Κεφάλαιο 4ο

Παράλληλες ευθείες

Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο 4 θα πρέπει να είναι σε θέση:

✓ Να γνωρίζει τη σχετική θέση δύο ευθειών.

✓ Να γνωρίζει τη σχέση μεταξύ γωνιών που σχηματίζονται από δύο παράλληλες ευθείες οι οποίες τέμνονται από μια τρίτη ευθεία.

✓ Να γνωρίζει διάφορους τρόπους με τους οποίους θα αποδεικνύει ότι δύο οι περισσότερες ευθείες είναι παράλληλες.

✓ Να γνωρίζει ότι το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι 2 ορθές και τις διάφορες σημαντικές προτάσεις και πορίσματα που προκύπτουν.

✓ Να γνωρίζει και να εφαρμόζει τη σχέση γωνιών με πλευρές παράλληλες ή κάθετες.

✓ Να γνωρίζει το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου καθώς και το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών του.

✓ Να γνωρίζει τους αξιοσημείωτους κύκλους ενός τριγώνου.

Σχετικές θέσεις δύο ευθειών.

Οι σχετικές θέσεις δύο ευθειών ε_1 και ε_2 του ίδιου επιπέδου είναι οι παρακάτω:

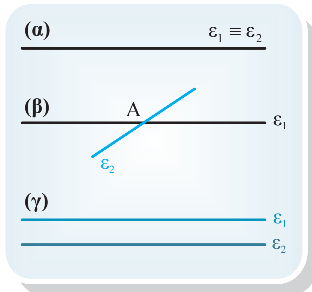
• Ταυτίζονται. (άπειρα κοινά σημεία).

Συμβολίζουμε $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2$.

• Τέμνονται. (ένα κοινό σημείο).

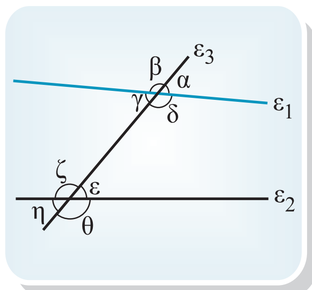
• Δεν τέμνονται. (κανένα κοινό σημείο).

Στην περίπτωση αυτή οι ευθείες ονομάζονται **παράλληλες** και συμβολίζουμε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.



Τέμνουσα δύο ευθειών.

Έστω δύο ευθείες ε_1 και ε_2 του επιπέδου οι οποίες τέμνονται από μια τρίτη ευθεία ε_3 . Τότε σχηματίζονται τα εξής ζεύγη γωνιών:



• **Γωνίες εντός εναλλάξ.**
Είναι γωνίες που βρίσκονται εντός της ζώνης που δημιουργούν οι ευθείες ε_1 και ε_2 και σε διαφορετικά ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία ε_3. Τέτοιες είναι οι γ, ε και δ, ζ.

• **Γωνίες εντός και επί τα αυτά μέρη.**
Είναι γωνίες που βρίσκονται εντός των ευθειών ε_1 και ε_2 και στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία ε_3. Τέτοιες είναι οι δ, ε και γ, ζ.

• **Γωνίες εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη.**
Είναι γωνίες που βρίσκονται μια εντός και μία εκτός των ευθειών ε_1 και ε_2 και στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία ε_3. Τέτοιες είναι οι α,ε και β,ζ και δ,θ και η,γ.

Θεώρημα

Αν δύο ευθείες ε_1, ε_2 τεμνόμενες από τρίτη ευθεία ε σχηματίζουν τις:

• εντός εναλλάξ γωνίες ίσες τότε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

• εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες τότε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

• εντός και επί τα αυτά γωνίες ίσες τότε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

και αντίστροφα.

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν:

• τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

• τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες,

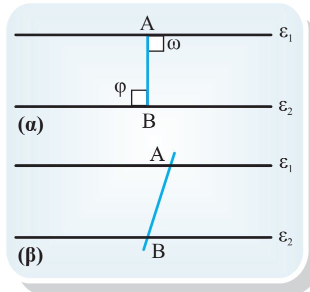
• τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

Πορίσματα

• Δύο ευθείες κάθετες σε διαφορετικά σημεία στην ίδια ευθεία, είναι μεταξύ τους παράλληλες (σχ.α).

• Δύο ευθείες παράλληλες στην ίδια ευθεία, είναι και μεταξύ τους παράλληλες.

• Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία τέμνει μία από αυτές τότε τέμνει και την άλλη (σχ.β).



• Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία τέμνει κάθετα μία από αυτές τότε τέμνει κάθετα και την άλλη.

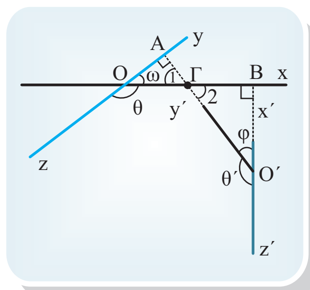
Το Ευκλείδειο Αίτημα της Παραλληλίας.

Από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική παράλληλη προς αυτή.

Πρόταση.

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από μία τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες.

Γωνίες με πλευρές παράλληλες ή κάθετες.

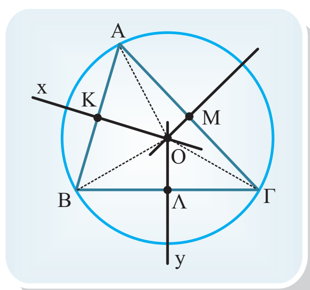


Αν δύο γωνίες έχουν τις πλευρές τους παράλληλες ή κάθετες μία προς μία τότε

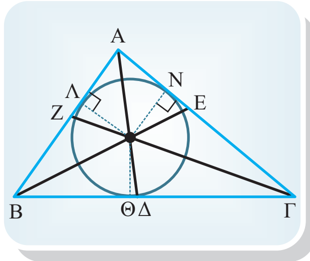
• αν είναι και οι δύο οξείες ή αμβλείες τότε είναι **ίσες**.

• αν η μία είναι οξεία και ή άλλη αμβλεία τότε είναι **παραπληρωματικές**.

