Κεφάλαιο 3ο

Τρίγωνα

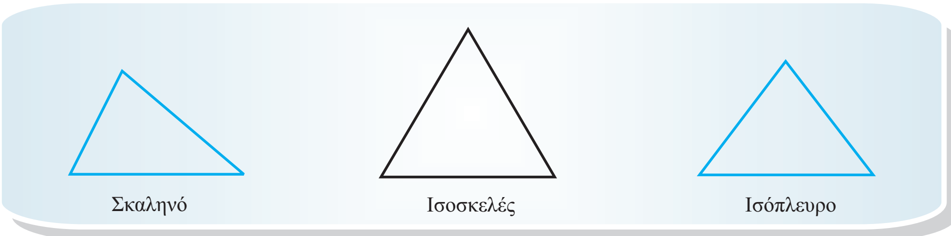
Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο 3 θα πρέπει να είναι σε θέση:

- ✓ Να γνωρίζει και να εφαρμόζει τα κριτήρια ισότητας τριγώνων και ορθογωνίων τριγώνων.
- ✓ Να γνωρίζει τις ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου και του ισόπλευρου τριγώνου.
- ✓ Να γνωρίζει την έννοια του γεωμετρικού τόπου και τους τρεις βασικούς γεωμετρικούς τόπους.
- ✓ Να γνωρίζει τη σχέση μεταξύ χορδών - αποστημάτων - τόξων - επίκεντρων γωνιών.
- ✓ Να γνωρίζει πως βρίσκουμε το συμμετρικό ενός σχήματος ως προς κέντρο συμμετρίας και ως προς άξονα συμμετρίας.
- ✓ Να γνωρίζει τις σχετικές θέσεις
  - ευθείας και κύκλου
  - δύο κύκλων
- ✓ Να γνωρίζει τις ανισοτικές σχέσεις μεταξύ των πλευρών και των γωνιών του ίδιου τριγώνου και δύο διαφορετικών τριγώνων.

Στοιχεία και είδη τριγώνων

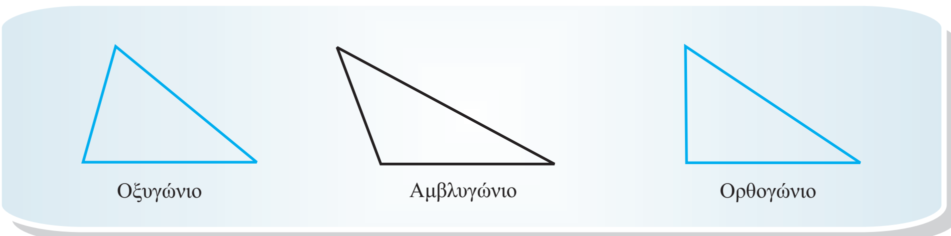
Τα τρίγωνα ανάλογα με τις πλευρές τους χωρίζονται σε:

- ***Σκαληνά***, αν έχουν άνισες πλευρές.
- ***Ισοκελή***, αν έχουν δυο πλευρές ίσες. Τότε η τρίτη πλευρά λέγεται **βάση** του τριγώνου και η απέναντι της κορυφή λέγεται **κορυφή** αυτού.
- ***Ισόπλευρα***, αν και οι τρείς πλευρές είναι ίσες.



Τα τρίγωνα ανάλογα με τις γωνίες τους χωρίζονται σε:

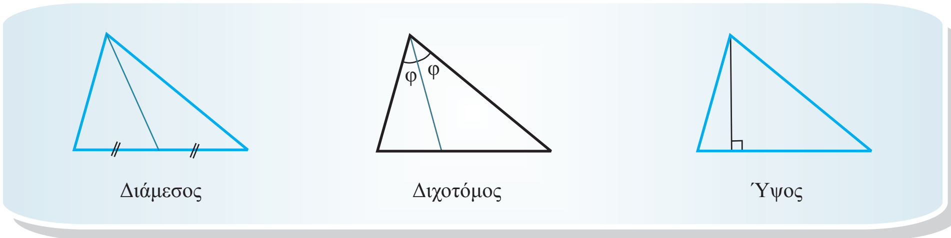
- ***Οξυγώνια***, αν και οι τρείς γωνίες τους είναι οξείες.
- ***Ορθογώνια***, αν έχουν μια ορθή γωνία. Τότε οι δυο πλευρές που περιέχουν την ορθή γωνία λέγονται **κάθετες** και η πλευρά που είναι απέναντι απο την ορθή λέγεται **υποτείνουσα**.
- ***Αμβλυγώνια***, αν έχουν μια αμβλεία γωνία.



Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

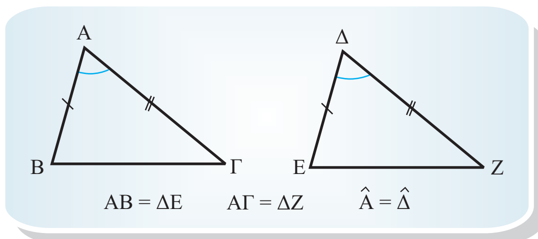
Τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου είναι:

- ***Η διάμεσος*** που είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς.
- ***Η διχοτόμος*** που είναι το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου της γωνίας, απο την κορυφή μέχρι την απέναντι πλευρά.
- ***Το ύψος*** που είναι το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρεται απο μια κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς.

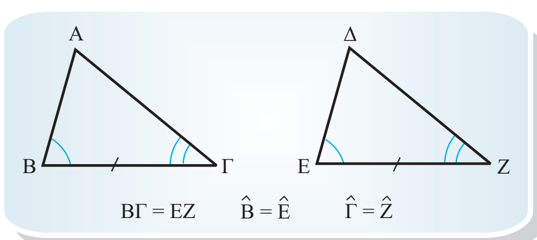


<u>Κριτήρια ισότητας τριγώνων</u>

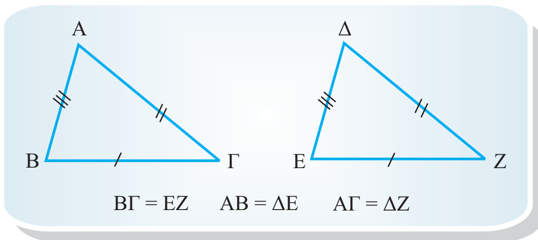
<u>1ο κριτήριο.</u> Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα (ΠΓΠ).



<u>2ο κριτήριο</u> Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα (ΓΠΓ).



<u>3ο κριτήριο</u> Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα (ΠΠΠ).



Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:
1ο κριτήριο: Δύο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.
2ο κριτήριο: Μια πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες.

