ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΚΕΝΤΡΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Μάθημα Γενικής Παιδείας

ΤΕΥΧΟΣ Β΄

ΑΘΗΝΑ 2000

Ομάδα Σύνταξης

Εποπτεία:	Παπασταυρίδης Σταύρος, Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών
Συντονιστές:	Κοθάλη - Κολοκούρη Ευπραξία, Σχολικός Σύμβουλος, M.Ed. Σβέρκος Ανδρέας, Σχολικός Σύμβουλος Μακρής Κωνσταντίνος, Σχολικός Σύμβουλος
Συγγραφική ομάδα:	Βουργάνας Παναγιώτης, Μαθηματικός Δ.Ε. Κεΐσογλου Στέφανος, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed. Κοντογιάννης Ιωάννης, Μαθηματικός Δ.Ε. Κουτσανδρέας Γεράσιμος, Μαθηματικός Δ.Ε. Κωνσταντόπουλος Ηλίας, Μαθηματικός Δ.Ε. Μπούρικα Μαρία, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed. Πέτρου Αθηνά, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed. Χάλκου Μάρα, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed. Χριστόφιλος Ευγένιος, Μαθηματικός Δ.Ε.

Για το τεύχος αυτό:

Συντονίστρια:	Κοθάλη - Κολοκούρη Ευπραξία, Σχολικός Σύμβουλος, M.Ed.
Συντάκτες κειμένων:	Κοντογιάννης Ιωάννης, Μαθηματικός Δ.Ε. Μπούρικα Μαρία, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed. Πέτρου Αθηνά, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Α   Γ Ε Ν Ι Κ Η Σ   Π Α Ι Δ Ε Ι Α Σ

Φωτογραφία εξωφύλλου: Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή

Επιμέλεια εξωφύλλου: Σ. Βογιατζόγλου, Π. Βουργάνας, Η. Γεωργακάκος

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Με τα τελευταία βιβλία αξιολόγησης των μαθητών, που πρόκειται να δημοσιευθούν στις αρχές του 2000, ολοκληρώνεται μια σημαντική προσπάθεια του Κέντρου Εκπαιδευτικής Έρευνας, στόχος της οποίας ήταν η εκπόνηση και διάδοση νέων μεθόδων αξιολόγησης των μαθητών του Ενιαίου Λυκείου. Στο πλαίσιό της εκπονήθηκαν τα τρία τελευταία χρόνια δεκάδες βιβλίων που καλύπτουν το σύνολο σχεδόν των μαθημάτων, τα οποία διδάσκονται στο Λύκειο. Τα βιβλία αυτά περιέχουν οδηγίες μεθοδολογίας σχετικές με την αξιολόγηση των μαθητών, παραδείγματα ερωτήσεων διαφόρων τύπων, υποδείγματα εξεταστικών δοκιμασιών, θέματα συνθετικών - δημιουργικών εργασιών και άλλα χρήσιμα στοιχεία για τους εκπαιδευτικούς.

Το έντυπο αυτό υλικό συνοδεύτηκε από την παραγωγή ανάλογου ηλεκτρονικού υλικού, από τη δημιουργία Τράπεζας Θεμάτων και από πολυάριθμες επιμορφωτικές δραστηριότητες σχετικές με την αξιολόγηση των μαθητών.

Η παραπάνω προσπάθεια δεν είχε σκοπό να επιβάλει ένα συγκεκριμένο τρόπο αξιολόγησης ούτε να αυξήσει το φόρτο εργασίας διδασκόντων και διδασκομένων, όπως ισχυρίστηκαν ορισμένοι. Επιδίωξε να ενημερώσει τους καθηγητές για τις σύγχρονες εξεταστικές μεθόδους, να τους δώσει πρακτικά παραδείγματα εφαρμογής τους, να τους προβληματίσει γύρω από τα θέματα αυτά και να τους παράσχει ερεθίσματα για αυτομόρφωση. Πιστεύουμε ότι με το έργο μας συμβάλαμε στη διεύρυνση της δυνατότητας των διδασκόντων να επιλέγουν οι ίδιοι τη μέθοδο που θεωρούν πιο κατάλληλη για την αξιολόγηση των μαθητών τους και βοηθήσαμε στην αύξηση της παιδαγωγικής τους αυτονομίας.