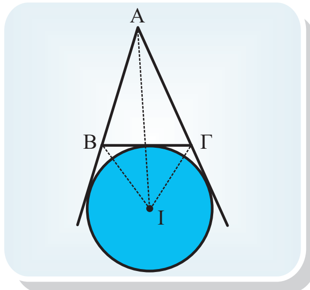
Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου.



• Ο κύκλος που διέρχεται από τις τρείς κορυφές ενός τριγώνου λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** και το κέντρο του είναι το σημείο όπου διέρχονται και οι τρείς μεσοκάθετοι των πλευρών του τριγώνου και λέγεται **περίκεντρο.**



• Ο κύκλος που εφάπτεται στις τρείς πλευρές ενός τριγώνου λέγεται **εγγεγραμμένος κύκλος** και το κέντρο του είναι το σημείο όπου διέρχονται και οι τρείς διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου και λέγεται **έκκεντρο.**



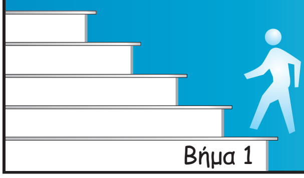
• Ο κύκλος που εφάπτεται στη μία πλευρά ενός τριγώνου και στις προεκτάσεις των δύο άλλων λέγεται **παρεγγεγραμμένος κύκλος** και το κέντρο του είναι το σημείο όπου διέρχονται η διχοτόμος της απέναντι γωνίας και οι διχοτόμοι των άλλων δύο εξωτερικών γωνιών του τριγώνου και λέγεται **παράκεντρο.**

Άθροισμα γωνιών τριγώνου και κυρτού ν-γώνου.

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με δύο ορθές.
Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού ν-γώνου ισούται με $2\nu - 4$ ορθές.

Πορίσματα

• Η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών.
• Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες μία προς μία ίσες, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.
• Οι οξείες γωνίες ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.
• Κάθε γωνία ενός ισόπλευρου τριγώνου ισούται με 60^{o}.
• Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός κυρτού ν-γώνου ισούται με 4 ορθές.

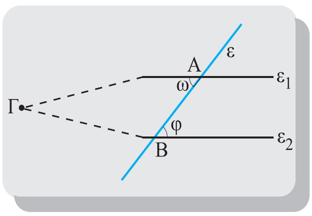


Μαθαίνουμε τις αποδείξεις

.

Θεώρημα

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.

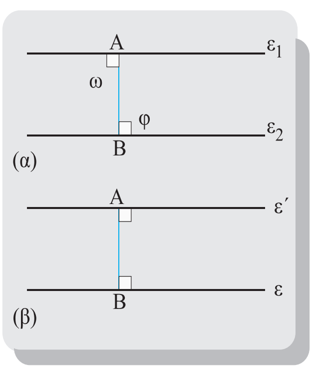


Απόδειξη

Έστω ότι ω = φ. Αν οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ τέμνονται σε σημείο Γ, η εξωτερική γωνία φ του τριγώνου ΑΒΓ θα είναι ίση με την απέναντι εσωτερική γωνία ω, που είναι άτοπο.

Άρα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.



Απόδειξη

Πράγματι οι γωνίες ω και φ (σχ. α) είναι ορθές, οπότε ω = φ. Άρα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

• Θα εξετάσουμε τώρα αν από σημείο εκτός ευθείας μπορούμε να φέρουμε παράλληλες ευθείες προς αυτή και πόσες.

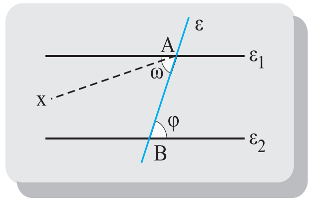
Έστω λοιπόν, ευθεία ε και σημείο Α εκτός αυτής (σχ. β). Φέρουμε την ΑΒ⊥ε και ονομάζουμε ε΄ την ευθεία που είναι κάθετη στην ΑΒ στο σημείο Α. Τότε ε΄//ε (αφού και οι δύο είναι κάθετες στην ΑΒ).

Έτσι λοιπόν **υπάρχει** ευθεία ε΄ που διέρχεται από ένα σημείο Α που δεν ανήκει στην ε και είναι παράλληλη προς την ευθεία ε.

Πρόταση

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

Απόδειξη

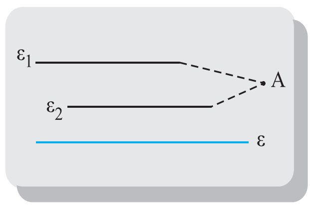


Έστω ότι $ε_1 // ε_2$ και ε μια τέμνουσα. Θα αποδείξουμε ότι ω = φ. Αν οι γωνίες ω και φ δεν είναι ίσες, φέρουμε την Ax ώστε οι γωνίες $x\hat{A}B$ και φ να βρίσκονται εκατέρωθεν της ε και να είναι ίσες. Τότε $Ax // ε_2$ γιατί τεμνόμενες από την AB σχηματίζουν δύο εντός και εναλλάξ γωνίες ίσες. Κατά συνέπεια υπάρχουν δύο παράλληλες από το A προς την $ε_2$, που είναι άτοπο. Άρα ω = φ.

Πρόταση

Αν δύο διαφορετικές ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες προς μία τρίτη ευθεία ε, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες, δηλαδή αν $ε_1 // ε$ και $ε_2 // ε$, τότε $ε_1 // ε_2$.

Απόδειξη

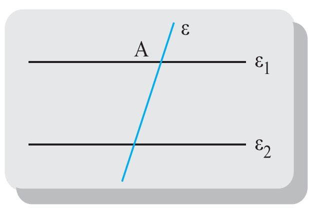


Αν οι $ε_1$ και $ε_2$ τέμνονταν σε σημείο A, θα είχαμε από το A δύο παράλληλες προς την ε, που είναι άτοπο. Άρα $ε_1 // ε_2$.

Πρόταση

Αν δύο ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία ε τέμνει τη μία από αυτές, τότε η ε θα τέμνει και την άλλη.

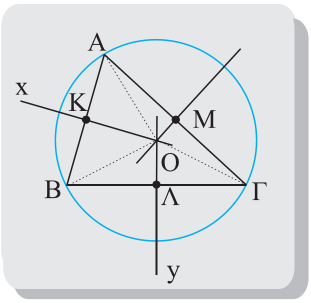
Απόδειξη



Υποθέτουμε ότι η ε τέμνει την $ε_1$ στο A. Αν η ε δεν έτεμνε την $ε_2$, θα ήταν $ε // ε_2$ και έτσι θα είχαμε από το A δύο παράλληλες προς την $ε_2$, πράγμα αδύνατο. Άρα η ε τέμνει την $ε_2$.

Θεώρημα

Οι τρεις μεσοκάθετοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου.



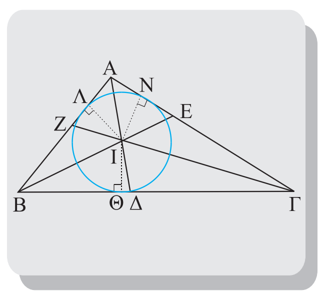
Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Κ, Λ , Μ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Οι μεσοκάθετοι Κx και Λy των ΑΒ, ΒΓ θα τέμνονται σε σημείο Ο, αφού τέμνονται οι κάθετες ευθείες τους ΑΒ και ΒΓ. Το Ο ισαπέχει από τις κορυφές Α και Β αφού ανήκει στη μεσοκάθετο της πλευράς ΑΒ, δηλαδή ΟΑ=ΟΒ. Επίσης ΟΒ=ΟΓ, αφού το Ο ανήκει στη μεσοκάθετο της πλευράς ΒΓ. Επομένως ισχύει ότι ΟΑ=ΟΓ, οπότε το Ο θα ανήκει και στη μεσοκάθετο της ΑΓ. Άρα, ο κύκλος (Ο,ΟΑ) θα διέρχεται από τις τρεις κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ και είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου.

Θεώρημα

Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.

Απόδειξη



Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και οι διχοτόμοι ΒΕ και ΓΖ των γωνιών του $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$ αντίστοιχα. Οι ΒΕ και ΓΖ τέμνονται σε σημείο Ι αφού $Ε\hat{Β}Γ+Ζ\hat{Γ}Β=\frac{\hat{Β}}{2}+\frac{\hat{Γ}}{2}<\hat{Β}+\hat{Γ}<2\llcorner$.

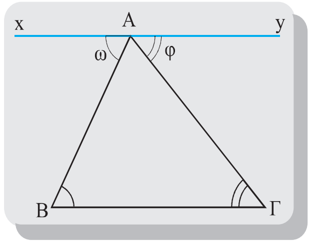
Το Ι ως σημείο της διχοτόμου της $\hat{Β}$ θα ισαπέχει από τις πλευρές της ΒΑ και ΒΓ, δηλαδή ΙΛ = ΙΘ. Ανάλογα το Ι θα ισαπέχει από τις πλευρές της $\hat{Γ}$, δηλαδή ΙΘ = ΙΝ. Επομένως το Ι ισαπέχει από τις ΑΒ και ΑΓ και θα ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{Α}$.

Τελικά, το Ι είναι το σημείο τομής και των τριών διχοτόμων του τριγώνου. Με κέντρο το Ι και ακτίνα την κοινή απόσταση του Ι από τις πλευρές του ΑΒΓ, γράφεται κύκλος που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.

Θεώρημα

Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

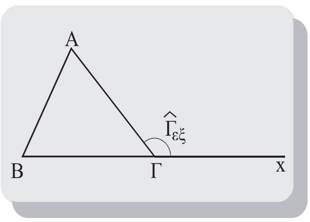
Απόδειξη



Από μια κορυφή, π.χ. την Α, φέρουμε ευθεία xy//ΒΓ. Τότε $\omega = \hat{B}$ (1) και $\varphi = \hat{\Gamma}$ (2), ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων xy και ΒΓ με τέμνουσες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.
Αλλά $\omega + \hat{A} + \varphi = 2\llcorner$ (3).
Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\llcorner.$$

i) Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.
ii) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, μία προς μία, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.
iii) Οι οξείες γωνίες ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.
iv) Κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60^o.

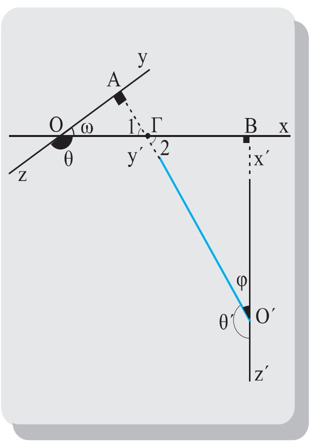


Απόδειξη

i) Έχουμε $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma} = 2\llcorner$ και $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} + \hat{\Gamma} = 2\llcorner$, οπότε

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} + \hat{\Gamma} \quad \text{ή} \quad \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = \hat{A} + \hat{B}.$$

ii) – iv) Προφανή.



Θεώρημα

Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.

Απόδειξη

Έστω οι γωνίες $x\hat{O}y = \omega$ και $x'\hat{O}'y' = \varphi$ με $Ox \perp O'x'$ και $Oy \perp O'y'$.
Τα τρίγωνα ΟΑΓ και Ο΄ΒΓ έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 1\llcorner$ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$ (κατακορυφήν).
Άρα θα έχουν και τις άλλες γωνίες ίσες, οπότε $\omega = \varphi$.

i) Δύο αμβλείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.

ii) Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες αλλά η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία είναι παραπληρωματικές.

Απόδειξη

i) Πράγματι, (σχ. 20) είναι $\theta + \omega = 2\llcorner$, $\theta' + \varphi = 2\llcorner$, οπότε $\theta = \theta'$, αφού $\omega = \varphi$.

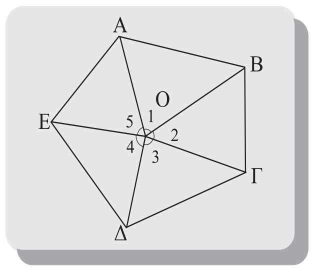
ii) Πράγματι, (σχ.20) είναι $\theta + \omega = 2\llcorner$, οπότε $\theta + \varphi = 2\llcorner$, αφού $\omega = \varphi$.

i) Το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου να είναι 2ν-4 ορθές.

ii) Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού ν - γώνου είναι 4 ορθές.

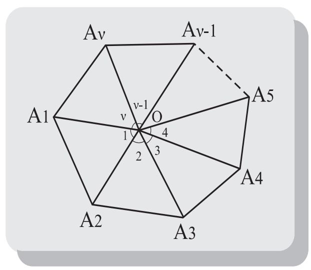
Απόδειξη

i)



Ας θεωρήσουμε κυρτό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ και Ο τυχαίο εσωτερικό σημείο του. Αν ενώσουμε το Ο με τις κορυφές του πενταγώνου, σχηματίζονται πέντε τρίγωνα. Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές. Έτσι το άθροισμα των γωνιών και των πέντε τριγώνων είναι (2·5) ορθές. Αν αφαιρέσουμε το άθροισμα των γωνιών $\hat{O}_1+\hat{O}_2+\hat{O}_3+\hat{O}_4+\hat{O}_5 = 4$ ορθές, θα μείνει το άθροισμα των γωνιών του πενταγώνου, δηλαδή:

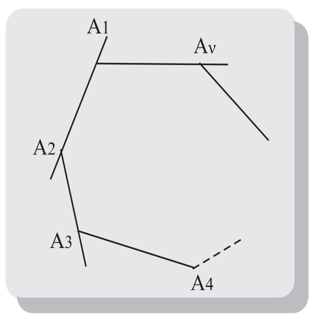
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}+\hat{E} = (2\cdot 5 - 4) \text{ ορθές.}$$



Όμοια, αν το κυρτό πολύγωνο έχει ν πλευρές και ενώσουμε το Ο με τις κορυφές του σχηματίζονται ν τρίγωνα. Το άθροισμα των γωνιών των ν τριγώνων είναι 2ν ορθές. Αν αφαιρέσουμε το άθροισμα των γωνιών $\hat{O}_1+\hat{O}_2+\hat{O}_3+ \dots +\hat{O}_\nu = 4$ ορθές έχουμε:

$$\hat{A}_1+\hat{A}_2+\hat{A}_3+\dots+\hat{A}_\nu = (2\nu - 4) \text{ ορθές.}$$

ii)

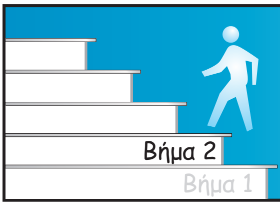


Έχουμε $\left\{\begin{array}{l} \hat{A}_{1\varepsilon\xi} + \hat{A}_1 = 2\llcorner \\ \hat{A}_{2\varepsilon\xi} + \hat{A}_2 = 2\llcorner \\ \dots\quad \dots \quad = \dots \\ \hat{A}_{\nu\varepsilon\xi} + \hat{A}_\nu = 2\llcorner \end{array}\right.$ προσθέτουμε κατά μέλη οπότε:

$(\hat{A}_{1\varepsilon\xi} + \hat{A}_{2\varepsilon\xi} + \dots + \hat{A}_{\nu\varepsilon\xi}) + (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \dots + \hat{A}_\nu) = 2\nu\llcorner$ ή

$(\hat{A}_{1\varepsilon\xi} + \hat{A}_{2\varepsilon\xi} + \dots + \hat{A}_{\nu\varepsilon\xi}) + (2\nu - 4)\llcorner = 2\nu\llcorner$ ή

$\hat{A}_{1\varepsilon\xi} + \hat{A}_{2\varepsilon\xi} + \dots + \hat{A}_{\nu\varepsilon\xi} = 4\llcorner$.



Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις "κλειδιά"

Α. Από το σχολικό βιβλίο

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.

σ. 82: Ασκήσεις Εμπέδωσης 2, 3, 4, 5

Αποδεικτικές Ασκήσεις 1, 2, 4, 5

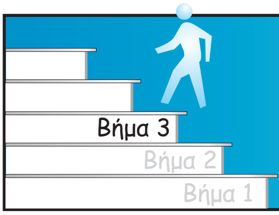
Σύνθετα Θέματα 3, 4

σ. 87: Ασκήσεις Εμπέδωσης 1, 3, 5, 6, 7

Αποδεικτικές Ασκήσεις 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Σύνθετα Θέματα 2, 5, 6

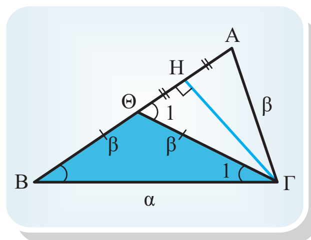
σ. 88: Γενικές Ασκήσεις 3, 4



Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. **Σε τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ με $\hat{A} = 2\hat{B}$, να δείξετε ότι $\alpha < 2\beta$**

Λύση:



Φέρουμε $\Gamma H \perp AB$ και στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΗ παίρνουμε τμήμα ΗΘ = ΗΑ. Τότε το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\Gamma A \Theta}$ είναι ισοσκελές αφού το ΓΗ είναι ύψος και διάμεσος. Άρα $\hat{\Theta}_1 = \hat{A}$ σαν προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου, και $\Gamma\Theta = A\Gamma = \beta$. Όμως η $\hat{\Theta}_1$ είναι εξωτερική γωνία του $\overset{\Delta}{\Theta B \Gamma}$, οπότε:

$\hat{\Theta}_1 = \hat{B} + \hat{\Gamma}_1 \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B} + \hat{\Gamma}_1 \Leftrightarrow 2\hat{B} = \hat{B} + \hat{\Gamma}_1 \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma}_1$, δηλαδή το $\overset{\Delta}{\Theta B \Gamma}$ είναι ισοσκελές με κορυφή Θ, αφού οι προσκείμενες γωνίες στην ΒΓ είναι ίσες. Άρα ΘΒ = ΘΓ = β.

