Κεφάλαιο 5^{ο}

Παραλληλόγραμμα - Τραπέζια

Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο 5 θα πρέπει να είναι σε θέση:

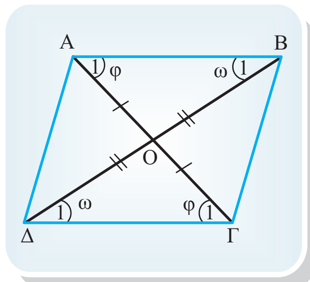
- ✓ Να γνωρίζει τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου, ορθογωνίου, ρόμβου, τετραγώνου, τραπεζίου.
- ✓ Να γνωρίζει τα κριτήρια, τι πρέπει δηλαδή να ισχύει για να είναι ένα τετράπλευρο κάποιο από τα προαναφερθέντα σχήματα.
- ✓ Να γνωρίζει και να εφαρμόζει την ιδιότητα που έχει το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου.
- ✓ Να γνωρίζει τα σημαντικά κέντρα ενός τριγώνου, το ορθόκεντρο, το βαρύκεντρο και τις ιδιότητες του.
- ✓ Να γνωρίζει και να εφαρμόζει την ιδιότητα της διαμέσου ενός ορθογώνιου τριγώνου και τις διάφορες προτάσεις που προκύπτουν από αυτήν.

Ορισμός.

Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

Δηλαδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, όταν ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ//ΒΓ.

• **Ιδιότητες παραλληλογράμμων**

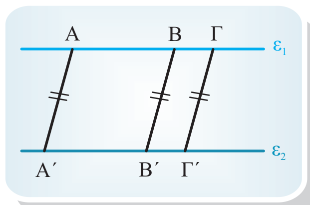


Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

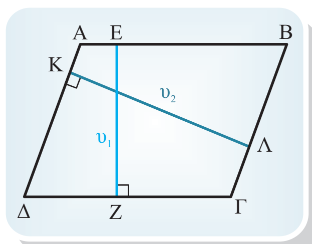
i. Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.

ii. Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.

iii. Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.
Το σημείο τομής των διαγωνίων παραλληλογράμμου είναι κέντρο συμμετρίας του.
Για το λόγο αυτό λέγεται **κέντρο** του παραλληλογράμμου.



Πόρισμα
Παράλληλα τμήματα που έχουν τα άκρα τους σε δύο παράλληλες ευθείες είναι ίσα.
Αν τα τμήματα είναι κάθετα στις παράλληλες, το κοινό μήκος τους λέγεται απόσταση των παραλλήλων. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στις ευθείες των απέναντι πλευρών παραλληλογράμμου και είναι κάθετο σε αυτές λέγεται ύψος του παραλληλογράμμου, ενώ οι απέναντι πλευρές του λέγονται βάσεις ως προς αυτό το ύψος.



• **Κριτήρια για παραλληλόγραμμα**

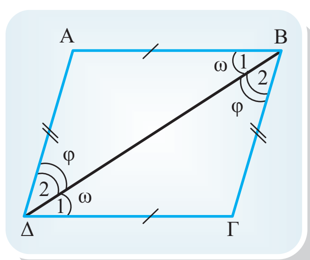
Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

i. Οι απέναντι πλευρές ανά δύο είναι ίσες.

ii. Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

iii. Οι απέναντι γωνίες ανά δύο είναι ίσες.

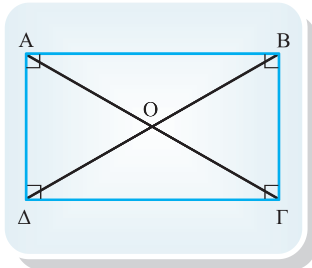
iv. Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.



Ορθογώνιο.

Ορισμός.

Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μια γωνία ορθή.



Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες, ενώ δύο διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές (ως εντός και επί τα αυτά μέρη), προκύπτει ότι όλες οι γωνίες του ορθογωνίου είναι ορθές.

- **Ιδιότητες ορθογωνίου**

Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες.

- **Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο**

Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

i. Είναι παραλληλόγραμμο και έχει μία ορθή γωνία.

ii. Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

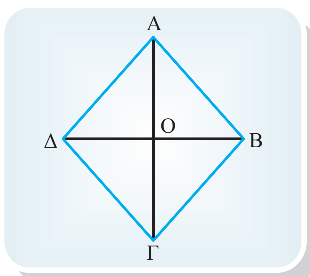
iii. Έχει τρεις γωνίες ορθές.

iv. Όλες οι γωνίες του είναι ίσες.

Ρόμβος.

Ορισμός.

Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.



Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες προκύπτει ότι όλες οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες.

- **Ιδιότητες του ρόμβου.**

i. Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.
ii. Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του.

- **Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος.**

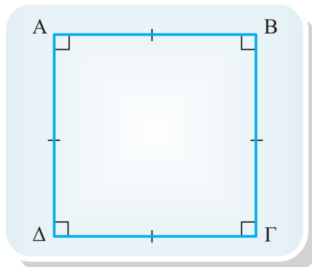
Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:
i. Έχει όλες τις πλευρές του ίσες.
ii. Είναι παραλληλόγραμμο και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.

iii. Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
iv. Είναι παραλληλόγραμμο και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.

• **Οι διαγώνιοι του ρόμβου:**
α. διχοτομούνται
β. τέμνονται κάθετα
γ. διχοτομούν τις γωνίες
δ. είναι άξονες συμμετρίας

Τετράγωνο.

Ορισμός.



Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

• **Ιδιότητες του τετραγώνου.**

Από τον ορισμό προκύπτει ότι το τετράγωνο έχει όλες τις ιδιότητες του ορθογωνίου και όλες τις ιδιότητες του ρόμβου. Επομένως, σε κάθε τετράγωνο:

i. Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.
ii. Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.
iii. Όλες οι γωνίες του είναι ορθές.
iv. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες, τέμνονται κάθετα, διχοτομούνται και διχοτομούν τις γωνίες του.

• **Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο τετράγωνο.**

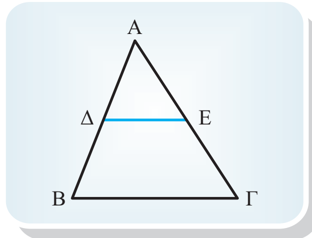
Για να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι ορθογώνιο και ρόμβος.
Αποδεικνύεται ότι ένα παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο, αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:
i. Μία γωνία του είναι ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
ii. Μία γωνία του είναι ορθή και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.
iii. Μία γωνία του είναι ορθή και οι διαγώνιοί του κάθετες.
iv. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
v. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες.

Εφαρμογές στα τρίγωνα.

Θεώρημα Ι **Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.**

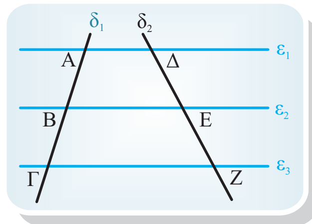
Στο παρακάτω σχήμα αν Δ, Ε είναι μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, τότε $\Delta E // = \frac{B\Gamma}{2}$

Θεώρημα ΙΙ **Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.**



Θεώρημα ΙΙΙ **Αν τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μια ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.**

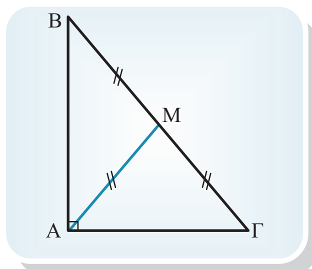
Αν ΑΒ = ΒΓ τότε ΔΕ = ΕΖ



<u>Μια ιδιότητα του ορθογωνίου τριγώνου</u>

Θεώρημα Ι **Η διαμέσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.**

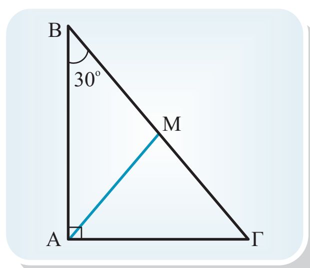
Αν ΑΜ διάμεσος τότε $AM = \dfrac{B\Gamma}{2}$



Θεώρημα ΙΙ **Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.**

Πόρισμα.
Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30^o, τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.

Αν $\hat{B} = 30^o$ τότε $A\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2}$ και αντίστροφα.