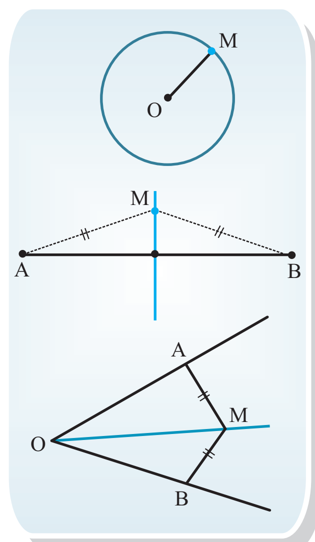
Ισοσκελές τρίγωνο

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:
- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.
- Η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση είναι ύψος και διχοτόμος.
- Το ύψος, που αντιστοιχεί στη βάση, είναι διχοτόμος και διάμεσος

και **αντίστροφα αν**:

σε τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι διχοτόμος και διάμεσος ή διχοτόμος και ύψος ή διάμεσος και ύψος, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Ισόπλευρο τρίγωνο



- Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.
- Η διάμεσος, η διχοτόμος και το ύψος που άγονται από κάθε κορυφή ταυτίζονται.

Γεωμετρικοί τόποι

Γεωμετρικός τόπος λέγεται το σύνολο των σημείων που έχουν μια κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα. Τρεις γνωστοί μας γεωμετρικοί τόποι είναι οι παρακάτω.

1. Κύκλος

- Όλα τα σημεία του κύκλου ισαπέχουν από το κέντρο του και αντίστροφα κάθε σημείο του επιπέδου που απέχει απόσταση R από το κέντρο του κύκλου ανήκει σε αυτόν. Άρα ο κύκλος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από σταθερό σημείο.

2. Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος

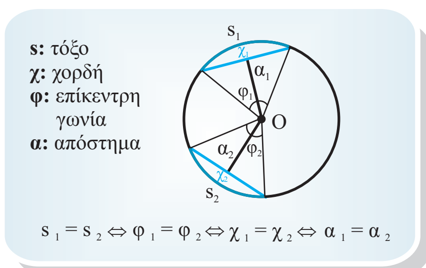
- Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του και αντίστροφα κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του. Άρα η μεσοκάθετος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος.

3. Διχοτόμος γωνίας

- Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου. Άρα η διχοτόμος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.

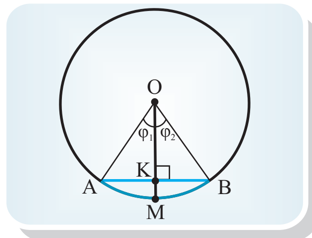
Σχέση επίκεντρης γωνίας - τόξου - χορδής - αποστήματος

Δύο **τόξα** ενός κύκλου είναι ίσα	αν και μόνο αν	οι **επίκεντρες γωνίες** που βαίνουν σε αυτά είναι ίσες.
Δύο **τόξα** ενός κύκλου είναι ίσα	αν και μόνο αν	οι αντίστοιχες **χορδές** τους είναι ίσες.
Δύο **χορδές** ενός κύκλου είναι ίσες	αν και μόνο αν	τα αντίστοιχα **αποστήματά** τους είναι ίσα



Απόστημα.

Είναι το κάθετο τμήμα που άγεται από το κέντρο του κύκλου προς τη χορδή

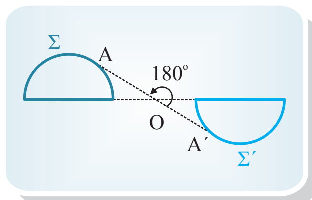


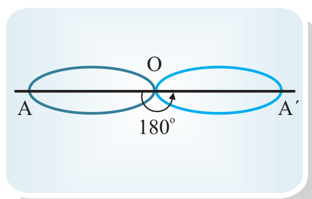
Άρα το απόστημα:

- διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.
- είναι κάθετο στη χορδή.
- διέρχεται από το μέσο της χορδής.
- διέρχεται από το μέσο του αντίστοιχου τόξου.
- διχοτομεί την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία.

Κεντρική συμμετρία.

Δύο σχήματα Σ, Σ΄ λέγονται συμμετρικά ως προς ένα σημείο Ο, αν και μόνο αν κάθε σημείο του Σ΄ είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς το Ο. Το σημείο Ο λέγεται κέντρο συμμετρίας του σχήματος, που αποτελείται απο τα συμμετρικά ως προς το Ο σχήματα Σ και Σ΄. Δηλαδή ένα σημείο Ο λέγεται κέντρο συμμετρίας ενός σχήματος, όταν για κάθε σημείο Α του σχήματος το συμμετρικό του Α΄, ως προς το Ο, είναι επίσης σημείο του σχήματος. Ένα σχήμα με κέντρο συμμετρίας λέμε οτι παρουσιάζει κεντρική συμμετρία.

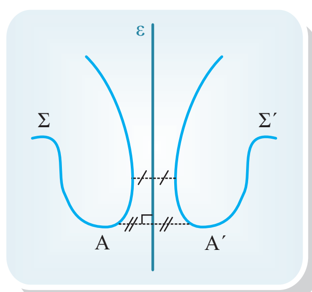




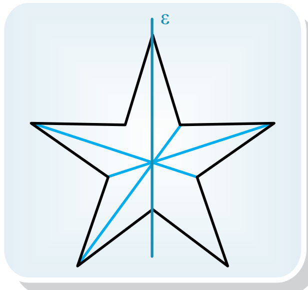
Αν στρέψουμε ένα σχήμα Σ, με κέντρο συμμετρίας το Ο, κατά 180^{o} γύρω από το Ο, θα πάρουμε ένα σχήμα που θα συμπίπτει με το αρχικό.

Αξονική συμμετρία.

Δύο σχήματα Σ, Σ΄ λέγονται συμμετρικά ως προς την ευθεία ε, αν και μόνο αν κάθε σημείο του Σ΄ είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς την ε. Η ευθεία ε λέγεται άξονας συμμετρίας του σχήματος που αποτελείται από τα σχήματα Σ και Σ΄. Δηλαδή μια ευθεία ε λέγεται άξονας συμμε-



τρίας ενός σχήματος, όταν για κάθε σημείο Α του σχήματος το συμμετρικό του Α΄, ως προς την ε, είναι επίσης σημείο του σχήματος. Ένα σχήμα με άξονα συμμετρίας λέμε ότι παρουσιάζει αξονική συμμετρία. Αν ένα σχήμα έχει ως άξονα συμμετρίας μια ευθεία ε, τότε η ε χωρίζει το σχήμα σε δύο μέρη με τέτοιο τρόπο, ώστε, αν διπλώσουμε το φύλλο κατά μήκος της ε, τα μέρη αυτα θα ταυτιστούν.

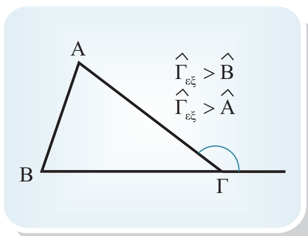


Ανισοτικές σχέσεις

Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας.

Θεώρημα

Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από κάθε μια από τις απέναντι εσωτερικές.



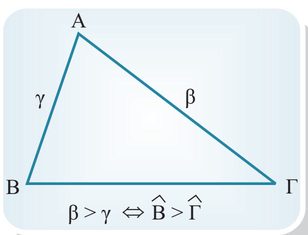
Πορίσματα

• Δύο γωνίες ενός τριγώνου έχουν άθροισμα μικρότερο από 180^o.

• Ένα τρίγωνο δεν μπορεί να έχει πάνω από μία ορθή ή αμβλεία γωνία.

Θεώρημα

Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες γωνίες βρίσκονται ομοίως άνισες πλευρές και αντίστροφα.



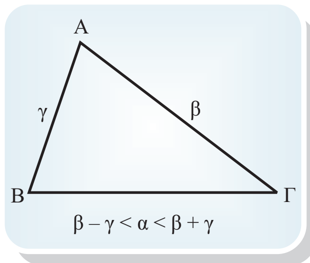
Πορίσματα

• Απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία ενός τριγώνου βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά.

• Ένα τρίγωνο με δύο ίσες γωνίες είναι ισοσκελές και με τρείς ίσες γωνίες είναι ισόπλευρο.

Τριγωνική ανισότητα

Κάθε πλευρά ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από τη διαφορά των δύο άλλων και μικρότερη από το άθροισμά τους.



Πόρισμα

Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση από τη διάμετρο του κύκλου.

Παρατήρηση

• Η τριγωνική ανισότητα για τυχαία σημεία Α,Β,Γ του επιπέδου εκφράζεται από τη σχέση $|\mathrm{A\Gamma} - \mathrm{B\Gamma}| \le \mathrm{AB} \le \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{B\Gamma}$.

• Αν δύοτρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες άνισες, τότε και οιτρίτες πλευρές είναι όμοια άνισες και αντίστροφα.

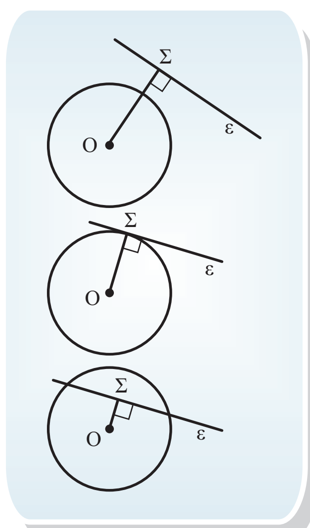
Κάθετες και πλάγιες ευθείες

Θεώρημα

Αν από ένα σημείο εκτός ευθείας φέρουμε το κάθετο και δύο πλάγια τμήματα τότε:

- **Αν τα δύο πλάγια τμήματα είναι ίσα μεταξύ τους τότε τα ίχνη τους ισαπέχουν από το ίχνος της καθέτου και αντίστροφα.**
- **Αν τα δύο πλάγια τμήματα είναι άνισα μεταξύ τους τότε οι αποστάσεις των ιχνών τους από το ίχνος της καθέτου είναι ομοιοτρόπως άνισες και αντίστροφα.**
- **Το κάθετο τμήμα είναι μικρότερο από οποιοδήποτε πλάγιο.**

Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου



Έστω κύκλος (Ο,ρ) και ΟΣ η απόσταση μιας ευθείας ε από το κέντρο Ο.

- Αν ισχύει ΟΣ > ρ τότε η ευθεία δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται εξωτερική του κύκλου.
- Αν ισχύει ΟΣ = ρ τότε η ευθεία έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται εφαπτόμενη του κύκλου και είναι μοναδική για το συγκεκριμένο σημείο επαφής. Η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτόμενη.
- Αν ισχύει ΟΣ < ρ τότε η ευθεία έχει δύο κοινά σημεία

με τον κύκλο και λέγεται τέμνουσα του κύκλου.

Εφαπτομένη κύκλου

Μια ευθεία που έχει μόνο ένα κοινό σημείο με τον κύκλο λέγεται εφαπτομένη του κύκλου

Η εφαπτομένη:

- Είναι κάθετη στην ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής.
- Σε κάθε σημείο του κύκλου είναι μοναδική.

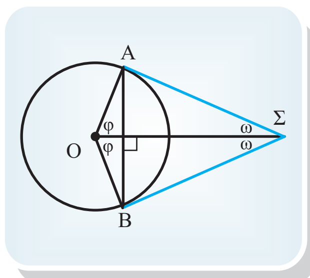
Θεώρημα

Μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

Πόρισμα

Τρια σημεία ενός κύκλου δεν μπορεί να είναι συνευθειακά.

Διακεντρική ευθεία



Διακεντρική ευθεία σημείου Σ λέγεται η ευθεία ΣΟ η οποία διέρχεται από το σημείο Σ και το κέντρο Ο του κύκλου.

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα R, Σ σημείο εκτός του κύκλου και ΣΑ, ΣΒ τα εφαπτόμενα τμήματα από το Σ προς τον κύκλο. Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\Sigma O A}$ και $\overset{\Delta}{\Sigma O B}$ είναι ίσα, επομενως **τα εφαπτόμενα τμήματα ΣΑ, ΣΒ είναι ίσα.**

Τότε η διακεντρική ευθεία:

- είναι μεσοκάθετος της χορδής ΑΒ
- διχοτομεί τη γωνία $A\hat{O}B$
- διχοτομεί τη γωνία $A\hat{\Sigma}B$

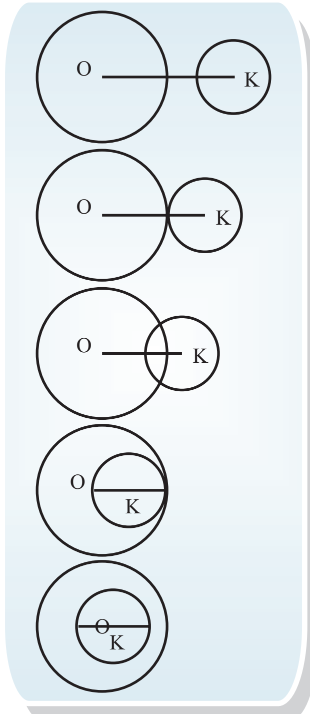
Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

Έστω κύκλοι (Ο, R) και (Κ, ρ) με $R > \rho$. Το ευθύγραμμο τμήμα ΚΟ που ενώνει τα κέντρα των δύο κύκλων λέγεται διάκεντρος. Έστω $KO = \delta$.

- Αν ισχύει $\delta > R + \rho$ τότε οι κύκλοι δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.
- Αν ισχύει $\delta = R + \rho$ τότε οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο τομής τους με τη διάκεντρο.
- Αν ισχύει $R - \rho < \delta < R + \rho$ τότε οι κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία τα

οποία είναι τα άκρα της **κοινής χορδής τους**.

- Αν ισχύει δ = R – ρ τότε οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.
- Αν ισχύει δ < R – ρ τότε ο κύκλος (Κ,ρ) είναι εσωτερικός του κύκλου (Ο,R).



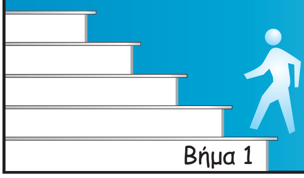
Θεώρημα **Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους. Στην περίπτωση που οι δύο κύκλοι είναι ίσοι, η κοινή χορδή είναι μεσοκάθετος της διακέντρου.**

Θεώρημα **Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.**

Πόρισματα.

i. Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία ορθή ή αμβλεία.

ii. Το άθροισμα δύο γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των 180^o.

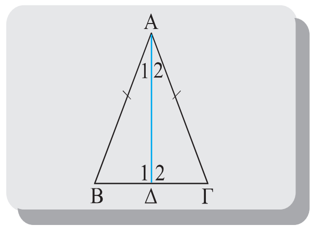


Μαθαίνουμε τις αποδείξεις

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:
- **Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.**
- **Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.**

Απόδειξη

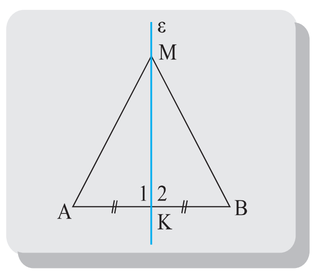
Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ.



Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ έχουν ΑΒ = ΑΓ, ΑΔ κοινή και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Από την ίδια ισότητα τριγώνων προκύπτει ότι ΒΔ = ΔΓ, οπότε η ΑΔ είναι διάμεσος και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Από την τελευταία ισότητα και επειδή $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180°$ προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90°$, οπότε συμπεραίνουμε ότι το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου.

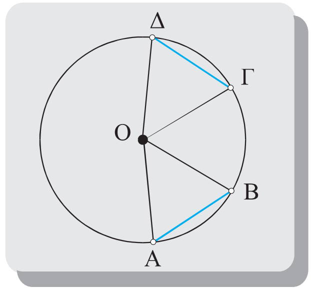
Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.



Απόδειξη

Έστω ε η μεσοκάθετος ενός τμήματος ΑΒ και Μ ένα σημείο της. Τα τρίγωνα ΜΚΑ και ΜΚΒ έχουν ΚΑ=ΚΒ, ΜΚ κοινή και $\hat{K}_1 = \hat{K}_2 = 90°$ (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα, οπότε ΜΑ = ΜΒ

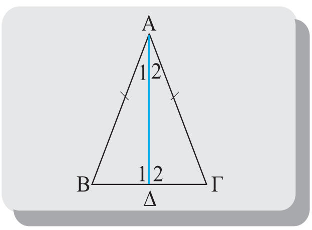
Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες.



Απόδειξη

Έστω $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ δύο ίσα τόξα ενός κύκλου (Ο,ρ). Τότε είναι $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$. Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ έχουν ΟΑ = ΟΓ(= ρ), ΟΒ = ΟΔ(= ρ) και $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$. Επομένως είναι ίσα, οπότε ΑΒ = ΓΔ.

Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.

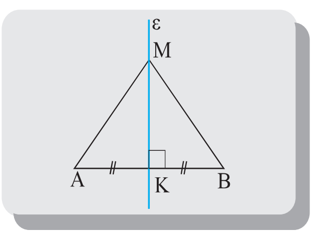


Σχήμα 1

Απόδειξη

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και ΑΔ η διάμεσός του (σχ.1). Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν ΑΒ=ΑΓ, ΑΔ κοινή και ΒΔ=ΔΓ, άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Από τις ισότητες αυτές προκύπτει αντίστοιχα ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος και ύψος.

Κάθε σημείο πού ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.

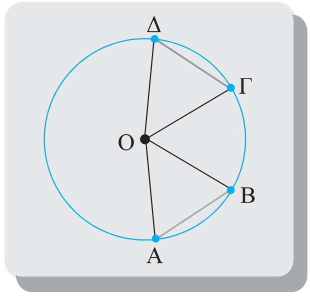


Σχήμα 2

Απόδειξη

Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ (σχ. 2), Μ ένα σημείο, ώστε ΜΑ = ΜΒ και Κ το μέσο του ΑΒ. Τότε το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές και η ΜΚ διάμεσός του, οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα, η ΜΚ θα είναι και ύψος δηλαδή η ΜΚ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ.

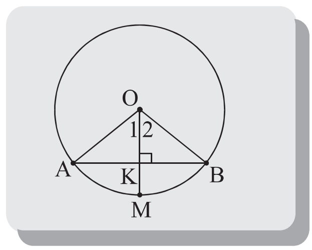
Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.



Απόδειξη

Έστω δύο τόξα $\overset{\frown}{ΑΒ}$ και $\overset{\frown}{ΓΔ}$ ενός κύκλου (Ο,ρ) μικρότερα του ημικυκλίου, με ΑΒ = ΓΔ. Τότε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ έχουν: ΟΑ = ΟΓ (= ρ), ΟΒ = ΟΔ (= ρ) και ΑΒ = ΓΔ, άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα. Επομένως, $Α\hat{Ο}Β = Γ\hat{Ο}Δ$, οπότε $\overset{\frown}{ΑΒ} = \overset{\frown}{ΓΔ}$.

Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.

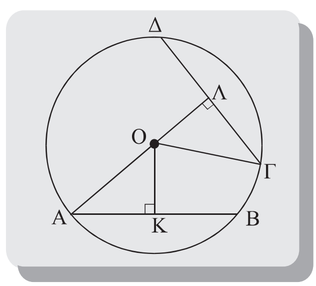


Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο (Ο,ρ), μια χορδή του ΑΒ και την κάθετη ΟΚ της ΑΒ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ. Επειδή το τμήμα ΟΚ είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ (ΟΑ = ΟΒ = ρ), σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα είναι διάμεσος και διχοτόμος, δηλαδή το Κ είναι μέσο του ΑΒ και $\hat{Ο}_1 = \hat{Ο}_2$. Αφού $\hat{Ο}_1 = \hat{Ο}_2$ προκύπτει ότι $\overset{\frown}{ΑΜ} = \overset{\frown}{ΜΒ}$.

Θεώρημα

Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.



Απόδειξη

Έστω οι ίσες χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου (Ο,ρ) και ΟΚ, ΟΛ τα αποστήματά τους αντίστοιχα (σχ.29). Τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΓ, έχουν $\hat{Κ} = \hat{Λ} = 90°$, ΟΑ = ΟΓ (= ρ) και ΑΚ = ΓΛ (αφού ΑΒ = ΓΔ). Επομένως είναι ίσα, οπότε ΟΚ = ΟΛ.

Αντίστροφα. Έστω ότι τα αποστήματα ΟΚ και ΟΛ είναι ίσα. Τότε τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΓ έχουν $\hat{Κ} = \hat{Λ} = 90°$, ΟΑ = ΟΓ και ΟΚ = ΟΛ, επομένως είναι ίσα, οπότε

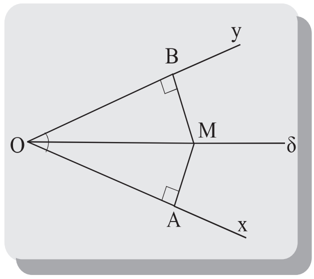
$$ΑΚ = ΓΛ \quad ή \quad \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΓΔ}{2} \quad ή \quad ΑΒ = ΓΔ.$$

Θεώρημα

Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.