Εφαρμόζουμε την τριγ. ανισότητα στο $\overset{\Delta}{\Theta B \Gamma}$ και έχουμε:

$B\Gamma < \Theta B + \Theta\Gamma \Leftrightarrow \alpha < \beta + \beta \Leftrightarrow \alpha < 2\beta$

2. **Σε ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}\left(\hat{A} = 1^{\llcorner}\right)$ φέρουμε το ύψος ΑΗ και τις διχοτόμους ΑΔ και ΓΕ των γωνιών $B\hat{A}H$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα. Αν το σημείο τομής των ΑΔ και ΓΕ είναι το Ρ, να δείξετε ότι:**

α. $A\Delta \perp \Gamma E$ **β. ΑΡ = ΡΔ**

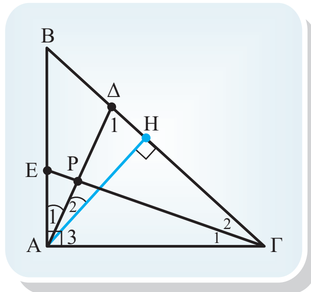
Λύση:

α. Είναι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \dfrac{B\hat{A}H}{2}$ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2 = \dfrac{\hat{\Gamma}}{2}$. Όμως $B\hat{A}H = \hat{\Gamma}$ σαν οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες. Άρα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{\Gamma}_1 = \dfrac{\hat{\Gamma}}{2}$. Στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{A P \Gamma}$ έχουμε:

$$P\hat{A}\Gamma + A\hat{\Gamma}P = \left(\hat{A}_2 + \hat{A}_3\right) + \hat{\Gamma}_1 = \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_1 = \hat{A} = 1^{\llcorner}$$

οπότε $A\hat{P}\Gamma = 2^{\llcorner} - \left(P\hat{A}\Gamma + A\hat{\Gamma}P\right) = 1^{\llcorner}$,

δηλαδή $A\Delta \perp \Gamma E$



β. Από το τρίγωνο $\overset{\Delta}{AH\Delta}\left(\hat{H} = 1^{\llcorner}\right)$ έχουμε:

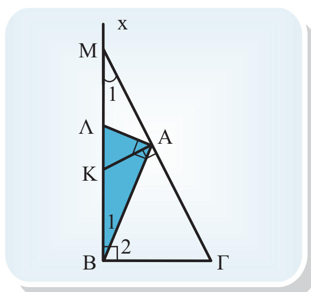
$$\hat{A}_2 + \hat{\Delta}_1 = 1^{\llcorner} \Leftrightarrow \hat{A}_1 + \hat{\Delta}_1 = 1^{\llcorner} \Leftrightarrow \hat{A} - \Delta\hat{A}\Gamma + \hat{\Delta}_1 = 1^{\llcorner} \Leftrightarrow$$

$$1^{\llcorner} - \Delta\hat{A}\Gamma + \hat{\Delta}_1 = 1^{\llcorner} \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 - \Delta\hat{A}\Gamma = 0 \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 = \Delta\hat{A}\Gamma$$

Άρα το $\overset{\Delta}{\Delta A\Gamma}$ είναι ισοσκελές με κορυφή το Γ, αφού οι προσκείμενες γωνίες στην ΑΔ είναι ίσες. Συνεπώς το ύψος ΓΡ που αντιστοιχεί στην βάση του ΑΔ είναι και διάμεσος. Δηλαδή ΑΡ = ΡΔ.

3. Σε ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}(AB = A\Gamma)$ φέρουμε ημιευθεία $Bx \perp B\Gamma$, η οποία βρίσκεται στο ημιεπίπεδο (ΒΓ, Α). Αν η Βx τέμνει την προέκταση της ΓΑ στο Μ και επί της ΒΜ πάρουμε σημεία Κ, Λ τέτοια ώστε: $B\hat{A}\Lambda = \Gamma\hat{A}K = 90^o$, να δείξετε ότι: ΒΛ = ΚΜ και ότι το $\overset{\Delta}{AK\Lambda}$ είναι ισοσκελές.

Λύση:



Επειδή $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ ισοσκελές είναι $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}$ σαν προσκείμενες γωνίες στη βάση του ΒΓ. Όμως από το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{B\Gamma M}\left(\Gamma\hat{B}M = 90^o\right)$ έχουμε:

$$\hat{\Gamma} + \hat{M}_1 = 90^o \Leftrightarrow \hat{B}_2 + \hat{M}_1 = \Gamma\hat{B}M \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hat{B}_2 + \hat{M}_1 = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 \Leftrightarrow \hat{M}_1 = \hat{B}_1$$

Άρα το $\overset{\Delta}{ABM}$ είναι ισοσκελές με βάση ΜΒ, αφού οι προσκείμενες σ'αυτή γωνίες είναι ίσες.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\Delta}{AB\Lambda}\left(B\hat{A}\Lambda = 90^o\right)$ και $\overset{\Delta}{AKM}\left(K\hat{A}M = 90^o\right)$ έχουν:

(1) ΑΒ = ΑΜ ($\overset{\Delta}{ABM}$ ισοσκελές)

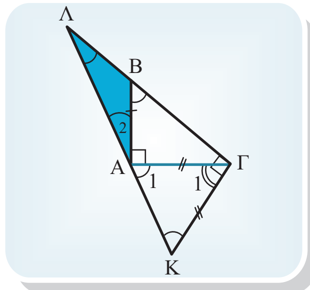
(2) $\hat{B}_1 = \hat{M}_1$ (το αποδείξαμε)

Άρα $\overset{\Delta}{AB\Lambda} = \overset{\Delta}{AKM}$ οπότε:

- ΒΛ = ΚΜ
- ΑΛ = ΑΚ, δηλαδή το $\overset{\Delta}{AK\Lambda}$ είναι ισοσκελές με κορυφή το Α.

4. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}(\hat{A}=1^{\llcorner})$ φέρουμε κάθετη ημιευθεία στην ΒΓ προς το μέρος του Α, επί της οποίας παίρνουμε τμήμα ΓΚ = ΑΓ. Στην προέκταση της υποτείνουσας ΓΒ παίρνουμε τμήμα ΒΛ = ΑΒ. Να αποδείξετε ότι $A\hat{\Gamma}K = 2\cdot A\hat{\Lambda}B$.