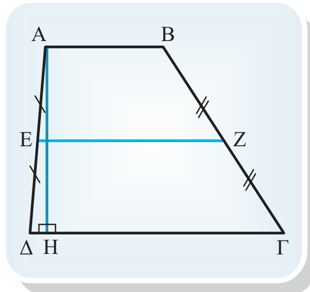


Τραπέζιο

Ορισμός:

Τραπέζιο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.

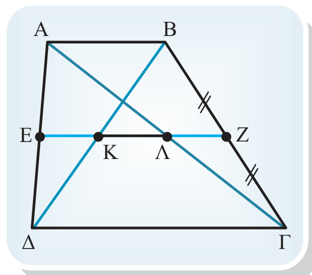
Οι παράλληλες πλευρές ΑΒ και ΓΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ λέγονται βάσεις του τραπεζίου. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στις βάσεις του τραπεζίου με τα άκρα του στους φορείς των βάσεων λέγεται ύψος του τραπεζίου. Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΖ που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του λέγεται διάμεσος του τραπεζίου.



Θεώρημα Ι **Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμα τους. Δηλαδή, αν ΕΖ διάμεσος του τραπεζίου ΑΒΓΔ,**
τότε:

i. ΕΖ//ΑΒ, ΓΔ και

ii. $\mathbf{EZ = \dfrac{AB + \Gamma\Delta}{2}}$



Πόρισμα.

Η διάμεσος ΕΖ τραπεζίου ΑΒΓΔ διέρχεται από τα μέσα Κ και Λ των διαγωνίων του και το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο με τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεών του.

Ισοσκελές τραπέζιο

Ορισμός:

Ισοσκελές τραπέζιο λέγεται το τραπέζιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες.

• **Ιδιότητες ισοσκελούς τραπεζίου**

Αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε:

i. Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες.

ii. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

• **Κριτήρια για να είναι ένα τραπέζιο ισοσκελές**

Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις.

i. Οι μη παράλληλες πλευρές του είναι ίσες.

ii. Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση του είναι ίσες.

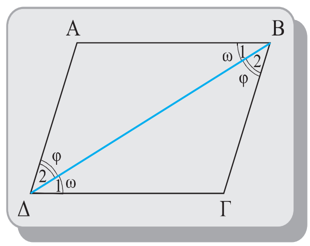
iii. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

(i) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
(ii) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
(iii) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Απόδειξη των i), ii)

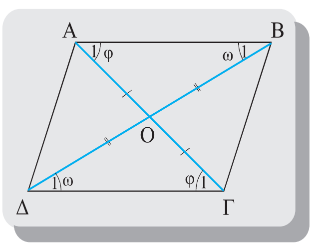
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ (σχ. 1). Έχουμε:
$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ (εντός εναλλάξ).
ΒΔ κοινή πλευρά.
$\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2 = \varphi$ (εντός εναλλάξ).
Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ είναι ίσα, οπότε ΑΒ = ΓΔ και ΑΔ = ΒΓ. Επίσης έχουμε $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = \varphi + \omega$.



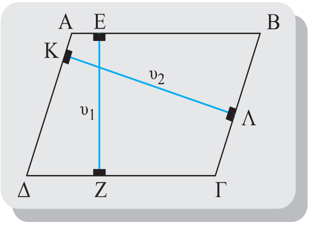
Σχήμα 1

Απόδειξη της ιδιότητας iii)

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ. Έχουμε:



ΑΒ = ΓΔ
$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ (εντός εναλλάξ).
$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \varphi$ (εντός εναλλάξ).
Άρα, τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ είναι ίσα, οπότε ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ =ΟΔ.



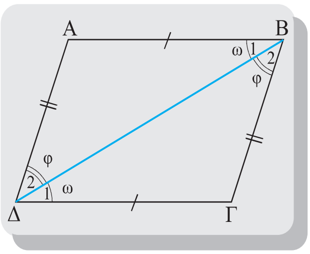
Σχήμα 1

Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

(i) Οι απέναντι πλευρές ανά δύο είναι ίσες.
(ii) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.
(iii) Οι απέναντι γωνίες ανά δύο είναι ίσες.
(iv) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Απόδειξη

Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Για να αποδείξουμε τα κριτήρια, θα πρέπει σύμφωνα με τον ορισμό να αποδείξουμε ότι σε κάθε περίπτωση, οι απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου είναι παράλληλες.



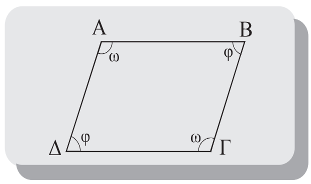
Σχήμα 2

(i) Έστω ΑΒ = ΓΔ και ΑΔ = ΒΓ (σχ. 1). Αν φέρουμε τη διαγώνιο ΒΔ, τότε σχηματίζονται τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ που είναι ίσα, γιατί ΑΒ = ΓΔ, ΑΔ = ΒΓ και ΒΔ κοινή πλευρά. Άρα $\hat{Β}_1 = \hat{Δ}_1 = ω$ και $\hat{Β}_2 = \hat{Δ}_2 = φ$, οπότε ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ//ΒΓ, δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

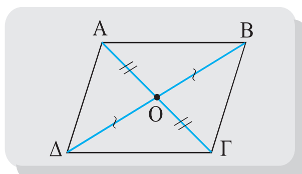
(ii) Έστω ΑΒ// = ΓΔ (σχ. 2). Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ είναι ίσα, γιατί ΑΒ = ΓΔ, $\hat{Β}_1 = \hat{Δ}_1 = ω$ και η ΒΔ είναι κοινή πλευρά. Επομένως, όμοια με το (i), το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

(iii) Αν $\hat{Α} = \hat{Γ} = ω$ και $\hat{Β} = \hat{Δ} = φ$ (σχ. 3) η σχέση $\hat{Α}+\hat{Β}+\hat{Γ}+\hat{Δ}= 4\llcorner$ γράφεται $2ω + 2φ = 4\llcorner$ ή $φ + ω = 2\llcorner$. Επομένως, έχουμε ότι $\hat{Α} + \hat{Δ} = 2\llcorner$, οπότε ΑΒ // ΓΔ και $\hat{Α} + \hat{Β} = 2\llcorner$, οπότε ΑΔ // ΒΓ, δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

(iv) Έστω ΑΟ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ (σχ. 4). Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ, καθώς και τα τρίγωνα ΑΟΔ και ΒΟΓ είναι ίσα. Επομένως, όμοια με το (i), θα είναι ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ//ΒΓ, δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 3



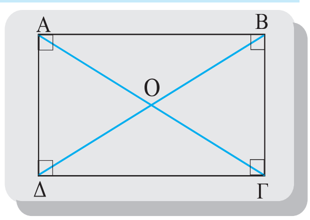
Σχήμα 4

Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες.

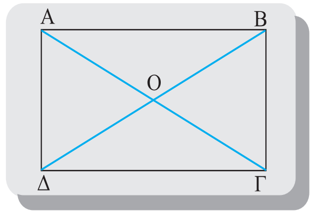
Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο. Θα αποδείξουμε ότι οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ είναι ίσες

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα ($\hat{Α} = \hat{Δ} = 90°$, ΑΔ κοινή, ΑΒ = ΔΓ), οπότε ΑΓ = ΒΔ.

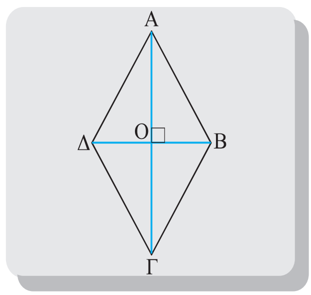


Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:



(i) Είναι **παραλληλόγραμμο** και έχει **μία ορθή** γωνία.
(ii) Είναι **παραλληλόγραμμο** και οι **διαγώνιοί** του είναι **ίσες**.
(iii) Έχει **τρεις** γωνίες **ορθές.**
(iv) **Όλες** οι γωνίες του είναι **ίσες.**

Απόδειξη
(i) Προκύπτει από τον ορισμό του παραλληλογράμμου.
ii) Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με ΑΓ = ΒΔ. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα (ΑΒ = ΔΓ, ΑΓ = ΒΔ, ΑΔ κοινή), οπότε $\hat{A}=\hat{\Delta}$. Αλλά $\hat{A}+\hat{\Delta}=2\llcorner$, οπότε $\hat{A}=\hat{\Delta}=1\llcorner$. Επομένως, το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.
(iii) Αν έχει τρεις ορθές γωνίες θα είναι και η άλλη ορθή, αφού το άθροισμα των γωνιών κάθε τετραπλεύρου είναι $4\llcorner$.
(iv) Αν όλες οι γωνίες είναι ίσες, προφανώς όλες είναι ορθές.