Απόδειξη

Έστω μια γωνία $x\hat{O}y$ και M ένα σημείο της διχοτόμου της Οδ (σχ.30). Φέρουμε $MA \perp Ox$ και $MB \perp Oy$. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΟΜ και ΒΟΜ είναι ίσα γιατί έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 90°$, ΟΜ κοινή και $M\hat{O}A = M\hat{O}B$, επομένως MA = MB.



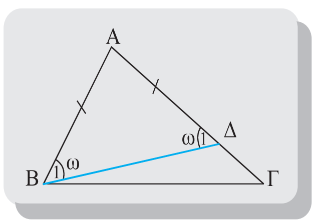
Αντίστροφα. Έστω Μ ένα εσωτερικό σημείο της γωνίας. Φέρουμε $MA \perp Ox$ και $MB \perp Oy$ και υποθέτουμε ότι MA = MB. Τότε τα τρίγωνα ΑΟΜ και ΒΟΜ είναι πάλι ίσα, αφού $\hat{A} = \hat{B} = 90°$, ΟΜ κοινή και MA=MB και επομένως $M\hat{O}A = M\hat{O}B$, οπότε το Μ είναι σημείο της διχοτόμου Οδ.

Θεώρημα

Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.

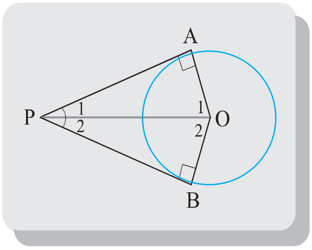
Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta > \gamma$ (σχ. 1). Τότε υπάρχει μοναδικό εσωτερικό σημείο Δ της ΑΓ, ώστε ΑΔ=ΑΒ. Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με βάση ΒΔ και επομένως $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$. Επειδή η ΒΔ είναι εσωτερική ημιευθεία της γωνίας $\hat{B}$, είναι $\hat{B} > \hat{B}_1$, ενώ η $\hat{\Delta}_1$, ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΒΔΓ είναι μεγαλύτερη από τη $\hat{\Gamma}$, δηλαδή $\hat{\Delta}_1 > \hat{\Gamma}$. Έτσι έχουμε $\hat{B} > \omega$ και $\omega > \hat{\Gamma}$, επομένως $\hat{B} > \hat{\Gamma}$.



Σχήμα 1

Αντίστροφα. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$. Τότε θα είναι και $\beta > \gamma$, γιατί αν ήταν $\beta = \gamma$ ή $\beta < \gamma$ θα είχαμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ή $\hat{B} < \hat{\Gamma}$ αντίστοιχα, που είναι άτοπο.



Σχήμα 2

Θεώρημα

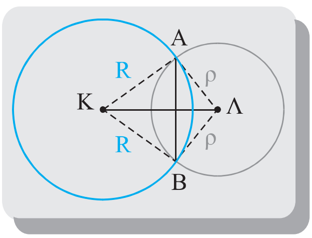
Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

Απόδειξη

Τα τρίγωνα ΑΟΡ και ΒΟΡ (σχ. 2) έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 90°$, ΟΡ κοινή και ΟΑ = ΟΒ (= ρ), άρα είναι ίσα, οπότε ΡΑ = ΡΒ.

Θεώρημα

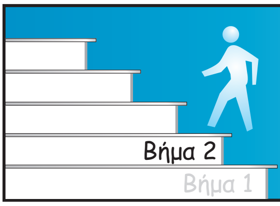
Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.



Σχήμα 3

Απόδειξη

Έστω οι κύκλοι (Κ,R) και (Λ,ρ) (σχ. 3) και Α, Β τα σημεία τομής τους. Επειδή ΚΑ = ΚΒ = R, το σημείο Κ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ. Όμοια από την ΛΑ = ΛΒ = ρ προκύπτει ότι και το Λ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ. Άρα, η ΚΛ είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής ΑΒ του κύκλου.



Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις "κλειδιά"

Α. Από το σχολικό βιβλίο

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.

σ. 38: Ασκήσεις Εμπέδωσης 1, 2, 3, 4
Αποδεικτικές Ασκήσεις 1, 2, 3

σ. 43: Ασκήσεις Εμπέδωσης 1, 3
Αποδεικτικές Ασκήσεις 1, 2, 3
Σύνθετα θέματα 2

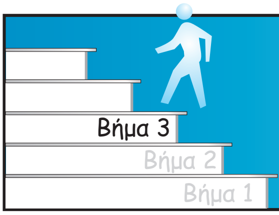
σ. 48: Ασκήσεις Εμπέδωσης 1, 2, 3
Αποδεικτικές Ασκήσεις 1, 4, 5

σ. 57: Ερωτήσεις Κατανόησης 1 ,3
Ασκήσεις Εμπέδωσης 1, 2, 5, 6, 7, 8
Αποδεικτικές Ασκήσεις 2, 3, 5
Σύνθετα θέματα 1, 3

σ. 63: Ασκήσεις Εμπέδωσης 1, 2
Αποδεικτικές Ασκήσεις 2, 3

σ. 66: Αποδεικτικές Ασκήσεις 3

σ. 70: Γενικές Ασκήσεις 5, 6

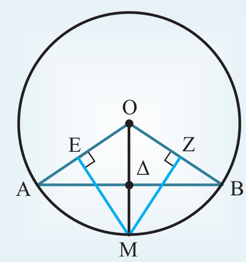


Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. **Να αποδείξετε ότι το μέσο Μ τόξου $\overset{\frown}{AB}$ ισαπέχει από τις ακτίνες που αντιστοιχούν στα άκρα του τόξου και μάλιστα απόσταση ίση με το μισό της αντίστοιχης χορδής.**

Λύση:

Φέρουμε $ME \perp OA$, $MZ \perp OB$. Θα δείξουμε ότι: $ME = MZ = \dfrac{AB}{2}$. Η ακτίνα ΟΜ είναι διχοτόμος της $A\hat{O}B$, αφού $A\hat{O}M = B\hat{O}M$, διότι $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$ και σε ίσα τόξα του ίδιου κύκλου αντιστοιχούν ίσες επίκεντρες γωνίες. Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα $E\overset{\Delta}{O}M$ και $Z\overset{\Delta}{O}M$ είναι ίσα, διότι έχουν: (1) $OM = OM$ (κοινή)



(2) $E\hat{O}M = Z\hat{O}M$ (το αποδείξαμε παραπάνω).

Συνεπώς $ME = MZ$ (1)

Επειδή το Μ είναι μέσο του $\overset{\frown}{AB}$, ως γνωστόν ισχύει $OM \perp AB$ και αν Δ είναι το σημείο τομής των ΟΜ και ΑΒ, το Δ είναι μέσο του ΑΒ.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $O\overset{\Delta}{A}\Delta$, $O\overset{\Delta}{M}E$ έχουν:

(1) ΟΑ = ΟΜ (ως ακτίνες του κύκλου)

(2) $A\hat{O}\Delta = E\hat{O}M$ (κοινή)

Άρα τα τρίγωνα $O\overset{\Delta}{A}\Delta$ και $O\overset{\Delta}{M}E$ είναι ίσα, οπότε είναι:

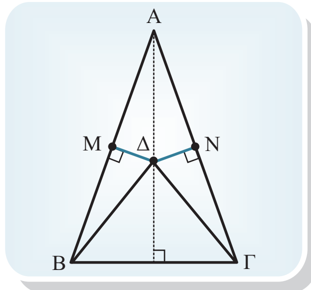
$$ME = A\Delta \Leftrightarrow ME = \frac{AB}{2} \quad (2).$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε: $ME = MZ = \dfrac{AB}{2}$.

2. **Στο εσωτερικό ισοσκελούς τριγώνου $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$ (ΑΒ = ΑΓ), παίρνουμε σημείο Δ το οποίο ισαπέχει από τα άκρα της βάσης του. Να αποδείξετε**

ότι το Δ ισαπέχει και από τα ίσα σκέλη του τριγώνου.

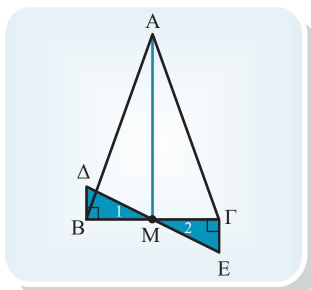
Λύση:



Επειδή το Δ ισαπέχει από τα Β, Γ συμπεραίνουμε ότι ανήκει στην μεσοκάθετο του ΒΓ. Όπως είναι γνωστό η μεσοκάθετος της βάσης ισοσκελούς τριγώνου διέρχεται από την κορυφή του, αφού και αυτή ισαπέχει από τα άκρα της βάσης. Άρα η ΑΔ είναι ύψος και διάμεσος του $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$, οπότε θα είναι και διχοτόμος. Επειδή λοιπόν το Δ ανήκει στην διχοτόμο της $\hat{\mathrm{A}}$, θα ισαπέχει από τις πλευρές της.

3. **Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ (ΑΒ = ΑΓ). Εκατέρωθεν της ΒΓ φέρουμε στα άκρα της Β και Γ ημιευθείες κάθετες σ'αυτήν, επί των οποίων παίρνουμε τα ίσα τμήματα ΒΔ και ΓΕ. Αφού δείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΓ και ΔΕ τέμνονται, έστω σε σημείο Μ, στη συνέχεια να δείξετε ότι $\mathrm{AM} \perp \mathrm{B\Gamma}$.**

Λύση:



Εφόσον τα Δ, Ε βρίσκονται εκατέρωθεν του ΒΓ και τα Β, Γ εκατέρωθεν του ΔΕ, τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΓ και ΔΕ τέμνονται σε εσωτερικό τους σημείο Μ. Τα ορθογώνια τρίγωνα $\mathrm{M}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Delta$ και $\mathrm{M}\overset{\Delta}{\Gamma}\mathrm{E}$ έχουν:

(1) ΒΔ = ΓΕ (υπόθεση).

(2) $\hat{\mathrm{M}}_1 = \hat{\mathrm{M}}_2$ (ως κατακορυφήν γωνίες).

Άρα $\mathrm{M}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Delta = \mathrm{M}\overset{\Delta}{\Gamma}\mathrm{E}$, οπότε ΜΒ = ΜΓ. Δηλαδή το Μ είναι μέσο του ΒΓ. Συνεπώς στο ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ η ΑΜ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην βάση του ΒΓ, άρα θα είναι και ύψος, δηλαδή $\mathrm{AM} \perp \mathrm{B\Gamma}$.

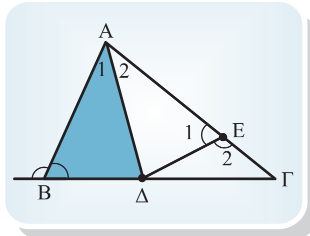
4. **Σε κάθε σκαληνό τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$, η διχοτόμος ΑΔ χωρίζει την πλευρά ΒΓ σε τμήματα ομοίως άνισα με τις προσκείμενες πλευρές του τριγώνου.**

Λύση:

Έστω ΑΒ < ΑΓ. Θα δείξουμε ότι: ΔΒ < ΔΓ. Στην ΑΓ παίρνουμε τμήμα ΑΕ = ΑΒ.

Τότε τα τρίγωνα $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\Delta}\mathrm{B}$, $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\Delta}\mathrm{E}$ έχουν:

(1) ΑΔ = ΑΔ (κοινή)



(2) ΑΒ = ΑΕ (από κατασκευή)

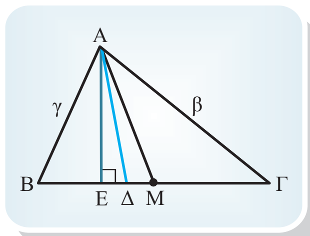
(3) $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ΑΔ: διχοτόμος της $\hat{A}$)

Άρα $A\overset{\Delta}{\Delta}B = A\overset{\Delta}{\Delta}E$ (ΠΓΠ), οπότε: ΔΒ = ΔΕ (1) και $\hat{B} = \hat{E}_1$ (2) άρα $\hat{B}_{εξ} = \hat{E}_2$ (παραπληρώματα ίσων γωνιών).

Όμως $\hat{B}_{εξ} > \hat{\Gamma}$ άρα $\hat{E}_2 > \hat{\Gamma}$, οπότε από το τρίγωνο $E\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma$ συμπεραίνουμε ότι $\Delta\Gamma > \Delta E \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \Delta\Gamma > \Delta B$. Ομοίως αποδεικνύεται και στην περίπτωση που ΑΒ > ΑΓ.

5. **Σε τρίγωνο $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$ με β > γ, να δείξετε ότι: $\delta_\alpha < \mu_\alpha$.**

Λύση:



Φέρουμε ΑΔ = δ_α, ΑΜ = μ_α και το ύψος ΑΕ. Όπως αποδείξαμε στην προηγούμενη άσκηση, αφού ΑΒ < ΑΓ θα ισχύει:

$$\Delta B < \Delta\Gamma \Leftrightarrow \Delta B + \Delta B < \Delta B + \Delta\Gamma \Leftrightarrow 2 \cdot \Delta B < B\Gamma \Leftrightarrow$$

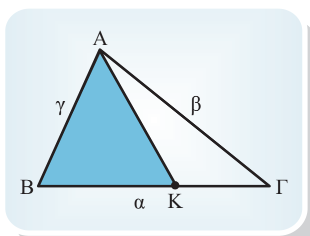
$$\Leftrightarrow \Delta B < \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow \Delta B < MB \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta B - EB < MB - EB \Leftrightarrow \Delta E < ME$$

Όμως, αν τα ίχνη δύο πλαγίων τμημάτων απέχουν άνισα από το ίχνος της κάθετης, τότε τα πλάγια τμήματα είναι όμοιως άνισα. Άρα ΑΔ < ΑΜ ή $\delta_\alpha < \mu_\alpha$.

6. **Σε τρίγωνο $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$ θεωρούμε τυχαίο σημείο Κ της πλευράς ΒΓ. Να δείξετε ότι: τ – α < ΑΚ < τ.**

Λύση:



Από τα τρίγωνα $A\overset{\Delta}{B}K$, $A\overset{\Delta}{\Gamma}K$, έχουμε:

- ΑΒ < ΒΚ + ΑΚ (1)
- ΑΓ < ΓΚ + ΑΚ (2)

Προσθέτουμε τις (1) και (2) κατά μέλη και έχουμε:

$$AB + A\Gamma < (BK + \Gamma K) + 2AK \Leftrightarrow \gamma + \beta < \alpha + 2AK \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\gamma + \beta) - \alpha < 2AK \Leftrightarrow 2\tau - \alpha - \alpha < 2AK \Leftrightarrow 2\tau - 2\alpha < 2AK \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\tau - \alpha) < 2AK \Leftrightarrow \tau - \alpha < AK \quad (3)$$

Επίσης από τα ίδια τρίγωνα έχουμε:

• ΑΚ < ΑΒ + ΒΚ (4)
• ΑΚ < ΑΓ + ΚΓ (5)
Προσθέτουμε τις (4), (5) κατά μέλη και έχουμε:

$$2\text{AK} < \text{AB} + \text{A}\Gamma + (\text{BK} + \text{K}\Gamma) \Leftrightarrow 2\text{AK} < \gamma + \beta + \alpha \Leftrightarrow 2\text{AK} < 2\cdot\tau \Leftrightarrow \text{AK} < \tau \quad (6)$$

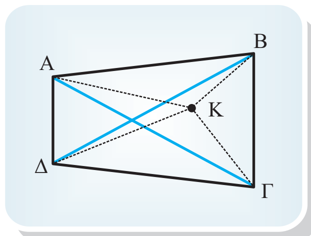
Από (3) και (6) έχουμε: τ – α < ΑΚ < τ

7. Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ θεωρούμε τυχαίο σημείο Κ στο εσωτερικό του. Να δείξετε ότι:

α. $\frac{1}{2}\rho < \text{KA} + \text{KB} + \text{K}\Gamma + \text{K}\Delta < \frac{3}{2}\rho$

β. $\text{A}\Gamma + \text{B}\Delta \le \text{KA} + \text{KB} + \text{K}\Gamma + \text{K}\Delta$

όπου $\rho = \text{AB} + \text{B}\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta\text{A}$.



Λύση:

α. Από τα τρίγωνα $\text{K}\overset{\Delta}{\text{A}}\text{B}$, $\text{K}\overset{\Delta}{\text{B}}\Gamma$, $\text{K}\overset{\Delta}{\Gamma}\Delta$, $\text{K}\overset{\Delta}{\Delta}\text{A}$ έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \text{AB} < \text{KA} + \text{KB} \\ \bullet\ \text{B}\Gamma < \text{KB} + \text{K}\Gamma \\ \bullet\ \Gamma\Delta < \text{K}\Gamma + \text{K}\Delta \\ \bullet\ \Delta\text{A} < \text{K}\Delta + \text{KA} \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} \rho < 2(\text{KA} + \text{KB} + \text{K}\Gamma + \text{K}\Delta) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\rho < \text{KA} + \text{KB} + \text{K}\Gamma + \text{K}\Delta \quad (1)$$

Επειδή το Κ είναι εσωτερικό σημείο του ΑΒΓΔ έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \text{KA} + \text{KB} < \text{A}\Delta + \Delta\Gamma + \Gamma\text{B} \\ \bullet\ \text{KB} + \text{K}\Gamma < \text{BA} + \text{A}\Delta + \Delta\Gamma \\ \bullet\ \text{K}\Gamma + \text{K}\Delta < \Gamma\text{B} + \text{BA} + \text{A}\Delta \\ \bullet\ \text{K}\Delta + \text{KA} < \Delta\Gamma + \Gamma\text{B} + \text{BA} \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} 2(\text{KA} + \text{KB} + \text{K}\Gamma + \text{K}\Delta) < 3(\text{AB} + \text{B}\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta\text{A}) \Leftrightarrow$$

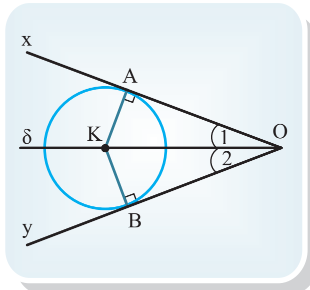
$$\Leftrightarrow \text{KA} + \text{KB} + \text{K}\Gamma + \text{K}\Delta < \frac{3}{2}\rho \quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι: $\frac{1}{2}\rho < \text{KA} + \text{KB} + \text{K}\Gamma + \text{K}\Delta < \frac{3}{2}\rho$

β. Για την τριάδα των σημείων Κ, Α, Γ ισχύει:
$\text{A}\Gamma \le \text{KA} + \text{K}\Gamma$ (3) (το ίσον ισχύει αν το Κ ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ). Ομοίως και $\text{B}\Delta \le \text{KB} + \text{K}\Delta$ (4)
Οπότε από (3) και (4) έχουμε $\text{A}\Gamma + \text{B}\Delta \le \text{KA} + \text{KB} + \text{K}\Gamma + \text{K}\Delta$
Το ίσον ισχύει αν το Κ είναι το σημείο τομής των ΑΓ, ΒΔ.

8. **Έστω γωνία $x\hat{O}y$ και τυχαίο σημείο Κ της διχοτόμου της Οδ. Αν $KA \perp Ox$, ποιά είναι η σχετική θέση του κύκλου (Κ, ΚΑ) με την ευθεία Οy.**

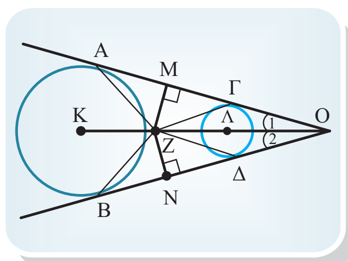
Λύση:



Ως γνωστόν η σχετική θέση μιας ευθείας και ενός κύκλου εξαρτάται από την απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία. Γι’αυτό φέρουμε την $KB \perp Oy$ και θα την συγκρίνουμε με την ακτίνα του κύκλου. Επειδή το Κ ανήκει στην διχοτόμο της $x\hat{O}y$, θα ισαπέχει από τις πλευρές της. Άρα ΚΒ = ΚΑ. Συνεπώς ο (Κ, ΚΑ) εφάπτεται στην ευθεία Οy.

9. **Έστω δύο κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) με R > ρ, που δεν τέμνονται. Φέρουμαι τις κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες τους. Να δείξετε ότι:**
α. τέμνονται σε σημείο της διακέντρου.
β. οι μεσοκάθετοι των κοινών εξωτερικών εφαπτόμενων τμημάτων τέμνονται σε σημείο της διακέντρου.