Πεποίθησή μας είναι πως όλα αυτά άλλαξαν το τοπίο στον τομέα της αξιολόγησης των μαθητών του Ενιαίου Λυκείου, έφεραν νέο πνεύμα και άρχισαν να τροποποιούν σταδιακά ξεπερασμένες αντιλήψεις και τακτικές που κυριάρχησαν επί πολλά χρόνια στο Ελληνικό σχολείο. Τα θετικά σχόλια που εκφράστηκαν από το σύνολο σχεδόν των επιστημονικών και εκπαιδευτικών φορέων για τα θέματα των εξετάσεων του περασμένου Ιουνίου, τα οποία διαμορφώθηκαν με βάση το πνεύμα και τη μεθοδολογία της αντίστοιχης εργασίας του Κ.Ε.Ε., επιβεβαιώνουν όσα προαναφέρθηκαν.

Η κριτική που είχε αρχικά ασκηθεί για το έργο μας περιορίζεται συνεχώς, ενώ αυξάνει καθημερινά η αποδοχή του από την εκπαιδευτική κοινότητα και η αναγνώρισή του. Σ' αυτό συνέβαλε ασφαλώς και η βελτίωση του υποστηρικτικού υλικού που παράγεται από το Κ.Ε.Ε., η οποία οφείλεται, μεταξύ άλλων, και στις παρατηρήσεις και υποδείξεις των διδασκόντων στα Ενιαία Λύκεια. Η συνειδητοποίηση, τέλος, του τρόπου με τον οποίο πρέπει να χρησιμοποιείται το υλικό αυτό στη διδακτική πράξη και ο περιορισμός των σφαλμάτων που διαπράχθηκαν στην αρχή (μηχανική αναπαραγωγή πλήθους ερωτήσεων, υπέρμετρη αύξηση της εργασίας των μαθητών, απουσία εναλλακτικών τρόπων αξιολόγησης κτλ.) οδήγησαν σε πολύ θετικά αποτελέσματα, τα οποία όσο περνά ο καιρός θα γίνονται εμφανέστερα.

Η διαπίστωση αυτή μας ενισχύει να συνεχίσουμε την προσπάθειά μας και να την επεκτείνουμε, εκπονώντας ανάλογο υλικό και για άλλες εκπαιδευτικές βαθμίδες, εφόσον εξασφαλιστούν οι απαραίτητες οικονομικές και λοιπές προϋποθέσεις.

Τελειώνοντας, επιθυμώ να ευχαριστήσω όλους τους συνεργάτες μου στο Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας, οι οποίοι εργάστηκαν αφιλοκερδώς, με αφοσίωση και σπάνιο ζήλο και επιτέλεσαν κάτω από δύσκολες συνθήκες σημαντικό έργο. Ευχαριστώ ακόμη όλους τους εκπαιδευτικούς που με ποικίλους τρόπους στήριξαν την προσπάθειά μας και βοήθησαν στην επιτυχία της. Ξέχωρες ευχαριστίες θα ήθελα να απευθύνω στις δακτυλογράφους του Κ.Ε.Ε, στο τεχνικό προσωπικό του, στον Προϊστάμενο της Γραμματείας του κ. Γεώργιο Κορκόντζηλα και στους εκδότες που συνεργάστηκαν μαζί μας από το 1997 μέχρι σήμερα.

Αθήνα, Δεκέμβριος 1999

Καθηγητής Μιχάλης Κασσωτάκης
Πρόεδρος του Δ.Σ. του Κ.Ε.Ε.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Το Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας (Κ.Ε.Ε.), με την έκδοση του τεύχους αυτού, συνεχίζει την προσπάθεια στήριξης των Εκπαιδευτικών σε ζητήματα σχετικά με την αξιολόγηση των μαθητών στα Μαθηματικά της Γ΄ τάξης του Ενιαίου Λυκείου, σύμφωνα με το πνεύμα της Εκπαιδευτικής Μεταρρύθμισης.

Παράλληλα, τα θέματα του τεύχους αυτού (καθώς και τα αντίστοιχα των προηγουμένων εκδόσεων του Κ.Ε.Ε.) εισάγονται στην Τράπεζα Θεμάτων των προαγωγικών εξετάσεων. Για τον λόγο αυτό οι ερωτήσεις έχουν χωριστεί σε δύο κατηγορίες.

- Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι ερωτήσεις στις οποίες μετά τον αριθμό ακολουθεί ένας αστερίσκος (*) και είναι οι ερωτήσεις διαφόρων τύπων που αποτελούν απλή εφαρμογή της θεωρίας.
- Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι ερωτήσεις στις οποίες μετά τον αριθμό ακολουθούν δύο αστερίσκοι (**) και είναι προβλήματα ή ασκήσεις για τη λύση των οποίων απαιτείται ικανότητα συνδυασμού και σύνθεσης εννοιών αποδεικτικών ή υπολογιστικών διαδικασιών.

Οι ερωτήσεις που περιέχονται στο τεύχος αυτό καθώς και τα σχέδια κριτηρίων αξιολόγησης, ***έχουν ενδεικτικό και συμβουλευτικό χαρακτήρα*** για τον καθηγητή, ο οποίος έχει τη δυνατότητα να τα τροποποιήσει ή να διατυπώσει δικά του, αν το κρίνει αναγκαίο.

Αθήνα, Ιανουάριος 2000

Σταύρος Παπασταυρίδης
Καθηγητής Πανεπιστημίου

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

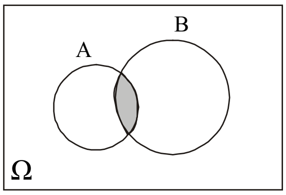
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

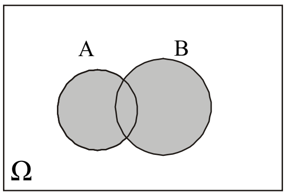
1. * Αν Ω είναι δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, τότε P (Ω) = 1	**Σ**	**Λ**
2. * Αν Α είναι ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης τότε, $0 \le P(A) \le 1$	**Σ**	**Λ**
3. * Για το αδύνατο ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ισχύει $P(\varnothing) = 0$	**Σ**	**Λ**
4. * Δειγματικός χώρος λέγεται το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης.	**Σ**	**Λ**
5. * Το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης είναι στοιχείο του δειγματικού χώρου του πειράματος.	**Σ**	**Λ**
6. * Ένα αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης λέγεται απλό ενδεχόμενο ή γεγονός.	**Σ**	**Λ**
7. * Ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης είναι βέβαιο ενδεχόμενο.	**Σ**	**Λ**
8. * Αν Ω είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, τότε ονομάζουμε ενδεχόμενο του πειράματος κάθε υποσύνολο του Ω.	**Σ**	**Λ**
9. * Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι και αυτός ένα ενδεχόμενο.	**Σ**	**Λ**
0. * Οι ευνοϊκές περιπτώσεις για ένα ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης είναι στοιχεία του δειγματικού του χώρου.	**Σ**	**Λ**
1. * Με Ν (Α) συμβολίζουμε όλα τα δυνατά υποσύνολα ενός ενδεχομένου Α.	**Σ**	**Λ**
2. * Το συμπλήρωμα Α΄ οποιουδήποτε ενδεχομένου Α ενός πειράματος τύχης είναι επίσης ενδεχόμενο αυτού του πειράματος.	**Σ**	**Λ**

3. * Στο διπλανό σχήμα το γραμμοσκιασμένο χωρίο απεικονίζει το ενδεχόμενο Α ∪ Β.



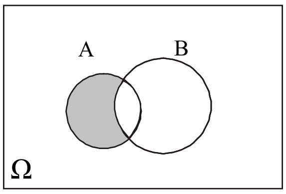
Σ **Λ**

4. * Στο διπλανό σχήμα το γραμμοσκιασμένο χωρίο απεικονίζει το ενδεχόμενο Α ∪ Β.



Σ **Λ**

5. * Στο διπλανό σχήμα το γραμμοσκιασμένο χωρίο απεικονίζει το ενδεχόμενο Β - Α .

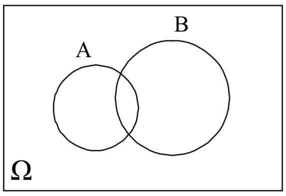


Σ **Λ**

6. * Αν Α, Β ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης με δειγματικό χώρο Ω, τότε ισχύει η ισότητα Α - Β = Α ∩ Β΄. **Σ** **Λ**

7. * Αν Α, Β ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης με δειγματικό χώρο Ω τότε ισχύει η ισότητα Β ∪Α = (Β-Α)∪ (Α-Β). **Σ** **Λ**

8. * Στο διπλανό σχήμα τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ασυμβίβαστα.