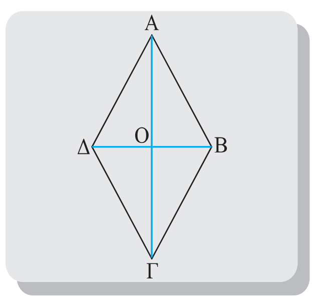


(i) Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.
ii) Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του.

Απόδειξη
Έστω ΑΒΓΔ ρόμβος. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, η διάμεσος του ΑΟ είναι ύψος του και διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Επομένως $A\Gamma \perp B\Delta$ και η ΑΓ διχοτομεί την $\hat{A}$. Όμοια η ΑΓ διχοτομεί τη $\hat{\Gamma}$ και η ΒΔ τις $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$.

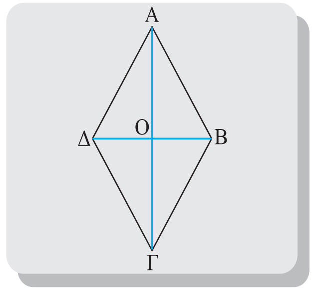
Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

(i) Έχει **όλες** τις πλευρές του **ίσες**.
(ii) Είναι **παραλληλόγραμμο** και **δύο διαδοχικές** πλευρές του είναι **ίσες**.
(iii) Είναι **παραλληλόγραμμο** και οι διαγώνιοί του τέμνονται **κάθετα**.
(iv) Είναι **παραλληλόγραμμο** και μία διαγώνιός του **διχοτομεί** μία γωνία του.



Απόδειξη
(i) και (ii) Προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό του ρόμβου.
(iii) Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με $A\Gamma \perp B\Delta$.

Στο τρίγωνο ΑΒΔ η ΑΟ είναι διάμεσος, αφού οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Επίσης, η ΑΟ είναι και ύψος, επειδή ΑΓ⊥ΒΔ. Άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, οπότε ΑΒ = ΑΔ. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.
(iv) Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο και ΑΓ διχοτόμος της $\hat{A}$. Τότε πάλι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές (αφού ΑΟ διχοτόμος και διάμεσος), οπότε το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

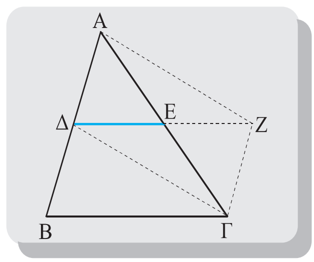


Θεώρημα

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ, Ε των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι ΔΕ // = $\frac{ΒΓ}{2}$.
Προεκτείνουμε τη ΔΕ κατά τμήμα ΕΖ = ΔΕ. Το τετράπλευρο ΑΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Άρα ΑΔ = // ΓΖ, οπότε ΔΒ = // ΓΖ, αφού ΑΔ = ΔΒ.
Έτσι το τετράπλευρο ΔΖΓΒ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε:
(i) ΔΖ // ΒΓ άρα ΔΕ // ΒΓ και
(ii) ΔΖ = ΒΓ ή 2ΔΕ = ΒΓ ή ΔΕ = $\frac{ΒΓ}{2}$.

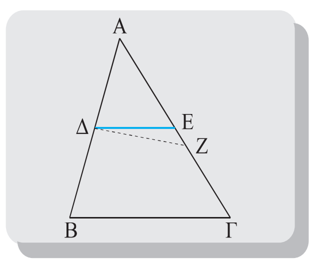


Θεώρημα

Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και ας φέρουμε από το μέσο Δ της ΑΒ την παράλληλη προς την ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Θα αποδείξουμε ότι το Ε είναι το μέσο της ΑΓ.
Έστω ότι το Ε δεν είναι μέσο της ΑΓ. Αν Ζ είναι το μέσο της ΑΓ, το τμήμα ΔΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα ΔΖ // ΒΓ. Έτσι, όμως, έχουμε από το Δ δύο παράλληλες προς τη ΒΓ, που είναι άτοπο. Άρα το Ε είναι μέσο της ΑΓ.



Θεώρημα

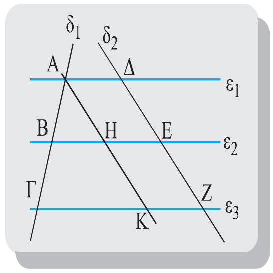
Αν τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

Απόδειξη

Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2, ε_3 οι οποίες τέμνουν την δ_1 στα σημεία Α, Β, Γ και ορίζουν σε αυτή τα ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ (σχ. 1). Αν μια άλλη ευθεία δ_2 τέμνει τις ε_1, ε_2, ε_3 στα σημεία Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα, θα αποδείξουμε ότι ΔΕ = ΕΖ.

Φέρουμε ΑΚ // ΔΖ. Τότε τα τετράπλευρα ΑΔΕΗ και ΕΖΚΗ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε ΑΗ = ΔΕ (1) και ΗΚ = ΕΖ (2)

Στο τρίγωνο ΑΚΓ το Β είναι το μέσο της ΑΓ και ΒΗ // ΓΚ. Άρα το Η είναι μέσο της ΑΚ, δηλαδή ΑΗ = ΗΚ (3). Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι ΔΕ = ΕΖ.



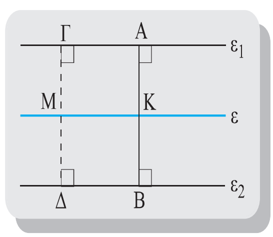
σχ. 1

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 είναι μία ευθεία ε παράλληλη προς τις ε_1 και ε_2, η οποία διέρχεται από τα μέσα των τμημάτων που έχουν τα άκρα τους στις δύο παράλληλες.

Η ευθεία ε λέγεται ***μεσοπαράλληλος*** των ε_1 και ε_2.

Απόδειξη

Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 και ένα τμήμα ΑΒ = υ κάθετο προς αυτές, το οποίο έχει τα άκρα του στις ε_1 και ε_2. Αν από το μέσο Κ της ΑΒ φέρουμε την ευθεία ε παράλληλη προς τις ε_1 και ε_2, παρατηρούμε ότι κάθε σημείο Μ της ε **ισαπέχει** από τις ε_1 και ε_2 , αφού $ΜΓ = ΜΔ = \frac{υ}{2}$.



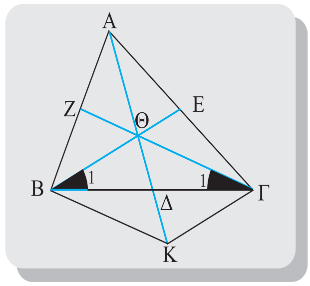
Αντίστροφα, αν ένα σημείο Μ ισαπέχει από τις ε_1 και ε_2, το Μ τότε είναι σημείο μεταξύ των παραλλήλων και ισχύει ΜΓ+ΜΔ = ΓΔ = υ, οπότε $ΜΓ = ΜΔ = \frac{υ}{2}$.

Έτσι τα τετράπλευρα ΜΓΑΚ και ΜΔΒΚ είναι παραλληλόγραμμα (ΜΓ// = ΑΚ, ΜΔ // = ΚΒ), οπότε ΜΚ // ε_1, ε_2.
Επομένως, το Μ ανήκει στην ευθεία ε.

Θεώρημα

Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

Απόδειξη



Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε τις δύο διαμέσους ΒΕ και ΓΖ. Επειδή $\hat{Β}_1 + \hat{Γ}_1 < \hat{Β} + \hat{Γ} < 2\llcorner$, οι δύο διάμεσοι τέμνονται σε ένα εσωτερικό σημείο Θ του τριγώνου. Αν η ΑΘ τέμνει τη ΒΓ στο Δ, θα αποδείξουμε ότι i) η ΑΔ είναι η τρίτη διάμεσος του τριγώνου, δηλαδή ΒΔ = ΔΓ και ii) $ΑΘ = \frac{2}{3}ΑΔ$.

i) Στην ημιευθεία ΘΔ παίρνουμε τμήμα ΘΚ = ΑΘ. Παρατηρούμε ότι τα σημεία Ε και Θ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΚΓ, οπότε $ΕΘ = // \frac{ΓΚ}{2}$ (1).

Όμοια από το τρίγωνο ΑΒΚ έχουμε $ΖΘ = // \frac{ΒΚ}{2}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι ΒΕ //ΓΚ και ΓΖ // ΒΚ, δηλαδή το ΒΘΓΚ είναι παραλληλόγραμμο (3). Άρα οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, οπότε ΒΔ = ΔΓ.

Το σημείο Θ, στο οποίο τέμνονται οι διάμεσοι του ΑΒΓ, λέγεται ***βαρύκεντρο*** (ή ***κέντρο βάρους***) του τριγώνου.

ii) Από το παραλληλόγραμμο ΒΘΓΚ έχουμε ακόμη

$$ΘΔ = ΔΚ = \frac{ΘΚ}{2}, \text{ άρα } ΘΔ = \frac{ΑΘ}{2} \quad \text{ή} \quad ΑΘ = 2ΘΔ.$$

Από τις (1) και (3) προκύπτει ότι

$$ΕΘ = \frac{ΓΚ}{2} = \frac{ΒΘ}{2} \quad \text{ή} \quad ΒΘ = 2ΘΕ.$$

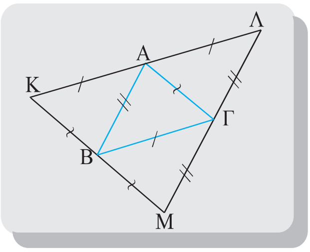
Όμοια από τις (2) και (3) έχουμε ΓΘ = 2ΘΖ. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι το βαρύκεντρο έχει την ιδιότητα να χωρίζει κάθε διάμεσο σε δύο τμήματα που το ένα είναι διπλάσιο του άλλου.

Επίσης έχουμε ότι ΑΔ = ΑΘ + ΘΔ = 2ΘΔ + ΘΔ = 3ΘΔ. Άρα

$$ΘΔ = \frac{1}{3}ΑΔ, \text{ οπότε } ΑΘ = \frac{2}{3}ΑΔ. \text{ Όμοια προκύπτει ότι } ΒΘ = \frac{2}{3}ΒΕ \text{ και } ΓΘ = \frac{2}{3}ΓΖ.$$

Οι παράλληλες, που άγονται από τις κορυφές ενός τριγώνου προς τις απέναντι πλευρές του, σχηματί - ζουν τρίγωνο, το οποίο έχει ως μέσα των πλευρών του τις κορυφές του αρχικού τριγώνου.

Απόδειξη



Από τις κορυφές Α, Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές του, οι οποίες ορίζουν ένα νέο τρίγωνο ΚΛΜ.

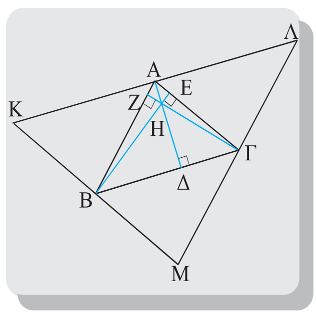
Λόγω των σχηματιζόμενων παραλληλογράμμων ΚΑΓΒ, ΛΑΒΓ και ΜΒΑΓ έχουμε: ΚΑ = ΒΓ = ΑΛ, ΛΓ = ΑΒ = ΓΜ και ΚΒ = ΑΓ = ΒΜ.

Επομένως τα σημεία Α, Β, Γ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΚΛΜ.

Θεώρημα

Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Απόδειξη



Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Από τις κορυφές του Α, Β, Γ φέρουμε παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές Σύμφωνα με το Λήμμα, στο τρίγωνο ΚΛΜ τα σημεία Α, Β, Γ είναι τα μέσα των πλευρών του. Επίσης, παρατηρούμε ότι οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι κάθετες στις ΚΛ, ΚΜ και ΜΛ αντίστοιχα (αφού είναι κάθετες στις ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ) και μάλιστα είναι κάθετες στα μέσα τους. Δηλαδή οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι οι μεσοκάθετοι των πλευρών του τριγώνου ΚΛΜ, οπότε θα διέρχονται από το ίδιο σημείο Η.

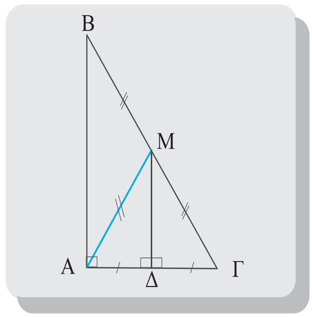
Το σημείο Η λέγεται ***ορθόκεντρο*** του τριγώνου ΑΒΓ.

Θεώρημα

Η διάμεσος οθρογώνιου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Απόδειξη

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) και τη διάμεσό του ΑΜ (σχ.30). Θα αποδείξουμε ότι $AM = \frac{B\Gamma}{2}$.



Φέρουμε τη διάμεσο ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ. Το ΜΔ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε ΜΔ // ΑΒ. Αλλά ΑΒ⊥ΑΓ, επομένως και ΜΔ⊥ΑΓ. Άρα, το ΜΔ είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο ΑΜΓ, οπότε ΑΜ = ΜΓ, δηλαδή $AM = \frac{B\Gamma}{2}$.

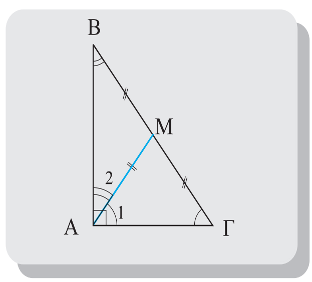
Θεώρημα

Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τη διάμεσό του ΑΜ.

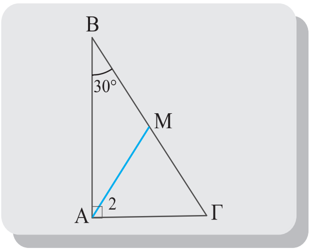
Αν $AM = \frac{B\Gamma}{2}$, θα αποδείξουμε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή.



Επειδή $AM = \frac{B\Gamma}{2}$ έχουμε ΑΜ = ΜΓ, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ (1) και ΑΜ = ΜΒ, οπότε $\hat{A}_2 = \hat{B}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{\Gamma}$, δηλαδή $\hat{A} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$. Αλλά $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\llcorner$, οπότε $2\hat{A} = 2\llcorner$ ή $\hat{A} = 1\llcorner$.

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30^o, τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.

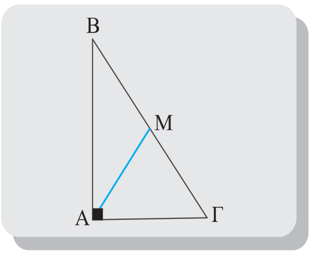


Απόδειξη

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) με $\hat{B} = 30°$.

Θα αποδείξουμε ότι $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Επειδή $\hat{B} = 30°$, είναι $\hat{Γ} = 90° – 30° = 60°$. Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ και είναι $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2} = ΜΓ$. Έτσι $\hat{A}_2 = Γ = 60°$, οπότε το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισόπλευρο. Επομένως $ΑΓ = ΜΓ = \frac{ΒΓ}{2}$.



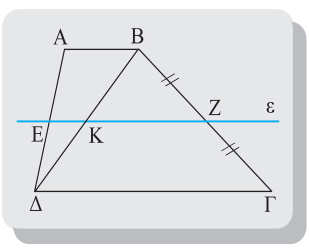
Αντίστροφο

Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ, οπότε $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2} = ΜΓ = ΑΓ$ (αφού $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$). Άρα το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισόπλευρο, οπότε $\hat{Γ} = 60°$. Επομένως $\hat{B} = 90° – 60° = 30°$.

Θεώρημα

Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους.

Δηλαδή, αν ΕΖ διάμεσος του τραπεζίου ΑΒΓΔ, τότε: i) ΕΖ // ΑΒ, ΓΔ και ii) $ΕΖ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2}$.



Απόδειξη

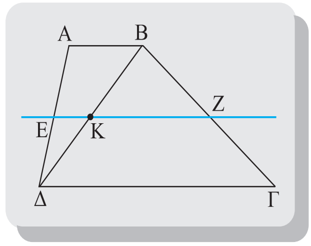
Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ), τη διαγώνιο του ΒΔ και Ε το μέσο της ΑΔ. Από το Ε φέρουμε ευθεία ε παράλληλη των ΑΒ και ΓΔ που τέμνει τις ΒΔ και ΒΓ στα Κ και Ζ αντίστοιχα. Τότε:

Στο τρίγωνο ΑΒΔ το Ε είναι μέσο της ΑΔ και ΕΚ//ΑΒ, οπότε το Κ είναι το μέσο της ΒΔ και $ΕΚ = \frac{ΑΒ}{2}$ (1).

Επίσης στο τρίγωνο ΒΔΓ το Κ είναι μέσο της ΒΔ και ΚΖ//ΓΔ, οπότε το Ζ είναι το μέσο της ΒΓ και $ΚΖ = \frac{ΓΔ}{2}$ (2). Επομένως η ΕΖ είναι διάμεσος του τραπεζίου και **i)** ΕΖ // ΑΒ, ΓΔ

ii) Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $ΕΚ + ΚΖ = \frac{ΑΒ}{2} + \frac{ΓΔ}{2}$ ή $ΕΖ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2}$.

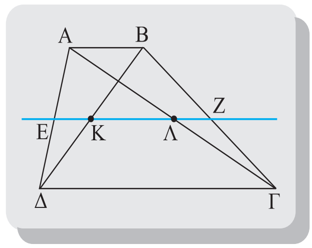
Η διάμεσος ΕΖ τραπεζίου ΑΒΓΔ διέρχεται από τα μέσα Κ και Λ των διαγωνίων του και το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο με τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεών του.



Απόδειξη

Αποδείξαμε παραπάνω ότι το Κ είναι μέσο της ΒΔ. Όμοια, αν φέρουμε την ΑΓ, στο τρίγωνο ΑΔΓ το Ε είναι μέσο της ΑΔ και ΕΛ // ΓΔ, οπότε το Λ είναι μέσο της ΑΓ και

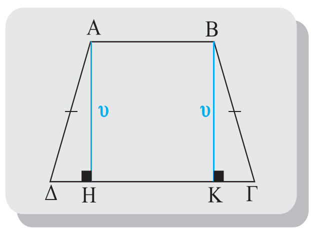
$$ΕΛ = \frac{ΓΔ}{2} \quad (3).$$



Επομένως, η διάμεσος ΕΖ του τραπεζίου διέρχεται από τα μέσα Κ, Λ των διαγωνίων του και προφανώς ΚΛ // ΑΒ, ΓΔ. Επίσης από τις (1) και (3) προκύπτει ότι:

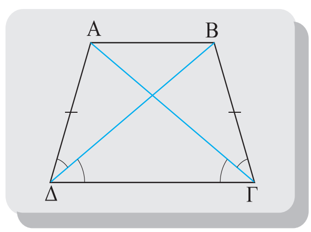
$$ΕΛ - ΕΚ = \frac{ΓΔ}{2} - \frac{ΑΒ}{2} \quad ή \quad ΚΛ = \frac{ΓΔ - ΑΒ}{2} \text{ (με } ΓΔ > ΑΒ).$$

Αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε:
(i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες.
(ii) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

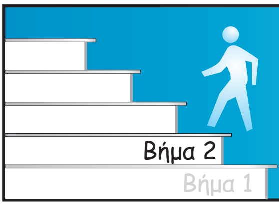


Απόδειξη

(i) Έστω ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο (ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ=ΒΓ). Φέρουμε τα ύψη ΑΗ και ΒΚ. Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΒΚΓ είναι ίσα ($\hat{Η} = \hat{Κ} = 90°$, ΑΔ = ΒΓ και ΑΗ = ΒΚ = υ), οπότε $\hat{Γ} = \hat{Δ}$. Επειδή $\hat{Α} + \hat{Δ} = 180°$ και $\hat{Β} + \hat{Γ} = 180°$ (ως εντός και επί τα αυτά μέρη), έχουμε και $\hat{Α} = \hat{Β}$.



(ii) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΔΓ (σχ. 39) είναι ίσα (ΑΔ = ΒΓ, ΓΔ κοινή και $Α\hat{Δ}Γ = Β\hat{Γ}Δ$), οπότε ΑΓ = ΒΔ.



Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις "κλειδιά"

Α. Από το σχολικό βιβλίο

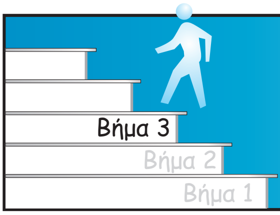
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.

σ. 99: Ασκήσεις Εμπέδωσης 2, 3, 4
Αποδεικτικές Ασκήσεις 1,2, 3, 4
Σύνθετα Θέματα 3

σ. 103: Ασκήσεις Εμπέδωσης 2, 3, 4, 5, 6
Αποδεικτικές Ασκήσεις 2

σ. 111: Ασκήσεις Εμπέδωσης όλες
Αποδεικτικές Ασκήσεις 1,2, 3, 4, 5, 6, 7
Σύνθετα Θέματα 1, 2, 4

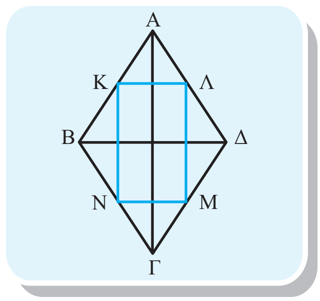
σ. 115: Ασκήσεις Εμπέδωσης 3, 4, 5, 6
Αποδεικτικές Ασκήσεις 1,2, 4, 5, 6, 7, 10
Σύνθετα Θέματα 1, 2, 3



Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. Δίνεται ρόμβος με διαγώνιες 6cm και 4cm. Να βρείτε την περίμετρο του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τα μέσα των πλευρών του.

Λύση:



Γνωρίζουμε ότι το τετράπλευρο που σχηματίζεται από τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου είναι παραλληλόγραμμο.

Έχουμε ΚΝ//ΑΓ και ΛΚ//ΒΔ. Αφού $ΑΓ \perp ΒΔ$ (διαγώνιοι ρόμβου), θα είναι $ΚΝ \perp ΛΚ$.

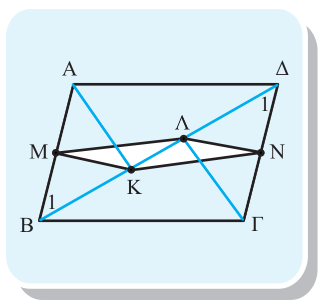
Άρα το ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο.

Ακόμα $ΚΝ = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{6}{2} = 3$ και $ΚΛ = \frac{ΒΔ}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Η περίμετρος του ΚΛΜΝ είναι $2ΚΛ + 2ΚΝ = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 10\text{cm}$.

2. Από τις κορυφές Α και Γ παραλληλογράμου ΑΒΓΔ φέρνουμε κάθετες προς τη διαγώνιο ΒΔ, τις ΑΚ και ΓΛ αντίστοιχα. Αν Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα να δείξετε ότι τα Κ, Λ, Μ, Ν είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

Λύση:



Στο ορθογώνιο τρίγωνο $Α\overset{\triangle}{Κ}Β$ η ΚΜ είναι διάμεσος

άρα $ΚΜ = \frac{ΑΒ}{2}$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $Δ\overset{\triangle}{Λ}Γ$ η ΛΝ είναι διάμεσος

άρα $ΛΝ = \frac{ΔΓ}{2}$. Αφού ΑΒ = ΔΓ θα είναι ΚΜ = ΛΝ

Έχουμε $\begin{matrix} ΒΛ = ΒΚ + ΚΛ \;\; (1) \\ ΔΚ = ΔΛ + ΚΛ \;\; (2) \end{matrix}$

Όμως $Α\overset{\triangle}{Β}Κ = Λ\overset{\triangle}{Δ}Γ \left(\begin{matrix} \hat{Κ} = \hat{Λ} = 90^\circ \\ ΑΒ = ΔΓ \\ \hat{Β}_1 = \hat{Δ}_1 \end{matrix} \right)$

Άρα είναι ΒΚ=ΔΛ. Τότε από (1), (2) προκύπτει ΒΛ = ΔΚ

Είναι $B\overset{\triangle}{M}\Lambda = \Delta\overset{\triangle}{K}N$ αφού ΜΒ = ΔΝ (μισά ίσων τμημάτων)

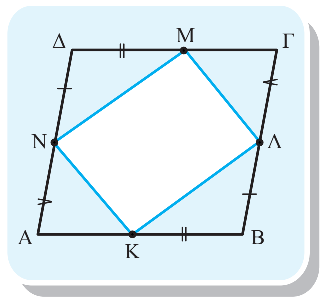
$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$ (εντός εναλλάξ)

ΒΛ = ΔΚ

Τότε και ΜΛ = ΚΝ

Άρα το ΜΛΝΚ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.

3. Στις πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θεωρούμε τα ίσα τμήματα ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ = ΔΝ. Δείξτε ότι το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο. Τι θα πρέπει να ισχύει ώστε:
i. ΚΛΜΝ ρόμβος
ii. ΚΛΜΝ τετράγωνο



Λύση:

Είναι $A\overset{\triangle}{N}K = M\overset{\triangle}{\Gamma}\Lambda$ αφού:

$$\begin{aligned} &AK = \Gamma M \\ &\left.\begin{aligned} AN &= A\Delta - \Delta N \\ \Gamma\Lambda &= \Gamma B - B\Lambda \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow AN = \Gamma\Lambda \\ &\hat{A} = \hat{\Gamma} \quad \text{ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου} \end{aligned}$$

Συνεπώς ΝΚ = ΜΛ. Ομοίως ΚΛ = ΜΝ.

Άρα ΚΛΜΝ παραλληλόγραμμο αφού έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.

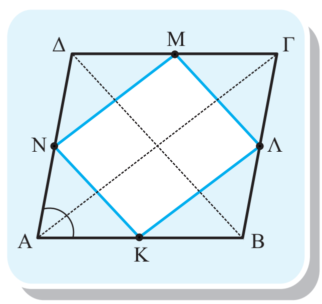
i. Το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος όταν το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και τα Κ, Λ, Μ, Ν είναι μέσα των πλευρών.

Τότε $NK // = \dfrac{\Delta B}{2}$

$K\Lambda // = \dfrac{A\Gamma}{2}$

Αφού ΔΒ = ΑΓ τότε ΝΚ = ΚΛ.

Επειδή το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο και έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, είναι ρόμβος.

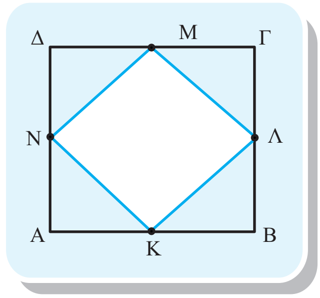


ii. Για να είναι τετράγωνο αρκεί το ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο και Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών.

Τότε ΝΚ//ΔΒ

ΚΛ//ΑΓ

Αφού στο τετράγωνο είναι $\Delta B \perp A\Gamma$ θα είναι και $NK \perp K\Lambda$. Άρα $K = 90^\circ$



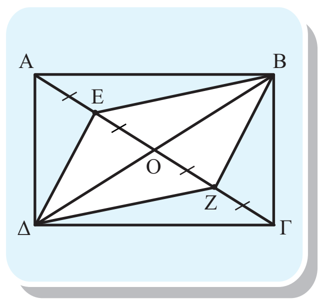
4. **Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ τα σημεία Ε, Ζ είναι μέσα των ΟΑ, ΟΓ αντίστοιχα όπου Ο το κέντρο του ορθογωνίου.**
i. Να δείξετε ότι το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.
ii. Τι θα πρέπει να ισχύει για να είναι ρόμβος;
iii. Μπορεί το ΔΕΒΖ να είναι τετράγωνο;

Λύση:

i. Το σημείο Ο είναι μέσο της ΔΒ αλλά και της ΕΖ

αφού $OE = \dfrac{OA}{2}$, $OZ = \dfrac{O\Gamma}{2}$.

Άρα ΔΕΒΖ παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.



ii. Για να είναι ρόμβος αρκεί οι διαγώνιοί του να είναι κάθετες.

Άρα θα πρέπει $\Delta B \perp EZ$ δηλαδή $\Delta B \perp A\Gamma$.
Αυτό συμβαίνει όταν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

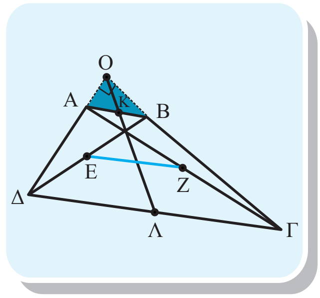
iii. Για να είναι το ΔΕΒΖ τετράγωνο θα πρέπει $EZ \perp \Delta B$ και ΕΖ = ΔΒ.

Όμως $EZ = EO + OZ = \dfrac{OA}{2} + \dfrac{O\Gamma}{2} = \dfrac{A\Gamma}{2} = \dfrac{\Delta B}{2}$.

Άρα δεν μπορεί να είναι τετράγωνο.

5. **Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ, ΓΔ > ΑΒ) του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές τέμνονται στο Ο κάθετα. Αν το Ο και τα μέσα Κ, Λ των ΑΒ, ΔΓ είναι συνευθειακά να δείξετε ότι το ΚΛ είναι ίσο με το τμήμα που συνδέει τα μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου.**

Λύση:



Στο ορθογώνιο $O\overset{\triangle}{A}B$ η ΟΚ είναι διάμεσος.

Άρα $OK = \dfrac{AB}{2}$.

Στο ορθογώνιο $O\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$ η ΟΛ είναι διάμεσος.

Άρα $O\Lambda = \dfrac{\Gamma\Delta}{2}$.

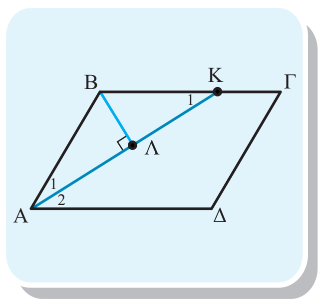
Είναι $K\Lambda = O\Lambda - OK = \dfrac{\Gamma\Delta}{2} - \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\Gamma\Delta - AB}{2}$

Γνωρίζουμε ότι αν Ε, Ζ μέσα των διαγωνίων τότε $EZ = \dfrac{\Gamma\Delta - AB}{2}$.

Άρα ΚΛ = ΕΖ

6. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\hat{A} = 60^o$ και ΑΚ διχοτόμος της $\hat{A}$ όπου Κ σημείο της ΒΓ. Αν Λ μέσο της ΑΚ να δείξετε ότι η ΒΛ διχοτομεί τη $\hat{B}$ και να εκφράσετε τη ΒΛ συναρτήσει του ΑΒ.

Λυσή:



$$\left.\begin{array}{l} \text{Είναι } \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 30^o \\ \text{και } \hat{A}_2 = \hat{K}_1 \text{ (εντός εναλλάξ)} \end{array}\right\} \text{Συνεπώς } \hat{A}_1 = \hat{K}$$

Δηλαδή το τρίγωνο $A\overset{\triangle}{B}K$ είναι ισοσκελές και η ΒΛ είναι διάμεσος άρα διχοτόμος και ύψος.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\overset{\triangle}{\Lambda}B$ είναι:

$$\hat{A}_1 = 30^\circ \Leftrightarrow B\Lambda = \frac{AB}{2}.$$

7. Εξωτερικά του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε τα ισοσκελή και ορθογώνια τρίγωνα ΑΛΒ και ΔΚΓ. Να δείξετε ότι το ΔΛΒΚ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση:

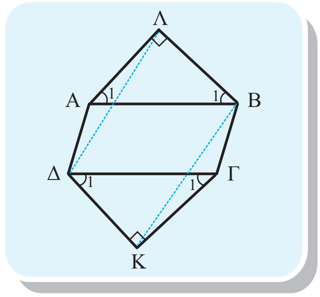
Τα τρίγωνα ΑΛΒ, ΔΚΓ είναι ίσα αφού είναι ορθογώνια και έχουν ΑΒ = ΔΓ, $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1 = 45^\circ$. Συνεπώς ΑΛ = ΚΓ (1).

Ομοίως $\overset{\Delta}{\Delta A \Lambda} = \overset{\Delta}{B\Gamma K}$ αφού ΑΔ = ΒΓ (ως απέναντι πλευρές του ΑΒΓΔ)

και ΑΛ = ΚΓ (από (1))

Επίσης είναι $\Delta\hat{A}\Lambda = \hat{A} + \hat{A}_1$ και $B\hat{\Gamma}K = \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}_1$

Όμως $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ (ως απέναντι γωνίες του ΑΒΓΔ) και $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$. Επομένως $\Delta\hat{A}\Lambda = B\hat{\Gamma}K$.



Συνεπώς τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\Delta A \Lambda}$ και $\overset{\Delta}{B\Gamma K}$ είναι ίσα $\Leftrightarrow \Delta\Lambda = BK$

Επιπλέον ΛΒ = ΔΚ (αφού $\overset{\Delta}{A \Lambda B} = \overset{\Delta}{\Delta K \Gamma}$)
Επομένως το ΔΛΒΚ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.

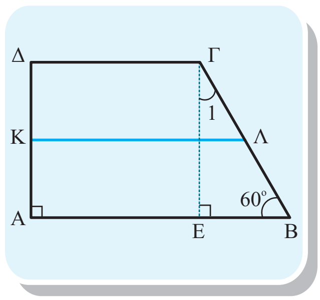
8. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ $\left(\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o\right)$ με $\hat{B} = 60^o$. Αν είναι ΒΓ = ΔΓ = 8 να βρεθεί το μήκος της διαμέσου του τραπεζίου.

Λύση:

Φέρνουμε το ύψος ΓΕ του τραπεζίου. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΒ είναι $\hat{\Gamma}_1 = 90^o - \hat{B} = 90^o - 60^o = 30^o$.

Άρα $EB = \dfrac{B\Gamma}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$

Είναι $AB = AE + EB = \Delta\Gamma + EB = 8 + 4 = 12$
Τότε, αν Κ, Λ μέσα των μη παραλλήλων πλευρών θα είναι: $K\Lambda = \dfrac{AB + \Delta\Gamma}{2} = \dfrac{12+8}{2} = \dfrac{20}{2} = 10$



9. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $B\Gamma = x^2 + 4x,\ x > 0$. Αν Κ, Λ μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα και ΚΛ = x + 4 να βρεθεί το x.

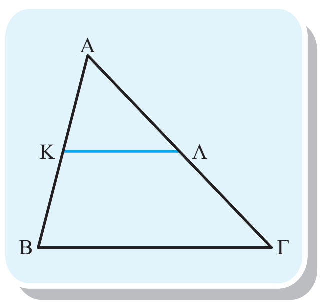
Λύση:

Αφού Κ, Λ μέσα των ΑΒ, ΑΓ τότε $K\Lambda = // \dfrac{B\Gamma}{2}$. Άρα

$$x + 4 = \frac{x^2 + 4x}{2} \Leftrightarrow 2(x+4) = x^2 + 4x \Leftrightarrow$$

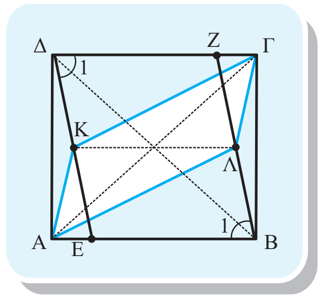
$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$$

Επομένως x = 2 η x = –4 απορρίπτεται.



10. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Πάνω στις ΑΒ,ΔΓ αντίστοιχα, θεωρούμε σημεία Ε, Ζ τέτοια ώστε ΑΕ = ΓΖ. Αν Κ, Λ μέσα των ΔΕ, ΒΖ αντίστοιχα, να δείξετε ότι το ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο και ότι οι ΚΛ, ΑΓ, ΔΒ συντρέχουν.

Λύση:



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ η ΑΚ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του. Άρα $ΑΚ = \frac{ΔΕ}{2}$ (1).
Όμοια στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΒΖ η ΓΛ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα άρα $ΓΛ = \frac{ΖΒ}{2}$ (2).
Όμως ΖΒ = ΔΕ (3) αφού $Α\overset{\Delta}{Δ}Ε = Γ\overset{\Delta}{Β}Ζ$ (είναι ορθογώνια και έχουν ΑΔ = ΒΓ ως απέναντι πλευρές ορθογωνίου και ΑΕ = ΓΖ από υπόθεση).
Από (1), (2), (3) συμπεραίνουμε ότι ΑΚ = ΓΛ.
Επίσης $Α\overset{\Delta}{Λ}Β = Δ\overset{\Delta}{Κ}Γ$ αφού:

ΔΓ = ΑΒ ως απέναντι πλευρές ορθογωνίου
ΔΚ=ΛΒ ως μισά των ίσων τμημάτων ΔΕ, ΒΓ
$\hat{Β}_1 = \hat{Δ}_1$ ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου ΔΕΒΖ

Συνεπώς ΚΓ = ΑΛ. Άρα το ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.
Το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο αφού ΔΕ = ΒΖ και ΔΖ = ΕΒ αφού
ΔΖ = ΔΓ – ΖΓ και ΕΒ = ΑΒ – ΑΕ
Οι ΑΓ, ΚΛ είναι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΑΚΓΛ άρα διχοτομούνται.
Όμως η ΑΓ διαγώνιος και του ΑΒΓΔ. Άρα διχοτομείται με την ΔΒ. Επομένως οι ΑΓ, ΚΛ, ΔΒ συντρέχουν στο Ο το κέντρο του ΑΒΓΔ.

11. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Γ} = 45^o$. Φέρουμε τα ύψη ΑΔ και ΒΕ. Αν Μ είναι το μέσο της ΑΒ να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.

Λύση:

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ, Μ μέσο της υποτείνουσας άρα $ΔΜ = \frac{ΑΒ}{2}$ (1)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ, Μ μέσο της υποτείνουσας άρα $ΕΜ = \frac{ΑΒ}{2}$ (2)

Από (1),(2) έχουμε ΔΜ = ΕΜ δηλαδή το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ισοσκελές.

Για να είναι η $\hat{M}=90^\circ$ αρκεί $\hat{M}_1+\hat{M}_2=90^\circ$
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΕ (ΑΜ = ΜΕ) είναι:

$\hat{M}_1+\hat{A}+\hat{E}_1=180^\circ \Leftrightarrow \hat{M}_1=180^\circ-2\hat{A}$ αφού $\hat{A}=\hat{E}_1$

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΜΔ (ΜΒ = ΜΔ) είναι:

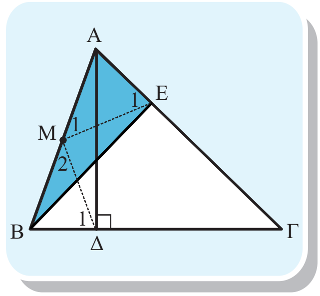
$\hat{M}_2+\hat{B}+\hat{\Delta}_1=180^\circ \Leftrightarrow \hat{M}_2=180^\circ-2\hat{B}$ αφού $\hat{B}=\hat{\Delta}_1$

Τότε:

$\hat{M}_1+\hat{M}_2=180^\circ-2\hat{A}+180^\circ-2\hat{B}=360^\circ-2(\hat{A}+\hat{B})$

Όμως $\hat{A}+\hat{B}=180^\circ-\hat{\Gamma}=180^\circ-45^\circ=135^\circ$

Άρα $\hat{M}_1+\hat{M}_2=360^\circ-2\cdot 135^\circ=90^\circ$.



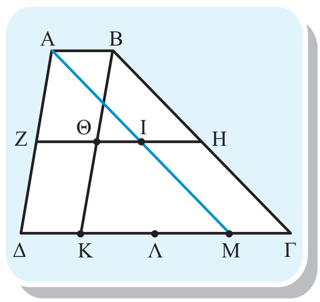
12. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ όπου ΔΓ//ΑΒ και ΔΓ = 4ΑΒ.

i. Να δείξετε ότι $ZH=\dfrac{5AB}{2}$ όπου ΖΗ η διάμεσος.

ii. Αν Κ,Λ,Μ σημεία της ΔΓ τέτοια ώστε ΔΚ = ΚΛ = ΛΜ = ΜΓ, να δείξετε ότι ΑΒΚΔ, ΑΒΓΜ παραλληλόγραμμα.

iii. Αν η διάμεσος του τραπεζίου τέμνει τις ΒΚ, ΑΜ στα Θ, Ι να δείξετε ότι $\Theta I=\dfrac{AB}{2}$.