Λύση:



- Είναι ΑΒ = ΒΛ οπότε το τρίγωνο ΑΒΛ είναι ισοσκελές και $\hat{A}_2=\hat{\Lambda}$. Όμως η $\hat{B}$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΒΛ, οπότε

$$\hat{A}_2+\hat{\Lambda}=\hat{B}\Leftrightarrow 2\cdot\hat{\Lambda}=\hat{B}\Leftrightarrow \hat{\Lambda}=\frac{\hat{B}}{2}$$

- $A\Gamma=\Gamma K$ άρα $\overset{\Delta}{A\Gamma K}$ ισοσκελές, οπότε $\hat{A}_1=\hat{K}$. Όμως

$$\hat{\Gamma}_1+\hat{A}_1+\hat{K}=180^o\Leftrightarrow 90^o-\hat{\Gamma}+2\cdot\hat{A}_1=180^o\Leftrightarrow 2\cdot\hat{A}_1=90^o+\hat{\Gamma}\Leftrightarrow \hat{A}_1=45^o+\frac{\hat{\Gamma}}{2}$$

- Το $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο στο Α, οπότε $\hat{B}+\hat{\Gamma}=90^o$

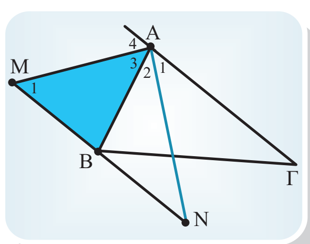
Έχουμε: $\hat{A}_1+\hat{A}_2=\left(45^o+\frac{\hat{\Gamma}}{2}\right)+\hat{\Lambda}=45^o+\frac{\hat{\Gamma}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}=45^o+\frac{\hat{\Gamma}+\hat{B}}{2}=45^o+\frac{90^o}{2}=90^o$

Οπότε από το $\overset{\Delta}{A\Gamma K}$ έχουμε: $\hat{\Gamma}_1=180^o-2\cdot\hat{A}_1\Leftrightarrow\hat{\Gamma}_1=180^o-2\cdot\left(90^o-\hat{A}_2\right)\Leftrightarrow$

$\hat{\Gamma}_1=180^o-180^o+2\cdot\hat{A}_2\Leftrightarrow\hat{\Gamma}_1=2\cdot\hat{A}_2\Leftrightarrow A\hat{\Gamma}K=2\cdot\hat{\Lambda}\Leftrightarrow A\hat{\Gamma}K=2\cdot A\hat{\Lambda}B$

5. Σε τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, φέρουμε από την κορυφή Β ευθεία x΄x//ΑΓ. Επί της x΄x και εκατέρωθεν του Β παίρνουμε τμήματα ΒΜ = ΒΝ = ΑΒ. Να δείξετε ότι: $AM\perp AN$

Λύση:



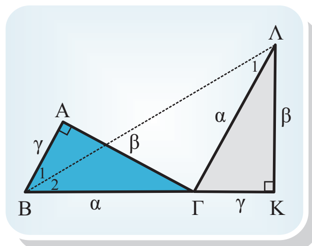
- $AB=MB$ άρα το τρίγωνο $\overset{\Delta}{ABM}$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{A}_3=\hat{M}_1$ σαν προσκείμενες γωνίες στη βάση του.
- Όμως $\hat{A}_4=\hat{M}_1$ σαν εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΓ και x΄x που τέμνονται από την ΑΜ.

Άρα $\hat{A}_3=\hat{A}_4$, δηλαδή η ΑΜ είναι διχοτόμος της $\hat{A}_{\varepsilon\xi}$.
Ομοίως αποδεικνύεται ότι η ΑΝ είναι διχοτόμος της

$\hat{A}$. Όμως οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{A}_{εξ}$ είναι εφεξής και παραπληρωματικές. Άρα οι διχοτόμοι τους είναι κάθετες, δηλαδή $AM \perp AN$.

6. Στην προέκταση της υποτείνουσας ΒΓ ορθογωνίου τριγώνου $\overset{\Delta}{ABΓ}\left(\hat{A}=90^o\right)$ παίρνουμε τμήμα ΓΚ = γ. Φέρουμε ημιευθεία $Kx \perp BK$ προς το μέρος του Α. Επί της Κx παίρνουμε τμήμα ΚΛ = β. Να δείξετε ότι η ΒΛ διχοτομεί την $\hat{B}$.

Λύση:



Φέρουμε την ΓΛ και συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{ABΓ}$ και $\overset{\Delta}{ΓKΛ}$. Αυτά έχουν:

- $\hat{A}=\hat{K}=90^o$
- ΑΒ = ΚΓ = γ (υπόθεση)
- ΑΓ = ΚΛ = β (υπόθεση)

Άρα $\overset{\Delta}{ABΓ}=\overset{\Delta}{ΓKΛ}$, οπότε ΒΓ = ΓΛ, δηλαδή το τρίγωνο $\overset{\Delta}{BΓΛ}$ είναι ισοσκελές με κορυφή το Γ. Συνεπώς $\hat{B}_2=\hat{Λ}_1$ σαν προσκείμενες γωνίες στη βάση του.

Επίσης από την ισότητα των τριγώνων έχουμε $A\hat{B}Γ=K\hat{Γ}Λ$. Άρα ΑΒ//ΓΛ, αφού τεμνόμενες από τη ΒΚ, σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους ίσες.

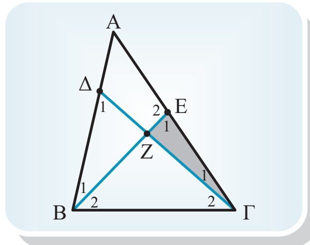
Οπότε $\hat{B}_1=\hat{Λ}_1$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΒ και ΓΛ που τέμνονται από την ΒΛ. Συνεπώς $\hat{B}_1=\hat{B}_2$, δηλαδή η ΒΛ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$.

7. Έστω οξυγώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{ABΓ}$ με μικρότερη πλευρά τη ΒΓ. Στις πλευρές του ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΒΔ = ΓΕ = ΒΓ. Αν οι ΒΕ, ΓΔ τέμνονται στο Ζ, να δείξετε ότι: $Γ\hat{Z}E=90^o+\frac{\hat{A}}{2}$

Λύση:

- ΒΔ = ΒΓ άρα το τρίγωνο $\overset{\Delta}{BΔΓ}$ είναι ισοσκελές. Επομένως $\hat{Δ}_1=\hat{Γ}_2=\frac{180^o-\hat{B}}{2}$

• ΓΕ = ΒΓ άρα το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{B\Gamma E}}$ είναι ισοσκελές.



Επομένως $\hat{E}_1 = \hat{B}_2 = \dfrac{180^o - \hat{\Gamma}}{2}$

Από το $\overset{\Delta}{\Gamma E Z}$ έχουμε:

$$\Gamma\hat{Z}E = 180^o - \hat{E}_1 - \hat{\Gamma}_1 = 180^o - \frac{180^o - \hat{\Gamma}}{2} - \left(\hat{\Gamma} - \hat{\Gamma}_2\right) =$$

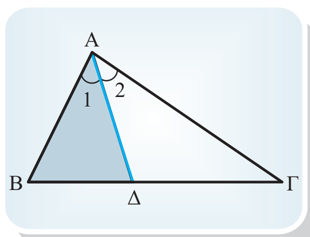
$$= 180^o - \left(90^o - \frac{\hat{\Gamma}}{2}\right) - \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}_2 = 180^o - 90^o + \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{\Gamma} + \frac{180^o - \hat{B}}{2} =$$

$$= 90^o - \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \left(90^o - \frac{\hat{B}}{2}\right) = 180^o - \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2} = 180^o - \frac{180^o - \hat{A}}{2} =$$

$$= 180^o - \left(90^o - \frac{\hat{A}}{2}\right) = 90^o + \frac{\hat{A}}{2}$$

8. **Σε τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ με $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 30^o$, φέρουμε την διχοτόμο ΑΔ. Να δείξετε ότι $A\hat{\Delta}B = 75^o$.**

Λύση:



Από το $\overset{\Delta}{A\Delta B}$ έχουμε:

$$A\hat{\Delta}B = 180^o - \hat{A}_1 - \hat{B} = 180^o - \frac{\hat{A}}{2} - \hat{B} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} - \frac{\hat{A}}{2} - \hat{B} =$$

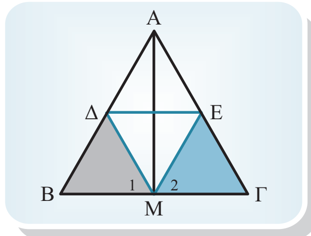
$$= \frac{\hat{A}}{2} + \hat{\Gamma} = \frac{\hat{A} + 2\hat{\Gamma}}{2} = \frac{180^o - \hat{B} - \hat{\Gamma} + 2\hat{\Gamma}}{2} = \frac{180^o - \hat{B} + \hat{\Gamma}}{2} =$$

$$= \frac{180^o - \left(\hat{B} - \hat{\Gamma}\right)}{2} = \frac{180^o - 30^o}{2} = 75^o$$

9. **Από το μέσο Μ της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, φέρουμε παράλληλες στις ΑΒ, ΑΓ που τις τέμνουν στα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα. Να δείξετε ότι η ΑΜ είναι μεσοκάθετος του ΔΕ.**

Λύση:

Επειδή $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ ισοσκελές, ισχύει $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ σαν προσκείμενες γωνίες στη βάση του.



Επίσης $\hat{B} = \hat{M}_2$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΑΒ και ΜΕ που τέμνονται από την ΒΓ.

Ομοίως $\hat{\Gamma} = \hat{M}_1$.

Άρα:

- $\hat{B} = \hat{M}_1$, οπότε $\Delta\overset{\Delta}{B}M$ ισοσκελές, αφού οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του είναι ίσες. Συνεπώς ΔΒ = ΔΜ (1)
- $\hat{\Gamma} = \hat{M}_2$ οπότε ομοίως συμπεραίνουμε ότι ΕΜ = ΕΓ (2)

Τα $\Delta\overset{\Delta}{B}M$ και $E\overset{\Delta}{M}\Gamma$ έχουν:

1. ΒΜ = ΜΓ (Μ μέσο ΒΓ)

2. $\hat{B} = \hat{M}_2$ (το αποδείξαμε παραπάνω)

3. $\hat{M}_1 = \hat{\Gamma}$ (το αποδείξαμε παραπάνω)

Άρα $\Delta\overset{\Delta}{B}M = E\overset{\Delta}{M}\Gamma (\Gamma\Pi\Gamma)$ οπότε ΔΒ = ΕΜ (3)

Από (1), (2), (3) συμπεραίνουμε ότι $\Delta B = \Delta M = ME = E\Gamma$

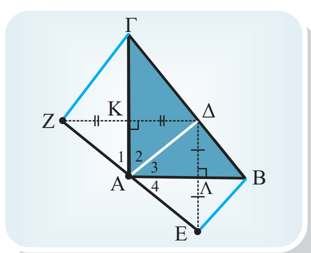
Επειδή ΜΔ = ΜΕ, το Μ ανήκει στην μεσοκάθετο του ΔΕ, αφού ισαπέχει από τα άκρα του.

Επίσης ΑΔ = ΑΒ – ΔΒ = ΑΓ – ΕΓ = ΑΕ.

Άρα και το Α ισαπέχει από τα άκρα του ΔΕ, οπότε ανήκει στην μεσοκάθετο του. Συνεπώς η ΑΜ είναι μεσοκάθετος του ΔΕ.

10. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε το ύψος ΑΔ προς την υποτείνουσα ΒΓ. Έστω Ε, Ζ τα συμμετρικά του Δ ως προς τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:
α. τα σημεία Ε, Α, Ζ είναι συνευθειακά.
β. ΒΕ//ΓΖ

Λύση:



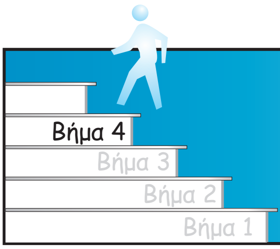
α. Το τρίγωνο $A\overset{\Delta}{\Delta}Z$ είναι ισοσκελές, αφού η ΑΚ είναι ύψος και διάμεσος. Άρα ΑΔ = ΑΖ. Ομοίως αποδεικνύεται ότι ΑΔ = ΑΕ. Στα ισοσκελή τρίγωνα $A\overset{\Delta}{\Delta}Z$ και $A\overset{\Delta}{\Delta}E$ οι ΑΚ , ΑΛ αντίστοιχα θα είναι και διχοτόμοι, οπότε: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ και

$\hat{A}_3 = \hat{A}_4$. Τότε $Z\hat{A}E = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_4 = \hat{A}_2 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_3 = 2\cdot\hat{A}_2 + 2\cdot\hat{A}_3 =$

$= 2\left(\hat{A}_2 + \hat{A}_3\right) = 2\cdot\hat{A} = 2\cdot 90^o = 180^o$

Συνεπώς τα Ζ, Α, Ε είναι συνευθειακά σημεία.

