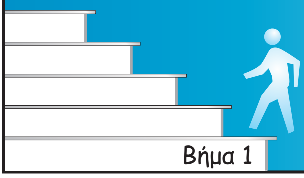
Κεφάλαιο 2ο

Τα βασικά γεωμετρικά σχήματα

Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο 2 θα πρέπει να είναι σε θέση:

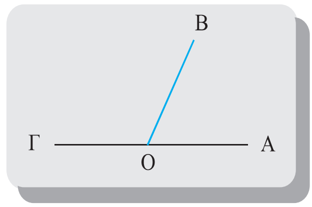
- ✓ Να γνωρίζει τις πρωταρχικές έννοιες της Γεωμετρίας (σημείο,ευθεία , επίπεδο).
- ✓ Να γνωρίζει τα βασικά γεωμετρικά σχήματα (ευθύγραμμο τμήμα, γωνία , κύκλος , επίπεδο ευθύγραμμο σχήμα).



Μαθαίνουμε τις αποδείξεις

Θεώρημα

Δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες έχουν τις μη κοινές πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες και αντίστροφα.



Σχήμα 1

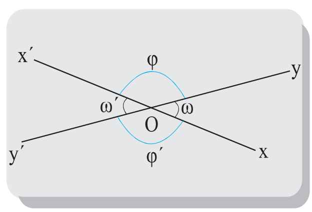
Απόδειξη

Αν οι εφεξής γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$ (σχ. 1) είναι παραπληρωματικές, το άθροισμά τους $A\hat{O}\Gamma$ είναι μία ευθεία γωνία. Επομένως, από τον ορισμό της ευθείας γωνίας οι πλευρές ΟΑ και ΟΓ είναι αντικείμενες ημιευθείες.

Αντίστροφα. Αν οι εφεξής γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$ (σχ. 1) έχουν τις μη κοινές πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες, τότε από τον ορισμό του αθροίσματος δύο γωνιών προκύπτει ότι το άθροισμα των γωνιών $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ είναι η ευθεία γωνία $A\hat{O}\Gamma$. Άρα, οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ είναι παραπληρωματικές.

Θεώρημα

Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.



Σχήμα 2

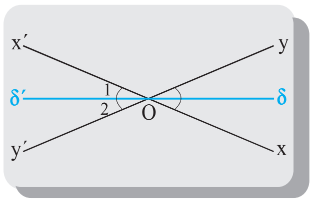
Απόδειξη

Θεωρούμε τις κατακορυφήν γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ (σχ. 2). Παρατηρούμε ότι οι δύο γωνίες είναι ίσες ως παραπληρώματα της ίδιας γωνίας $y\hat{O}x'$.

Θεώρημα

Η προέκταση της διχοτόμου μιας γωνίας είναι διχοτόμος της κατακορυφήν της γωνίας.

Απόδειξη

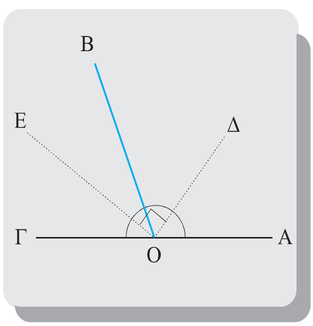


Έστω οι κατακορυφήν γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ και η διχοτόμος $O\delta$ της $x\hat{O}y$. Τότε $\delta\hat{O}x = \delta\hat{O}y$.
Αν $O\delta'$ είναι η προέκταση της $O\delta$, τότε $\hat{O}_1 = \delta\hat{O}x$ και $\hat{O}_2 = \delta\hat{O}y$ (ως κατακορυφήν).
Άρα $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, δηλαδή η $O\delta'$ είναι διχοτόμος της $x'\hat{O}y'$.

Θεώρημα

Οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες.

Απόδειξη



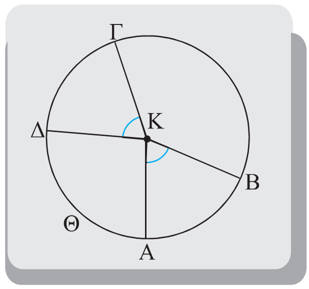
Έστω $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες και $O\Delta$, OE οι διχοτόμοι τους.
Τότε $A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma = 2\llcorner$ ή $2\Delta\hat{O}B + 2B\hat{O}E = 2\llcorner$ ή
$\Delta\hat{O}B + B\hat{O}E = 1\llcorner$ ή $\Delta\hat{O}E = 1\llcorner$. Άρα $O\Delta \perp OE$.

Θεώρημα

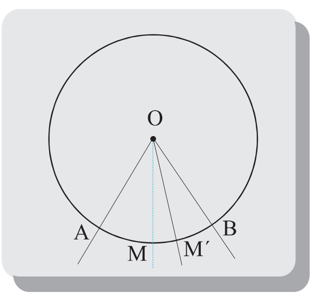
Δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, αν και μόνο αν οι επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ίσες.

Απόδειξη

Έστω $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ δύο τόξα ενός κύκλου (Κ). Τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, αφού είναι ίσα μετά από κατάλληλη μετατόπιση συμπίπτουν, οπότε το Γ συμπίπτει με το Α και το Δ με το Β. Επομένως η ΚΓ θα συμπέσει με την ΚΑ και η ΚΔ με την ΚΒ, που σημαίνει ότι οι γωνίες $\widehat{AKB}$ και $\widehat{\Gamma K\Delta}$ είναι ίσες.



Αντίστροφα. Έστω δύο ίσες επίκεντρες γωνίες $\widehat{AKB}$ και $\widehat{\Gamma K\Delta}$ στον κύκλο (Κ). Τότε, αφού τα σημεία Α,Β,Γ,Δ είναι σημεία του ίδιου κύκλου, μετά από μετατόπιση της $\widehat{\Gamma K\Delta}$ η γωνία αυτή θα ταυτισθεί με την $\widehat{AKB}$, το Γ θα ταυτισθεί με το Α και το Δ με το Β. Έτσι τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ έχουν τα ίδια άκρα και επειδή βρίσκονται στο εσωτερικό των γωνιών που ταυτίζονται θα είναι ίσα, δηλαδή $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.

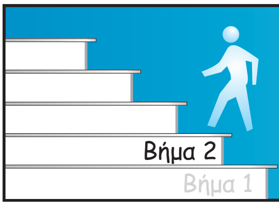


Θεώρημα

Το μέσο ενός τόξου είναι μοναδικό.

Απόδειξη

Έστω $\overset{\frown}{AB}$ τόξο κύκλου, κέντρου Ο, και Μ το μέσο του. Επειδή $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB}$, οι επίκεντρες γωνίες $\widehat{AOM}$ και $\widehat{MOB}$ είναι ίσες και επομένως η ΟΜ είναι διχοτόμος της $\widehat{AOB}$. Αν υποθέσουμε ότι το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ έχει και δεύτερο μέσο το Μ΄, τότε η ΟΜ΄ είναι διχοτόμος της $\widehat{AOB}$, που είναι άτοπο γιατί η διχοτόμος μιας γωνίας είναι μοναδική.



Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις "κλειδιά"

Α. Από το σχολικό βιβλίο

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.

σ. 14: Αποδεικτικές Ασκήσεις 1, 2

σ. 20: Ασκήσεις Εμπέδωσης 1

Αποδεικτικές Ασκήσεις 1,2, 3

Σύνθετα Θέματα 1

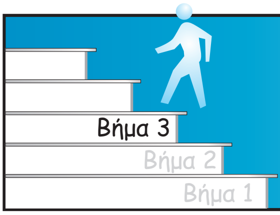
σ. 25: Ερωτήσεις Κατανόησης όλες

Αποδεικτικές Ασκήσεις 1

σ. 28: Ασκήσεις Εμπέδωσης 3, 4

Αποδεικτικές Ασκήσεις 1,2, 3

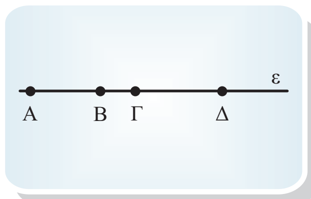
σ. 30: Γενικές Ασκήσεις 4, 5



Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. Σε ευθεία ε θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ, Δ με ΑΒ = 2·ΒΓ και ΑΔ = 2·ΓΔ. Να δείξετε ότι: $\mathrm{A\Gamma}=\dfrac{2\cdot \mathrm{AB}\cdot \mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AB}+\mathrm{A\Delta}}$

Λύση:



Έχουμε $\mathrm{A\Delta}=2\cdot\Gamma\Delta \Leftrightarrow \Gamma\Delta=\dfrac{1}{2}\mathrm{A\Delta}$.

Άρα Γ μέσο ΑΔ, οπότε: $\mathrm{A\Gamma}=\dfrac{1}{2}\mathrm{A\Delta}\Leftrightarrow \mathrm{A\Delta}=2\cdot\mathrm{A\Gamma}\quad(1)$

Επίσης $\mathrm{AB}=2\cdot\mathrm{B\Gamma}\Leftrightarrow \mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}=3\cdot\mathrm{B\Gamma}\Leftrightarrow \mathrm{A\Gamma}=3\cdot\mathrm{B\Gamma}\Leftrightarrow \mathrm{B\Gamma}=\dfrac{1}{3}\mathrm{A\Gamma}\quad(2)$

Άρα: $\mathrm{AB}=2\cdot\mathrm{B\Gamma}\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\mathrm{AB}=\dfrac{2}{3}\mathrm{A\Gamma}\quad(3)$

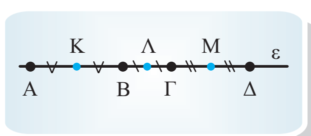
Συνεπώς $\dfrac{2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AB}+\mathrm{A\Delta}}=\dfrac{2\cdot\frac{2}{3}\mathrm{A\Gamma}\cdot 2\cdot\mathrm{A\Gamma}}{\frac{2}{3}\mathrm{A\Gamma}+2\cdot\mathrm{A\Gamma}}=\dfrac{\frac{8}{3}\mathrm{A\Gamma}^2}{\left(\frac{2}{3}+2\right)\mathrm{A\Gamma}}=\dfrac{\frac{8}{3}\mathrm{A\Gamma}^2}{\frac{8}{3}\mathrm{A\Gamma}}=\mathrm{A\Gamma}$ ο.ε.δ.

2. Σε ευθεία ε θεωρούμε διαδοχικά Α, Β, Γ, Δ και έστω Κ, Λ, Μ τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

α. $\mathrm{KM}=\dfrac{\mathrm{A\Delta}+\mathrm{B\Gamma}}{2}$

β. Αν ΑΒ = ΓΔ, ποιά είναι η θέση του Λ στο ΑΔ και στο ΚΜ.

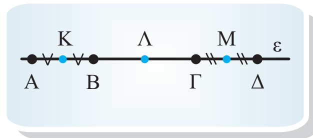
Λύση:



α. Είναι: $\mathrm{KM}=\mathrm{KB}+\mathrm{B\Gamma}+\Gamma\mathrm{M}=\dfrac{\mathrm{AB}}{2}+\mathrm{B\Gamma}+\dfrac{\Gamma\Delta}{2}=$

$$=\frac{ΑΒ+2\cdot ΒΓ+ΓΔ}{2}=\frac{(ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ)+ΒΓ}{2}=\frac{ΑΔ+ΒΓ}{2}$$

β. Έχουμε:



- $ΑΛ=ΑΒ+ΒΛ=ΓΔ+ΛΓ=ΛΔ$ δηλαδή Λ μέσο ΑΔ.

- $ΚΛ=ΚΒ+ΒΛ=\frac{ΑΒ}{2}+ΒΛ=\frac{ΓΔ}{2}+ΛΓ=ΓΜ+ΛΓ=ΛΜ$ δηλαδή Λ μέσο ΚΜ

3. Να δείξετε ότι η διαφορά της συμπληρωματικής γωνίας μιας οξείας γωνίας $\hat{ω}$ από την παραπληρωματική της είναι μια ορθή γωνία.

Λύση:

Συμπληρωματική της $\hat{ω}$: $(90^o-ω)$

Παραπληρωματική της $\hat{ω}$: $(180^o-ω)$

Άρα $(180^o-ω)-(90^o-ω)=180^o-ω-90^o+ω=90^o$

4. Να βρεθεί γωνία ω της οποίας η παραπληρωματική της είναι ίση με τα $\frac{5}{2}$ της συμπληρωματικής της.

Λύση:

$$180^o-ω=\frac{5}{2}(90^o-ω)\Leftrightarrow 2(180^o-ω)=5\cdot(90^o-ω)\Leftrightarrow 360^o-2ω=450^o-5ω\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5ω-2ω=450^o-360^o\Leftrightarrow 3ω=90^o\Leftrightarrow ω=30^o$$

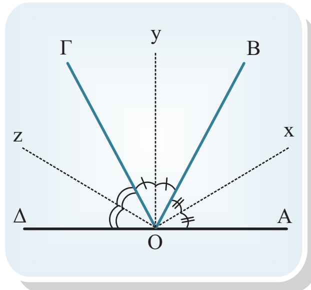
5. Έστω 3 διαδοχικές γωνίες $Α\hat{Ο}Β, Β\hat{Ο}Γ, Γ\hat{Ο}Δ$ με τις ημιευθείες ΟΑ, ΟΔ αντικείμενες. Αν Οx, Oy, Oz είναι οι διχοτόμοι τους αντίστοιχα και $Oy\perp ΑΔ$, να υπολογιστούν οι γωνίες $Α\hat{Ο}Β, Β\hat{Ο}Γ, Γ\hat{Ο}Δ$, αν είναι γνωστό ότι: $x\hat{O}z=φ$.

Λύση:

Είναι: $Α\hat{Ο}Β=Α\hat{Ο}y-y\hat{Ο}Β=90^o-y\hat{Ο}Β=y\hat{Ο}Δ-y\hat{Ο}Γ=Γ\hat{Ο}Δ$ δηλαδή $Α\hat{Ο}Β=Γ\hat{Ο}Δ$ (1)

Οπότε $x\hat{O}y = x\hat{O}B + B\hat{O}y = \dfrac{A\hat{O}B}{2} + y\hat{O}\Gamma \overset{(1)}{=} \dfrac{\Gamma\hat{O}\Delta}{2} + y\hat{O}\Gamma = \Gamma\hat{O}z + y\hat{O}\Gamma = y\hat{O}z$

δηλαδή η Oy είναι διχοτόμος της $x\hat{O}z$.



Άρα $x\hat{O}y = y\hat{O}z = \dfrac{\varphi}{2}$. Ακόμα:

$$A\hat{O}B = 2\cdot A\hat{O}x = 2\left(A\hat{O}y - x\hat{O}y\right) = 2\left(90^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) = 180^\circ - \varphi$$

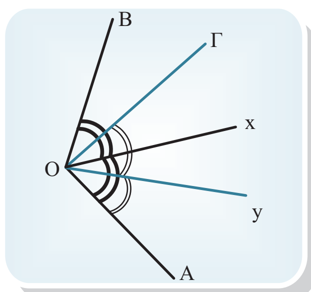
οπότε η (1) γίνεται $\Gamma\hat{O}\Delta = 180^\circ - \varphi$.
Συνεπώς

$$B\hat{O}\Gamma = 180^\circ - 2\cdot A\hat{O}B = 180^\circ - 2\left(180^\circ - \varphi\right) = 180^\circ - 360^\circ + 2\varphi = 2\varphi - 180^\circ$$

Παρατήρηση: Πρέπει $2\varphi - 180^\circ > 0 \Leftrightarrow \varphi > 90^\circ$.

6. **Έστω γωνίες $A\hat{O}B$, $A\hat{O}\Gamma$ με ΟΓ εσωτερική ημιευθεία της $A\hat{O}B$ και Ox, Oy οι διχοτόμοι τους αντίστοιχα. Να δείξετε ότι η γωνία των διχοτόμων ισούται με την ημιδιαφορά των $A\hat{O}B$ και $A\hat{O}\Gamma$. Να υπολογιστεί η $x\hat{O}y$ αν $OB \perp O\Gamma$.**

Λύση:



Θα δείξουμε ότι: $x\hat{O}y = \dfrac{A\hat{O}B - A\hat{O}\Gamma}{2}$

Έχουμε:

$$x\hat{O}y = x\hat{O}A - y\hat{O}A = \frac{A\hat{O}B}{2} - \frac{A\hat{O}\Gamma}{2} = \frac{A\hat{O}B - A\hat{O}\Gamma}{2}$$

Αν $OB \perp O\Gamma$ τότε $B\hat{O}\Gamma = 90^\circ$, οπότε:

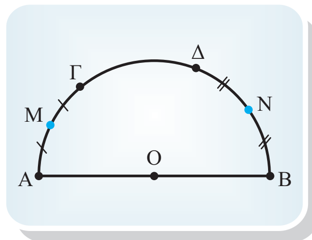
$$x\hat{O}y = \frac{A\hat{O}B - A\hat{O}\Gamma}{2} = \frac{B\hat{O}\Gamma}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

7. **Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και κέντρου Ο, θεωρούμε τα σημεία Γ, Δ. Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των $\overset{\frown}{A\Gamma}$ και $\overset{\frown}{B\Delta}$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $\overset{\frown}{MN} = \dfrac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta}}{2}$ ή $\overset{\frown}{MN} = \dfrac{\overset{\frown}{A\Delta} + \overset{\frown}{B\Gamma}}{2}$.**

Λύση:

$1^{η}$ περίπτωση:

Αν το Γ είναι μεταξύ Α, Δ. Τότε:

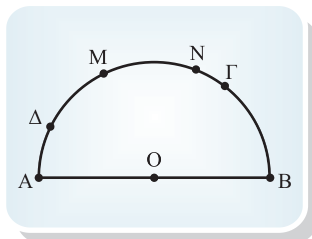


$$\overset{\frown}{\text{ΜΝ}}=\overset{\frown}{\text{ΜΓ}}+\overset{\frown}{\text{ΓΔ}}+\overset{\frown}{\text{ΔΝ}}=\frac{\overset{\frown}{\text{ΑΓ}}}{2}+\overset{\frown}{\text{ΓΔ}}+\frac{\overset{\frown}{\text{ΒΔ}}}{2}=$$

$$=\frac{\overset{\frown}{\text{ΑΓ}}+2\cdot\overset{\frown}{\text{ΓΔ}}+\overset{\frown}{\text{ΒΔ}}}{2}=\frac{\left(\overset{\frown}{\text{ΑΓ}}+\overset{\frown}{\text{ΓΔ}}+\overset{\frown}{\text{ΒΔ}}\right)+\overset{\frown}{\text{ΓΔ}}}{2}=\frac{\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}+\overset{\frown}{\text{ΓΔ}}}{2}$$

$2^{η}$ περίπτωση:

Αν το Δ είναι μεταξύ των Α, Γ. Τότε:



$$\overset{\frown}{\text{ΜΝ}}=\overset{\frown}{\text{ΑΝ}}-\overset{\frown}{\text{ΑΜ}}=\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}-\overset{\frown}{\text{ΒΝ}}-\overset{\frown}{\text{ΑΜ}}=\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}-\frac{\overset{\frown}{\text{ΒΔ}}}{2}-\frac{\overset{\frown}{\text{ΑΓ}}}{2}=$$

$$\frac{2\cdot\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}-\overset{\frown}{\text{ΒΔ}}-\overset{\frown}{\text{ΑΓ}}}{2}=\frac{\left(\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}-\overset{\frown}{\text{ΒΔ}}\right)+\left(\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}-\overset{\frown}{\text{ΑΓ}}\right)}{2}=\frac{\overset{\frown}{\text{ΑΔ}}+\overset{\frown}{\text{ΒΓ}}}{2}$$

1. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\varphi}$ και $\hat{\omega}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α. οι γωνίες είναι συμπληρωματικές και η διαφορά τους ισούται με το 1/9 της ορθής.

β. οι γωνίες είναι παραπληρωματικές και η διαφορά τους ισούται με τα 10/9 της ορθής.

2. Έστω ορθή γωνία $x\hat{O}y$ και οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $\Gamma\hat{O}\Delta$ τέτοιες ώστε οι ημιευθείες Οx και Οy να είναι αντίστοιχα οι διχοτόμοι τους. Αν οι ημιευθείες ΟΒ και ΟΓ βρίσκονται στο εσωτερικό της $x\hat{O}y$, δείξτε ότι οι $A\hat{O}\Gamma$ και $B\hat{O}\Delta$ είναι παραπληρωματικές.

3. Έστω οι ημιευθείες ΟΑ,ΟΒ,ΟΓ και ΟΔ τέτοιες ώστε η γωνία $B\hat{O}\Gamma$ να είναι ορθή. Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{O}\Delta$ αν:

α. οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $\Gamma\hat{O}\Delta$ είναι συμπληρωματικές.

β. οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $\Gamma\hat{O}\Delta$ είναι παραπληρωματικές.

4. Έστω οι γωνίες $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$ οι οποίες έχουν κοινή κορυφή, μία κοινή πλευρά και δεν είναι εφεξής. Αν η διαφορά τους είναι ίση με 90°, δείξτε ότι η διαφορά των διχοτόμων τους είναι ίση με 45°.

....

....

....

....

....

5. Έστω γωνία $\widehat{AOB}$ και ημιευθεία ΟΓ στο εσωτερικό της τέτοια ώστε $3\widehat{AO\Gamma} = 5\widehat{BO\Gamma}$. Αν η ημιευθεία ΟΔ είναι εσωτερική της $\widehat{BO\Gamma}$ να δείξετε ότι $\widehat{\Gamma O\Delta} = \dfrac{3\widehat{AO\Delta} - 5\widehat{BO\Delta}}{8}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6. Θεωρούμε αμβλεία γωνία $A\hat{O}B$ και στο εσωτερικό της την ημιευθεία $O\Gamma \perp OA$. Αν ΟΔ,ΟΕ οι διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{O}E = 45^0$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

7. Έστω τόξο $\overset{\frown}{AB}$ ενός κύκλου (Ο,ρ) και σημείο Μ τέτοιο ώστε $\overset{\frown}{AM} = \frac{\mu}{\nu}\overset{\frown}{MB}$. Δείξτε ότι για τυχαίο σημείο Σ του κύκλου εξωτερικό του τόξου ΜΑ ισχύει $\overset{\frown}{\Sigma M} = \frac{\nu}{\mu+\nu}\overset{\frown}{\Sigma A} + \frac{\mu}{\mu+\nu}\overset{\frown}{\Sigma B}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

8. Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και σημείο Μ τέτοιο ώστε $AM = \frac{\mu}{\nu}MB$. Δείτε ότι για τυχαίο σημείο Σ της ημιευθείας ΜΑ που είναι εξωτερικό του ΜΑ ισχύει: $\Sigma M = \frac{\nu}{\nu+\mu}\Sigma A + \frac{\mu}{\nu+\mu}\Sigma B$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ελέγχουμε τη γνώση μας

Θέμα 1ο

Α. α. Να δείξετε ότι δύο κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.

(Μονάδες 12)

β. Να δείξετε ότι οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες. ***(Μονάδες 13)***

Θέμα 2ο

Α. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\omega}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. η γωνία $\hat{\omega}$ είναι τετραπλάσια από την παραπληρωματική της.

β. η γωνία $\hat{\omega}$ είναι κατά 10^o μικρότερη από την συμπληρωματική της.

γ. η παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\omega}$ και η συμπληρωματική της έχουν άθροισμα ίσο με 220^o.

(Μονάδες 12)

Β. Έστω Α,Β σημεία ημικυκλίου και Μ το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$.

α. Αν Ρ σημείο του ημικυκλίου που δεν ανήκει στο $\overset{\frown}{AB}$ τότε αποδείξτε ότι

$$\overset{\frown}{PM}=\frac{\overset{\frown}{PA}+\overset{\frown}{PB}}{2}.$$

β. Αν Σ σημείο του τόξου $\overset{\frown}{MB}$ τότε αποδείξτε ότι: $\overset{\frown}{\Sigma M}=\dfrac{\overset{\frown}{\Sigma A}-\overset{\frown}{\Sigma B}}{2}$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 3ο

Από τυχαίο σημείο Ο ευθείας x΄x φέρουμε ημιευθείες Oy, Oφ, Oz προς το ίδιο μέρος της x΄x, έτσι ώστε οι γωνίες $x\hat{O}y$, $y\hat{O}\varphi$, $\varphi\hat{O}z$, $z\hat{O}x'$ να είναι διαδοχικές. Αν οι γωνίες αυτές είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 3, 2, 1, 6 αντίστοιχα, να δείξετε ότι $Oz \perp x'x$.

(Μονάδες 25)

Θέμα 4ο

Να αποδείξετε ότι τα μέσα δύο τόξων $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{A'B'}$ στα οποία βαίνουν δύο κατακορυφήν επίκεντρες γωνίες, είναι αντιδιαμετρικά σημεία.

(Μονάδες 25)