Σ **Λ**

9. * Δύο ενδεχόμενα λέγονται ασυμβίβαστα όταν Α ∩ Β = Α. **Σ** **Λ**

0. * Τα ενδεχόμενα Α = {1, 4, 7}, Β = {4, 7, 11} είναι ξένα μεταξύ τους. **Σ** **Λ**

1. * Αν το ενδεχόμενο Β = {2, 4, 6} τότε, Ν (Β) = 3. **Σ** **Λ**

2. * Αν Α είναι το ενδεχόμενο να τραβήξουμε μια ντάμα από μια τράπουλα τότε, Ν (Α) = 2. **Σ** **Λ**

3. * Οι εκφράσεις: **«πραγματοποιείται το ενδεχόμενο Α ή το Β»** και **«πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α και Β»** είναι ισοδύναμες. **Σ** **Λ**

4. * Το κενό σύνολο δεν πραγματοποιείται σε καμία εκτέλεση ενός πειράματος τύχης. **Σ** **Λ**

5. * Το κενό σύνολο είναι βέβαιο ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης. **Σ** **Λ**

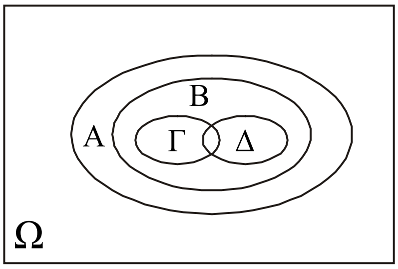
6. * Ενδεχόμενα τα οποία Περιέχουν τουλάχιστον δύο αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης λέγονται σύνθετα. **Σ** **Λ**

7. * Ενδεχόμενα τα οποία περιέχουν ένα μόνο αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης λέγονται απλά ενδεχόμενα. **Σ** **Λ**

8. * Αν σε ν εκτελέσεις ενός πειράματος τύχης ένα ενδεχόμενο Α πραγματοποιείται κ φορές, τότε ο λόγος $f_A = \frac{\kappa}{\nu}$ λέγεται σχετική συχνότητα.οτυ ενδεχομένου. **Σ** **Λ**

9. * Για τη σχετική συχνότητα f_A ενός ενδεχομένου Α ισχύει $f_A > 1$. **Σ** **Λ**

0. ***** Οι σχέσεις από (i) μέχρι (xv) αναφέρονται στο διπλανό διάγραμμα του Venn. Βάλτε σε κύκλο το γράμμα (Σ) ή (Λ) αντίστοιχα αν η σχέση είναι σωστή ή λάθος.



i)	$A \subseteq B$	**Σ**	**Λ**
ii)	$B \subseteq A$	**Σ**	**Λ**
iii)	$\Gamma \subseteq B$	**Σ**	**Λ**
iv)	$\Delta \subseteq \Gamma$	**Σ**	**Λ**
v)	$\Gamma \cup \Delta \subseteq A$	**Σ**	**Λ**
vi)	$\Gamma \cup \Delta \subseteq B$	**Σ**	**Λ**
vii)	$\Gamma \cap \Delta \subseteq A$	**Σ**	**Λ**
viii)	$B \cup \Gamma = B$	**Σ**	**Λ**
ix)	$B \cup \Gamma \cup \Delta = A$	**Σ**	**Λ**
x)	$A \cup B = B$	**Σ**	**Λ**
xi)	$A \cap B = B$	**Σ**	**Λ**
xii)	$(\Gamma \cap \Delta) \cup A = A$	**Σ**	**Λ**
xiii)	$(\Gamma \cap \Delta) \cap A = B$	**Σ**	**Λ**
xiv)	$B \cap \Delta = \Delta$	**Σ**	**Λ**
xv)	$(\Gamma \cap B) \cap A = \Gamma$	**Σ**	**Λ**

1. ***** Σε ένα πείραμα τύχης με ισοπίθανα αποτελέσματα και δειγματικό χώρο Ω η πιθανότητα του ενδεχομένου Α είναι ο αριθμός $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)}$. **Σ** **Λ**

2. ***** Το πλήθος των διατάξεων των ν ανά κ στοιχείων ενός συνόλου Α δίνεται από τον τύπο:
$\Delta^{\nu}_{\kappa} = \nu(\nu-1)(\nu-2)\dots(\nu-\kappa+1)$. **Σ** **Λ**

3. * Δύο διατάξεις των ν ανά κ στοιχείων ενός συνόλου Α είναι ίσες αν διαφέρουν μόνο ως προς τη θέση που κατέχουν τα στοιχεία τους. **Σ** **Λ**