β. Είναι $A\hat{E}B = A\hat{\Delta}B = 90^o$ σαν συμμετρικές γωνίες ως προς ΑΒ, οπότε $BE \perp AE$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\Gamma Z \perp AZ$. Όμως τα ΑΕ και ΑΖ έχουν κοινό φορέα. Άρα ΒΕ//ΓΖ σαν κάθετα στην ίδια ευθεία.



Λύνουμε μόνοι μας

1. **Στη γωνία $x\hat{O}\psi$ η Οz είναι εσωτερική ευθεία. Από τυχαίο σημείο Α της Οz φέρνουμε την ΑΒ//Οx. Να δειχθεί ότι:**

α. Αν η Οz είναι διχοτόμος της $x\hat{O}\psi$, το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές

β. Αν το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές, η Οz είναι διχοτόμος της $x\hat{O}\psi$.

2. **Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΗ η διχοτόμος της $\hat{A}$. Φέρνουμε ΒΔ παράλληλη στη διχοτόμο, που τέμνει την ευθεία ΓΑ στο Δ. Να δειχθεί ότι:**

α. Το τρίγωνο ΒΑΔ ισοσκελές

β. Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές τότε $\Delta B \perp B\Gamma$.

3. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, φέρνουμε τις διαμέσους ΒΒ΄, ΓΓ΄ και μια ευθεία ε παράλληλη στη βάση ΒΓ που τέμνει τις διαμέσους στα σημεία Κ, Λ αντίστοιχα και τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Μ και Ν. Να δείξετε ότι ΚΜ = ΛΝ.

....

....

....

....

....

....

....

....

4. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΓ > ΑΒ. Στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε τμήμα ΑΔ = ΑΒ. Να δειχθεί ότι:

α. $B\hat{\Delta}\Gamma = 90^o + \frac{\hat{A}}{2}$ β. $\Delta\hat{B}\Gamma = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$

....

....

....

....

....

....

....

....

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ και Ε της ΒΓ ώστε $B\hat{A}\Delta = \hat{\Gamma}$ και $\Gamma\hat{A}E = \hat{B}$. Να βρεθεί το είδος του τριγώνου ΑΔΕ.

....

....

....

....

....

....

....

....

6. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Στις πλευρές του ΑΒ και ΒΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ και Ε τέτοια, ώστε να είναι ΑΔ = ΑΕ. Να αποδείξετε ότι: $E\hat{A}\Gamma = 2 \cdot B\hat{E}\Delta$.

....

....

....

....

....

....

7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι διχοτόμοι ΑΔ και ΓΕ. Αν είναι ΑΔ = ΑΒ και ΓΕ = ΒΓ να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

....

....

....

....

....

....

8. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} < 2\hat{\Gamma}$. Έστω τα σημεία Δ και Ε της ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα τέτοια ώστε $A\hat{\Gamma}\Delta = E\hat{\Delta}\Gamma = \frac{\hat{A}}{2}$. Να δείξετε ότι ΔΑ = ΔΕ = ΕΓ.

....

....

....

....

....

Ελέγχουμε τη γνώση μας

Θέμα 1ο

Α. Να δείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι δύο ορθές

(Μονάδες 10)

Β. Να δείξετε ότι κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.

(Μονάδες 10)

Γ. Να δείξετε ότι αν δύο ευθείες ε_1, ε_2 είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία ε τέμνει τη μία από αυτές θα τέμνει και την άλλη.

(Μονάδες 5)

Θέμα 2ο

Α. Το σημείο Γ είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Από το Γ φέρνουμε τυχαία ημιευθεία Γx και παίρνουμε σε αυτήν τμήματα ΓΔ = ΓΑ και ΓΕ = ΓΒ. Να δείξετε ότι $ΒΕ \perp ΑΔ$.

(Μονάδες 12)

Β. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α. Στις προεκτάσεις των ΒΑ και ΓΑ προς το μέρος της κορυφής Α παίρνουμε τμήματα ΑΒ΄ = ΑΓ και ΑΓ΄ = ΑΒ. Να δείξετε ότι η προέκταση του ύψους ΑΔ περνάει από το μέσο Ο της Β΄Γ΄.

(Μονάδες 13)

Θέμα 3ο

Α. Να αποδειχθεί ότι οι διχοτόμοι των γωνιών κυρτού τετραπλεύρου, όταν τέμνονται ανά δύο, σχηματίζουν τετράπλευρο με απέναντι γωνίες παραπληρωματικές.

(Μονάδες 17)

Β. Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $\hat{Α} = \hat{Γ}$. Να δείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{Β}$ και $\hat{Δ}$ είναι παράλληλες.

(Μονάδες 8)

Θέμα 4ο

Α. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΓ > ΑΒ. Φέρνουμε το ύψος ΑΗ, τη διχοτόμο ΑΔ και τη διάμεσο ΑΜ. Να δειχθούν οι σχέσεις:

α. $AH < \frac{AB + A\Gamma}{2}$ **β.** $B\hat{A}H < \Gamma\hat{A}H$ **γ.** $\Delta B < \Delta\Gamma$ **δ.** $\Delta B < AB$

(Μονάδες 16)

Β. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη ΒΔ διχοτόμο της γωνίας $\hat{B}$. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{\Delta}B$, $B\hat{\Delta}\Gamma$ τέμνουν τη ΒΓ στα Ζ, Ε να δείξετε ότι ΕΖ = 2ΒΔ.

(Μονάδες 9)