Λύση:



α. Στον (Κ, R) η διάκεντρος ΟΚ διχοτομεί τη γωνία $A\hat{O}B$ των εφαπτομένων τμημάτων. Ομοίως στον (Λ, ρ) η ΟΛ διχοτομεί την $\Gamma\hat{O}\Delta$. Επειδή όμως η διχοτόμος γωνίας είναι μοναδική, συμπεραίνουμε ότι οι ευθείες ΟΚ και ΟΛ ταυτίζονται. Άρα, το Ο ανήκει στην διάκεντρο ΚΛ.

β. Έστω Ζ το σημείο τομής της διακέντρου ΚΛ και της μεσοκαθέτου του ΑΓ. Τότε ΑΖ = ΖΓ (1).
Αρκεί να δείξουμε ότι το Ζ ανήκει στην μεσοκάθετο του ΒΔ, δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι: ΖΒ = ΖΔ.

Τα τρίγωνα $Z\overset{\Delta}{O}\Gamma$ και $Z\overset{\Delta}{O}\Delta$ έχουν:
- ΟΖ = ΟΖ (κοινή)
- ΟΓ = ΟΔ (εφαπτόμενα τμήματα)
- $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (ΟΛ διχοτόμος της $\Gamma\hat{O}\Delta$)

Άρα $Z\overset{\Delta}{O}\Gamma = Z\overset{\Delta}{O}\Delta$ (ΠΓΠ), οπότε: ΖΓ = ΖΔ (2)

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $Z\overset{\Delta}{O}A = Z\overset{\Delta}{O}B$, οπότε ΖΑ = ΖΒ (3)
Η (1) δια μέσου των (2) (3) γίνεται ΖΒ = ΖΔ.

1. Έστω τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ και Σ εσωτερικό σημείο του. Οι ΒΣ και ΓΣ τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ στα Ε και Δ αντίστοιχα. Αν $B\Delta = \Gamma E$ και $\widehat{B\Delta E} = \widehat{\Gamma E\Delta}$ δείξτε ότι το τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές.

2. Έστω κύκλος (Ο,ρ) και Κ τυχαίο σημείο του. Αν ο κύκλος (Κ,ρ) τέμνει τον προηγούμενο στα σημεία Α και Β, δείξτε ότι:

α. οι γωνίες $\widehat{AOB}$ και $\widehat{AKB}$ είναι ίσες και η ΟΚ είναι διχοτόμος τους.

β. οι ΟΚ και ΑΒ είναι κάθετες.

3. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ και ευθεία ε παράλληλη στην βάση ΒΓ που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Αν Η και Θ είναι οι προβολές των Δ και Ε αντίστοιχα πάνω στην ΒΓ, δείξτε ότι ΒΗ = ΓΘ.

4. Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά, μια προσκείμενη γωνία και την αντίστοιχη διχοτόμο της ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

....

....

....

....

....

....

5. **Να δείξετε ότι αν ενώσουμε τα μέσα των πλευρών ενός ισοσκελούς τριγώνου, σχηματίζεται ισοσκελές τρίγωνο.**

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6. **Δίνεται γωνία $x\hat{O}\psi$ και τυχαίο σημείο Σ της διχοτόμου Οδ. Πάνω στην Οχ παίρνουμε τμήματα ΟΑ, ΟΒ και στην Οψ παίρνουμε ΟΓ = ΟΑ και ΟΔ = ΟΒ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\Sigma A B}$ και $\overset{\Delta}{\Sigma \Gamma \Delta}$ είναι ίσα.**

....

....

....

....

....

....

....

....

7. Έστω Σ τυχαίο σημείο της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Η κάθετος προς τη ΣΑ στο Σ τέμνει την ΑΒ στο Ε και η κάθετος προς τη ΣΒ στο Σ τέμνει την ΑΒ στο Η. Δείξτε ότι το Σ βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΗΕ.

8. Έστω τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ με κοινή κορυφή την Α και $B\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}E$. Να δείξετε ότι ΒΔ = ΓΕ ή ΒΕ = ΓΔ.

9. **Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ παράλληλες στη βάση του που τέμνουν την ΑΒ στα Ε και Η και την ΑΓ στα Ζ και Θ. Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΒΖΘ και ΓΕΗ είναι ίσα.**

....
....
....
....
....
....
....
....
....

10. **Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ κατά τμήματα ΒΕ = ΑΒ και ΓΖ = ΑΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι τα σημεία Ε και Ζ ισαπέχουν από τη ΒΓ.**

....
....
....
....
....
....
....
....
....

11. **Αποδείξτε ότι αν ένα τρίγωνο έχει δύο ύψη ίσα μεταξύ τους τότε είναι ισοσκελές και αντίστροφα.**

....
....
....
....
....
....
....

Ελέγχουμε τη γνώση μας

Θέμα 1ο

Α. Να δείξετε ότι αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα τότε και οι χορδές τους είναι ίσες και αντίστροφα αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου μικρότερων του ημικυκλίου είναι ίσες τότε και τα τόξα είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

Β. Να δείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει απο τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.

(Μονάδες 13)

Θέμα 2ο

Α. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Αx η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Επάνω στην Αx παίρνουμε τα σημεία Μ και Ν έτσι ώστε ΑΜ = ΑΒ και ΑΝ = ΑΓ. Να δείξετε ότι ΒΝ = ΓΜ.

(Μονάδες 12)

Β. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρνουμε $AE \perp A\Gamma$ και ΑΕ = ΑΓ με $A\Delta \perp AB$ με ΑΔ = ΑΒ. Έστω Ζ, Θ τα μέσα των ΓΔ, ΒΕ. Να δείξετε ότι ΑΖ = ΑΘ.

(Μονάδες 13)

Θέμα 3ο

Α. Δίνονται οι κύκλοι (Κ,R) και (Λ,ρ) που εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Από το Α φέρνουμε ευθεία που τέμνει τους κύκλους (Κ,R), (Λ,ρ) στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Αν (ε) είναι η εφαπτομένη του κύκλου (Κ,R) στο σημείο Β, να δείξετε ότι:

i. $\Lambda\hat{\Gamma}A = K\hat{B}A$ **ii.** $\Gamma\Lambda \perp (\varepsilon)$

(Μονάδες 12)

Β. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και εξωτερικά από αυτό τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΔ και ΑΓΗ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΗ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)

Θέμα 4^0

Στις πλευρές Οχ και Οψ μιας γωνίας $x\hat{O}y$ παίρνουμε αντίστοιχα ίσα τμήματα ΟΑ = ΟΒ. Στο εσωτερικό της γωνίας φέρνουμε ημιευθείες Οζ και Οη τέτοιες ώστε $\chi\hat{O}\zeta = \psi\hat{O}\eta$ και $\chi\hat{O}\zeta < \frac{\chi\hat{O}\psi}{2}$. Στις ημιευθείες Οζ και Οη παίρνουμε αντίστοιχα ίσα τμήματα ΟΜ = ΟΝ. Αν οι ΑΝ και ΒΜ τέμνονται στο Σ να δείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΣΑΜ και ΣΒΝ είναι ίσα.

ii. Η διχοτόμος της $\chi\hat{O}\psi$ διέρχεται από το Σ.

(Μονάδες 25)