\alpha = 2\lambda$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$AB^2 = (2\lambda)^2 - (\lambda\sqrt{3})^2 = \lambda^2. \text{ Άρα } AB = \lambda = \frac{B\Gamma}{2}, \text{ επομέ-}$$

νωσ $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και $\hat{B} = 60^\circ$.

$$\text{Ακόμα } \beta \cdot \gamma = \alpha \cdot \nu_\alpha \Leftrightarrow \nu_\alpha = \frac{\beta \cdot \gamma}{\alpha} = \frac{\lambda\sqrt{3} \cdot \lambda}{2\lambda} = \frac{\lambda\sqrt{3}}{2}.$$



3. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Να αποδείξετε ότι

$$\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \frac{3}{2}\alpha^2.$$

Λύση:

Στο $A\hat{E}\Gamma$ από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$\Gamma E^2 = A\Gamma^2 + A E^2 \text{ δηλαδή:}$$

$$\mu_\gamma^2 = \beta^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \mu_\gamma^2 = \beta^2 + \frac{\gamma^2}{4} \quad (1)$$

Επίσης στο $A\hat{Z}B$ από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχου-

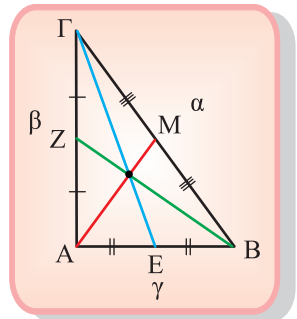
με: $BZ^2 = AB^2 + AZ^2$ δηλαδή:

$$\mu_\beta^2 = \gamma^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \mu_\beta^2 = \gamma^2 + \frac{\beta^2}{4} \quad (2)$$

Τέλος $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \mu_\alpha^2 = \frac{\alpha^2}{4}$ (3). Από (1), (2) και (3) έχουμε:

$$\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4} = \alpha^2 + \frac{2\alpha^2}{4} = \frac{6\alpha^2}{4} = \frac{3\alpha^2}{2}$$

(χρησιμοποιήθηκε ότι $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$).



4. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $A\Delta$ το ύψος του. Αν

E και Z είναι οι προβολές του Δ στις AB και AG αντίστοιχα να δείξετε

$$\text{ότι } A\Delta^3 = B\Gamma \cdot \Delta Z \cdot \Delta E$$

Λύση:

Στο $\hat{A} \triangle B$ ισχύει: $AD \cdot DB = DE \cdot AB$ (1)

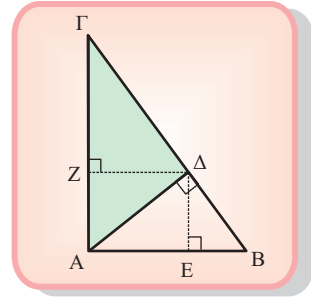
Στο $\hat{A} \triangle \Gamma$ ισχύει: $AD \cdot \Delta\Gamma = \Delta Z \cdot A\Gamma$ (2)

Από (1),(2) έχουμε: $AD^2 \cdot \Delta B \cdot \Delta\Gamma = \Delta E \cdot \Delta Z \cdot AB \cdot A\Gamma$

Όμως $\Delta B \cdot \Delta\Gamma = AD^2$ και $AB \cdot A\Gamma = AD \cdot B\Gamma$

Άρα: $AD^2 \cdot AD^2 = \Delta E \cdot \Delta Z \cdot AD \cdot B\Gamma$

και τελικά: $AD^3 = \Delta E \cdot \Delta Z \cdot B\Gamma$



5. Να βρείτε το είδος του τριγώνου του οποίου οι πλευρές γ , β , α είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 4, 5, 6 αντίστοιχα. Αν $A\Delta$ είναι η προβολή της γ πάνω στη β , να αποδείξετε ότι: $A\Delta = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{30}$

$$\text{λή της } \gamma \text{ πάνω στη } \beta, \text{ να αποδείξετε ότι: } A\Delta = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{30}$$

Λύση:

Ισχύει ότι: $\frac{\gamma}{4} = \frac{\beta}{5} = \frac{\alpha}{6} = \lambda$. Άρα $\gamma = 4\lambda$, $\beta = 5\lambda$, $\alpha = 6\lambda$.

$$\text{Είναι: } \left. \begin{aligned} \alpha^2 &= 36\lambda^2 \\ \beta^2 + \gamma^2 &= 25\lambda^2 + 16\lambda^2 = 41\lambda^2 \end{aligned} \right\}$$

Επομένως $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} < 90^\circ$ δηλαδή το τρίγωνο

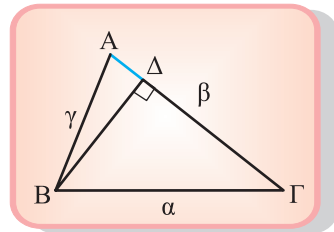
$AB\Gamma$ είναι οξυγώνιο (αφού η \hat{A} είναι η μεγαλύτερη γωνία).

Ισχύει ότι $\hat{A} < 90^\circ$ άρα: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta$

Επομένως $36\lambda^2 = 41\lambda^2 - 10\lambda \cdot A\Delta \Leftrightarrow A\Delta = \frac{\lambda}{2}$

Επίσης: $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{30} = \frac{6\lambda + 5\lambda + 4\lambda}{30} = \frac{15\lambda}{30} = \frac{\lambda}{2}$.

Συνεπώς: $A\Delta = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{30}$



6. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο ισχύει η σχέση $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma \cdot \sqrt{3}$ (1).

Να υπολογιστεί η γωνία \hat{A} .

Λύση:

Ισχύει $\beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma\sqrt{3} > \beta^2 + \gamma^2$, επομένως:

$$\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} > 90^\circ$$

Δηλαδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο στο A .

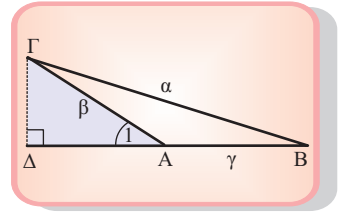
Ισχύει $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\gamma \cdot A\Delta$ (2).

Από (1) και (2) προκύπτει:

$$\beta^2 + \gamma^2 + 2\gamma \cdot A\Delta = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma\sqrt{3} \Leftrightarrow A\Delta = \frac{\beta \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Από Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ έχουμε: $\Delta\Gamma^2 = A\Gamma^2 - \Delta A^2 = \beta^2 - \frac{3\beta^2}{4} = \frac{\beta^2}{4}$

Άρα $\Delta\Gamma = \frac{\beta}{2}$ δηλαδή $\hat{A}_1 = 30^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 150^\circ$



7. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) με $AB = \gamma$, $A\Gamma = \beta$, $B\Gamma = \alpha$, $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 + \alpha\gamma$ (1) και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Αν η εφαπτομένη στο A τέμνει τη $B\Gamma$ στο Δ να δείξετε ότι:

α. $\hat{B} = 120^\circ$ **β.** $\hat{A}\hat{\Delta}B = 90^\circ$ **γ.** $\beta\sqrt{3} = 2\alpha + \gamma$

Λύση:

α. Από (1) $\Leftrightarrow \beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 + \alpha\gamma > \alpha^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \beta^2 > \alpha^2 + \gamma^2 \text{ δηλαδή } \hat{B} > 90^\circ$$

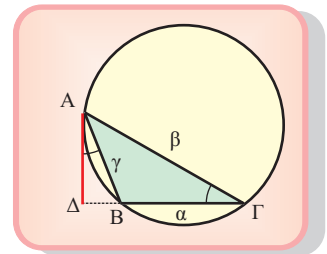
Εφαρμόζοντας νόμο συνημιτόνων στο $A\hat{B}\Gamma$ έχουμε

$$\text{συν}B = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} \stackrel{(1)}{=} \frac{-\alpha\gamma}{2\alpha\gamma} \Leftrightarrow \text{συν}B = -\frac{1}{2}$$

Επειδή $0^\circ < \hat{B} < 180^\circ$, είναι $\hat{B} = 120^\circ$.

β. Η $A\Delta$ εφαπτομένη οπότε $\hat{\Delta}\hat{A}B = \hat{\Gamma}$ (γωνία από χορδή και εφαπτομένη) άρα $\hat{\Delta}\hat{A}B = 30^\circ$. Ακόμα $\hat{A}\hat{B}\Gamma$ εξωτερική του $\hat{A}\hat{\Delta}B$, άρα $\hat{A}\hat{B}\Gamma = \hat{\Delta}\hat{A}B + \hat{A}\hat{\Delta}B$ δηλαδή $120^\circ = 30^\circ + \hat{A}\hat{\Delta}B \Leftrightarrow \hat{A}\hat{\Delta}B = 90^\circ$

γ. Το $\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ οπότε $A\Delta = \frac{\beta}{2}$



Ακόμα $\hat{B}\hat{\Delta}A$ ορθογώνιο με $\hat{\Delta}AB = 30^\circ$ οπότε $\Delta B = \frac{\gamma}{2}$

Στο $A\hat{\Delta}G$ από Πυθαγόρειο θεώρημα: $AD^2 + \Delta G^2 = AG^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{2} + \alpha\right)^2 = \beta^2$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\gamma}{2} + \alpha\right)^2 = \frac{3\beta^2}{4} \Leftrightarrow \frac{\gamma}{2} + \alpha = \frac{\sqrt{3}\beta}{2} \Leftrightarrow \gamma + 2\alpha = \sqrt{3}\beta$$

8. Δίνεται τρίγωνο ABG με $AG > BG > AB$. Αν $K\Delta$, ΛE και MZ είναι οι προβολές των διαμέσων μ_a , μ_b και μ_γ πάνω στις πλευρές a , β και γ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι: $K\Delta \cdot BG = \Lambda E \cdot AG + MZ \cdot AB$

Λύση:

Από το 2ο θεώρημα διαμέσων ισχύουν:

$$AG^2 - AB^2 = 2K\Delta \cdot BG \quad (1)$$

$$BG^2 - AB^2 = 2\Lambda E \cdot AG \quad (2)$$

$$AG^2 - BG^2 = 2MZ \cdot AB \quad (3)$$

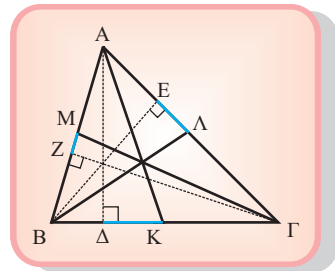
Με πρόσθεση κατα μέλη των (2) και (3) έχουμε

$$BG^2 - AB^2 + AG^2 - BG^2 = 2\Lambda E \cdot AG + 2MZ \cdot AB \Leftrightarrow$$

$$AG^2 - AB^2 = 2\Lambda E \cdot AG + 2MZ \cdot AB$$

και λόγω της (1) παίρνουμε:

$$2K\Delta \cdot BG = 2\Lambda E \cdot AG + 2MZ \cdot AB$$



9. Δίνεται τρίγωνο ABG και οι διάμεσοι του AM και BK . Να δείξετε ότι

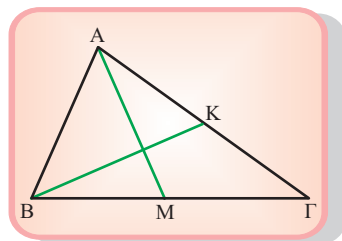
α. $AG^2 + BG^2 + 4AB^2 = 4(AM^2 + BK^2)$

β. $3(AG^2 - BG^2) = 4(AM^2 - BK^2)$

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι:

$$\mu_a^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} \Leftrightarrow 4\mu_a^2 = 2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2 \quad (1)$$



$$\mu_{\beta}^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} \Leftrightarrow 4\mu_{\beta}^2 = 2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2 \quad (2)$$

α. Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει το ζητούμενο

$$4(\mu_{\alpha}^2 + \mu_{\beta}^2) = \alpha^2 + \beta^2 + 4\gamma^2 \Leftrightarrow 4(AM^2 + BK^2) = AG^2 + BG^2 + 4AB^2$$

β. Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει το ζητούμενο

$$4\mu_{\alpha}^2 - 4\mu_{\beta}^2 = 2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2 - (2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2) = 3\beta^2 - 3\alpha^2$$

$$\Leftrightarrow 4(AM^2 - BK^2) = 3(AG^2 - BG^2)$$

10. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε Ax ημιευθεία παράλληλη στη $B\Gamma$ και από το B ευθεία παράλληλη στη διάμεσο AM , οι οποίες τέμνονται στο Δ . Αν ισχύει $\Delta B^2 + \Delta\Gamma^2 = 2(AB^2 + A\Delta^2)$, να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Λύση:

Από το 1ο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \Delta B^2 + \Delta\Gamma^2 &= 2\Delta M^2 + \frac{B\Gamma^2}{2} = 2\Delta M^2 + \frac{(2BM)^2}{2} = \\ &= 2\Delta M^2 + 2BM^2 = 2(\Delta M^2 + BM^2) \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \Delta B^2 + \Delta\Gamma^2 = 2(\Delta M^2 + BM^2) \quad (1)$$

$$\text{Επίσης δίνεται } \Delta B^2 + \Delta\Gamma^2 = 2(AB^2 + A\Delta^2) \quad (2)$$

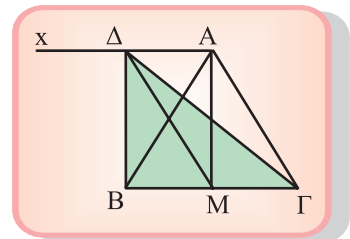
Από τις (1) και (2) παίρνουμε

$$2(\Delta M^2 + BM^2) = 2(AB^2 + A\Delta^2) \Leftrightarrow \Delta M^2 + BM^2 = AB^2 + A\Delta^2 \Leftrightarrow \Delta M^2 = AB^2$$

(Το $AMBD$ είναι παραλληλόγραμμο οπότε ισχύει $A\Delta = BM$)

Έτσι προκύπτει $\Delta M = AB$, που σημαίνει ότι το παραλληλόγραμμο $AMBD$ είναι ορθογώνιο αφού έχει ίσες διαγωνίους.

Άρα $\widehat{BMA} = 90^\circ$ δηλαδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές αφού η διάμεσος είναι και ύψος του τριγώνου.



11. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$, K και Λ τα μέσα των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα και M μέσον του $K\Lambda$. Αποδείξτε ότι $\beta^2 - \gamma^2 = 2M\Gamma^2 - 2MB^2$

Λύση:

Φέρνουμε την AM . Στο \widehat{AMB} η MK είναι διάμεσος άρα από το 1ο θεώρημα

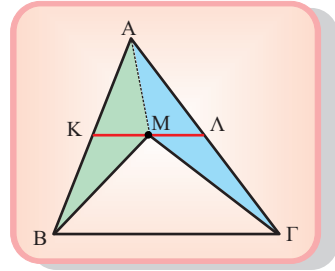
διαμέσων έχουμε:

$$MB^2 + MA^2 = 2MK^2 + \frac{AB^2}{2} \quad (1)$$

Στο $\triangle AM\Gamma$ η $M\Lambda$ είναι διάμεσος άρα έχουμε:

$$M\Gamma^2 + MA^2 = 2M\Lambda^2 + \frac{A\Gamma^2}{2} \quad (2)$$

$$\text{Από (2)-(1) έχουμε: } M\Gamma^2 - MB^2 = \frac{A\Gamma^2}{2} - \frac{AB^2}{2} \Leftrightarrow 2M\Gamma^2 - 2MB^2 = \beta^2 - \gamma^2$$



12. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ ορθογώνιο στο A . Φέρουμε τη διάμεσο AM και ευθεία κάθετη στην AM στο M η οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο Σ . Αποδείξτε ότι $\Sigma B^2 + \Sigma\Gamma^2 = 2\Sigma A^2$

Λύση:

Φέρουμε τη ΣB . Στο $\triangle B\Gamma$ από θεώρημα διαμέσων

$$\text{έχουμε: } \Sigma B^2 + \Sigma\Gamma^2 = 2\Sigma M^2 + \frac{B\Gamma^2}{2} \quad (1)$$

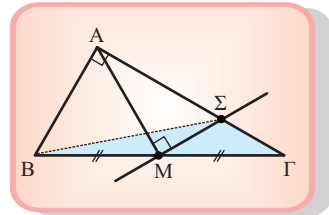
Στο ορθογώνιο $\triangle A\Sigma M$ από Πυθαγόρειο θεώρημα

$$\text{έχουμε: } 2\Sigma A^2 = 2AM^2 + 2M\Sigma^2 \quad (2)$$

Ισχύει επίσης ότι $AM = \frac{B\Gamma}{2}$ και η (2) γίνεται:

$$2\Sigma A^2 = 2 \frac{B\Gamma^2}{4} + 2M\Sigma^2 \Leftrightarrow 2\Sigma A^2 = 2M\Sigma^2 + \frac{B\Gamma^2}{2} \quad (3)$$

Από (1) και (3) προκύπτει: $\Sigma B^2 + \Sigma\Gamma^2 = 2\Sigma A^2$.



13. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές α, β, γ και διάμεσο $AM = \mu_\alpha$. Αν ισχύει

$$\mu_\alpha = \frac{\gamma\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad \gamma = \frac{\beta}{3}, \quad \text{να αποδείξετε ότι:}$$

α. $\alpha = \beta\sqrt{2}$

β. Η πλευρά $A\Gamma$ εφάπτεται του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο AMB στο A

γ. Αν ΔM η προβολή της AM στη $B\Gamma = \alpha$ τότε $\Delta M = \frac{2\alpha}{9}$.

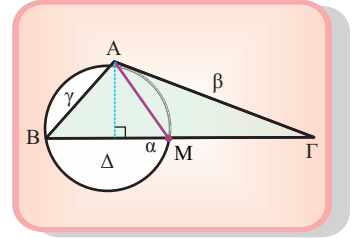
Λύση:

Έχουμε $\mu_\alpha = \frac{\gamma\sqrt{2}}{2}$ και $\gamma = \frac{\beta}{3}$.

α. Είναι: $\mu_\alpha^2 = \frac{2(\beta^2 + \gamma^2) - \alpha^2}{4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\gamma\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\gamma^2}{4} = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} \Leftrightarrow 2\gamma^2 = 2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 2\beta^2 \Leftrightarrow \alpha = \beta\sqrt{2}.$$



β. AM διάμεσος οπότε $M\Gamma = \frac{\alpha}{2}$. Έχουμε $\Gamma M \cdot \Gamma B = \frac{\alpha}{2} \cdot \alpha = \frac{\alpha^2}{2} = \frac{(\beta\sqrt{2})^2}{2} =$

$$= \beta^2 = \Gamma A^2 \text{ δηλαδή } \Gamma M \cdot \Gamma B = \Gamma A^2, \text{ άρα η } \Gamma A \text{ εφαπτομένη.}$$

γ. Εφαρμόζοντας το 2ο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο $AB\Gamma$, (επειδή $\beta > \gamma$ αφού

$$\gamma = \frac{\beta}{3}) \text{ έχουμε: } \beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot \Delta M \Leftrightarrow \beta^2 - \left(\frac{\beta}{3}\right)^2 = 2\alpha \cdot \Delta M \Leftrightarrow 2\alpha \cdot \Delta M = \frac{8\beta^2}{9} =$$

$$= \frac{8\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^2}{9} = \frac{8 \cdot \frac{\alpha^2}{2}}{9} = \frac{4\alpha^2}{9} \Leftrightarrow 2\alpha \cdot \Delta M = \frac{4\alpha^2}{9} \Leftrightarrow \Delta M = \frac{2\alpha}{9}$$

14. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $\alpha = 6$, $\beta = 4$, $\gamma = 3$. Να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο

β. Να υπολογισθεί το ύψος $\Delta\Delta$ του τριγώνου

γ. Να υπολογισθεί η διάμεσος AM που αντιστοιχεί στην πλευρά α .

Λύση:

α. Έχουμε $\alpha > \beta > \gamma$

$$\text{Είναι } \beta^2 + \gamma^2 = 4^2 + 3^2 = 25 < 36 = \alpha^2 \Leftrightarrow \beta^2 + \gamma^2 < \alpha^2 \Leftrightarrow \hat{A} > 90^\circ$$

β. Υπολογίζουμε την προβολή της πλευράς AB πάνω στη $B\Gamma$. Είναι $\hat{B} < 90^\circ$.

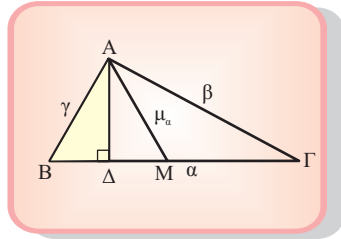
Εφαρμόζοντας το θεώρημα οξείας γωνίας στο τρίγωνο $AB\Gamma$ για τη γωνία B έχουμε:

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha \cdot \text{B}\Delta \quad \text{ή} \quad 4^2 = 6^2 + 3^2 - 2 \cdot 6 \cdot \text{B}\Delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12\text{B}\Delta = 45 - 16 \Leftrightarrow 12\text{B}\Delta = 29 \Leftrightarrow \text{B}\Delta = \frac{29}{12}.$$

Στο τρίγωνο $\text{A}\Delta\text{B}$ εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο θεώρημα

$$\text{και έχουμε } \text{A}\Delta^2 = \gamma^2 - \text{B}\Delta^2 = \frac{455}{144} \quad \text{άρα } \text{A}\Delta = \frac{\sqrt{455}}{12}$$



$$\gamma. \text{ Είναι } \mu_\alpha^2 = \frac{2(\beta^2 + \gamma^2) - \alpha^2}{4} = \frac{2(4^2 + 3^2) - 6^2}{4} = \frac{14}{4} \Leftrightarrow \mu_\alpha = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

15. Αν σε τρίγωνο $\text{AB}\Gamma$ ισχύει $\alpha = 3\gamma$ και $\mu_\gamma = \frac{5\gamma}{2}$, να δείξετε ότι:

i. $\beta = 2\gamma$

ii. $\hat{\text{A}} > 90^\circ$

iii. $\mu_\beta = 2\gamma$, $\mu_\alpha = \frac{\gamma}{2}$

Λύση:

$$\alpha. \text{ Έχουμε } \mu_\gamma^2 = \frac{2(\alpha^2 + \beta^2) - \gamma^2}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{5\gamma}{2}\right)^2 = \frac{2[(3\gamma)^2 + \beta^2] - \gamma^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{25\gamma^2}{4} = \frac{18\gamma^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4} \Leftrightarrow 25\gamma^2 = 17\gamma^2 + 2\beta^2 \Leftrightarrow 2\beta^2 = 8\gamma^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 = 4\gamma^2 \Leftrightarrow \beta = 2\gamma.$$

$\beta.$ Είναι $\alpha > \beta > \gamma$ και $\alpha^2 = 9\gamma^2$, $\beta^2 + \gamma^2 = (2\gamma)^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \beta^2 + \gamma^2 = 5\gamma^2$ άρα

$$\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{\text{A}} > 90^\circ$$

$$\gamma. \text{ Έχουμε } \mu_\beta^2 = \frac{2(\alpha^2 + \gamma^2) - \beta^2}{4} = \frac{2(9\gamma^2 + \gamma^2) - 4\gamma^2}{4} = 4\gamma^2 \Leftrightarrow \mu_\beta^2 = 4\gamma^2 \Leftrightarrow \mu_\beta = 2\gamma$$

$$\text{και } \mu_\alpha^2 = \frac{2(\beta^2 + \gamma^2) - \alpha^2}{4} = \frac{2(4\gamma^2 + \gamma^2) - 9\gamma^2}{4} = \frac{\gamma^2}{4} \Leftrightarrow \mu_\alpha = \frac{\gamma}{2}$$

16. Έστω τρίγωνο $\text{AB}\Gamma$ με πλευρές $\alpha = \lambda$, $\beta = \frac{2\lambda}{3}$, $\gamma = \frac{\lambda}{2}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

$\alpha.$ Να αποδείξετε ότι η γωνία A είναι αμβλεία.

$\beta.$ Να βρεθεί η προβολή $\text{A}\Delta$ της πλευράς AB στην AG .

$\gamma.$ Να βρεθεί η προβολή EM της διαμέσου AM στη $\text{B}\Gamma$.

δ. Να αποδείξετε ότι ισχύει $ΓΑ \cdot ΓΔ = ΓΕ \cdot ΓΒ$.

Λύση:

α. Έχουμε $\alpha = \lambda$, $\beta = \frac{2\lambda}{3}$ και $\gamma = \frac{\lambda}{2}$, οπότε $\alpha > \beta > \gamma$.

Είναι

$$\beta^2 + \gamma^2 = \left(\frac{2\lambda}{3}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 = \frac{4\lambda^2}{9} + \frac{\lambda^2}{4} = \frac{25\lambda^2}{36} < \lambda^2 = \alpha^2$$

Άρα $\beta^2 + \gamma^2 < \alpha^2 \Leftrightarrow \hat{A} > 90^\circ$

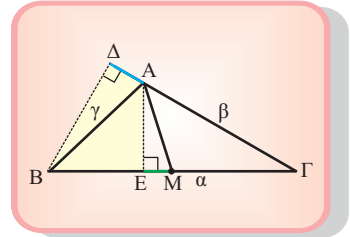
β. Εφαρμόζουμε το θεώρημα αμβλείας γωνίας στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ και έχουμε

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot ΑΔ \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{25\lambda^2}{36} + 2 \frac{2\lambda}{3} ΑΔ \Leftrightarrow \frac{4\lambda}{3} ΑΔ = \frac{11\lambda^2}{36} \Leftrightarrow ΑΔ = \frac{11\lambda}{48}$$

γ. Έχουμε $\beta > \gamma$, εφαρμόζοντας το 2ο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ έχουμε:

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot ΕΜ \Leftrightarrow \frac{4\lambda^2}{9} - \frac{\lambda^2}{4} = 2\lambda \cdot ΕΜ \Leftrightarrow 2\lambda \cdot ΕΜ = \frac{7\lambda^2}{36} \Leftrightarrow ΕΜ = \frac{7\lambda}{72}$$

δ. Είναι $\hat{ΑΔΒ} + \hat{ΑΕΒ} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ άρα το $ΑΔΒΕ$ είναι εγγράψιμο οπότε $ΓΑ \cdot ΓΔ = ΓΕ \cdot ΓΒ$



17. Σημείο A απέχει απόσταση $\frac{R}{2}$ από το κέντρο κύκλου ακτίνας R . Μία χορδή $ΒΓ$ διέρχεται από το A και διαιρείται από το A σε λόγο $\frac{1}{4}$. Να βρεθεί το μήκος της χορδής αυτής.

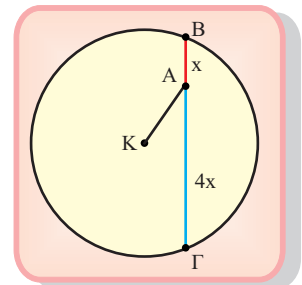
Λύση:

Ισχύει $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{1}{4}$ άρα $ΑΓ = 4ΑΒ$. Αν θέσουμε $ΑΒ = x$ τότε $ΑΓ = 4x$.

$$\text{Ισχύει: } ΑΒ \cdot ΑΓ = R^2 - ΚΑ^2 \Leftrightarrow x \cdot 4x = R^2 - \frac{R^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = \frac{3R^2}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{3R^2}{16} \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Συνεπώς } ΒΓ = 5x = \frac{5R\sqrt{3}}{4}$$



18. Δίνεται κύκλος (O, α) και διάμετρος AB αυτού. Γράφουμε κύκλο (A, AB) . Προεκτείνουμε την AB κατά $B\Gamma = BA$ και φέρουμε εφαπτομένη $\Gamma\Delta$ του (O, α) η οποία τέμνει τον (A, AB) στα E και Z . Αποδείξτε ότι $3\Gamma\Delta^2 = 2\Gamma E \cdot \Gamma Z$.

Λύση:

$$\text{Ισχύει: } \Gamma E \cdot \Gamma Z = \Gamma A^2 - AB^2 \Leftrightarrow$$

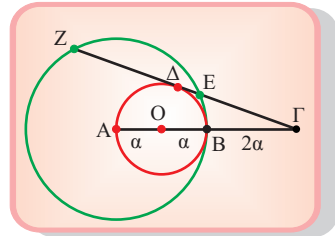
$$\Gamma E \cdot \Gamma Z = (4\alpha)^2 - (2\alpha)^2 = 12\alpha^2$$

$$\text{Συνεπώς } 2\Gamma E \cdot \Gamma Z = 24\alpha^2 \quad (2)$$

$$\text{Επίσης } \Gamma\Delta^2 = \Gamma B \cdot \Gamma A.$$

$$\text{Άρα } \Gamma\Delta^2 = 2\alpha \cdot 4\alpha \Leftrightarrow \Gamma\Delta^2 = 8\alpha^2 \text{ και } 3\Gamma\Delta^2 = 24\alpha^2 \quad (2).$$

$$\text{Από (1), (2) προκύπτει: } 3\Gamma\Delta^2 = 2\Gamma E \cdot \Gamma Z$$



19. Να βρεθεί το x στο διπλανό σχήμα.

Λύση:

Φέρνουμε την ΓB . Το $\Gamma\Delta E B$ είναι εγγράψιμο (γιατί έχει δύο απέναντι γωνίες παραπληρωματικές), άρα ισχύει:

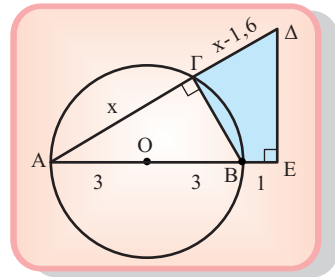
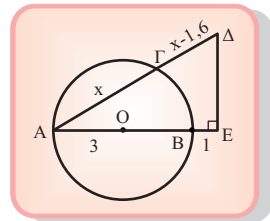
$$A\Gamma \cdot A\Delta = AB \cdot AE \Leftrightarrow x \cdot (2x - 1,6) = 6 \cdot 7 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 1,6x - 42 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 0,8x - 21 = 0$$

$$\Delta = 0,8^2 - 4 \cdot (-21) = 0,64 + 84 = 84,64$$

$$\text{Άρα: } x = \frac{0,8 + \sqrt{84,64}}{2} = \frac{0,8 + 9,2}{2} = 5$$

(Η άλλη λύση απορρίπτεται ως αρνητική)



20. Έστω κύκλος (O, R) και μια χορδή AB . Αν Γ σημείο εσωτερικό της

AB έτσι ώστε $\widehat{O\Gamma A} = 60^\circ$ και $O\Gamma = \frac{2R}{3}$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha. \Gamma A \cdot \Gamma B = \frac{5R^2}{9}$$

$$\beta. AB = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$$

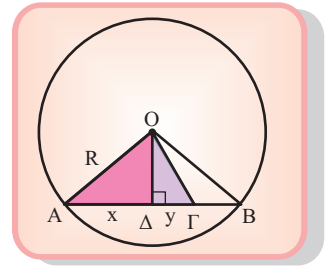
$$\gamma. \Gamma A = \frac{R}{3}(\sqrt{6} + 1), \Gamma B = \frac{R}{3}(\sqrt{6} - 1).$$

Λύση:

Έχουμε $ΟΓ = \frac{2R}{3}$ και $Ο\hat{\Gamma}Α = 60^\circ$.

α. Η δύναμη του σημείου Γ ως προς τον κύκλο με κέντρο O είναι:

$$\begin{aligned} \Gamma A \cdot \Gamma B &= R^2 - ΟΓ^2 = R^2 - \left(\frac{2R}{3}\right)^2 = \\ &= R^2 - \frac{4R^2}{9} = \frac{9R^2 - 4R^2}{9} = \frac{5R^2}{9} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \Gamma A \cdot \Gamma B = \frac{5R^2}{9}. \end{aligned}$$



β. Έστω $ΟΔ \perp ΑΒ$ τότε $ΑΔ = ΔΒ = \frac{ΑΒ}{2} = x$. Το τρί-

γωνο $\Delta\hat{O}\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $Ο\hat{\Gamma}\Delta = 60^\circ$ οπότε $\Delta\hat{O}\Gamma = 30^\circ$. Άρα

$$\Delta\Gamma = \frac{ΟΓ}{2} = \frac{R}{3} \Leftrightarrow \Delta\Gamma = \frac{R}{3} = y, \quad ΟΓ = 2y, \quad ΑΓ = x + y.$$

Στο $\Delta\hat{O}\Gamma A$ εφαρμόζουμε νόμο συνημιτόνων οπότε

$$ΟΑ^2 = ΟΓ^2 + ΑΓ^2 - 2 \cdot ΟΓ \cdot ΑΓ \cdot \text{συν}60^\circ \quad \eta$$

$$R^2 = (2y)^2 + (x + y)^2 - 2 \cdot 2y \cdot (x + y) \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Άρα } ΑΔ = 2x = \frac{2R\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow ΑΔ = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$$

$$\gamma. \Gamma A = x + y = \frac{R\sqrt{6}}{3} + \frac{R}{3} \Leftrightarrow \Gamma A = \frac{R}{3}(\sqrt{6} + 1)$$

$$\Gamma B = x - y = \frac{R\sqrt{6}}{3} - \frac{R}{3} \Leftrightarrow \Gamma B = \frac{R}{3}(\sqrt{6} - 1).$$

21. Αν σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει $\alpha = \gamma\sqrt{3}$, $\beta = \gamma\sqrt{5}$ και ΔB η προβολή της $ΑΒ$ στη $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α. $\hat{B} > 90^\circ$

β. $\Delta B = \frac{\alpha}{6}$

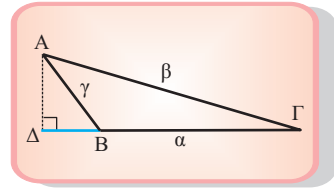
γ. Η ΔA δεν είναι εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου στο $ΑΒΓ$ στο A .

Λύση:

Έχουμε $\alpha = \gamma\sqrt{3}$ και $\beta = \gamma\sqrt{5}$.

α. Είναι $\beta > \alpha > \gamma$ οπότε:

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \gamma^2 &= (\gamma\sqrt{3})^2 + \gamma^2 = 3\gamma^2 + \gamma^2 = 4\gamma^2 < 5\gamma^2 = \\ &= (\gamma\sqrt{5})^2 = \beta^2 \text{ δηλαδή } \alpha^2 + \gamma^2 < \beta^2 \text{ άρα } \hat{B} > 90^\circ\end{aligned}$$



β. Επειδή $\hat{B} > 90^\circ$ από το θεώρημα αμβλείας γωνίας στο $\triangle AB\Gamma$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\beta^2 &= \alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha \cdot \Delta B \Leftrightarrow (\gamma\sqrt{5})^2 = (\gamma\sqrt{3})^2 + \gamma^2 + 2 \cdot \gamma\sqrt{3} \cdot \Delta B \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5\gamma^2 = 3\gamma^2 + \gamma^2 + 2 \cdot \gamma\sqrt{3} \cdot \Delta B \Leftrightarrow \gamma^2 = 2 \cdot \gamma\sqrt{3} \cdot \Delta B \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\Delta B = \frac{\gamma}{2\sqrt{3}} = \frac{\gamma\sqrt{3}}{6} = \frac{\alpha}{6} \Leftrightarrow \Delta B = \frac{\alpha}{6}$$

γ. Αν $\Delta\Delta$ εφαπτομένη περιγεγραμμένου κύκλου περί το $\triangle AB\Gamma$ θα είναι $\Delta\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma$ (1)

$$\text{Έχουμε } \Delta B = \frac{\alpha}{6} = \frac{\gamma\sqrt{3}}{6}, \quad \Delta\Gamma = \Delta B + B\Gamma = \frac{\alpha}{6} + \alpha \Leftrightarrow \Delta\Gamma = \frac{7\alpha}{6} \Leftrightarrow \Delta\Gamma = \frac{7\gamma\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Από το } \triangle A\hat{\Delta}\Gamma \text{ έχουμε } \Delta\Delta^2 = \Delta\Gamma^2 - \Delta\Gamma^2 = \beta^2 - \left(\frac{7\gamma\sqrt{3}}{6}\right)^2 = (\gamma\sqrt{5})^2 - \frac{49 \cdot 3 \cdot \gamma^2}{36},$$

$$\text{άρα } \Delta\Delta^2 = \frac{33\gamma^2}{36} \quad (2)$$

$$\text{Ακόμα } \Delta B \cdot \Delta\Gamma = \frac{\gamma\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{7\gamma\sqrt{3}}{6} \Leftrightarrow \Delta B \cdot \Delta\Gamma = \frac{21\gamma^2}{36} \quad (3)$$

Η (1) λόγω των (2) και (3) δεν ισχύει, άρα η $\Delta\Delta$ δεν είναι εφαπτομένη.

22. Αν $\Delta\Delta$, ΔE , ΔZ οι διάμεσοι ενός τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ για το οποίο ισχύει

$$2\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2, \text{ να αποδείξετε ότι:}$$

$$\text{α. } \mu_\alpha^2 = \frac{3\alpha^2}{4}, \mu_\beta^2 = \frac{3\gamma^2}{4}, \mu_\gamma^2 = \frac{3\beta^2}{4}$$

$$\text{β. } 2\mu_\alpha^2 = \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2$$

γ. Αν K βαρύκεντρο, τότε το τετράπλευρο $\triangle AZKE$ είναι εγγράψιμο

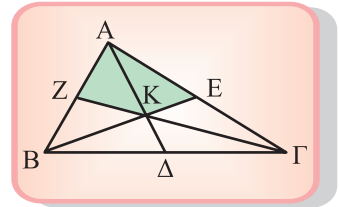
Λύση:

α. Είναι $2\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ (1) οπότε

$$\mu_\alpha^2 = \frac{2(\beta^2 + \gamma^2) - \alpha^2}{4} \stackrel{(1)}{=} \frac{2 \cdot 2\alpha^2 - \alpha^2}{4} \Leftrightarrow \mu_\alpha^2 = \frac{3\alpha^2}{4}$$

$$\mu_\beta^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} \stackrel{(1)}{=} \frac{\beta^2 + \gamma^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} \Leftrightarrow \mu_\beta^2 = \frac{3\gamma^2}{4}$$

$$\mu_\gamma^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4} \stackrel{(1)}{=} \frac{\beta^2 + \gamma^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4} \Leftrightarrow \mu_\gamma^2 = \frac{3\beta^2}{4}$$



β. Είναι $\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \frac{3\gamma^2}{4} + \frac{3\beta^2}{4} = \frac{3}{4}(\gamma^2 + \beta^2) \stackrel{(1)}{=} \frac{3}{4} \cdot 2\alpha^2 = 2\left(\frac{3\alpha^2}{4}\right) = 2\mu_\alpha^2$

γ. Για να είναι το AZKE εγγράψιμο αρκεί:

$$BZ \cdot BA = BK \cdot BE \Leftrightarrow \frac{1}{2}\gamma \cdot \gamma = \frac{2}{3}\mu_\beta \cdot \mu_\beta \Leftrightarrow \frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{2}{3}\mu_\beta^2 \Leftrightarrow \mu_\beta^2 = \frac{3}{4}\gamma^2 \text{ που ισχύει.}$$

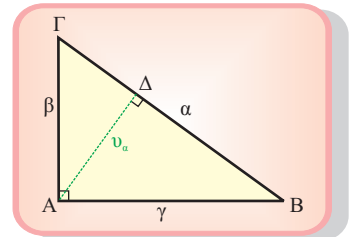
Άρα το AZKE είναι εγγράψιμο.

23. Στο διπλανό σχήμα οι πλευρές του ορθογώνιου τριγώνου ABΓ, είναι τρεις διαδοχικοί άρτιοι αριθμοί. Να υπολογισθούν:

α. Οι πλευρές του τριγώνου

β. Οι προβολές των καθέτων πλευρών πάνω στην υποτείνουσα

γ. Το ύψος v_α

**Λύση:**

α. Έστω $\beta < \gamma < \alpha$ τα μήκη των πλευρών του τριγώνου.

$$\text{Τότε } \begin{cases} \beta = 2\lambda \\ \gamma = 2\lambda + 2, \lambda \in \mathbb{N} \\ \alpha = 2\lambda + 4 \end{cases}$$

Από Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ABΓ έχουμε:

$$\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 \text{ δηλαδή } (2\lambda)^2 + (2\lambda + 2)^2 = (2\lambda + 4)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ ή } \lambda = 3 \stackrel{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} \lambda = 3$$

Άρα $\beta = 6, \gamma = 8, \alpha = 10$

β. Από γνωστή μετρική σχέση στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ έχουμε: $\beta^2 = \alpha \cdot \Gamma\Delta$

$$\text{δηλαδή } \Gamma\Delta = \frac{36}{10}, \quad \gamma^2 = \alpha \cdot \text{B}\Delta \text{ δηλαδή } \text{B}\Delta = \frac{64}{10}$$

γ. Από γνωστή μετρική σχέση στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ έχουμε:

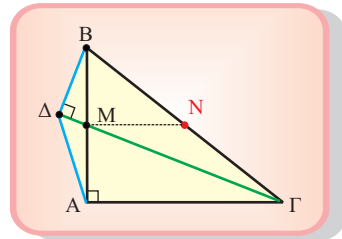
$$v_a^2 = \Delta\Gamma \cdot \Delta\text{B} = \frac{18}{5} \cdot \frac{32}{5} \text{ δηλαδή } v_a = \frac{24}{5}$$

24. Στο διπλανό σχήμα σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο ($\hat{A} = 90^\circ$), το Μ είναι μέσο της AB και $\text{B}\Delta \perp \Gamma\text{M}$.

α. Να δείξετε ότι $\text{AB}^2 = 4 \cdot \Delta\text{M} \cdot \text{M}\Gamma$

β. Αν Ν μέσο του ΒΓ, να δείξετε ότι

$$\text{M}\Delta \cdot \text{M}\Gamma = \frac{\alpha^2}{4} - \text{M}\text{N}^2.$$



Λύση:

α. Είναι $\hat{\Delta} = \hat{A} = 90^\circ$, άρα το τετράπλευρο AΔBΓ είναι εγγράψιμο αφού η πλευρά του ΒΓ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Δ και A υπό ίσες γωνίες.

$$\text{Έτσι } \text{M}\Delta \cdot \text{M}\Gamma = \text{M}\text{A} \cdot \text{M}\text{B} = \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma^2}{4} \text{ δηλαδή } \text{AB}^2 = 4\text{M}\Delta \cdot \text{M}\Gamma$$

β. Στο εγγράψιμο τετράπλευρο AΔBΓ η ΒΓ είναι διάμετρος αφού $\hat{A} = 90^\circ$ και Ν το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου.

$$\text{Άρα } \text{M}\Delta \cdot \text{M}\Gamma = \text{R}^2 - \text{M}\text{N}^2 = \left(\frac{\text{B}\Gamma}{2}\right)^2 - \text{M}\text{N}^2 = \frac{\alpha^2}{4} - \text{M}\text{N}^2$$

25. Δίνεται τρίγωνο με $\text{AB} = 4$, $\text{B}\Gamma = 3$, εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,ρ) και έστω ΒΔ ύψος του και ΒΜ διάμεσός του. Έστω επίσης Ε το σημείο τομής της διαμέσου ΒΜ με τον κύκλο. Αν $\text{M}\Delta = \frac{7}{8}$, να βρεθούν:

α. Η πλευρά ΑΓ

β. Το μήκος ΜΕ

Λύση:

α. Από το 2° θεώρημα των διαμέσων έχουμε: $\text{AB}^2 - \text{B}\Gamma^2 = 2 \cdot \text{A}\Gamma \cdot \text{M}\Delta$

$$\Leftrightarrow \text{A}\Gamma = \frac{\text{AB}^2 - \text{B}\Gamma^2}{2\text{M}\Delta} \text{ δηλαδή } \text{A}\Gamma = 4$$

β. Από μετρική σχέση σε κύκλο έχουμε:

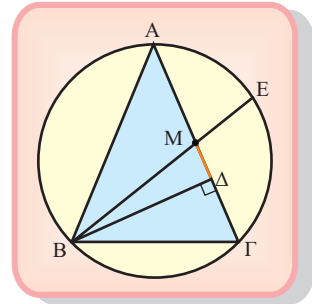
$$BM \cdot ME = MA \cdot M\Gamma \Leftrightarrow ME = \frac{MA \cdot M\Gamma}{BM}$$

$$\text{δηλαδή } ME = \frac{2 \cdot 2}{BM} \Leftrightarrow ME = \frac{4}{BM} \quad (1)$$

$$\text{Ακόμα έχουμε: } BM^2 = \frac{2AB^2 + 2B\Gamma^2 - A\Gamma^2}{4} \text{ δηλαδή}$$

$$BM^2 = \frac{2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 3^2 - 4^2}{4} \Leftrightarrow BM = \frac{\sqrt{34}}{2} \quad (2)$$

$$\text{Από (1) και (2) προκύπτει } ME = \frac{4 \cdot 2}{\sqrt{34}} \Leftrightarrow ME = \frac{8 \cdot \sqrt{34}}{34}$$



26. Δίνονται οι ομόκεντροι κύκλοι (O, ρ_1) και (O, ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$ και οι διάμετροι BZ και ΓE του κύκλου (O, ρ_1) . Αν οι προεκτάσεις των BZ και ΓE προς τα Z και E τέμνουν το μεγάλο κύκλο στα A και Δ αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

$$\alpha. AZ \cdot AB = \Delta E \cdot \Delta \Gamma$$

$$\beta. \Delta_{(O, \rho_2)}^\Gamma + \Delta_{(O, \rho_1)}^A = 0$$

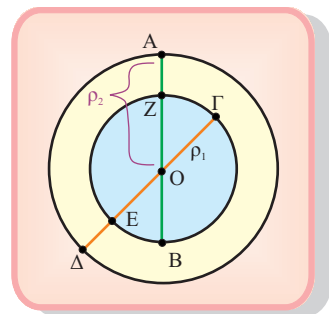
Λύση:

$$\alpha. AZ \cdot AB = AO^2 - \rho_1^2 = \rho_2^2 - \rho_1^2 \quad (1)$$

$$\Delta E \cdot \Delta \Gamma = \Delta O^2 - \rho_1^2 = \rho_2^2 - \rho_1^2 \quad (2)$$

Από (1), (2) προκύπτει $AZ \cdot AB = \Delta E \cdot \Delta \Gamma$

$$\beta. \text{Είναι } \Delta_{(O, \rho_2)}^\Gamma + \Delta_{(O, \rho_1)}^A = \rho_1^2 - \rho_2^2 + \rho_2^2 - \rho_1^2 = 0$$





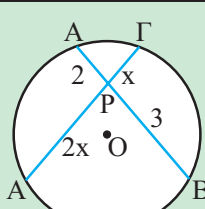
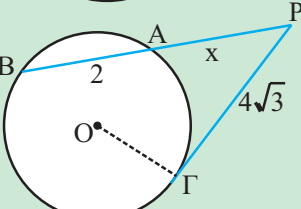
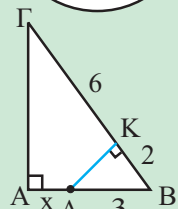
Ελέγχουμε τη γνώση μας

Θέμα 1°

A. α. Να αποδείξετε ότι αν δύο χορδές $AB, \Gamma\Delta$ ή οι προεκτάσεις τους, τέμνονται σε ένα σημείο P , τότε $PA \cdot PB = \Gamma P \cdot \Delta P$.

(Μονάδες 7)

β. Να αντιστοιχίσετε το τμήμα x της Α στήλης στο μήκος του της Β στήλης. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Στήλη Α	Στήλη Β
<p>1. </p>	<p>α. $x = 6$</p>
<p>2. </p>	<p>β. $x = 1$</p> <p>γ. $x = \frac{7}{3}$</p>
<p>3. </p>	<p>δ. $x = 2\sqrt{2}$</p> <p>ε. $x = \sqrt{3}$</p>

α.

β.

γ.

δ.

ε.

(Μονάδες 6)

B. α. Διατυπώστε και αποδείξτε το Πυθαγόρειο θεώρημα

(Μονάδες 6)

β. Αν οι μη παράλληλες πλευρές AD και BC τραπεζίου $ABCD$ είναι κάθετες, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων του είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των βάσεων του.

(Μονάδες 6)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Θέμα 2^ο

A. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος).
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

α. Αν σε τρίγωνο ABC με πλευρές a, b, c ισχύει $a^2 < b^2 + c^2$, τότε το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.

(Μονάδες 2)

β. Αν σε τρίγωνο ABC το τετράγωνο κάθε μίας πλευράς του είναι μικρότερο από το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, τότε το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.

(Μονάδες 2)

γ. Η δύναμη σημείου P ως προς τον κύκλο (O,R) είναι πάντοτε θετικός αριθμός.

(Μονάδες 2)

δ. Ο νόμος συνημιτόνων σε τρίγωνο ABC εκφράζεται από τον τύπο:
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

(Μονάδες 2)

.....

.....

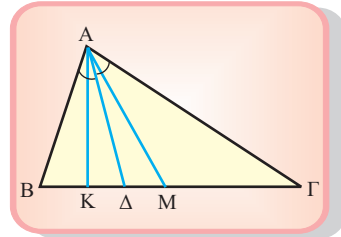
.....

.....

.....



Β. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AG > AB$ και AM διάμεσος, $A\Delta$ διχοτόμος και AK ύψος. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες, δικαιολογώντας την απάντησή σας.



α. $AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2BM \dots\dots\dots$

(Μονάδες 2)

β. $KM^2 = \dots\dots - AK^2$

(Μονάδες 2)

γ. $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

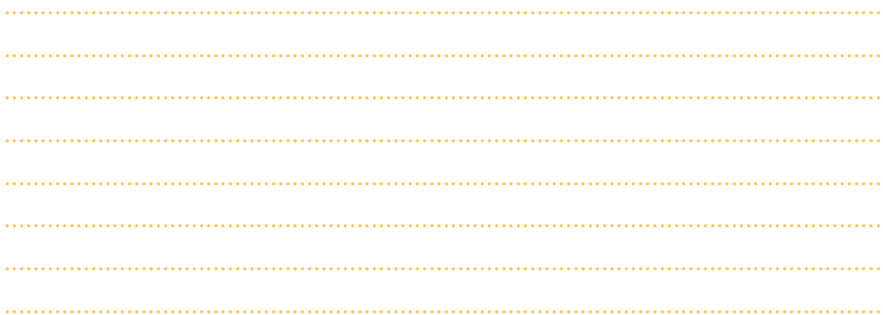
(Μονάδες 2)

δ. $AG^2 + AB^2 = 2 \cdot \dots\dots + \frac{B\Gamma^2}{\dots\dots}$

(Μονάδες 2)

ε. $AG^2 - AB^2 = 2B\Gamma \cdot \dots\dots\dots$

(Μονάδες 2)



Γ. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση και να την δικαιολογήσετε.

α. Αν $\alpha = 9$, $\beta = 3$, $\gamma = 7$ είναι τα μήκη πλευρών τριγώνου $AB\Gamma$, η προβολή της πλευράς β πάνω στην πλευρά γ είναι:

1) $\frac{5}{3}$ 2) $\frac{7}{9}$ 3) $\frac{8}{5}$ 4) $\frac{23}{14}$ 5) $\frac{27}{12}$

(Μονάδες 3)

Κεφάλαιο 10°

Εμβαδά

Ο μαθητής που έχει μελετήσει την ενότητα των εμβαδών θα πρέπει να είναι σε θέση:

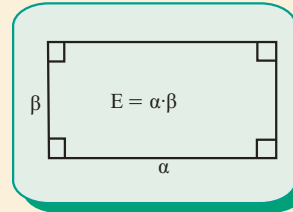
- ✓ Να γνωρίζει τους τύπους των εμβαδών του τετραγώνου, του ορθογωνίου, του παραλληλογράμμου, του ρόμβου, του τραπέζιου, καθώς και τους τύπους για το εμβαδόν του τριγώνου.
- ✓ Να υπολογίζει τα εμβαδά διαφόρων σχημάτων που έχουν κάποιο κοινό τμήμα, ή προκύπτουν από προσθέσεις ή αφαιρέσεις σχημάτων.
- ✓ Να υπολογίζει πλευρές, ύψη στηριζόμενος στους τύπους των εμβαδών.
- ✓ Να υπολογίζει εμβαδά δια μέσου του λόγου των εμβαδών δύο τριγώνων ή πολυγώνων.

ΕΜΒΑΔΑ: Τύποι - Βασικές έννοιες

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

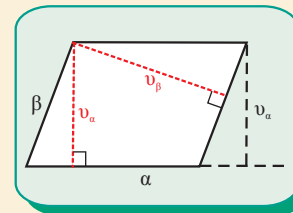
Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του, δηλαδή:

$$E = \alpha \cdot \beta$$

**Παραλληλόγραμμο**

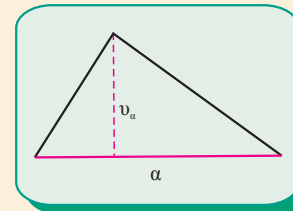
Το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μίας πλευράς του επί το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά αυτή, δηλαδή:

$$E = \alpha \cdot \upsilon_{\alpha} = \beta \cdot \upsilon_{\beta}$$

**Τρίγωνο**

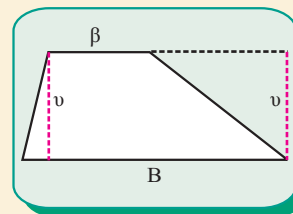
Το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς του επί το αντίστοιχο ύψος, δηλαδή:

$$E = \frac{1}{2} \alpha \cdot \upsilon_{\alpha} = \frac{1}{2} \beta \cdot \upsilon_{\beta} = \frac{1}{2} \gamma \cdot \upsilon_{\gamma}$$

**Τραπεζίο**

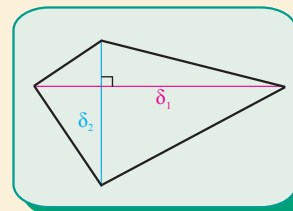
Το εμβαδόν ενός τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημισυμφορισματος των βάσεων του επί το ύψος του, δηλαδή:

$$E = \frac{\beta + B}{2} \cdot \upsilon$$

**Τετράπλευρο με κάθετες διαγωνίους**

Το εμβαδόν ενός τετραπλεύρου με κάθετες διαγωνίες ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του, δηλαδή:

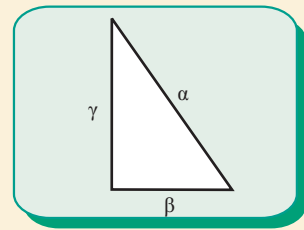
$$E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$$



Ορθογώνιο τρίγωνο

Το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το ημιγινόμενο των κάθετων πλευρών του, δηλαδή

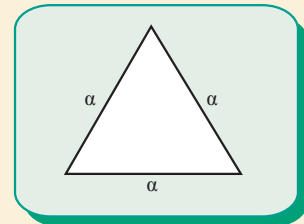
$$E = \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma$$



Ισόπλευρο τρίγωνο

Το εμβαδόν ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς a δίνεται από τη σχέση :

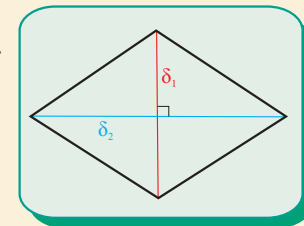
$$E = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$



Ρόμβος

Το εμβαδόν ενός ρόμβου ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του, δηλαδή :

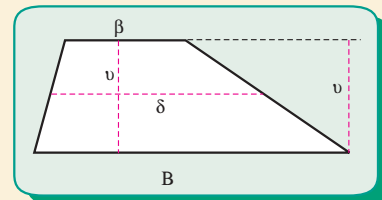
$$E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$$



Τραπεζίο

Το εμβαδόν ενός τραπέζιου ισούται με το γινόμενο της διαμέσου επί το ύψος του, δηλαδή είναι:

$$E = \delta \cdot \upsilon$$



Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

Με τη βοήθεια του βασικού τύπου για το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ, με μήκη πλευρών a, β, γ , προκύπτουν οι επόμενοι τύποι:

1. $E = \sqrt{\tau(\tau - a)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$ (Τύπος του Ήρωνα)

Με τον τύπο του Ήρωνα μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν τριγώνου όταν γνωρίζουμε τις τρεις πλευρές του.

2. Ο τύπος $E = \frac{a\beta\gamma}{4R}$ συνδέει το εμβαδόν E του τριγώνου με την ακτίνα του

περιγεγραμμένου κύκλου. Συνήθως χρησιμοποιείται για να υπολογίσουμε την ακτίνα, δεδομένου ότι γνωρίζουμε το εμβαδόν. Το ίδιο ισχύει και με τον τύπο $E = \tau \cdot \rho$, όπου ρ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου.

3. Ο τύπος $E = \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2} \gamma \cdot \alpha \cdot \eta\mu B = \frac{1}{2} \alpha \cdot \beta \cdot \eta\mu \Gamma$ μας δίνει το εμβαδόν, όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές του τριγώνου και την περιεχόμενη σε αυτές γωνία.

4. Με συνδυασμό των τύπων $E = \frac{1}{2} \beta \gamma \eta\mu A$ και $E = \frac{\alpha \beta \gamma}{4R}$ προκύπτει ο νόμος

των ημιτόνων: $\frac{\alpha}{\eta\mu \alpha} = \frac{\beta}{\eta\mu \beta} = \frac{\gamma}{\eta\mu \gamma} = 2R$, (όπου R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου), ο οποίος είναι χρήσιμος για την επίλυση ενός τριγώνου.



Θεώρημα 1 Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του. Δηλαδή αν a, β οι πλευρές και E το εμβαδόν είναι: $E = a \cdot \beta$

Απόδειξη

Έστω ένα ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$, με $ΑΒ = a$ και $ΑΔ = \beta$. Προεκτείνουμε την πλευρά $ΑΔ$ κατά τμήμα $ΔΕ = a$, την $ΑΒ$ κατά $ΒΙ = \beta$ και σχηματίζουμε το τετράγωνο $ΑΙΗΕ$, το οποίο είναι φανερό ότι έχει πλευρά $a + \beta$ και επομένως είναι: $(ΑΙΗΕ) = (a + \beta)^2$ (1).

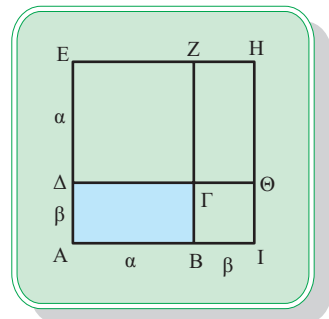
Προεκτείνοντας τις $ΔΓ$ και $ΒΓ$ σχηματίζονται τα τετράγωνα $ΔΓΖΕ$, $ΒΙΘΓ$ με πλευρές a, β αντίστοιχα και το ορθογώνιο $ΓΘΗΖ$ που είναι ίσο με το $ΑΒΓΔ$. Έτσι έχουμε:

$$(ΔΓΖΕ) = a^2, (ΒΙΘΓ) = \beta^2 \text{ και } (ΓΘΗΖ) = (ΑΒΓΔ) \quad (2)$$

Είναι φανερό όμως ότι $(ΑΙΗΕ) = (ΑΒΓΔ) + (ΓΘΗΖ) + (ΒΙΘΓ) + (ΔΓΖΕ)$, από την οποία με τη βοήθεια των (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$(a + \beta)^2 = 2(ΑΒΓΔ) + a^2 + \beta^2.$$

Από αυτή μετά τις πράξεις καταλήγουμε στη σχέση $(ΑΒΓΔ) = a \cdot \beta$.



Θεώρημα 2 Το εμβαδόν E ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς του επί το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή. Δηλαδή $E = a \cdot v_a = \beta \cdot v_\beta$, όπου a, β οι πλευρές και v_a, v_β τα αντίστοιχα ύψη.

Απόδειξη

Έστω το παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ στο οποίο φέρουμε το ύψος AZ που αντιστοιχεί στη $ΒΓ$. Θα αποδείξουμε ότι $(ΑΒΓΔ) = ΒΓ \cdot ΑΖ$.

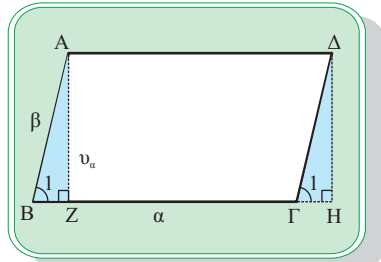
Από το Δ φέρουμε $\Delta Η$ κάθετη στην προέκταση της $ΒΓ$. Τα τρίγωνα ZBA και $ΗΓΔ$

είναι ίσα ($\hat{Z} = \hat{H} = 90^\circ$, $AB = \Delta\Gamma$ και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$),
 οπότε: $(ZBA) = (H\Gamma\Delta)$ (1).

Από το σχήμα όμως έχουμε ότι:

$$(AB\Gamma\Delta) = (ABZ) + (AZ\Gamma\Delta),$$

οπότε σύμφωνα με την (1) προκύπτει ότι: $(AB\Gamma\Delta) = (AZ\Gamma\Delta) + (\Delta\Gamma H) = (AZH\Delta) = A\Delta \cdot ZA = B\Gamma \cdot ZA$,
 που είναι το ζητούμενο.



Θεώρημα 3 Το εμβαδόν E ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος. Δηλαδή:

$$E = \frac{1}{2} \alpha \cdot v_a = \frac{1}{2} \beta \cdot v_\beta = \frac{1}{2} \gamma \cdot v_\gamma$$

Απόδειξη

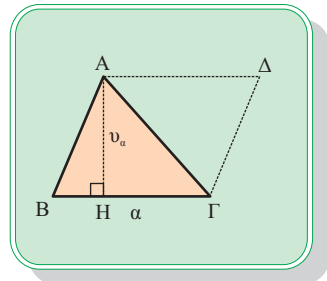
Με πλευρές AB και $B\Gamma$ σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, το εμβαδόν του οποίου είναι $(AB\Gamma\Delta) = \alpha \cdot v_a$ (1).

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta A\Gamma$ είναι ίσα, οπότε:

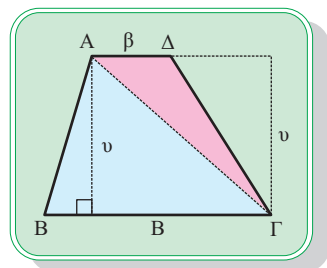
$$(AB\Gamma) = (A\Delta\Gamma) \quad (2).$$

Από το σχήμα έχουμε ότι $(AB\Gamma\Delta) = (AB\Gamma) + (A\Gamma\Delta)$ η οποία, σύμφωνα με τις (1) και (2), μετατρέπεται στην

$$\alpha \cdot v_a = 2(AB\Gamma) \quad \text{ή} \quad (AB\Gamma) = \frac{1}{2} \alpha \cdot v_a.$$



Θεώρημα 4 Το εμβαδόν τραπέζιου ισούται με το γινόμενο του ημισθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του. Δηλαδή: $E = \frac{(B + \beta)}{2} \cdot v$,
 όπου B, β οι βάσεις του τραπέζιου και v το ύψος του.



Απόδειξη

Θεωρούμε το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($B\Gamma \parallel A\Delta$), με βάσεις $B\Gamma = B$, $A\Delta = \beta$ και ύψος v . Φέρουμε τη διαγώνιο $A\Gamma$. Τότε έχουμε $E = (AB\Gamma\Delta) = (AB\Gamma) + (A\Gamma\Delta)$ (1).

Αλλά τα δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Gamma\Delta$ έχουν το ίδιο ύψος v και βάσεις B, β αντίστοιχα

και επομένως: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}B \cdot \upsilon$ και $(A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon$ (2).

Με αντικατάσταση των σχέσεων (2) στην (1) προκύπτει ότι $E = \frac{(B+\beta)}{2} \cdot \upsilon$, δηλαδή το ζητούμενο.

Πόρισμα Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο της διαμέσου επί το ύψος του.

Απόδειξη

Ως γνωστόν για τη διάμεσο μ του τραπεζίου ισχύει $\mu = \frac{\beta+B}{2}$. Οπότε ο τύπος του

εμβαδού γίνεται $E = \frac{\beta+B}{2} \cdot \upsilon = \mu \cdot \upsilon$.

Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου.

Με τη βοήθεια του βασικού τύπου για το εμβαδόν ενός τριγώνου $AB\Gamma$, με μήκη πλευρών a, β, γ προκύπτουν και οι επόμενοι τύποι:

i. $E = \sqrt{\tau(\tau-a)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ (τύπος του Ήρωνα), όπου τ ημπερίμετρος του τριγώνου.

ii. $E = \tau \cdot \rho$, όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

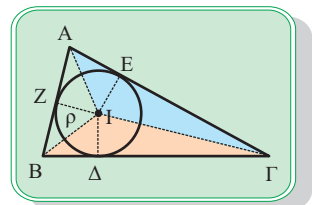
iii. $E = \frac{a\beta\gamma}{4R}$ όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

Απόδειξη

i. Ως γνωστόν $\upsilon_a = \frac{2}{a} \sqrt{\tau(\tau-a)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$, οπότε έχουμε:

$$E = \frac{1}{2}a \cdot \upsilon_a = \frac{1}{2}a \cdot \frac{2}{a} \sqrt{\tau(\tau-a)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} = \sqrt{\tau(\tau-a)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

ii. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και ο εγγεγραμμένος κύκλος του (I, ρ) . Φέρουμε τα τμήματα IA, IB και $I\Gamma$ και έτσι το τρίγωνο χωρίζεται στα τρίγωνα $IB\Gamma, I\Gamma A$ και IAB που έχουν το ίδιο ύψος ρ και δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, οπότε έχουμε:



$$E = (AB\Gamma) = (IB\Gamma) + (I\Gamma A) + (IAB) = \frac{1}{2}\alpha\rho + \frac{1}{2}\beta\rho + \frac{1}{2}\gamma\rho = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)\rho = \frac{1}{2}2\rho = \rho.$$

iii. χωρίς απόδειξη

Θεώρημα

Το εμβαδόν E ενός τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται από τον (τριγωνομετρικό) τύπο:

$$E = \frac{1}{2}\beta\gamma \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2}\gamma\alpha \cdot \eta\mu B = \frac{1}{2}\alpha\beta \cdot \eta\mu\Gamma$$

Απόδειξη:

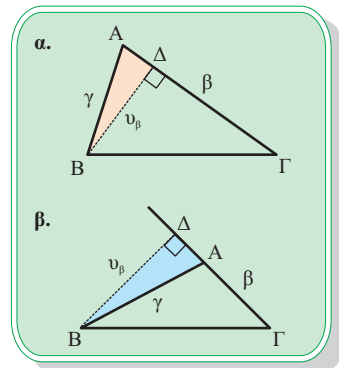
Όταν $\hat{A} < 1^\perp$, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔBA προκύπτει ότι $v_\beta = \gamma \cdot \eta\mu A$.

Αν $\hat{A} > 1^\perp$, πάλι από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔBA προκύπτει ότι: $v_\beta = \gamma \cdot \eta\mu A_{εξ} = \gamma \cdot \eta\mu(180^\circ - A) = \gamma \cdot \eta\mu A$.

Έτσι και στις δύο περιπτώσεις έχουμε $v_\beta = \gamma \cdot \eta\mu A$

$$\text{οπότε } E = \frac{1}{2}\beta \cdot v_\beta = \frac{1}{2}\beta\gamma \cdot \eta\mu A.$$

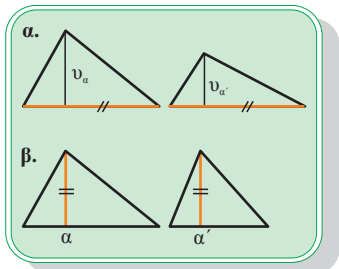
Όταν $\hat{A} = 1^\perp$, τότε $v_\beta = \gamma$, και $\eta\mu A = 1$ επομένως πάλι ο τύπος ισχύει. Όμοια αποδεικνύονται και οι υπόλοιποι τύποι.



Λόγος εμβαδών όμοιων τριγώνων - πολυγώνων.

Θεώρημα

Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών, ενώ αν έχουν ίσα ύψη, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων.



Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ με εμβαδά E και E' αντίστοιχα. Τότε

είναι $E = \frac{1}{2}\alpha v_\alpha$ και $E' = \frac{1}{2}\alpha' v_{\alpha'}$, οπότε $\frac{E}{E'} = \frac{\alpha \cdot v_\alpha}{\alpha' v_{\alpha'}}$. Από την ισότητα αυτή προκύπτει άμεσα ότι:

• Αν $\alpha = \alpha'$, τότε: $\frac{E}{E'} = \frac{v_\alpha}{v_{\alpha'}}$ (σχ. α)

• Αν $v_\alpha = v_{\alpha'}$, τότε: $\frac{E}{E'} = \frac{\alpha}{\alpha'}$ (σχ. β)

Θεώρημα 1 Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

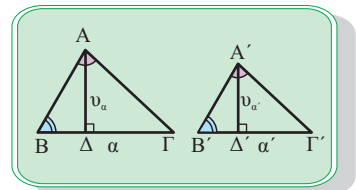
Απόδειξη

Εστω δύο όμοια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ με $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$.

Τότε $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{v_\alpha}{v_{\alpha'}} = \lambda$ (1), όπου λ ο λόγος ομοιότητας.

Αλλά, όπως και παραπάνω, είναι $\frac{E}{E'} = \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{v_\alpha}{v_{\alpha'}}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\frac{E}{E'} = \lambda^2$.



Θεώρημα 2 Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

Χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 3 Αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

Απόδειξη

Θεωρούμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ με:

$$\hat{A} = \hat{A}' \text{ (σχ. α,β) } \quad \text{ή}$$

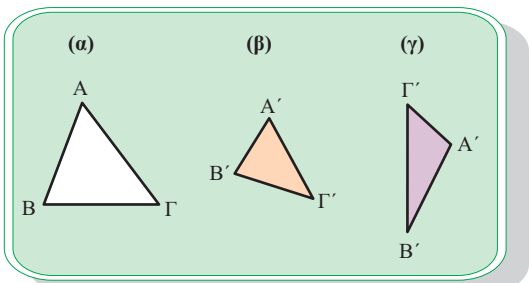
$$\hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ \text{ (σχ. α,γ).}$$

Και στις δύο περιπτώσεις θα ισχύει $\eta_{MA} = \eta_{MA'}$, οπότε από τις ισότη-

τες $E = \frac{1}{2}\beta\gamma \cdot \eta_{MA}$ και $E' = \frac{1}{2}\beta'\gamma' \cdot \eta_{MA'}$ με διαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι

$$\frac{E}{E'} = \frac{\beta \cdot \gamma}{\beta' \cdot \gamma'}$$

που είναι το ζητούμενο.



**A. Από το σχολικό βιβλίο****ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.**

- σ. 217: Αποδεικτικές Ασκήσεις: 1, 2, 3, 4, 5, 7
Σύνθετα θέματα: 2, 4
- σ. 221: Αποδεικτικές Ασκήσεις: 1, 2
Σύνθετα θέματα: 1
- σ. 224: Ερωτήσεις Κατανόησης: 2, 3
Ασκήσεις Εμπέδωσης: 4, 5
Αποδεικτικές Ασκήσεις: 1, 2, 3, 4
Σύνθετα θέματα: 2, 3
- σ. 227: Γενικές ασκήσεις: 1, 4, 5



**Λύνουμε
περισσότερες
ασκήσεις**

- 1.** Η διάμεσος AM τριγώνου $AB\Gamma$ είναι κάθετη στην AB . Αν $\hat{B} = 45^\circ$, να δείξετε ότι $(AB\Gamma) = AM^2$.

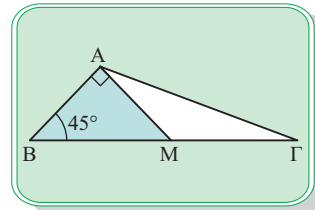
Λύση:

Το τρίγωνο ABM είναι ισοσκελές επειδή

$\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 45^\circ$, άρα $AM = AB$ (1).

Το τρίγωνο ABM είναι ορθογώνιο επομένως:

$$(ABM) = \frac{1}{2} AB \cdot AM = \frac{1}{2} AM^2 \quad (2)$$



Η AM είναι διάμεσος στο $AB\Gamma$, άρα $(ABM) = (A\Gamma M)$, οπότε:

$$(AB\Gamma) = 2(ABM) = 2 \cdot \frac{1}{2} AM^2 = AM^2$$

- 2.** Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις $AB = \alpha$, $\Gamma\Delta = \beta$ ($AB > \Gamma\Delta$) και ύψος $υ$. Έστω E, Z τα μέσα των $A\Delta$, $B\Gamma$ και Θ, H τα σημεία στα οποία η EZ τέμνει τις $A\Gamma$ και ΔB . Να αποδείξετε ότι:

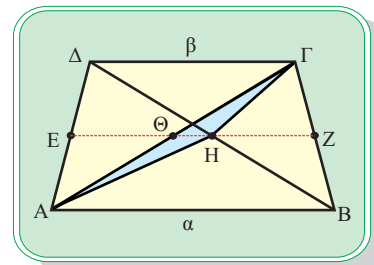
i. $(A\eta\Gamma) = \frac{\alpha - \beta}{4} \cdot υ$

ii. $(ABZE) - (EZ\Gamma\Delta) = (A\eta\Gamma)$

Λύση:

- i. Το τμήμα που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων τραπέζιου ισούται με την ημιδιαφορά των

βάσεων, επομένως $\Theta H = \frac{\alpha - \beta}{2}$



$$(A\eta\Gamma) = (A\Theta H) + (\Theta H\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \frac{υ}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \frac{υ}{2} = \frac{\alpha - \beta}{4} \cdot υ$$

$$\text{ii. } (ABZE) - (EZ\Gamma\Delta) = \frac{AB + EZ}{2} \cdot \frac{v}{2} - \frac{EZ + \Gamma\Delta}{2} \cdot \frac{v}{2}$$

$$= \frac{v}{2}(AB + EZ - EZ - \Gamma\Delta) = \frac{v}{4}(\alpha - \beta) = \frac{\alpha - \beta}{4} \cdot v = (AH\Gamma) \text{ από i. ερώτημα.}$$

3. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του AD . Να

$$\text{δείξετε ότι: } \frac{(A\Delta B)^2}{AB^2} + \frac{(A\Delta\Gamma)^2}{A\Gamma^2} = \frac{A\Delta^2}{4}$$

Λύση:

$$\text{Είναι } (A\Delta B) = \frac{1}{2}A\Delta \cdot \Delta B \text{ και } (A\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}A\Delta \cdot \Delta\Gamma$$

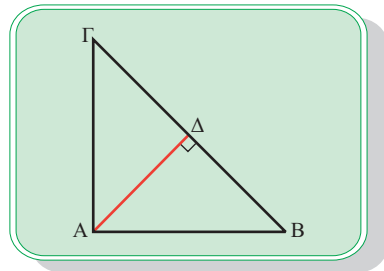
Άρα:

$$\frac{(A\Delta B)^2}{AB^2} + \frac{(A\Delta\Gamma)^2}{A\Gamma^2} = \frac{\frac{1}{4}A\Delta^2 \Delta B^2}{AB^2} + \frac{\frac{1}{4}A\Delta^2 \Delta\Gamma^2}{A\Gamma^2} \quad (1)$$

Από γνωστή μετρική σχέση στα ορθογώνια

τρίγωνα έχουμε $AB^2 = B\Gamma \cdot \Delta B$ και $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Delta\Gamma$ οπότε η (1) γίνεται:

$$\frac{(A\Delta B)^2}{AB^2} + \frac{(A\Delta\Gamma)^2}{A\Gamma^2} = \frac{A\Delta^2 \cdot \Delta B}{4B\Gamma} + \frac{A\Delta^2 \cdot \Delta\Gamma}{4B\Gamma} = \frac{A\Delta^2 (\Delta B + \Delta\Gamma)}{4B\Gamma} = \frac{A\Delta^2}{4}$$



4. Οι διαγώνιες τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) τέμνονται στο E . Από το E φέρνουμε παράλληλη προς την AB που τέμνει την $A\Delta$ στο K . Να δείξετε ότι $(\Gamma KB) = 2(\Delta EA)$.

Λύση:

Έχουμε ότι $(\Delta AB) = (\Gamma AB)$ (κοινή βάση AB και ίσα ύψη).

Αφαιρώντας το EAB από τα δύο μέλη, έχουμε:

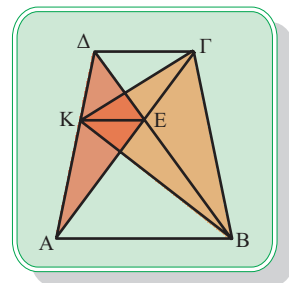
$$(\Delta AB) - (EAB) = (\Gamma AB) - (EAB) \Leftrightarrow (\Delta EA) = (\Gamma EB) \quad (1)$$

Ακόμα έχουμε $(\Gamma KE) = (\Delta KE)$ (2), (κοινή βάση KE και

ίσα ύψη αφού $KE \parallel \Delta\Gamma$) και $(BKE) = (AKE)$ (3), (κοινή βάση KE και ίσα ύψη αφού $KE \parallel AB$).

$$\text{Επομένως: } (\Gamma KB) = (\Gamma EB) + (\Gamma KE) + (BKE) \stackrel{(1),(2),(3)}{=}$$

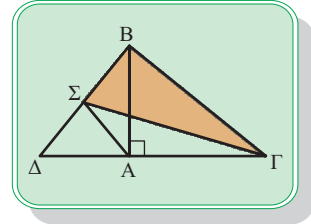
$$(\Delta EA) + (\Delta KE) + (AKE) = (\Delta EA) + (\Delta EA) = 2(\Delta EA).$$



5. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Εκτός του $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε το ισοσκελές τρίγωνο ΣAB ($\Sigma A = \Sigma B$). Να δείξετε ότι: $(\Sigma B\Gamma) = (\Sigma AB) + (\Sigma A\Gamma)$.

Λύση:

Προσπαθούμε να μετασχηματίσουμε το άθροισμα $(\Sigma AB) + (\Sigma A\Gamma)$ σε “ενιαίο” εμβαδό. Επειδή τα τρίγωνα ΣAB και $\Sigma A\Gamma$ έχουν κοινή πλευρά τη ΣA , μετασχηματίζουμε το ισοσκελές τρίγωνο ΣAB σε ισοδύναμο, κατά τρόπο που τα τρίγωνα $\Sigma A\Gamma$ και το ισοδύναμο του ΣAB να σχηματίσουν ένα ενιαίο εμβαδό.



Προεκτείνουμε την πλευρά ΣB κατά τμήμα $\Sigma \Delta$ ίσο με

$B\Sigma$. Το τρίγωνο $BA\Delta$ είναι ορθογώνιο αφού $A\Sigma = \Sigma B = \Sigma \Delta = \frac{BA}{2}$. Επομένως τα Δ ,

A , Γ βρίσκονται σε ευθεία και $(\Sigma AB) = (\Sigma \Delta A)$ (1) (γιατί $A\Sigma$ διάμεσος του ΔAB).

Έτσι έχουμε: $(\Sigma AB) + (\Sigma A\Gamma) = (\Sigma \Delta A) + (\Sigma A\Gamma) = (\Sigma \Delta \Gamma)$. Όμως $(\Sigma \Delta \Gamma) = (\Sigma B\Gamma)$ γιατί στο τρίγωνο $B\Gamma \Delta$ η $\Gamma \Sigma$ είναι διάμεσος. Επομένως $(\Sigma AB) + (\Sigma A\Gamma) = (\Sigma B\Gamma)$.

6. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma \Delta$. Η διάμεσος MN τέμνει τις διαγωνίους $A\Gamma$ και $B\Delta$ στα K, Λ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι: $(\Lambda \Gamma A) = (ABNM) - (MN\Gamma \Delta)$.

Λύση:

Προσπαθούμε να εμφανίσουμε τη διαφορά $(ABNM) - (MN\Gamma \Delta)$ ως ενιαίο εμβαδόν. Αρκεί στο εσωτερικό του τραpezίου $ABNM$ να βρούμε εμβαδόν ισοδύναμο με το εμβαδόν του τραpezίου $MN\Gamma \Delta$ ώστε να γίνει δυνατή η αφαίρεση.

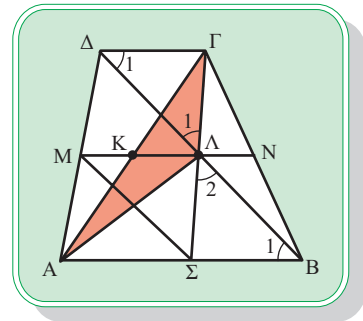
Προεκτείνουμε τη $\Gamma \Lambda$ και έστω ότι τέμνει την AB στο Σ . Τα τρίγωνα $\Lambda \Delta \Gamma$ και $\Lambda \Sigma B$ είναι ίσα διότι έχουν $\Delta \Lambda = \Lambda B$ (η διάμεσος του τραpezίου περνάει από τα μέσα των διαγωνίων) και τις προσκείμενες $\hat{\Lambda}_1 = \hat{\Lambda}_2$ ως κατακορυφήν και $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$ ως εντός εναλλάξ.

Συνεπώς: $\Sigma B = \Delta \Gamma$ (1) και $\Lambda \Sigma = \Lambda \Gamma$ (2)

Επειδή $\Sigma B = \Delta \Gamma$ είναι $(MN\Gamma \Delta) = (MN\beta \Sigma)$ (3), γιατί είναι τραpezία που έχουν ίσες βάσεις και ίσα ύψη (η διάμεσος MN ισαπέχει από τις AB και $\Gamma \Delta$).

Επειδή $\Lambda \Sigma = \Lambda \Gamma$ είναι: $(A\Sigma \Lambda) = (\Lambda \Gamma A)$ (4) και $(AM\Sigma) = (A\Sigma \Lambda)$ (5), διότι έχουν κοινή βάση $A\Sigma$ και ίσα ύψη.

Επομένως: $ABNM - MN\Gamma \Delta \stackrel{(3)}{=} ABNM - MN\beta \Sigma = A\Sigma M \stackrel{(5)}{=} A\Sigma \Lambda \stackrel{(4)}{=} \Lambda \Gamma A$



7. Να δείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει: $\frac{R}{\rho} = \frac{2\tau^2}{v_\alpha \cdot v_\beta + v_\beta \cdot v_\gamma + v_\gamma \cdot v_\alpha}$, όπου

R, ρ οι ακτίνες του περιγεγραμμένου και εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου και τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

Λύση:

Σε κάθε τρίγωνο ισχύουν οι τύποι: $v_\alpha = \frac{2E}{a}$ (1), $E = \rho\tau$ (2), $4RE = \alpha\beta\gamma$ (3)

$$\begin{aligned} \text{B' μέλος} &= \frac{2\tau^2}{v_\alpha \cdot v_\beta + v_\beta \cdot v_\gamma + v_\gamma \cdot v_\alpha} \stackrel{(1)}{=} \frac{2\tau^2}{\frac{2E}{a} \cdot \frac{2E}{\beta} + \frac{2E}{\beta} \cdot \frac{2E}{\gamma} + \frac{2E}{\gamma} \cdot \frac{2E}{\alpha}} \\ &= \frac{2\tau^2}{4E^2 \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} \right)} \stackrel{(2)}{=} \frac{\tau^2}{2(\rho\tau)^2 \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} \right)} = \frac{\tau^2}{2\rho^2\tau^2 \frac{2\tau}{\alpha\beta\gamma}} = \frac{\alpha\beta\gamma}{4\rho^2\tau} = \frac{4RE}{4\rho^2\tau} = \frac{RE}{\rho E} = \frac{R}{\rho}. \end{aligned}$$

8. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $(\hat{A} = 60^\circ)$. Με διάμετρο τη $B\Gamma$ γράφουμε κύκλο που τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα Δ, E αντίστοιχα. Να δείξετε ότι

$$(\Delta\Delta E) = \frac{1}{4}(\Delta B\Gamma).$$

Λύση:

Η $B\Gamma$ είναι διάμετρος $\Leftrightarrow \widehat{B\Gamma E} = \widehat{B\Gamma \Delta} = 90^\circ$.

Το τρίγωνο AEB είναι ορθογώνιο και επειδή:

$$\hat{A} = 60^\circ \Leftrightarrow \hat{B}_1 = 30^\circ \Leftrightarrow AE = \frac{AB}{2} \quad (1)$$

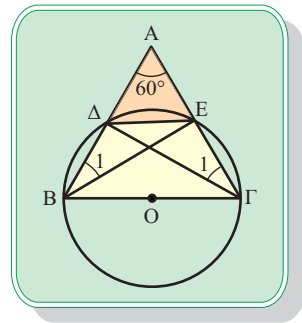
(απέναντι από γωνία 30° σε ορθογώνιο τρίγωνο, βρίσκεται πλευρά ίση με το μισό της υποτείνουσας).

Για τους ίδιους λόγους στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι:

$$\hat{\Gamma}_1 = 30^\circ \Leftrightarrow A\Delta = \frac{A\Gamma}{2} \quad (2).$$

Τα τρίγωνα $\Delta\Delta E$ και $\Delta B\Gamma$ έχουν τη γωνία \hat{A} κοινή, οπότε από το θεώρημα του λόγου των εμβαδών για τρίγωνα με μία γωνία ίση, έχουμε:

$$\frac{(\Delta\Delta E)}{(\Delta B\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AE}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} \cdot \frac{AE}{AB} \stackrel{(1),(2)}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \text{ άρα } (\Delta\Delta E) = \frac{1}{4}(\Delta B\Gamma).$$



9. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Έστω M το μέσο της $B\Gamma$, N το μέσο της $A\Gamma$, Λ το μέσο της AM και Θ το μέσο της AN . Να δείξετε ότι $(AB\Gamma) = 16(\Lambda\Theta N)$.

Λύση:

Η MN είναι παράλληλη με την AB γιατί ενώνει τα μέσα των πλευρών $A\Gamma$ και $B\Gamma$.

Η $\Lambda\Theta$ είναι παράλληλη με τη MN γιατί ενώνει τα μέσα των AM και AN . Επομένως η $\Lambda\Theta \parallel AB$. Άρα $\hat{A} = \hat{\Theta}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

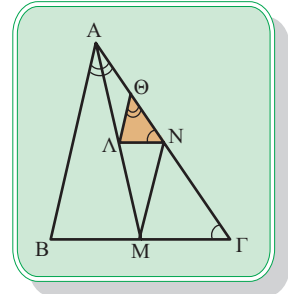
Επίσης η ΛN είναι παράλληλη με τη $M\Gamma$ γιατί ενώνει τα μέσα των AM , $A\Gamma$, άρα:

$$\hat{\Gamma} = \hat{N} \text{ και } \Lambda N = \frac{1}{2} M\Gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} B\Gamma = \frac{1}{4} B\Gamma \Leftrightarrow \frac{\Lambda N}{B\Gamma} = \frac{1}{4}$$

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Lambda\Theta N$ είναι όμοια γιατί έχουν $\hat{A} = \hat{\Theta}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{N}$.

Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων είναι: $\lambda = \frac{\Lambda N}{B\Gamma} = \frac{1}{4}$.

$$\text{Άρα: } \frac{(\Lambda\Theta N)}{(AB\Gamma)} = \lambda^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow (AB\Gamma) = 16(\Lambda\Theta N)$$



10. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, η διάμεσος BN και σημείο Δ στην AB τέτοιο ώστε

$$B\Delta = \frac{1}{3} AB. \text{ Αν η } BN \text{ τέμνει τη } \Gamma\Delta \text{ στο } \Sigma, \text{ να δείξετε ότι } (B\Sigma\Delta) = \frac{1}{12} (AB\Gamma)$$

Λύση:

$$\text{Από το σημείο } N \text{ φέρουμε: } N\Lambda \parallel \Delta\Gamma \stackrel{\text{θ.}\omega\lambda\eta}{\Leftrightarrow} \frac{A\Lambda}{\Lambda\Delta} = \frac{AN}{N\Gamma} \stackrel{AN=NG}{\Leftrightarrow} \frac{A\Lambda}{\Lambda\Delta} = 1 \Leftrightarrow A\Lambda = \Lambda\Delta \quad (1)$$

Επειδή:

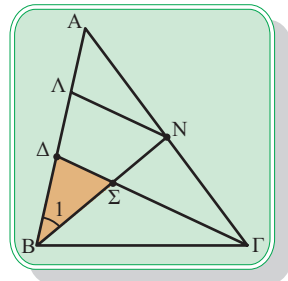
$$B\Delta = \frac{1}{3} AB \Leftrightarrow A\Delta = 2B\Delta \Leftrightarrow 2\Delta\Lambda = 2B\Delta \Leftrightarrow \Delta\Lambda = B\Delta$$

Στο τρίγωνο BAN το Δ είναι μέσο της BA και η $\Delta\Sigma \parallel AN$, άρα Σ μέσο της BN , δηλαδή $BN = 2B\Sigma$ (2).

Τα τρίγωνα $B\Sigma\Delta$ και BAN έχουν τη γωνία \hat{B} κοινή.

$$\text{Επομένως: } \frac{(B\Sigma\Delta)}{(BAN)} \stackrel{\hat{B} \text{ κοινή}}{=} \frac{B\Delta \cdot B\Sigma}{BA \cdot BN} = \frac{B\Delta}{BA} \cdot \frac{B\Sigma}{BN} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Άρα $(B\Sigma\Delta) = \frac{1}{6} (BAN) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} (AB\Gamma) = \frac{1}{12} (AB\Gamma)$, διότι $ABN = \frac{1}{2} AB\Gamma$ (αφού BN διάμεσος $AB\Gamma$)



11. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ κατά ΓΔ = ΓΒ, ΑΕ = ΑΓ και ΒΖ = ΒΑ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι: $(\Delta EZ) = 7(AB\Gamma)$

Λύση:

Είναι $(\Delta EZ) = (AB\Gamma) + (AEZ) + (BZ\Delta) + (\Gamma\Delta E)$

Ακόμα: $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ$

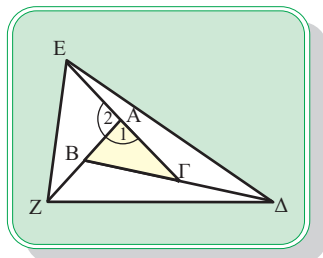
$$\text{Άρα: } \frac{(AEZ)}{(AB\Gamma)} = \frac{AE \cdot AZ}{AB \cdot AG} = \frac{AG \cdot 2AB}{AB \cdot AG} = 2 \text{ γιατί}$$

$AE = AG$ και $AZ = 2AB$.

Επομένως $(AEZ) = 2(AB\Gamma)$.

Ομοίως $(BZ\Delta) = 2(AB\Gamma)$ και $(\Gamma\Delta E) = 2(AB\Gamma)$.

Άρα $(\Delta EZ) = (AB\Gamma) + 2(AB\Gamma) + 2(AB\Gamma) + 2(AB\Gamma) = 7(AB\Gamma)$.



12. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 10$, $AD = 4$ και $\hat{A} = 60^\circ$. Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ, έτσι ώστε $AE = EZ = ZB$. Αν Η το σημείο τομής των ΔΕ και ΓΖ να υπολογιστούν:

i. Το $(AB\Gamma\Delta)$

ii. Το (HEZ)

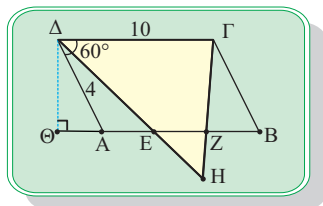
Λύση:

i. Αν φέρουμε $\Delta\Theta \perp AB$, τότε $\hat{A}\hat{\Delta}\Theta = 30^\circ$, άρα

$$A\Theta = \frac{AD}{2} = 2. \text{ Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο}$$

θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΘ βρίσκουμε $\Delta\Theta = 2\sqrt{3}$.

$$\text{Άρα } (AB\Gamma\Delta) = AB \cdot \Delta\Theta = 20\sqrt{3}$$



ii. Τα τρίγωνα HEZ και ΗΔΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{EZ}{\Delta\Gamma} = \frac{1}{3} \frac{AB}{\Delta\Gamma} = \frac{1}{3}$

(αφού $AB = \Delta\Gamma$).

Επομένως ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου

ομοιότητας δηλαδή: $\frac{(HEZ)}{(H\Delta\Gamma)} = \left(\frac{EZ}{\Delta\Gamma}\right)^2 = \frac{1}{9}$ δηλαδή $9(HEZ) = (H\Delta\Gamma) \Leftrightarrow$

$$9(HEZ) = (HEZ) + (\Gamma\Delta EZ) \Leftrightarrow 8(HEZ) = (\Gamma\Delta EZ) \Leftrightarrow$$

$$(HEZ) = \frac{(\Gamma\Delta EZ)}{8}$$

Το ΓΔΕΖ είναι τραπέζιο με βάσεις $\Delta\Gamma = 10$, $EZ = \frac{10}{3}$ και ύψος $\Delta\Theta = 2\sqrt{3}$.

$$\text{Επομένως } (\Gamma\DeltaΕΖ) = \frac{10 + \frac{10}{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{40\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Τελικά } (\text{HEZ}) = \frac{\frac{40\sqrt{3}}{3}}{8} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

13. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 4$, $\beta = 5$, $\gamma = 6$ και ύψη ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ.

Να υπολογιστεί το (ΔΕΖ).

Λύση:

Είναι $\gamma^2 = 36$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 41$, επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο αφού $\gamma^2 < \alpha^2 + \beta^2$.

Είναι $(\DeltaΕΖ) = (\text{ΑΒΓ}) - (\text{ΑΖΕ}) - (\text{ΒΔΖ}) - (\text{ΓΔΕ}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(\DeltaΕΖ)}{(\text{ΑΒΓ})} = 1 - \frac{(\text{ΑΖΕ})}{(\text{ΑΒΓ})} - \frac{(\text{ΒΔΖ})}{(\text{ΑΒΓ})} - \frac{(\text{ΓΔΕ})}{(\text{ΑΒΓ})} \quad (1)$$

Το τετράπλευρο ΒΖΕΓ είναι εγγράψιμο αφού η πλευρά

ΒΓ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Ζ και Ε υπό ίσες γωνίες Ζ και Ε (ορθές).

Επομένως η εξωτερική του γωνία Z_1 ισούται με την απέναντι εσωτερική Γ.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΖ είναι όμοια αφού έχουν δύο γωνίες ίσες (\hat{A} κοινή και $\hat{Z}_1 = \hat{\Gamma}$) και ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας,

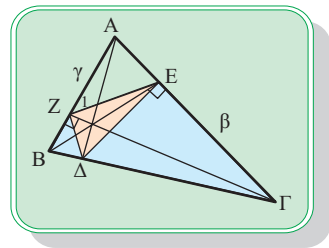
$$\text{δηλαδή } \frac{(\text{ΑΕΖ})}{(\text{ΑΒΓ})} = \left(\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΒ}}\right)^2.$$

$$\text{Ακόμα έχουμε } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\text{ΑΕ} \Leftrightarrow \text{ΑΕ} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta} \Leftrightarrow \text{ΑΕ} = \frac{9}{2}$$

$$\text{Ομοίως } \text{ΒΔ} = \frac{27}{8} \quad \text{και} \quad \text{ΓΔ} = \frac{5}{8} \quad \text{άρα η (1) γίνεται: } \frac{(\DeltaΕΖ)}{(\text{ΑΒΓ})} = \frac{27}{256} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\DeltaΕΖ) = \frac{27}{256} \cdot (\text{ΑΒΓ}) = \frac{405}{1024} \cdot \sqrt{7}.$$

(Υπολογίσαμε το (ΑΒΓ) από τον τύπο του Ήρωνα: $(\text{ΑΒΓ}) = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$)





Ελέγχουμε τη γνώση μας

Θέμα 1^ο

A. α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου είναι ίσο με το γινόμενο των διαστάσεών του.

(Μονάδες 5)

β. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:

i. Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο

(Μονάδες 2)

ii. Κάθε διάμεσος τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο τρίγωνα.

(Μονάδες 2)

iii. Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το του λόγου ομοιότητάς τους.

(Μονάδες 2)

iv. Το εμβαδόν κάθε κυρτού ή μη κυρτού τετραπλεύρου με κάθετες διαγωνίους δ_1 και δ_2 δίνεται από τον τύπο

(Μονάδες 2)

B. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E τριγώνου $AB\Gamma$ με μήκη πλευρών α, β, γ , δίνεται από τους τύπους:

α. $E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$.

(Μονάδες 6)

β. $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\mu\Lambda$.

(Μονάδες 6)

.....

.....

.....

.....

.....

Θέμα 2^ο

A. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος).
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

α. Η ευθεία που ενώνει τα μέσα των δύο βάσεων τραπέζιου το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τραπέζια.

(Μονάδες 1)

β. Αν οι πλευρές τετραγώνου αυξηθούν κατά 5 cm η καθεμιά, τότε το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 25cm^2 .

(Μονάδες 1)

γ. Δύο ισόπλευρα τρίγωνα ισοδύναμα είναι και ίσα.

(Μονάδες 1)

δ. Το εμβαδόν τετραγώνου με διαγώνιο δ είναι $\frac{\delta^2}{4}$.

(Μονάδες 1)

ε. Το εμβαδόν τραπέζιου ισούται με το γινόμενο της διαμέσου του επί το ύψος.

(Μονάδες 1)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να την δικαιολογήσετε:

α. Θεωρούμε τρίγωνο $\text{AB}\Gamma$ με $\hat{\text{A}} = 60^\circ$, $\gamma = 4$ και $\beta = 12$. Η πλευρά x ισοπλεύρου τριγώνου $\text{K}\Lambda\text{M}$ που είναι ισοδύναμο με το $\text{AB}\Gamma$ είναι:

1. 2

2. $4\sqrt{2}$

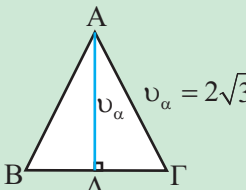
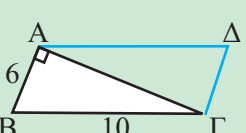
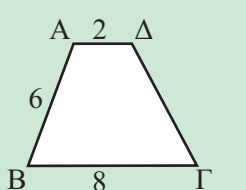
3. $4\sqrt{3}$

4. $3\sqrt{2}$

5. 7

(Μονάδες 3,5)

Γ. Συμπληρώστε στη στήλη Β, τα εμβαδά των σχημάτων που βρίσκονται στη στήλη Α. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Στήλη Α	Στήλη Β
<p>1.</p>  <p>$v_\alpha = 2\sqrt{3}$</p> <p>ABΓ ισόπλευρο τρίγωνο</p>	E =
<p>2.</p>  <p>ABΓΔ παραλληλόγραμμο</p>	E =
<p>3.</p>  <p>ABΓΔ ισοσκελές τραπέζιο</p>	E =

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(Μονάδες 6)

Θέμα 3^ο

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ABΓΔ με $AB = \alpha$, $AD = 2\alpha$ και $\hat{A} = 120^\circ$. Αν Μ είναι το μέσο της ΑΔ και Κ το σημείο τομής της ΜΓ με τη διαγώνιο ΒΔ να αποδείξετε:

$$\alpha. \frac{(AMB)}{(MΔΓ)} = 1$$

(Μονάδες 4)

β. $BM = \alpha\sqrt{3}$

(Μονάδες 8)

γ. $(AB\Delta) = (MB\Gamma)$

(Μονάδες 7)

δ. $(BK\Gamma) = 4(MK\Delta)$

(Μονάδες 6)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Θέμα 4^ο

Σε κύκλο (O,R) προεκτείνουμε την ακτίνα του OA κατά τμήμα AB τέτοιο ώστε $OA = AB$. Από το B φέρνουμε τέμνουσα $B\Gamma\Delta$ του κύκλου ώστε να είναι $B\Gamma = \Gamma\Delta$. Να υπολογίσετε συναρτήσει του R :

α. Το μήκος του ΔB .

(Μονάδες 6)

β. Το εμβαδόν του τριγώνου $OB\Delta$.

(Μονάδες 10)

γ. Το μήκος AK , όπου $AK \perp B\Gamma$

(Μονάδες 9)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Κεφάλαιο 11°

Μέτρηση κύκλου - Κανονικά πολύγωνα

Ο μαθητής που έχει μελετήσει την ενότητα των κανονικών πολυγώνων θα πρέπει να είναι σε θέση:

- ✓ Να γνωρίζει τους τύπους που δίνουν τις γωνίες ενός κανονικού πολυγώνου (τη γωνία φ_v , την κεντρική ω_v και την εξωτερική $\varphi_{εξ}$) και να κάνει συνδυασμούς με τους τύπους αυτούς.
- ✓ Να γνωρίζει τον τύπο που δίνει τη σχέση μεταξύ πλευράς και απόστηματος, τον τύπο της περιμέτρου P_v και του εμβαδού E_v του κανονικού πολυγώνου και να εργάζεται συνδυάζοντάς τους για να βρει κάποια στοιχεία του πολυγώνου.
- ✓ Να γνωρίζει πως κατασκευάζονται - εγγράφονται τα βασικά σχήματα τετραγώνο, κανονικό εξάγωνο, ισόπλευρο τρίγωνο σε κύκλο και ποιοί είναι οι τύποι που μας δίνουν την πλευρά τους και το απόστημά τους συναρτήσει της ακτίνας του κύκλου. Συχνά θα συναντά σε ασκήσεις τους συμβολισμούς $\lambda_4, \alpha_6, \dots$ κ.ο.κ.
- ✓ Να υπολογίζει το μήκος και το εμβαδόν κύκλου, το μήκος τόξου, το εμβαδόν κυκλικού τομέα και το εμβαδόν κυκλικού τμήματος καθώς και περιμέτρους και εμβαδά σχημάτων, που προκύπτουν από τα παραπάνω.

Τύποι - Βασικές έννοιες

Ένα κυρτό πολύγωνο λέγεται **κανονικό**, όταν έχει όλες τις πλευρές ίσες και όλες τις γωνίες ίσες μεταξύ τους.

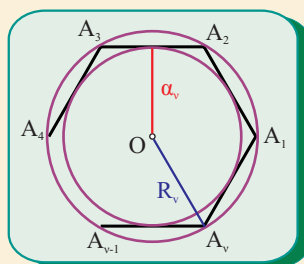
Κάθε κανονικό πολύγωνο είναι εγγράψιμο και περιγράψιμο σε δύο ομόκεντρους κύκλους.

Χαρακτηριστικά ενός κανονικού πολυγώνου - Ορισμοί

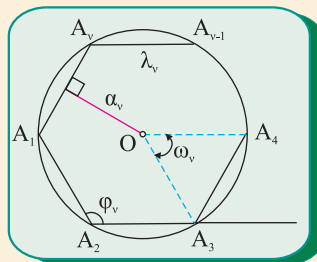
Κέντρο του κανονικού πολυγώνου λέγεται το κοινό κέντρο του εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου στο πολύγωνο κύκλου.

Ακτίνα του κανονικού πολυγώνου λέγεται κάθε ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου που καταλήγει σε κορυφή του πολυγώνου. Συνήθως συμβολίζεται με R_v όπου v το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου.

Απόστημα του κανονικού πολυγώνου λέγεται η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου. Συνήθως συμβολίζεται με a_v .



Γωνία του κανονικού πολυγώνου λέγεται η γωνία που σχηματίζεται από δύο διαδοχικές πλευρές του. Συμβολίζεται συνήθως με φ_v . Όλες οι γωνίες του κανονικού πολυγώνου είναι ίσες. Η κάθε γωνία $\hat{\varphi}_v$ είναι εγγεγραμμένη σε $(v-2)$ ίσα τόξα. (Το κάθε τόξο αντιστοιχεί σε μια οποιαδήποτε πλευρά του πολυγώνου).



Γ' αυτές ισχύει ο τύπος
$$\hat{\varphi}_v = 180^\circ - \frac{360^\circ}{v}$$

(v είναι ο αριθμός των πλευρών του πολυγώνου).

Κεντρική γωνία του κανονικού πολυγώνου λέγεται η γωνία που σχηματίζεται από δύο διαδοχικές ακτίνες του πολυγώνου. Συμβολίζεται με $\hat{\omega}_v$.

Κάθε κεντρική γωνία είναι επίκεντρη και βαίνει σε τόξο, το οποίο αντιστοιχεί σε μία από τις ίσες πλευρές του πολυγώνου.

Για κάθε μία από τις ίσες κεντρικές γωνίες ισχύει ο τύπος
$$\hat{\omega}_v = \frac{360}{v}$$
 όπου v ο αριθμός των πλευρών του πολυγώνου.

Η κεντρική γωνία και η γωνία του πολυγώνου είναι παραπληρωματικές δηλ.

$$\hat{\varphi}_v + \hat{\omega}_v = 180^\circ$$

Εξωτερική γωνία του κανονικού πολυγώνου λέγεται η οποιαδήποτε γωνία σχηματίζεται από μία πλευρά του πολυγώνου και την προέκταση μιας διαδοχικής πλευράς του.

Όλες οι εξωτερικές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους αφού είναι παραπληρωματικές των αντιστοίχων εσωτερικών ίσων γωνιών.

Για τον ίδιο λόγο η εξωτερική γωνία ισούται με την κεντρική γωνία του πολυγώνου.

$$\text{Ισχύει δηλ. } \hat{\phi}_{\text{εξ}} = \hat{\omega}_\nu$$

Ιδιότητες των κανονικών πολυγώνων.

- Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

Η γωνία του καθενός είναι $180^\circ - \frac{360^\circ}{\nu}$, επομένως έχουν όλες τους τις γωνίες ίσες.

Οι πλευρές τους είναι ανάλογες.

Ο λόγος ομοιότητάς τους ισούται με το λόγο των πλευρών τους, το λόγο των ακτίνων τους, το λόγο των αποστημάτων τους και το λόγο των περιμέτρων τους.

$$\text{λόγος ομοιότητας} = \text{λόγος πλευρών} = \text{λόγος αποστημάτων} = \text{λόγος ακτίνων} = \text{λόγος περιμέτρων}$$

Ο λόγος των εμβαδών τους ως γνωστόν ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

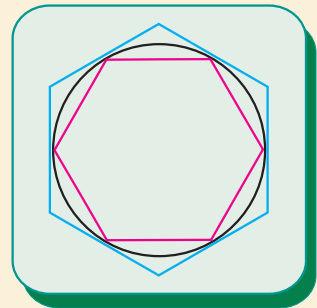
$$\text{λόγος εμβαδών} = (\text{λόγος ομοιότητας})^2$$

- Κάθε ακτίνα διχοτομεί την αντίστοιχη γωνία του κανονικού πολυγώνου.

- Αν διαιρέσουμε περιφέρεια κύκλου σε ν ίσα τόξα:

α. οι χορδές που αντιστοιχούν σε αυτά τα τόξα σχηματίζουν κανονικό ν -γωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο.

β. οι εφαπτομένες στα άκρα αυτών των τόξων σχηματίζουν κανονικό ν -γωνο περιγεγραμμένο στον κύκλο.



Τύποι που συνδέουν τα στοιχεία ενός κανονικού πολυγώνου.

$$\alpha_v^2 + \frac{\lambda_v^2}{4} = R^2$$

όπου α_v το απόστημα, λ_v η πλευρά και R η ακτίνα του πολυγώνου

Ο τύπος αυτός συνδέει την πλευρά με το απόστημα και είναι πολύ χρήσιμος.

$$P_v = v \cdot \lambda_v$$

όπου P_v η περίμετρος του v - γώνου (πολύγωνο με v πλευρές).

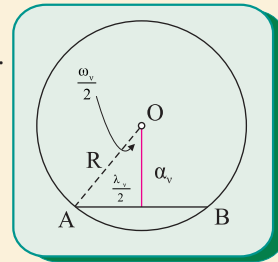
$$E_v = \frac{1}{2} P_v \cdot \alpha_v$$

όπου E_v το εμβαδόν του πολυγώνου.

$$\lambda_v = 2R \eta \mu \frac{\omega_v}{2}$$

όπου ω_v η γωνία του πολυγώνου.

$$\alpha_v = R \sigma \upsilon \nu \frac{\omega_v}{2}$$



Τύποι του Αρχιμήδη

$$\lambda_{2v}^2 = 2R(R - \alpha_v)$$

$$\alpha_{2v}^2 = \frac{R}{2}(R + \alpha_v)$$

Είναι οι τύποι που μας δίνουν την πλευρά και το απόστημα του $2v$ - γώνου συναρτήσει της ακτίνας και του αποστήματος του v - γώνου. (Το $2v$ - γωνο έχει διπλάσιο αριθμό πλευρών από το v - γωνο).

Στοιχεία βασικών κανονικών πολυγώνων εγγεγραμμένων σε κύκλο με ακτίνα R (συναρτήσει της ακτίνας) και τρόπος κατασκευής τους (ο πίνακας που ακολουθεί).

	Γωνία	Κεντρική γωνία	Πλευρά λ_n	Απόσταση α_n	Εγγραφή σε κύκλο
Τετράγωνο	$\hat{\phi}_4 = 90^\circ$	$\hat{\omega}_4 = 90^\circ$	$\lambda_4 = R\sqrt{2}$	$\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$	Γράφουμε δύο κάθετες διαμέτρους και ενώνουμε τα άκρα τους.
Κανονικό εξάγωνο	$\hat{\phi}_6 = 120^\circ$	$\hat{\omega}_6 = 60^\circ$	$\lambda_6 = R$	$\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$	Χωρίζουμε τον κύκλο σε 6 ίσα διαδοχικά τόξα, που η χορδή τους ισούται με την ακτίνα του κύκλου.
Ισόπλευρο τρίγωνο	$\hat{\phi}_3 = 60^\circ$	$\hat{\omega}_3 = 120^\circ$	$\lambda_3 = R\sqrt{3}$	$\alpha_3 = \frac{R}{2}$	Κατασκευάζουμε κανονικό εξάγωνο και ενώνουμε τις κορυφές του μία παρά μία.
Κανονικό δεκάγωνο	$\hat{\phi}_{10} = 144^\circ$	$\hat{\omega}_{10} = 36^\circ$	$\lambda_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$	$\alpha_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	Χωρίζουμε την ακτίνα του κύκλου σε μέσο και άκρο λόγο. Πλευρά του 10 - γώνου είναι το μεγαλύτερο από αυτά τα τμήματα.
Κανονικό πεντάγωνο	$\hat{\phi}_5 = 108^\circ$	$\hat{\omega}_5 = 72^\circ$	$\lambda_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\alpha_5 = \frac{R}{4}(\sqrt{5}+1)$	Κατασκευάζουμε κανονικό 10 - γωνο και ενώνουμε τις κορυφές του μία παρά μία.
Κανονικό οκτάγωνο	$\hat{\phi}_8 = 135^\circ$	$\hat{\omega}_8 = 45^\circ$	$\lambda_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\alpha_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	Κατασκευάζουμε τετράγωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο και παίρνουμε τα μέσα των τόξων που αντιστοιχούν στις πλευρές του. Οι 4 κορυφές του τετραγώνου και τα 4 μέσα των τόξων αποτελούν τις κορυφές του κανονικού οκταγώνου.

Μέτρηση κύκλου

Μήκος κύκλου	$L = 2\pi R$
Μήκος τόξου μ°	$\ell = \frac{\pi R \mu}{180}$
Μήκος τόξου α rad	$\ell = \alpha \cdot R$
Εμβαδόν κυκλικού δίσκου	$E = \pi R^2$
Εμβαδόν κυκλικού τομέα μ°	$E = \frac{\pi R^2 \mu}{360}$
Εμβαδόν κυκλικού τομέα α rad	$E = \frac{1}{2} \alpha R^2$
Εμβαδόν κυκλικού τμήματος	Από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα αφαιρούμε το εμβαδόν του τριγώνου.



Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και στοιχεία τους.

Τετράγωνο

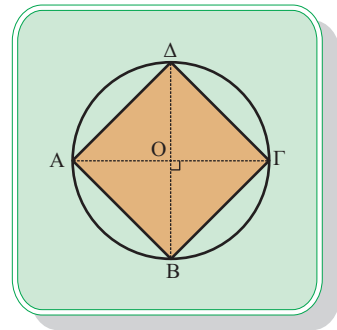
Έστω ένας κύκλος (O, R) . Αν φέρουμε δύο κάθετες διαμέτρους $A\Gamma$ και $B\Delta$, θα είναι

$\widehat{A\hat{O}B} = \widehat{B\hat{O}\Gamma} = \widehat{\Gamma\hat{O}\Delta} = \widehat{\Delta\hat{O}A} = 90^\circ$, οπότε:

$\widehat{AB} = \widehat{B\Gamma} = \widehat{\Gamma\Delta} = \widehat{\Delta A}$ και επομένως το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο. Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο OAB με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος έχουμε:

$$\lambda_4^2 = AB^2 = OA^2 + OB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2,$$

από την οποία προκύπτει ότι: $\lambda_4 = R\sqrt{2}$



Από τη βασική σχέση $\alpha_v^2 + \frac{\lambda_v^2}{4} = R^2$ με $v = 4$ προκύπτει ότι $\alpha_4^2 = R^2 - \frac{(R\sqrt{2})^2}{4} = \frac{R^2}{2}$

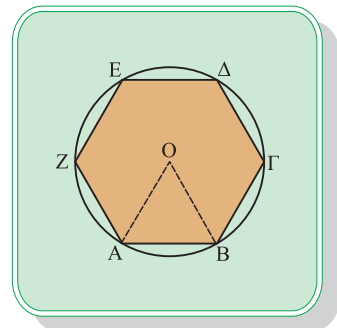
δηλαδή $\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Κανονικό εξάγωνο

Έστω κύκλος (O, R) και AB η πλευρά του κανονικού εξαγώνου που θέλουμε να εγγράψουμε στον (O, R) .

Τότε $\widehat{A\hat{O}B} = \omega_6 = 60^\circ$ και επειδή $OA = OB (= R)$, το τρίγωνο OAB είναι ισόπλευρο. Άρα $AB = OA = R$, δηλαδή $\lambda_6 = R$.

Έτσι για την εγγραφή κανονικού εξαγώνου σε κύκλο, παίρνουμε πάνω στον κύκλο έξι διαδοχικά τόξα $\widehat{AB}, \widehat{B\Gamma}, \widehat{\Gamma\Delta}, \widehat{\Delta E}, \widehat{EZ}$ και \widehat{ZA} με αντίστοιχη χορδή R το καθένα, οπότε το $AB\Gamma\Delta EZ$ είναι κανονικό εξάγωνο.



Επειδή $\lambda_6 = R$, από τη βασική σχέση $\alpha_6 + \frac{\lambda_6^2}{4} = R^2$ με αντικατάσταση του λ_6 προκύπτει ότι:

$$\alpha_6^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}, \quad \text{ή} \quad \alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

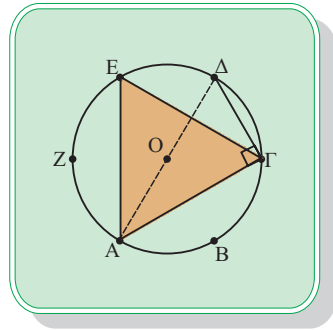
Ισόπλευρο τρίγωνο

Αν τα σημεία A, B, Γ, Δ, E και Z διαιρούν τον κύκλο σε έξι ίσα τόξα, τότε τα σημεία A, Γ, E είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου, αφού $\widehat{A\Gamma} = \widehat{\Gamma E} = \widehat{EA} = 120^\circ$.

Είναι $\widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{A\Gamma} + \widehat{\Gamma\Delta} = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ οπότε η AΔ είναι διάμετρος και επομένως το τρίγωνο AΓΔ είναι ορθογώνιο.

$$\text{Άρα } \lambda_3^2 = A\Gamma^2 = A\Delta^2 - \Delta\Gamma^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2,$$

$$\text{δηλαδή } \lambda_3 = R\sqrt{3}.$$



Εφαρμόζοντας τη σχέση $\alpha_3^2 + \frac{\lambda_3^2}{4} = R^2$, προκύπτει ότι $\alpha_3 = \frac{R}{2}$.

Μέτρηση κύκλου - Εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος.

Μήκος τόξου

Επειδή ο κύκλος είναι τόξο 360° με μήκος $2\pi R$, το τόξο 1° θα έχει μήκος $\frac{2\pi R}{360}$ οπότε

$$\text{ένα τόξο } \mu^\circ \text{ θα έχει μήκος } \ell = \frac{\pi R \mu}{180} \quad (1)$$

Επίσης, ένα τόξο κύκλου με μήκος R λέγεται ακτίνιο (rad). Άρα ένα τόξο α rad έχει μήκος αR , δηλαδή $\ell = \alpha R$ (2)

Κυκλικός τομέας

Επειδή ο κυκλικός δίσκος είναι κυκλικός τομέας 360° με εμβαδόν πR^2 , ο κυκλικός τομέας 1° έχει εμβαδόν $\frac{\pi R^2}{360}$. Επομένως ένας τομέας μ° έχει εμβαδόν $\frac{\pi R^2 \mu}{360}$.

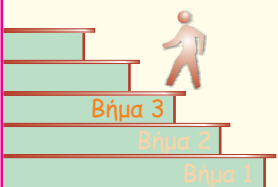
Όστε το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα \widehat{OAB} μ° και ακτίνας R δίνεται από την ισότητα: $(\widehat{OAB}) = \frac{\pi R^2 \mu}{360}$.

Επίσης, επειδή ο κυκλικός δίσκος (O, R) είναι τομέας 2π rad με εμβαδόν πR^2 , ένας τομέας α rad θα έχει εμβαδόν $\frac{\pi R^2}{2\pi} \cdot \alpha = \frac{1}{2} \alpha \cdot R^2$. Επομένως, το εμβαδόν ενός κυ-

κλικού τομέα \widehat{OAB} α rad και ακτίνας R δίνεται από την ισότητα $(\widehat{OAB}) = \frac{1}{2} \alpha \cdot R^2$.

**A. Από το σχολικό βιβλίο****ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.**

- σ. 237: Ασκήσεις εμπέδωσης: 3, 6, 7
Αποδεικτικές Ασκήσεις: 3, 4, 5
- σ. 242: Ασκήσεις εμπέδωσης: 2, 3, 4
Απόδεικτικές Ασκήσεις: 2, 3, 4
Σύνθετα θέματα: 1, 2, 3
- σ. 245: Ασκήσεις εμπέδωσης: 4, 5
Αποδεικτικές Ασκήσεις: 1, 3
Σύνθετα θέματα: 2
- σ. 250: Ασκήσεις εμπέδωσης: όλες
Αποδεικτικές Ασκήσεις: όλες
Σύνθετα θέματα: 2, 3, 4



**Λύνουμε
περισσότερες
ασκήσεις**

- 1.** Σε κύκλο (O,R) θεωρούμε δύο κάθετες χορδές του $AB = R\sqrt{2}$ και $\Gamma\Delta = R\sqrt{3}$ που τέμνονται στο σημείο E . Ναδειχτεί ότι η χορδή που έχει απόστημα το OE είναι πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο.

Λύση:

Για να αποδείξουμε ότι η χορδή που έχει απόστημα το OE είναι πλευρά κανονικού εξαγώνου, αρκεί να

$$\text{δείξουμε ότι: } OE = \alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

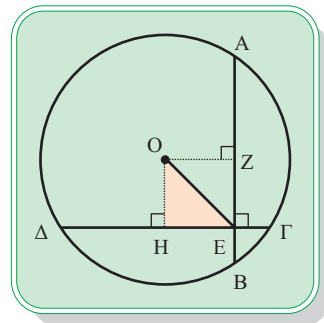
Φέρνουμε τα αποστήματα $OZ = \alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ και

$$OH = \alpha_3 = \frac{R}{2}$$

Το $OZEH$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, άρα $OZ = HE$. Έτσι από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο OHE έχουμε:

$$OE^2 = OH^2 + HE^2 \Leftrightarrow OE^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow OE^2 = \frac{R^2}{4} + \frac{2R^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$OE^2 = \frac{3R^2}{4} \Leftrightarrow OE = \frac{R\sqrt{3}}{2}. \text{ Άρα } OE = \alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$



- 2.** Σε κύκλο (O,R) θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία A, B, Γ και Δ ώστε $AB = R\sqrt{3}$ και $\Gamma\Delta = R$. Ναδειχτεί ότι $(OB\Gamma) = (OAA\Delta)$

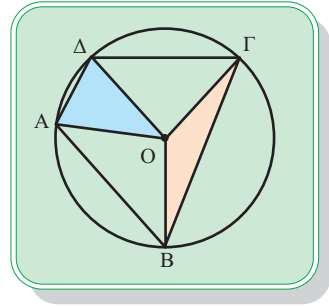
Λύση:

Είναι $AB = R\sqrt{3} = \lambda_3$ οπότε $\widehat{A\hat{O}B} = \hat{\omega}_3 = 120^\circ$. Επίσης $\Gamma\Delta = R = \lambda_6$ οπότε

$\widehat{\Gamma\hat{O}\Delta} = \omega_6 = 60^\circ$. Έτσι οι γωνίες $\widehat{A\hat{O}B}$ και $\widehat{\Gamma\hat{O}\Delta}$ είναι παραπληρωματικές και επομένως το ίδιο θα ισχύει και για τις γωνίες $\widehat{\Gamma\hat{O}B}$ και $\widehat{A\hat{O}\Delta}$. Οπότε:

$$\frac{(OB\Gamma)}{(O\Delta\Delta)} = \frac{OB \cdot O\Gamma}{OA \cdot O\Delta} = \frac{R^2}{R^2} = 1$$

Δηλαδή $(OB\Gamma) = (O\Delta\Delta)$.



3. Δίνεται πεντάγωνο $AB\Gamma\Delta E$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) με $AB = R\sqrt{2}$,

$B\Gamma = R\sqrt{3}$, $\Gamma\Delta = \Delta E = R$. Να βρεθεί το εμβαδόν του πενταγώνου.

Λύση:

Έχουμε $AB = R\sqrt{2} = \lambda_4 \Leftrightarrow \hat{O}_1 = \omega_4 = 90^\circ$

$$B\Gamma = R\sqrt{3} = \lambda_3 \Leftrightarrow \hat{O}_2 = \omega_3 = 120^\circ$$

$$\Gamma\Delta = \Delta E = R = \lambda_6 \Leftrightarrow \hat{O}_3 = \hat{O}_4 = \omega_6 = 60^\circ$$

και $\hat{O}_5 = 360^\circ - \hat{O}_1 - \hat{O}_2 - \hat{O}_3 - \hat{O}_4$ δηλαδή

$$\hat{O}_5 = 360^\circ - 90^\circ - 120^\circ - 60^\circ - 60^\circ \Leftrightarrow \hat{O}_5 = 30^\circ$$

Υπολογίζουμε τα εμβαδά των τριγώνων AOB , $BO\Gamma$, $\Gamma O\Delta$, ΔOE , και EOA με τη βοήθεια του

$$\text{τύπου: } E = \frac{1}{2} \alpha \cdot \beta \cdot \eta\mu\Gamma$$

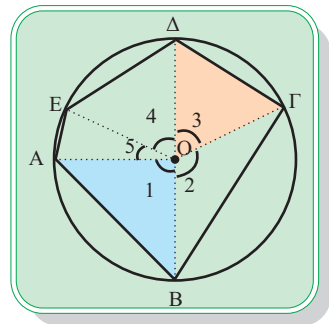
Έχουμε: $E = \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \eta\mu\omega_n$ οπότε: $(AOB) = \frac{1}{2} R^2 \cdot \eta\mu 90^\circ = \frac{R^2}{2}$

$$(BO\Gamma) = \frac{1}{2} R^2 \cdot \eta\mu 120^\circ = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$(\Gamma O\Delta) = (\Delta OE) = \frac{1}{2} R^2 \cdot \eta\mu 60^\circ = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$(EOA) = \frac{1}{2} R^2 \cdot \eta\mu 30^\circ = \frac{R^2}{4}$$

Άρα $(AB\Gamma\Delta E) = (AOB) + (BO\Gamma) + 2(\Gamma O\Delta) + (EOA)$ δηλαδή



$$(\text{ABΓΔE}) = \frac{R^2}{2} + \frac{R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{2R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{R^2}{4} \Leftrightarrow (\text{ABΓΔE}) = \frac{3(1+\sqrt{3})}{4} \cdot R^2.$$

4. Σε κύκλο (O,R) θεωρούμε μια χορδή του $AB = R$. Στην προέκτασή της παίρνουμε τμήμα $BΓ = AB$ και από το $Γ$ φέρνουμε την εφαπτομένη $ΓΔ$ στον κύκλο. Να δείξετε ότι $ΓΔ = \lambda_4$ και $ΟΓ = \lambda_3$, όπου λ_4 και λ_3 πλευρές τετραγώνου και ισόπλευρου τριγώνου αντίστοιχα, ακτίνας R .

Λύση:

Ισχύει $ΓΑ \cdot ΓΒ = ΟΓ^2 - R^2$ (δύναμη σημείου ως προς κύκλο)

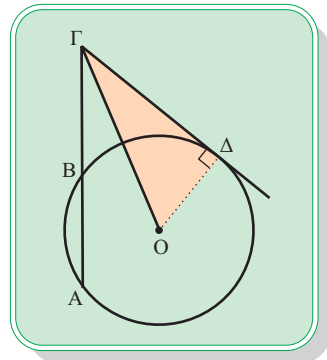
$$\Leftrightarrow 2R \cdot R = ΟΓ^2 - R^2 \Leftrightarrow$$

$$ΟΓ^2 = 3R^2 \Leftrightarrow ΟΓ = R\sqrt{3} = \lambda_3.$$

Από Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $ΟΔΓ$ έχουμε:

$$ΟΓ^2 - R^2 = ΓΔ^2 \Leftrightarrow (R\sqrt{3})^2 - R^2 = ΓΔ^2$$

$$\Leftrightarrow ΓΔ = R\sqrt{2} = \lambda_4.$$



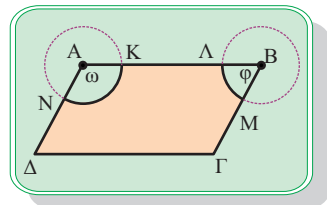
5. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ με $AB > 12\text{cm}$ και $BΓ > 12\text{cm}$ και εμβαδόν 600cm^2 . Με κέντρα τα A και B και ακτίνα 6cm , γράφουμε δύο κύκλους που τέμνουν τις πλευρές του παραλληλογράμμου στα σημεία K, Λ, M και N . Να βρείτε το εμβαδόν του μικτόγραμμου εξαγώνου $K\Lambda M\Gamma N$.

Λύση:

$$\text{Έχουμε } (\widehat{AKN}) + (\widehat{B\Lambda M}) = \frac{\pi 6^2 \omega}{360^\circ} + \frac{\pi 6^2 \varphi}{360^\circ} =$$

$$\frac{\pi}{10}(\omega + \varphi) = \frac{\pi}{10}180^\circ = 18\pi$$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = (600 - 18\pi)\text{cm}^2$



6. Από σημείο B εκτός κύκλου (O,R) φέρνουμε εφαπτομένη BA και τέμνουσα $BΓΔ$ που διέρχεται από το κέντρο O , έτσι ώστε $BΓ = R$. Να υπολογίσετε:

α. το τμήμα AB .

β. το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $(O\Lambda\Gamma)$.

γ. το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου $ABΓA$.

Λύση:

α. Έχουμε $B\Gamma = R$, $B\Delta = B\Gamma + \Gamma\Delta = R + 2R$ άρα $B\Delta = 3R$.

$$\text{Είναι } AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta = R \cdot 3R$$

$$\text{δηλαδή } AB^2 = 3R^2 \Leftrightarrow AB = R\sqrt{3}.$$

β. Η ΑΓ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ οπότε:

$$A\Gamma = \frac{OB}{2} = \frac{O\Gamma + B\Gamma}{2} = \frac{R + R}{2} = R \text{ δηλαδή } A\Gamma = R,$$

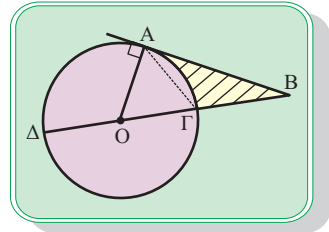
Άρα το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ισόπλευρο δηλαδή

$$\widehat{A\hat{O}\Gamma} = 60^\circ \text{ και } (\widehat{O\hat{A}\Gamma}) = \frac{\pi R^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi R^2}{6} \text{ τετρ.μον.}$$

γ. Έχουμε $(OAB) = \frac{1}{2} OA \cdot AB = \frac{1}{2} R \cdot R\sqrt{3} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$ τ.μ.

Άρα το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓΑ είναι:

$$(AB\Gamma A) = (OAB) - (\widehat{O\hat{A}\Gamma}) = \frac{R^2\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi R^2}{6} = \frac{R^2}{6} \cdot (3\sqrt{3} - \pi) \text{ τετρ. μον.}$$



7. Έστω χορδή $AB = R\sqrt{2}$ κάθετη στη διάμετρο ΓΔ κύκλου με κέντρο Ο και ακτίνα R. Να υπολογίσετε:

α. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΟΒΓ.

β. Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $(\widehat{O\hat{A}\Gamma B})$.

γ. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το τόξο ΑΓΒ και τις χορδές ΑΓ, ΒΓ.

Λύση:

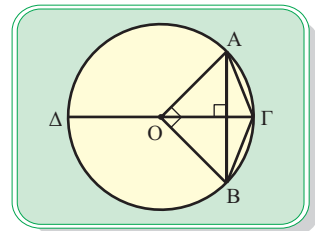
α. Έχουμε $AB \perp O\Gamma$ οπότε:

$$(AOB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot O\Gamma = \frac{1}{2} R\sqrt{2} \cdot R$$

$$\text{Επομένως } (AOB\Gamma) = \frac{R^2\sqrt{2}}{2} \text{ τετρ.μονάδες.}$$

β. $\widehat{A\hat{O}B} = 90^\circ$ γιατί $AB = R\sqrt{2} = \lambda_4$ άρα

$$(\widehat{O\hat{A}\Gamma B}) = \frac{\pi R^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} \Leftrightarrow (\widehat{O\hat{A}\Gamma B}) = \frac{\pi R^2}{4} \text{ τετρ.μονάδες.}$$



γ. Έστω E_1 και E_2 τα ζητούμενα εμβαδά.

$$E_1 + E_2 = (\widehat{OAGB}) - (\text{AOBG}) = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2 \sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow E_1 + E_2 = \frac{R^2}{4} (\pi - 2\sqrt{2}) \text{ τετραγωνικές}$$

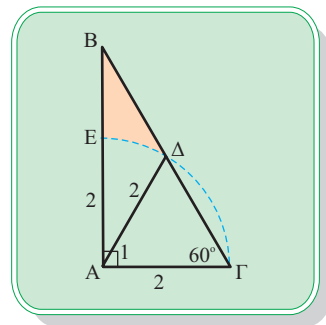
8. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Gamma = 4$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Με κέντρο το A και ακτίνα AG γράφουμε κύκλο που τέμνει τη $B\Gamma$ στο Δ και την AB στο E . Να υπολογιστεί το εμβαδόν και η περίμετρος του μικτόγραμμου τριγώνου $B\Delta E$.

Λύση:

Αφού $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ τότε $\hat{B} = 30^\circ$ και ισχύει $AG = \frac{B\Gamma}{2} = 2$

Το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο (ισοσκελές με γωνία 60°), άρα $\hat{A}_1 = 60^\circ$, $\hat{B\Delta A} = 120^\circ$ και $\Delta\Gamma = 2$.

Το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με τη διαφορά των εμβαδών του τριγώνου $AB\Delta$ και του κυκλικού τομέα $(\widehat{A\Delta E})$.



$$\text{Είναι } (AB\Delta) - (\widehat{A\Delta E}) = \frac{1}{2} B\Delta \cdot A\Delta \cdot \eta\mu 120^\circ - \frac{\pi 2^2 30^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3}.$$

Είναι $AB^2 = B\Gamma^2 - A\Gamma^2$ δηλαδή $AB = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ και

$$BE = AB - AE = 2\sqrt{3} - 2.$$

Η ζητούμενη περίμετρος είναι:

$$\Pi = B\Delta + BE + S_{\widehat{A\Delta E}} = 2 + (2\sqrt{3} - 2) + \frac{\pi \cdot 2 \cdot 30^\circ}{180^\circ} = 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$$

9. Δίνεται ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $AG = AB = 8$. Με κέντρο το A και ακτίνα ίση με τη διάμεσο AM γράφουμε κύκλο που τέμνει την AB στο Δ και την AG στο E . Να υπολογιστεί το άθροισμα των εμβαδών των μικτόγραμμων τριγώνων $B\Delta M$ και $\Gamma M E$.

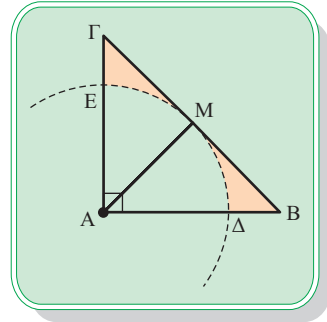
Λύση:

Είναι $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$ δηλαδή $B\Gamma = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}$

Όμως $AM = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$. Το ζητούμενο άθροισμα ισούται με τη διαφορά των εμβαδών του τομέα $(\widehat{A\Delta E})$ από το τρίγωνο $AB\Gamma$. Έτσι

$$E = (AB\Gamma) - (\widehat{A\Delta E}) = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma - \frac{\pi \cdot AM^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} =$$

$$\frac{1}{2} 8 \cdot 8 - \frac{\pi (4\sqrt{2})^2}{4} = 32 - \frac{\pi \cdot 16 \cdot 2}{4} = (32 - 8\pi) \text{ τετρ. μονάδες}$$



10. Έστω κύκλος διαμέτρου $AB = 2R$ και τόξο $\widehat{AM\Gamma} = 135^\circ$.

α. Να δείξετε ότι $A\Gamma = R\sqrt{2+\sqrt{2}}$ και $B\Gamma = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος $AM\Gamma A$

Λύση:

α. Είναι $\widehat{AM\Gamma} = 135^\circ \Leftrightarrow \widehat{A\hat{O}\Gamma} = 135^\circ$.

Εφαρμόζοντας το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο $AO\Gamma$ έχουμε:

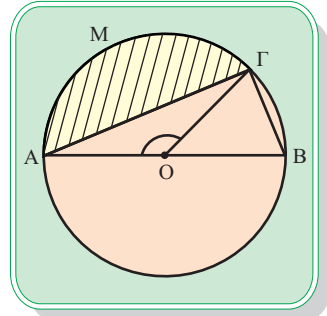
$$\begin{aligned} A\Gamma^2 &= OA^2 + O\Gamma^2 - 2 \cdot OA \cdot O\Gamma \cdot \text{συν}135^\circ = \\ &= R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2R^2 + R^2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως } A\Gamma^2 = R^2 \cdot (2 + \sqrt{2}) \Leftrightarrow A\Gamma = R\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

Στο $\widehat{B\hat{O}\Gamma}$ έχουμε: $\widehat{B\hat{O}\Gamma} = \widehat{A\hat{O}B} - \widehat{A\hat{O}\Gamma} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$

$$\begin{aligned} B\Gamma^2 &= OB^2 + O\Gamma^2 - 2 \cdot OB \cdot O\Gamma \cdot \text{συν}45^\circ = \\ &= R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow B\Gamma^2 = R^2(2 - \sqrt{2}) \Leftrightarrow B\Gamma = R\sqrt{2 - \sqrt{2}} \end{aligned}$$

β. Είναι $\widehat{A\hat{\Gamma}B} = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και $(A\Gamma B) = \frac{1}{2} A\Gamma \cdot B\Gamma = \frac{1}{2} R \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot R \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} =$



$$= \frac{R^2}{2} \cdot \sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \frac{R^2}{2} \cdot \sqrt{2^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{R^2}{2} \sqrt{2} \Leftrightarrow (AB\Gamma) = \frac{R^2 \sqrt{2}}{2}.$$

γ. Η ΓΟ είναι διάμεσος στο τρίγωνο $A\hat{\Gamma}B$ οπότε

$$(AO\Gamma) = \frac{1}{2}(A\Gamma B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2 \sqrt{2}}{2} \text{ δηλαδή } (AO\Gamma) = \frac{R^2 \sqrt{2}}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } (AM\Gamma A) &= (\widehat{OAM\Gamma}) - (AO\Gamma) = \frac{\pi R^2 \cdot 135^\circ}{360^\circ} - \frac{R^2 \sqrt{2}}{4} = \\ &= \frac{3\pi R^2}{8} - \frac{R^2 \sqrt{2}}{4}. \text{ Επομένως } (AM\Gamma A) = \frac{R^2}{8} \cdot (3\pi - 2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

11. Έστω τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$ με πλευρές $\alpha = \gamma\sqrt{5}$ $\beta = 2\gamma$.

A. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 90^\circ$

B. Με κέντρο το Γ και ακτίνα ΓA γράφουμε τόξο $A\Delta$, με κέντρο B και ακτίνα BA γράφουμε τόξο $A\epsilon$. Να υπολογισθούν:

α. Τα εμβαδά των κυκλικών τομέων $(\widehat{\Gamma A\Delta})$ και $(\widehat{B\epsilon A})$ συναρτήσει των γωνιών \hat{B} και $\hat{\Gamma}$ και του γ .

β. Το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου $A\epsilon\Delta$ συναρτήσει των γωνιών \hat{B} και $\hat{\Gamma}$ και του γ .

Λύση:

A. Έχουμε $\beta^2 + \gamma^2 = (2\gamma)^2 + \gamma^2 = 5\gamma^2 = (\gamma\sqrt{5})^2 = \alpha^2$ άρα $\hat{A} = 90^\circ$

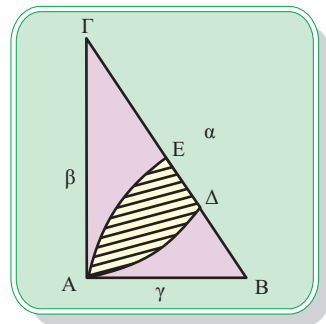
$$\mathbf{B. \alpha.} \quad (\widehat{\Gamma A\Delta}) = \frac{\pi\beta^2 \cdot \hat{\Gamma}}{360^\circ} \Leftrightarrow (\widehat{\Gamma A\Delta}) = \frac{4\pi\gamma^2 \cdot \hat{\Gamma}}{360^\circ}$$

$$(\widehat{B\epsilon A}) = \frac{\pi\gamma^2 \cdot \hat{B}}{360^\circ}$$

$$\mathbf{\beta.} \quad (A\epsilon\Delta) = (\widehat{\Gamma A\Delta}) + (\widehat{B\epsilon A}) - (AB\Gamma) =$$

$$= \frac{4\pi\gamma^2 \hat{\Gamma}}{360^\circ} + \frac{\pi\gamma^2 \hat{B}}{360^\circ} - \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma =$$

$$= \frac{\pi\gamma^2 (4\hat{\Gamma} + \hat{B})}{360^\circ} - \frac{1}{2} \gamma \cdot 2\gamma. \text{ Άρα } (A\epsilon\Delta) = \gamma^2 \left[\frac{\pi(4\hat{\Gamma} + \hat{B})}{360^\circ} - 1 \right]$$



$$\begin{aligned} \text{Ακόμα έχουμε: } (AMBNA) &= (\widehat{OBNA}) + (\widehat{KBMA}) - (AOBK) = \\ &= \frac{\pi R^2}{3} + \frac{\pi R^2}{2} - R^2 \sqrt{3} = \frac{2\pi R^2 + 3\pi R^2 - 6R^2 \sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως } (AMBNA) = \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{6} R^2 \text{ τετρ. μονάδες.}$$

13. Έστω κανονικό πολύγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο $(O, 6)$, με επίκεντρη γωνία ω , αμβλεία.

α. Να βρείτε το πλήθος των πλευρών του n -γώνου.

β. Να βρείτε την πλευρά και το απόστημα του n -γώνου.

γ. Να βρείτε το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου στο κυκλικό τμήμα που περιέχεται μεταξύ μιας πλευράς του n -γώνου και του αντίστοιχου κεντρογώνιου τόξου.

Λύση:

α. Έχουμε $\omega_n > 90^\circ \Leftrightarrow \frac{360^\circ}{n} > 90^\circ \Leftrightarrow n < 4$.

Επειδή $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$ είναι $n = 3$.

β. Το κανονικό πολύγωνο είναι ισόπλευρο τρίγωνο, συνεπώς $\lambda_3 = R\sqrt{3}$ δηλαδή $\lambda = 6\sqrt{3}$ και $\alpha_3 = \frac{R}{2} = \frac{6}{2}$

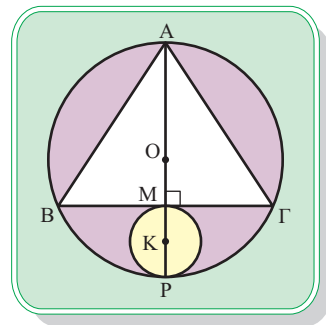
οπότε $\alpha_3 = 3$

γ. Η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου είναι $KM = KP = x$.
Είναι:

$$OP = OM + MP \text{ ή } R = \alpha_3 + 2x \text{ επομένως } 6 = 3 + 2x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Έστω $E_{(K)}$ το εμβαδόν του κύκλου (K, x) .

$$\text{Οπότε } E_{(K)} = \pi x^2 = \pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \text{ δηλαδή } E_{(K)} = \frac{9\pi}{4} \text{ τετρ. μονάδες.}$$



- 14.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 13$, $A\Gamma = 12$, και $B\Gamma = 5$. Να αποδείξετε ότι η AB είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου και να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του κύκλου.

Λύση:

Αρκεί να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την AB .

Είναι: $A\Gamma^2 + B\Gamma^2 = 12^2 + 5^2 = 169$ και

$AB^2 = 13^2 = 169$. Άρα ισχύει $AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2$ οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορ-

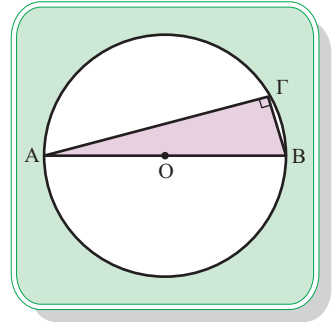
θογώνιο με υποτείνουσα την AB . Η ακτίνα του κύκλου είναι $R = \frac{AB}{2} = \frac{13}{2}$.

Έτσι για το εμβαδόν E του κύκλου έχουμε:

$$E = \pi R^2 = \pi \left(\frac{13}{2} \right)^2 = \frac{169\pi}{4} \text{ τετραγ. μονάδες}$$

και για την περίμετρο L :

$$L = 2\pi R = 2\pi \frac{13}{2} = 13\pi.$$





Ελέγχουμε τη γνώση μας

Θέμα 1°

A. α. Τι ονομάζουμε κυκλικό τομέα και με ποιόν τύπο υπολογίζουμε το εμβαδόν του; Να σχεδιάσετε ένα κυκλικό τομέα.

(Μονάδες 6)

β. Τι ονομάζουμε κυκλικό τμήμα και με ποιόν τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του; Να σχεδιάσετε ένα κυκλικό τμήμα.

(Μονάδες 6)

B. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος).

α. Δύο κυκλικοί τομείς του ίδιου κύκλου που αντιστοιχούν σε ίσα τόξα είναι ισοδύναμοι.

(Μονάδες 2)

β. Ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων είναι ίσος με το λόγο των μηκών τους.

(Μονάδες 2)

γ. Τετράγωνο πλευράς a είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Το εμβαδόν του

κύκλου είναι $\frac{a^2\pi}{2}$.

(Μονάδες 2)

Γ. Η περίμετρος κυκλικού τομέα 150° είναι $5\pi + 12$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(Μονάδες 7)

Θέμα 2^ο

A. α. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να την δικαιολογήσετε.

I. Αν το εμβαδόν ενός κύκλου είναι $\frac{3\pi}{4}$, το μήκος του είναι:

- 1) $\pi\sqrt{2}$ 2) $\pi\sqrt{3}$ 3) $\frac{3\pi}{4}$ 4) $\frac{\pi}{4}$ 5) π

(Μονάδες 3)

II. Το εμβαδόν ενός κύκλου με μήκος L είναι:

- 1) $2L^2\pi$ 2) $\frac{L^2}{3\pi}$ 3) $\frac{L^2}{4\pi}$ 4) $\frac{L^2}{\pi}$ 5) $L^2\pi$

(Μονάδες 3)

III. Το εμβαδόν κυκλικού τομέα 120° είναι 3π . Η ακτίνα του κύκλου είναι:

- 1) 4 2) 6 3) 8 4) 3 5) 12

(Μονάδες 3)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

β. Κανονικό εξάγωνο με πλευρά $\lambda_6 = 4$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R). Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περιέχεται μεταξύ του κύκλου και του κανονικού εξαγώνου.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(Μονάδες 6)