Λύση:



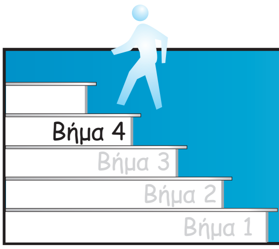
i. Είναι $ZH=\dfrac{AB+\Delta\Gamma}{2}=\dfrac{AB+4AB}{2}=\dfrac{5AB}{2}$.

ii. Είναι $\Delta K=\dfrac{1}{4}\Delta\Gamma=AB$ και αφού ΑΒ//ΔΚ θα είναι το ΑΒΚΔ παραλληλόγραμμο.

Είναι $M\Gamma=\dfrac{1}{4}\Delta\Gamma=AB$ και αφού ΑΒ//ΜΓ θα είναι το ΑΒΓΜ παραλληλόγραμμο.

iii. Αφού ΖΗ διάμεσος τότε και Θ,Ι τα μέσα των ΒΚ, ΑΜ.
Άρα και ΖΘ// = ΑΒ, ΙΗ// = ΑΒ.

Οπότε ΘΙ = ΖΗ – ΖΘ – ΙΗ $=\dfrac{5AB}{2}-AB-AB=\dfrac{AB}{2}$.



Λύνουμε μόνοι μας

1. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 4ΒΓ. Θεωρούμε σημεία Ε, Ζ επί της ΑΒ τέτοια ώστε ΑΕ = ΖΒ = ΒΓ.
i. Να δείξετε ότι το ΔΕΖΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
ii. Να βρεθεί η διάμεσός του ΚΛ συναρτήσει της ΒΓ.

2. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και Μ μέσο της υποτείνουσας. Αν ΜΕ, ΜΔ οι αποστάσεις του Μ από τις ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα να δείξετε ότι το ΜΕΑΔ είναι ορθογώνιο.

3. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), Θ το βαρύκεντρό του και Δ, Ζ, Ε μέσα των ΒΓ, ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.
i.Να δείξετε ότι ΑΖΔΕ ρόμβος.
ii.Αν Λ το μέσο της ΑΘ, να δείξετε ότι ΛΖΘΕ ρόμβος.

....
....
....
....
....
....

4. Οι μη παράλληλες πλευρές τραπεζίου ΑΒΓΔ τέμνονται στο Ο. Αν Κ, Μ είναι μέσα των διαγωνίων και Ε, Ζ είναι μέσα των βάσεων, να δείξετε ότι $\mathrm{K\hat{E}M = K\hat{Z}M = \hat{O}}$.

....
....
....
....
....
....

5. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 90^{o})$, είναι Ζ, Ε μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, ΑΔ ύψος και Η μέσο ΖΕ. Να δείξετε ότι:

i. $\Delta H = \dfrac{B\Gamma}{4}$

ii. Η περίμετρος του τριγώνου ΕΔΖ είναι ίση με το μισό της περιμέτρου του ΑΒΓ.

....
....
....
....
....
....

6. **Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η υποτείνουσα ΒΓ είναι η διπλάσια από την ΑΒ. Προβάλουμε το Α στην εσωτερική και εξωτερική διχοτόμο της Β. Αν Ζ, Δ οι προβολές αντίστοιχα, να δείξετε ότι:**

i. ΔΖ//ΒΓ

ii. Ζ μέσο της ΑΗ και Η μέσο της ΒΓ(όπου Η το σημείο στο οποίο η ΑΖ τέμνει τη ΒΓ)

iii. Να βρεθούν οι γωνίες των τριγώνων ΑΒΗ και ΑΗΓ.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

7. **Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο. Εξωτερικά του ορθογωνίου κατασκευάζουμε τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΚΒ και ΒΛΓ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΚΟΛ είναι ορθογώνιο.**

....

....

....

....

....

....

....

....

....

8. **Εξωτερικά του ρόμβου ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε τετράγωνα ΓΔΕΖ και ΒΓΚΛ. Να δείξετε ότι το ΚΖΔΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.**

....

....

....

....

....

....

....

....

9. **Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ τα Κ, Λ, Μ, Ν είναι μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι τα τμήματα ΑΛ, ΒΜ, ΓΝ, ΔΚ τεμνόμενα σχηματίζουν τετράγωνο.**

....

....

....

....

....

....

....

....

10. **Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τετράγωνα ΑΓΚΛ και ΑΒΔΕ**

i. Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου $\overset{\Delta}{\mathrm{AE\Lambda}}$

ii. Να δείξετε ότι το ΒΓΛΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

....

....

....

....

....

....

....

....

11. Στα μέσα Κ, Λ των πλευρών ΑΓ και ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε $ΚΘ \perp ΑΓ$ και $ΛΙ \perp ΑΒ$ ώστε $ΚΘ = \frac{ΑΓ}{2}$ και $ΛΙ = \frac{ΑΒ}{2}$.

Αν Δ μέσο της ΒΓ να δείξετε ότι $\overset{\Delta}{ΙΘΔ}$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

....

....

....

....

....

....

....

....

12. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και Ο το κέντρο του και Ε τυχαίο σημείο της ΑΟ. Φέρνουμε $ΓΛ \perp ΔΕ$ όπου Μ το σημείο τομής της ΓΛ με την ΔΟ.
Να δείξετε ότι:
i. ΓΜ = ΔΕ ii. ΒΜ = ΓΕ

....

....

....

....

....

....

....

....

13. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ από τις κορυφές Α και Γ φέρνουμε ΓΖ κάθετες στη ΔΒ. Να δειχθεί ότι το ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο και έχει το ίδιο κέντρο με το ΑΒΓΔ.

....

....

14. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ = 2ΒΓ. Από την κορυφή Α φέρνουμε την $ΑΕ \perp ΒΓ$ και ενώνουμε το Ε με το μέσο Μ της ΔΓ. Να αποδειχθεί ότι $Δ\hat{Μ}Ε = 3Μ\hat{Ε}Γ$.

15. Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Ο είναι το σημείο τομής των διαμέσων ΑΜ, ΒΝ και ΓΖ. Αν η Η είναι το μέσο της ΟΓ να αποδειχθεί ότι η ΒΗ τέμνει την ΑΜ στο Ε ώστε: $ΟΕ = \frac{2}{9}ΑΜ$

Ελέγχουμε τη γνώση μας

Θέμα 1ο

Α. Να δείξετε ότι οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται και αντίστροφα εάν σε τυχαίο τετράπλευρο οι διαγώνιοι διχοτομούνται τότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 8)

Β. Να δείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

(Μονάδες 8)

Γ. Να δείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

(Μονάδες 9)

Θέμα 2ο

Α. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Από το Δ φέρνουμε τη ΔΕ//ΑΒ και την ΕΖ//ΒΓ. Να δειχθεί ότι ΑΕ = ΒΖ.

(Μονάδες 9)

Β. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΒΓ και την ΑΔ κατά τμήμα ΔΖ = ΓΔ. Να δειχθεί ότι:

i. $\Delta\hat{\Gamma}Z = B\hat{\Gamma}E$ **ii.** τα σημεία Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 16)

Θέμα 3ο

Α. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΓ > ΑΒ. Φέρνουμε τη διχοτόμο Αx της $\hat{A}$ και τη $B\Delta \perp Ax$, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να δειχθεί ότι:

i. $\Delta M = \dfrac{A\Gamma - AB}{2}$ **ii.** $\Delta\hat{B}\Gamma = \dfrac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$ **iii.** $B\hat{\Delta}M = 90^o + \dfrac{\hat{A}}{2}$

(Μονάδες 15)

Β. Στο τρίγωνο ΑΒΓ ονομάζουμε Δ το μέσο της διαμέσου ΑΜ. Η ευθεία ΒΔ τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να δειχθεί ότι: $\text{ΕΓ} = \frac{2}{3}\text{ΑΓ}$.

(Μονάδες 10)

Θέμα 4ο

Α. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και $\hat{\text{Α}} = 135^\circ$. Φέρνουμε κάθετη στην ΑΒ στο Α, που τέμνει τη ΒΓ στο Δ. Να δειχθεί ότι $\text{ΑΓ} = \frac{\text{ΒΔ}}{2}$

(Μονάδες 10)

Β. Στην πλευρά ΓΔ τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε. Αν η διχοτόμος της $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Ε}$ συναντά τη ΒΓ στο Ζ, να δειχθεί ότι ΑΕ = ΒΖ + ΔΕ.

(Μονάδες 15)