4. * Μια διάταξη των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά ν λέγεται μετάθεση. **Σ** **Λ**

5. * Το πλήθος των μεταθέσεων των ν στοιχείων ενός συνόλου Α συμβολίζεται με $Μ_ν$ και δίνεται από τον τύπο:
$Μ_ν = ν\,(ν - 1)\,(ν - 2) \dots 3.2.1$ **Σ** **Λ**

6. * Το πλήθος $Μ_ν$ των μεταθέσεων ν στοιχείων ενός συνόλου Α είναι ίσο με ν!. **Σ** **Λ**

7. * Στον τύπο $Δ^ν_κ = \frac{ν!}{(ν - κ)!}$ το κ είναι πάντα διάφορο του ν. **Σ** **Λ**

8. * Για το σύμβολο ν! ισχύουν οι ισότητες:
$ν! = (ν - 1)!\,ν = (ν - 2)!\,(ν - 1)\,ν = (ν - 3)!\,(ν - 2)\,(ν - 1)\,ν$. **Σ** **Λ**

9. * Για το σύμβολο $(ν + κ)!$, $(κ \in N^*)$ ισχύει η ισότητα :
$(ν + κ)! = ν!\,(ν + 1)\,(ν + 2) \dots (ν + κ)$. **Σ** **Λ**

0. * Δύο μεταθέσεις είναι διαφορετικές όταν διαφέρουν ως προς τη θέση ενός τουλάχιστον στοιχείου τους. **Σ** **Λ**

1. * Το 0! δεν ορίζεται. **Σ** **Λ**

2. * Δύο διατάξεις οι οποίες αποτελούνται από τα ίδια ακριβώς στοιχεία αλλά διαφέρουν ως προς τη σειρά που αυτά είναι τοποθετημένα είναι διαφορετικές. **Σ** **Λ**

3. * Το 1! είναι ίσο με 1. **Σ** **Λ**

4. * Συνδυασμός των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ είναι κάθε υποσύνολο του Α με κ στοιχεία. **Σ** **Λ**

5. * Δύο συνδυασμοί των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ είναι ίσοι αν αποτελούνται από διαφορετικά στοιχεία. **Σ** **Λ**

6. * Δύο συνδυασμοί των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ είναι ίσοι αν αποτελούνται από τα ίδια ακριβώς στοιχεία . **Σ** **Λ**

7. * Δύο συνδυασμοί των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ είναι διαφορετικοί αν διαφέρουν κατά ένα τουλάχιστον στοιχείο. **Σ** **Λ**

8. * Σε ένα συνδυασμό ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ ισχύει ο περιορισμός $ν \leq κ$. **Σ** **Λ**

9. * Ο πολλαπλασιαστικός νόμος των πιθανοτήτων είναι:
$P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A) = P(B)\, P(A|B)$ **Σ** **Λ**

0. * Ανεξάρτητα ενδεχόμενα είναι εκείνα για τα οποία η πραγματοποίηση ή μη του ενός δεν επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης ή μη του άλλου. **Σ** **Λ**

1. * Δυο ενδεχόμενα που Δεν είναι ανεξάρτητα λέγονται αμοιβαίως αποκλειόμενα. **Σ** **Λ**

2. * Δυο συμβιβαστά ενδεχόμενα είναι πάντα εξαρτημένα. **Σ** **Λ**

3. * Δυο ενδεχόμενα Α, Β (με $P(A) > 0$ και $P(B) > 0$) για τα οποία ισχύει $P(A|B) = P(A)$ και $P(B|A) = P(B)$ λέγονται ανεξάρτητα. **Σ** **Λ**

4. * Δυο ενδεχόμενα Α, Β για τα οποία ισχύει
$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$ λέγονται εξαρτημένα. **Σ** **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Ρίχνουμε μια φορά έναν κύβο ο οποίος έχει καθέναν από τους αριθμούς 1, 2, 3 γραμμένους αντίστοιχα ανά δύο έδρες του και καταγράφουμε το αποτέλεσμα. Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος αυτού είναι

Α. Ω = {3} **Β.** Ω = {1, 2, 3} **Γ.** Ω = {1,1, 2,2, 3,3}
Δ. Ω = {1,1, 1,2, 1,3, 2,1, 2,2, 2,3, 3,3} **Ε.** {1,2, 2,1, 1,3, 3,1}

2. * Ρίχνουμε ένα νόμισμα δυο φορές. Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος αυτού είναι

Α. