Κεφάλαιο 6°

Εγγεγραμμένα σχήματα

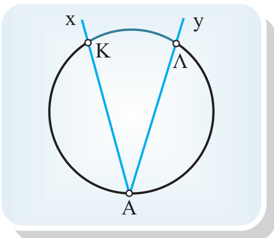
Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο 6 θα πρέπει να είναι σε θέση:

- ✓ Να γνωρίζει και να εφαρμόζει τη σχέση μεταξύ μιας εγγεγραμμένης γωνίας και της αντίστοιχης επίκεντρης καθώς και τις προτάσεις που προκύπτουν.
- ✓ Να γνωρίζει και να εφαρμόζει τη σχέση μεταξύ μιας γωνίας και της γωνίας που σχηματίζεται από μια χορδή και την εφαπτόμενη στο άκρο της.
- ✓ Να γνωρίζει και να εφαρμόζει τους τύπους που μας δίνουν το μέτρο της γωνίας που σχηματίζεται από δύο τέμνουσες του κύκλου (είτε τεμνόνται εντός είτε εκτός του κύκλου).
- ✓ Να γνωρίζει τις ιδιότητες των εγγράψιμων τετραπλεύρων καθώς και τα κριτήρια που εξασφαλίζουν ότι ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο.
- ✓ Ομοίως για τα περιγράψιμα τετράπλευρα.

Εγγεγραμμένη γωνία

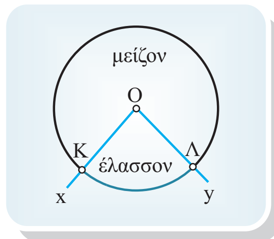
Ορισμός

Μια γωνία λέγεται **εγγεγραμμένη σε κύκλο**, όταν η κορυφή της είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο.



Μια γωνία, της οποίας η κορυφή είναι το κέντρο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο λέγεται **επίκεντρη**.

Σε κάθε επίκεντρη γωνία αντιστοιχίζουμε ένα από τα δύο τόξα (βλ. σχήμα) του κύκλου με άκρα Κ και Λ το οποίο ονομάζουμε **αντίστοιχο τόξο** της επίκεντρης γωνίας. Λέμε τότε ότι η γωνία **βαίνει** στο τόξο $\overset{\frown}{ΚΛ}$.

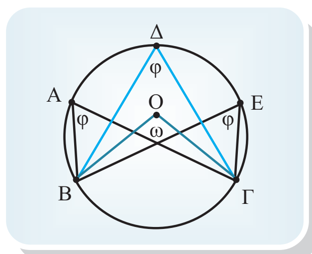


Αν δεν αναφέρεται κάτι άλλο θα θεωρούμε στα επόμενα ότι οι γωνίες βαίνουν στο έλασσον τόξο (κυρτές γωνίες). Το μέτρο της επίκεντρης γωνίας είναι ίσο με το μέτρο του τόξου στο οποίο βαίνει.

Θεώρημα

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης (δηλαδή της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο π.χ. στο διπλανό σχήμα είναι $ω = 2φ$.

Σε κάθε τόξο μπορεί να βαίνει μια μόνο επίκεντρη γωνία, όμως σε αυτό μπορούν να βαίνουν άπειρες εγγεγραμμένες.



Πορίσματα

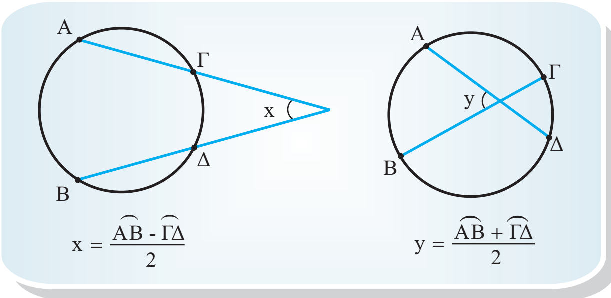
α. Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας είναι ίσο με το μισό του αντίστοιχου τόξου.

β. Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες.

γ. Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα, ίσων κύκλων είναι ίσες.

δ. Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ημικύκλιο είναι ορθές.

Γωνία δύο τεμνουσών



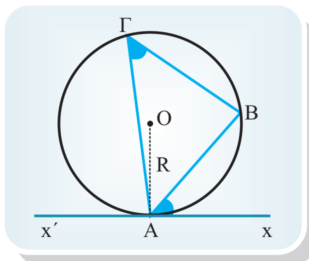
$$x = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{\Gamma\Delta}}{2} \qquad y = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta}}{2}$$

Γωνία χορδής και εφαπτομένης

Σε κύκλο (O,R) παίρνουμε χορδή AB και την εφαπτομένη στο σημείο A, την x΄Ax. Κάθε μία από τις γωνίες BAx και BAx΄ λέγεται **γωνία χορδής και εφαπτομένης**.

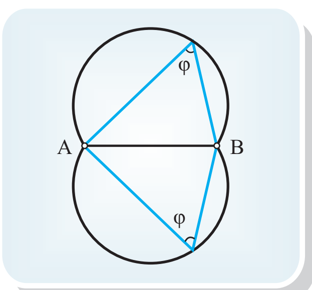
Η οξεία γωνία BAx λέγεται γωνία της χορδής AB και του κύκλου (O,R) .

Το τόξο AB που περιέχεται μεταξύ των πλευρών της γωνίας χορδής και εφαπτομένης λέγεται **αντίστοιχο τόξο της γωνίας αυτής**.



Η γωνία χορδής και εφαπτομένης είναι ίση με κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο αντίστοιχο τόξο της χορδής.

Βασικός Γεωμετρικός Τόπος

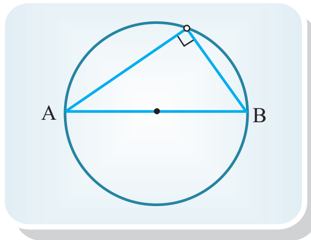


Ολές οι εγγεγραμμένες γωνίες στο ίδιο τόξο είναι ίσες. Οι κορυφές των γωνιών αυτών “βλέπουν τη χορδή του τόξου με ίσες γωνίες”. Λέμε λοιπόν ότι:

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου από τα οποία ένα τμήμα AB φαίνεται υπό γωνία $\hat{\varphi}$ είναι δύο τόξα κύκλων συμμετρικά ως προς την AB. Από τα τόξα εξαιρούνται τα σημεία A και B.

Πόρισμα

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου από τα οποία ένα τμήμα φαίνεται υπό ορθή γωνία είναι κύκλος διαμέτρου ΑΒ. Εξαιρούνται τα άκρα Α και Β του τμήματος.

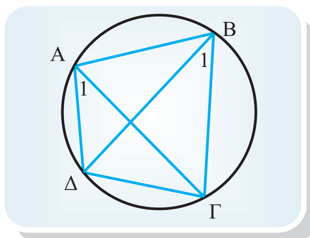


Το εγγεγραμμένο τετράπλευρο

Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγεγραμμένο** σε κύκλο αν οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου. Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγράψιμο** σε κύκλο, αν υπάρχει κύκλος, που διέρχεται από τις κορυφές του.

Θεώρημα

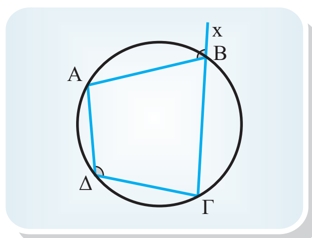
Ένα τετράπλευρο που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο έχει τις εξής ιδιότητες:



α. Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές $\left(\hat{A}+\hat{\Gamma}=180^{\circ} \text{ και } \hat{B}+\hat{\Delta}=180^{\circ}\right)$

β. Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές με ίσες γωνίες, π.χ. $\left(\hat{A}_1=\hat{B}_1\right)$

γ. Κάθε εξωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου είναι ίση με την απέναντι εσωτερική του γωνία.



Θεώρημα (Κριτήριο)

Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο αν έχει μία από τις παρακάτω ιδιότητες:

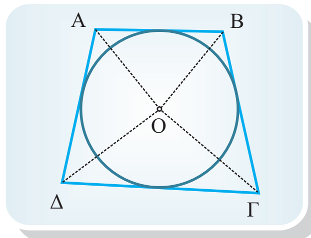
α. Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
β. Μια πλευρά του "φαίνεται" από τις απέναντι κορυφές με ίσες γωνίες.
γ. Μια εξωτερική του γωνία είναι ίση με την απέναντι εσωτερική του γωνία.

Ένα τετράπλευρο λέγεται **περιγεγραμμένο** σε κύκλο, αν όλες οι πλευρές του εφάπτονται στον κύκλο.

Σε κάθε περιγγεγραμμένο τετράπλευρο ισχύουν οι ιδιότητες:

α. Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.

β. Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.



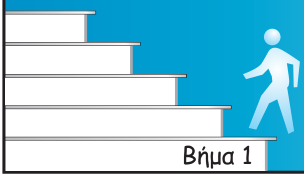
Ένα τετράπλευρο λέγεται **περιγράψιμο** σε κύκλο, αν υπάρχει κύκλος που εφάπτεται στις πλευρές του.

Θεώρημα (Κριτήριο)

Ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο σε κύκλο αν:

α. Οι διχοτόμοι τριών τουλάχιστον γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.

β. Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.



Μαθαίνουμε τις αποδείξεις

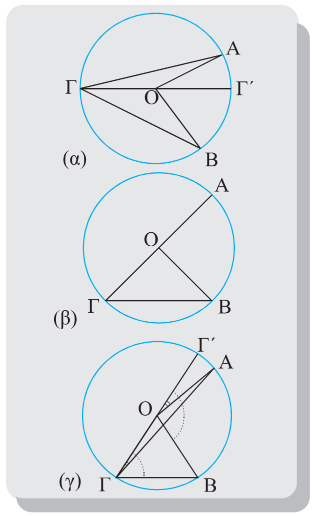
Θεώρημα

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.

Απόδειξη

Έστω κύκλος (Ο,R) και ένα τόξο του $\overset{\frown}{AB}$. Ας θεωρήσουμε την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ και σημείο Γ του κύκλου που δεν ανήκει στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$. Τότε θα αποδείξουμε ότι $A\hat{O}B = 2A\hat{\Gamma}B$.

Ας μελετήσουμε πρώτα την περίπτωση όπου το κέντρο Ο του κύκλου βρίσκεται στο εσωτερικό της εγγεγραμμένης γωνίας $A\hat{\Gamma}B$ (σχ. α). Έστω Γ΄ το αντιδιαμετρικό σημείο του Γ. Το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ισοσκελές, επομένως $O\hat{A}\Gamma = O\hat{\Gamma}A$. Η $\Gamma'\hat{O}A$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΟΓ, επομένως $\Gamma'\hat{O}A = 2O\hat{\Gamma}A$ και όμοια έχουμε ότι $\Gamma'\hat{O}B = 2O\hat{\Gamma}B$.

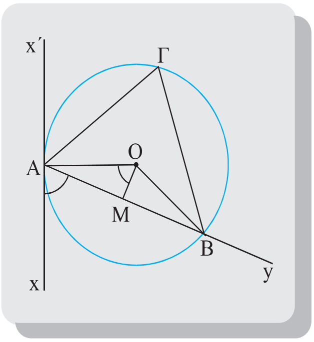


Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω ισότητες έχουμε ότι

$$A\hat{O}B = 2A\hat{\Gamma}B.$$

Θεώρημα

Η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής.



Απόδειξη

Έστω ότι η γωνία χορδής και εφαπτομένης $x\hat{A}y$ είναι οξεία (σχ. 6) και $A\hat{\Gamma}B$ μια τυχαία εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο της χορδής ΑΒ. Γνωρίζουμε ότι $A\hat{\Gamma}B = \dfrac{A\hat{O}B}{2}$.

Φέρουμε το απόστημα ΟΜ, οπότε $A\hat{O}M = M\hat{O}B = \dfrac{A\hat{O}B}{2} = A\hat{\Gamma}B$. Αλλά $x\hat{A}y = A\hat{O}M$ ως οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές. Επομένως $x\hat{A}y = A\hat{\Gamma}B$.

Θεώρημα

Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

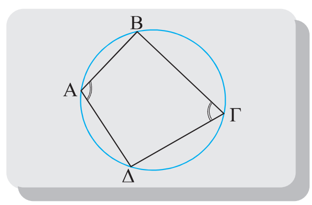
(i) Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

(ii) Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

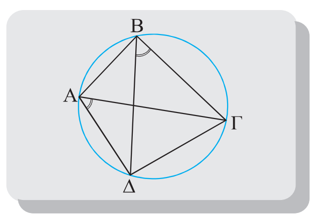
Απόδειξη

(i) Η γωνία $\hat{A}$ βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma\Delta}$, ενώ η $\hat{\Gamma}$ στο $\overset{\frown}{BA\Delta}$, με $\overset{\frown}{B\Gamma\Delta} + \overset{\frown}{BA\Delta} = 4\llcorner$ (σχ. 1). Επομένως $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\llcorner$.

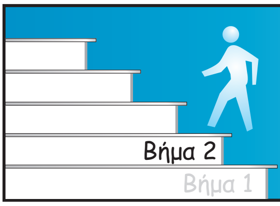
(ii) Δύο οποιεσδήποτε διαδοχικές κορυφές του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (π.χ. οι Α, Β) είναι και κορυφές δύο ίσων εγγεγραμμένων γωνιών ($\Delta\hat{A}\Gamma$ και $\Delta\hat{B}\Gamma$), που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, που ορίζει η απέναντι πλευρά ΓΔ (σχ. 2).



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις "κλειδιά"

Α. Από το σχολικό βιβλίο

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.

σ. 129: Ασκήσεις Εμπέδωσης 1, 2, 3, 4, 5

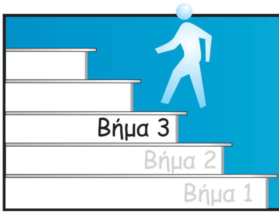
Αποδεικτικές Ασκήσεις 1, 2, 3

Σύνθετα Θέματα 1

σ. 134: Ερωτήσεις Κατανόησης 4, 5, 6

Ασκήσεις Εμπέδωσης 2, 3

Αποδεικτικές Ασκήσεις 1, 3

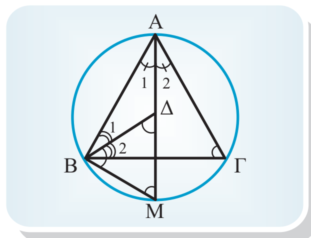


Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, τριγώνου ΑΒΓ, τέμνει τον περιγεγραμμένο του κύκλου στο Μ και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την ΑΜ στο Δ, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΜΒΔ είναι ισοσκελές.

Λύση:

Επειδή η ΑΜ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$, θα ισχύει: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2}$. Επίσης και $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}$, αφού η ΒΔ είναι διχοτόμος της $\hat{B}$. Στο $B\hat{\Delta}M$ έχουμε:



- $\hat{M} = \hat{\Gamma}$ ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$.
- $M\hat{B}\Gamma = \hat{A}_2$ ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{M\Gamma}$.

Οπότε: $\Delta\hat{B}M = \hat{B}_2 + M\hat{B}\Gamma = \hat{B}_2 + \hat{A}_2 = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2} = \frac{180^o - \hat{\Gamma}}{2} = 90^o - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$

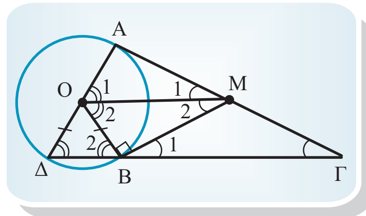
- $B\hat{\Delta}M = 180^o - \Delta\hat{B}M - \hat{M} = 180^o - \left(90^o - \frac{\hat{\Gamma}}{2}\right) - \hat{\Gamma} = 180^o - 90^o + \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{\Gamma} = 90^o - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$

Άρα $\Delta\hat{B}M = B\hat{\Delta}M = 90^o - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$, οπότε το $M\overset{\Delta}{B}\Delta$ είναι ισοσκελές με κορυφή το Μ.

2. Από σημείο Μ εκτός κύκλου (Ο, R) φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ στον κύκλο. Προεκτείνουμε την ΑΜ και στην προέκταση παίρνουμε τμήμα ΜΓ = ΜΑ. Αν Δ είναι το αντιδιαμετρικό σημείο του Α, να δείξετε ότι τα σημεία Δ, Β, Γ είναι συνευθειακά.

Λύση:

Ισχύει: ΜΑ = ΜΒ (1) ως εφαπτομένα τμήματα προς κύκλο από σημείο αυτού.



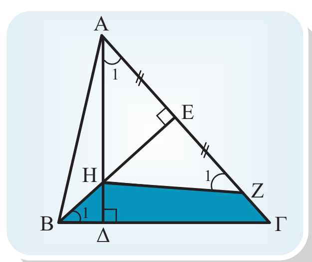
Επίσης η ΟΜ διχοτομεί τις γωνίες $A\hat{M}B$ και $A\hat{O}B$, οπότε: $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$.

Όμως $M\Gamma = MA \overset{(1)}{\Rightarrow} M\Gamma = MB$. Άρα το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}$ ως προσκείμενες γωνίες στην βάση του ΒΓ. Η $A\hat{M}B$ είναι εξωτερική γωνία του $M\overset{\Delta}{B}\Gamma$, οπότε: $A\hat{M}B = \hat{B}_1 + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{M}_1 + \hat{M}_2 = \hat{B}_1 + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 2\cdot\hat{B}_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cdot\hat{M}_2 = 2\cdot\hat{B}_1 \Leftrightarrow \hat{M}_2 = \hat{B}_1$. Άρα ΒΓ//ΟΜ (2) διότι τεμνόμενες από την ΒΜ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους ίσες. Επειδή ΟΔ = ΟΒ = R το τρίγωνο ΟΔΒ είναι ισοσκελές. Άρα $\hat{\Delta} = \hat{B}_2$. Όμως $\hat{\Delta} = \frac{1}{2}A\hat{O}B$, αφού μια εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο με αυτήν. Άρα $\hat{\Delta} = \hat{O}_2 \Leftrightarrow \hat{B}_2 = \hat{O}_2$ οπότε ΒΔ//ΟΜ (3) διότι τεμνόμενες από την ΟΒ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους ίσες. Άρα από τις (2) και (3) και λόγω του αιτήματος του Ευκλείδη, συμπεραίνουμε ότι οι ευθείες ΒΔ και ΒΓ ταυτίζονται. Επομένως τα σημεία Δ, Β, Γ είναι συνευθειακά.

3. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, θεωρούμε τα ύψη του ΑΔ και ΒΕ και έστω Η το ορθόκεντρό του. Στο ΕΓ παίρνουμε τμήμα ΕΖ = ΑΕ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΗΖΓ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Λύση:



Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma$ $(\hat{\Delta} = 1^{\llcorner})$ έχουμε:

$$\hat{A}_1 + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \hat{A}_1 = 90^o - \hat{\Gamma} \quad (1)$$

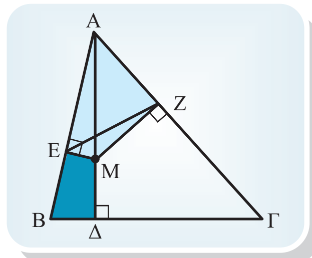
Ομοίως από το ορθογώνιο τρίγωνο $B\overset{\Delta}{E}\Gamma$ $(\hat{E} = 1^{\llcorner})$ έχουμε: $\hat{B}_1 = 90^o - \hat{\Gamma}$ (2)

Το $A\overset{\Delta}{H}Z$ είναι ισοσκελές, αφού το ΗΕ είναι ύψος και διάμεσος, άρα $\hat{Z}_1 = \hat{A}_1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \hat{Z}_1 = 90^o - \hat{\Gamma} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \hat{Z}_1 = \hat{B}_1$.

Άρα το τετράπλευρο ΒΗΖΓ είναι εγγράψιμο αφού μια εξωτερική του γωνία είναι ίση με την απέναντι εσωτερική γωνία.

4. **Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε το ύψος του ΑΔ. Από τυχαίο σημείο Μ του ΑΔ φέρουμε τις αποστάσεις του ΜΕ και ΜΖ από τις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το ΒΕΖΓ είναι εγγράψιμο.**

Λύση:



Το τετράπλευρο ΕΜΔΒ είναι εγγράψιμο, αφού

$$B\hat{E}M + B\hat{\Delta}M = 90^o + 90^o = 180^o.$$

Άρα $\hat{B} + E\hat{M}\Delta = 180^o$ (1)

Ομοίως και το τετράπλευρο ΑΕΜΖ είναι εγγράψιμο $\left(A\hat{E}M + A\hat{Z}M = 90^o + 90^o = 180^o\right)$, οπότε η πλευρά του ΕΜ φαίνεται από τις κορυφές Α και Ζ υπό ίσες γωνίες. Άρα $E\hat{A}M = E\hat{Z}M$ (2).

Στο τρίγωνο ΑΕΜ η $E\hat{M}\Delta$ είναι εξωτερική, οπότε:

$$E\hat{M}\Delta = E\hat{A}M + A\hat{E}M \Leftrightarrow E\hat{M}\Delta = E\hat{A}M + 90^o \quad (3)$$

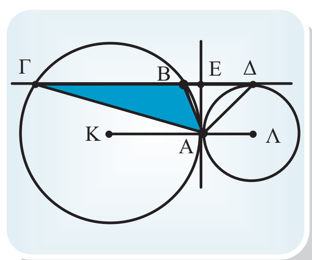
Στο τετράπλευρο ΒΕΖΓ έχουμε:

$$\hat{B} + E\hat{Z}\Gamma = \hat{B} + \left(E\hat{Z}M + M\hat{Z}\Gamma\right) \overset{(2)}{=} \hat{B} + \left(E\hat{A}M + 90^o\right) \overset{(3)}{=} \hat{B} + E\hat{M}\Delta \overset{(1)}{=} 180^o$$

Άρα το ΒΕΖΓ είναι εγγράψιμο, αφού δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

5. **Δύο κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) με R > ρ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Από το σημείο Δ του κύκλου (Λ,ρ) φέρουμε ευθεία που εφάπτεται στον κύκλο (Λ, ρ) και τέμνει τον κύκλο (Κ, ρ) στα σημεία Β, Γ. Να δείξετε ότι η ΑΔ είναι εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ.**

Λύση:



Αρκεί να δείξουμε ότι: $B\hat{A}\Delta = \Lambda\hat{A}\Delta$

Στο τρίγωνο ΑΓΔ η $\Lambda\hat{A}\Delta$ είναι εξωτερική του γωνία, οπότε: $\Lambda\hat{A}\Delta = A\hat{\Gamma}B + A\hat{\Delta}E$ (1)

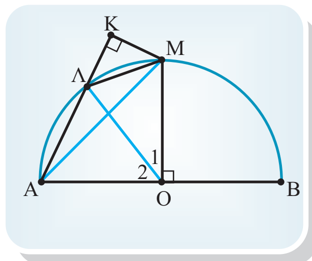
Φέρουμε την κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων, η οποία τέμνει της ΓΔ στο Ε. Τότε ΕΑ = ΕΔ σαν εφαπτόμενα τμήματα από το Ε προς τον κύκλο (Λ, ρ). Άρα $A\hat{\Delta}E = \Delta\hat{A}E$ (2) σαν προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου.

Επίσης $E\hat{A}B = A\hat{\Gamma}B$ (3) διότι η γωνία από χορδή και εφπτομένη είναι ίση με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο αντίστοιχο τόξο της.

Η $(1)\underset{(3)}{\overset{(2)}{\Rightarrow}} \Lambda\hat{A}\Delta = E\hat{A}B + \Delta\hat{A}E \Leftrightarrow \Lambda\hat{A}\Delta = B\hat{A}\Delta$ ο.ε.δ.

6. Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ, θεωρούμε το μέσο του Μ. Έστω Λ τυχαίο σημείο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$. Φέρουμε την ευθεία $MK \perp A\Lambda$. Να δείξετε ότι: ΜΚ = ΚΛ

Λύση:



Φέρουμε τα τμήματα ΛΜ, ΑΜ, ΟΛ, όπου Ο το κέντρο του ημικύκλιου. Τότε $OM \perp AB$, αφού για την επίκεντρη γωνία $B\hat{O}M$ ισχύει $B\hat{O}M = 90^o$ διότι βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{BM} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \dfrac{180^o}{2} = 90^o$

Στο τρίγωνο ΑΛΜ η $K\hat{\Lambda}M$ είναι εξωτερική, οπότε: $K\hat{\Lambda}M = \Lambda\hat{A}M + A\hat{M}\Lambda \quad (1)$

Όμως κάθε εγγεγραμμένη γωνία είναι, κατά μέτρο, ίση με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο με αυτήν.

Άρα: • $\Lambda\hat{A}M = \dfrac{1}{2}\hat{O}_1$ • $A\hat{M}\Lambda = \dfrac{1}{2}\hat{O}_2$

Η $(1)\underset{(3)}{\overset{(2)}{\Rightarrow}} K\hat{\Lambda}M = \dfrac{1}{2}\hat{O}_1 + \dfrac{1}{2}\hat{O}_2 \Leftrightarrow K\hat{\Lambda}M = \dfrac{1}{2}\left(\hat{O}_1 + \hat{O}_2\right) \Leftrightarrow K\hat{\Lambda}M = \dfrac{1}{2}A\hat{O}M \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow K\hat{\Lambda}M = \dfrac{1}{2}\cdot 90^o \Leftrightarrow K\hat{\Lambda}M = 45^o$

Το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ορθογώνιο στο Κ και $K\hat{\Lambda}M = 45^o$, οπότε και $K\hat{M}\Lambda = 90^o - 45^o = 45^o$. Άρα το τρίγωνο ΚΛΜ είναι και ισοσκελές, οπότε $\Lambda K = MK$.

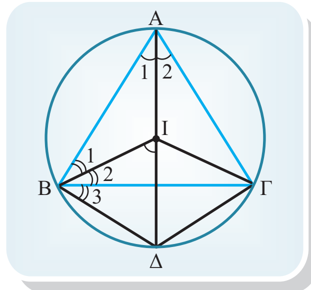
7. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγγραμμένο κύκλο του τριγώνου σε σημείο Δ, να δείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο ΙΒΔ είναι ισοσκελές, όπου Ι είναι το εγκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

β. Το σημείο Δ είναι περίκεντρο του τριγώνου ΙΒΓ.

Λύση:

α. Φέρουμε τις διχοτόμους των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ του τριγώνου ΑΒΓ, οι οποίες



τέμνονται στο έγκεντρο Ι. Τότε: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2}$ και

$\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}$. Στο τρίγωνο ΙΒΔ έχουμε:

- η γωνία του $B\hat{I}\Delta$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΒΙ, οπότε:

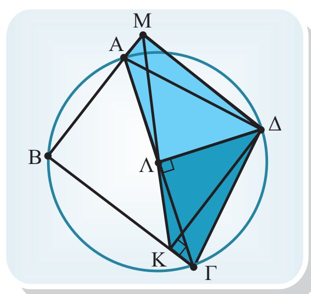
$$B\hat{I}\Delta = \hat{B}_1 + \hat{A}_1 = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}$$

- $I\hat{B}\Delta = \hat{B}_2 + \hat{B}_3 = \hat{B}_2 + \hat{A}_2 = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}$, αφού $\hat{B}_3 = \hat{A}_2$ σαν εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$. Άρα $B\hat{I}\Delta = I\hat{B}\Delta$ οπότε το τρίγωνο ΙΒΔ είναι ισοσκελές με κορυφή το Δ, οπότε: ΔΒ = ΔΙ (1)

β. Επειδή οι εγγεγραμμένες γωνίες $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$ είναι ίσες, θα είναι ίσες και οι αντίστοιχες χορδές τους, δηλαδή ΔΒ = ΔΓ (2)
Από (1) και (2) έχουμε: ΔΒ = ΔΙ = ΔΓ, δηλαδή το Δ ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου ΙΒΓ, άρα είναι το περίκεντρο του.

8. Έστω σημείο Δ το οποίο δεν ανήκει στο εσωτερικό τριγώνου ΑΒΓ. Αν οι προβολές του Δ στις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ είναι συνευθειακά σημεία, να δείξετε ότι το Δ ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση:

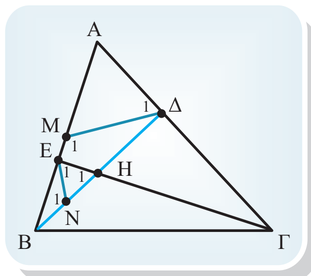


Έστω $\Delta K \perp B\Gamma$, $\Delta\Lambda \perp A\Gamma$, $\Delta M \perp AB$, με τα σημεία Κ, Λ, Μ να ανήκουν στην ίδια ευθεία. Για να δείξουμε ότι το Δ ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ αρκεί να δείξουμε ότι το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο. Το τετράπλευρο ΚΛΔΓ είναι εγγράψιμο, αφού $\Gamma\hat{K}\Delta = \Gamma\hat{\Lambda}\Delta = 90^o$, δηλαδή η πλευρά του ΓΔ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του Κ, Λ υπό ίσες γωνίες. Άρα $B\hat{\Gamma}\Delta = \Delta\hat{\Lambda}M$ (1), διότι σε εγγράψιμο τετράπλευρο μια εξωτερική του γωνία είναι ίση με την απέναντι εσωτερική. Επίσης το τετράπλευρο ΑΜΔΛ είναι εγγράψιμο, αφού δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές $\left(A\hat{\Lambda}\Delta + A\hat{M}\Delta = 90^o + 90^o = 180^o\right)$. Άρα $\Delta\hat{\Lambda}M = \Delta\hat{A}M$ (2), αφού σε ένα εγγράψιμο τετράπλευρο κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $B\hat{\Gamma}\Delta = \Delta\hat{A}M$. Συνεπώς στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, μια εξωτερική του γωνία είναι ίση με την απέναντι εσωτερική. Άρα το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο.

9. Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ. Αν Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, Μ το μέσο της πλευράς ΑΒ και Ν το μέσο του ΗΒ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΜΕΝ είναι εγγράψιμο.

Λύση:

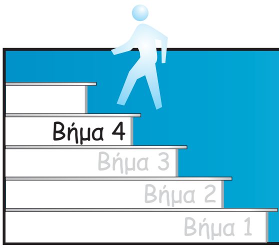


Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\overset{\triangle}{B}\Delta$ η ΜΔ είναι η διάμεσος του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ΑΒ. Άρα $\Delta M = \dfrac{AB}{2} = AM$. Συνεπώς το τρίγωνο ΑΔΜ είναι ισοσκελές με κορυφή το Μ, οπότε $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}$ (1) ως προσκείμενες γωνίες στην βάση του ΑΔ. Τότε για την εξωτερική γωνία $\hat{M}_1$ του τριγώνου ΑΔΜ έχουμε: $\hat{M}_1 = \hat{A} + \hat{\Delta}_1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \hat{M}_1 = 2\hat{A}$ (2).

Το τετράπλευρο ΑΔΗΕ έχει $A\hat{\Delta}H + A\hat{E}H = 90^o + 90^o = 180^o$, δηλαδή δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, οπότε είναι εγγράψιμο. Συνεπώς θα ισχύει ότι $\hat{H}_1 = \hat{A}$ (3), αφού κάθε εξωτερική γωνία εγγράψιμου τετραπλευρού είναι ίση με την απέναντι εσωτερική.

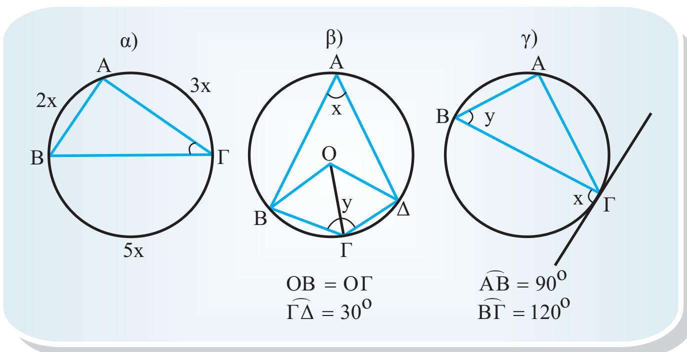
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΗ η ΕΝ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΒΗ. Άρα $EN = \dfrac{BH}{2} = NH$. Δηλαδή το τρίγωνο ΕΝΗ είναι ισοσκελές με κορυφή Ν. Άρα $\hat{H}_1 = \hat{E}_1$ (4) ως προσκείμενες γωνίες στη βάση του. Οπότε για την εξωτερική του γωνία $\hat{N}_1$ έχουμε:

$\hat{N}_1 = \hat{E}_1 + \hat{H}_1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \hat{N}_1 = 2\hat{H}_1 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \hat{N}_1 = \hat{M}_1$. Άρα το τετράπλευρο ΔΜΕΝ είναι εγγράψιμο, αφού μια εξωτερική γωνία του είναι ίση με την απέναντι εσωτερική.



Λύνουμε μόνοι μας

1. **Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα να βρείτε τα x και y (όπου x, y γωνίες ή τόξα ανάλογα).**



2. **Στην προέκταση της ακτίνας ΟΑ κύκλου (Ο, ρ), παίρνουμε τμήμα ΑΒ = ΟΑ και φέρνουμε τη ΒΓ κάθετη σε τυχαία εφαπτομένη ε του κύκλου. Να δειχθεί ότι: $\widehat{ΟΑΓ} = 3\widehat{ΑΓΒ}$**

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. **Δύο κύκλοι (Κ, ρ) και (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Φέρνουμε μια χορδή ΑΒ του κύκλου (Κ, ρ) και τη χορδή $ΑΓ \perp ΑΒ$ του κύκλου (Λ, ρ). Να δειχθεί ότι ΒΓ//=ΚΛ.**

....

....

....

....

....

....

....

....

4. **Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε τη διάμετρο ΑΒ, τη χορδή ΑΓ και τη διχοτόμο της γωνίας ΒΑΓ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ και την ΒΓ στο Δ. Αν η ΑΜ τέμνει στο σημείο Ζ την εφαπτομένη του κύκλου στο Β, να δειχθεί ότι: ΔΜ = ΜΖ.**

....

....

....
....
....
....
....
....
....
....

5. **Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ, ο περιγγεγραμμένος κύκλος του (Κ, R) και τυχαίο σημείο Μ του τόξου ΒΓ. Να δείχθεί ότι: ΜΑ = ΜΒ + ΜΓ. (Υπόδειξη: Παίρνουμε στη ΜΑ τμήμα ΜΔ = ΜΒ)**

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

6. **Δύο κύκλοι (Κ, R), (Λ, ρ) τέμνονται στα σημεία Α και Β. Μία κοινή εφαπτομένη τους εφάπτεται των κύκλων στα Γ και Δ αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι: $\Gamma\hat{A}\Delta + \Gamma\hat{B}\Delta = 180^{o}$.**

....
....
....
....
....

7. **Οι κορυφές τριγώνου ΑΒΓ είναι σημεία του κύκλου (Ο, R). Η εφαπτομένη στο σημείο Α τέμνει την ΒΓ στο Ε. Φέρνουμε τη διχοτόμο ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ. Να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.**

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

8. **Στον κύκλο (Ο, ρ) η ΑΒ είναι η διάμετρος και η ΓΔ είναι η χορδή. Να αποδειχθεί ότι η χορδές ΑΓ και ΔΒ έχουν ίσες προβολές στην ευθεία ΓΔ.**

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

9. Στον κύκλο (Ο, ρ) παίρνουμε τις χορδές ΑΒ = ΑΓ και φέρνουμε από το Α ευθεία, που τέμνει τον κύκλο στο Ε και τη ΒΓ στο Δ. Να δειχθεί ότι η ΑΒ είναι εφαπτομένη του κύκλου, που περνάει από τα σημεία Β, Δ, Ε.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

10. Δύο κύκλοι με κέντρα Κ και Λ τέμνονται στα σημεία Α και Β. Φέρνουμε τις διαμέτρους ΑΚΓ και ΑΛΔ και τις χορδές ΓΖ//ΔΕ. Να δειχθεί ότι τα σημεία Ζ, Α, Ε είναι συνευθειακά.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

11. Δίνεται χορδή ΒΓ, κύκλου (Ο, ρ) και οι εφαπτόμενες $ε_1$ και $ε_2$ στα άκρα της. Από σημείο Μ της ΒΓ, φέρνουμε κάθετη στην ΟΜ, που τέμνει τις $ε_1$ και $ε_2$ στα σημεία Ε και Ζ. Να δειχθεί ότι ΕΜ = ΜΖ.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

12. Σε γωνία $x\hat{O}ψ$ παίρνουμε τη διχοτόμο ΟΔ και το εσωτερικό της σημείο Ρ της $Δ\hat{O}ψ$. Αν Α, Β, Γ είναι οι προβολές του Ρ στις ημιευθείες ΟΔ, Οx, Οψ να δειχθεί ότι:

α. Τα σημεία Ο, Β, Α, Ρ, Γ είναι ομοκυκλικά

β. ΑΒ = ΑΓ

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

13. **Οι πλευρές ΑΒ και ΓΔ εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται στο Ε και οι πλευρές ΑΔ και ΒΓ στο Ζ. Η διχοτόμος της γωνίας Ε τέμνει τις ΒΓ, ΑΔ στα σημεία Κ, Μ και η διχοτόμος της $\hat{Z}$ τέμνει τις πλευρές ΓΔ και ΑΒ, στα Λ, Ρ. Να δείξετε ότι:**
α. Οι διχοτόμοι των Ε και Ζ τέμνονται κάθετα
β. Το τετράπλευρο ΚΛΜΡ είναι ρόμβος

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ελέγχουμε τη γνώση μας

Θέμα $1^{ο}$

Α. Να δείξετε ότι κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο. ***(Μονάδες 12)***

Β. Να δείξετε ότι η γωνία που σχηματίζεται από μια χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής. ***(Μονάδες 13)***

Θέμα 2^{0}

Α. Οι κορυφές τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΔΓ) είναι σημεία του κύκλου (Κ, ρ). Να δείξετε ότι, η γωνία των εφαπτόμενων του κύκλου αυτού, στα σημεία Α και Γ, είναι ίση με τη γωνία των ευθειών ΑΔ και ΒΓ. ***(Μονάδες 16)***

Β. Να δειχθεί ότι κάθε εγγεγραμμένο τραπέζιο είναι ισοσκελές. ***(Μονάδες 9)***

Θέμα 3^{0}

Α. Δύο κύκλοι, τέμνονται στα σημεία Β και Δ. Ευθεία, που περνάει από το Β τέμνει τους κύκλους στα σημεία Α και Γ. Οι ευθείες ΑΔ και ΓΔ τέμνουν αντίστοιχα τους κύκλους στα Ε και Ζ και οι ευθείες ΑΖ, ΓΕ τέμνονται στο Η. Να δείξετε, ότι το τετράπλευρο ΔΕΗΖ είναι εγγράψιμο σε κύκλο. ***(Μονάδες 13)***

Β. Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ, ρ). Φέρνουμε την εφαπτομένη Αx και ευθεία ε//Αx που τέμνει την ΑΓ στο Δ και την ΑΒ στο Ε. Να δείξετε ότι το ΒΓΔΕ είναι εγγράψιμο. ***(Μονάδες 12)***

Θέμα 4^{0}

Α. Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από τα Α και Β, φέρνουμε ευθείες που τέμνουν τον έναν κύκλο στα Γ και Γ΄ και τον άλλον στα Δ και Δ΄. Να δειχθεί ότι ΓΓ΄//ΔΔ΄. ***(Μονάδες 13)***

Β. Από ένα σημείο Ι του ύψους ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ, φέρνουμε τα τμήματα ΙΚ και ΙΛ κάθετα στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΚΛ είναι εγγράψιμο σε κύκλο. ***(Μονάδες 12)***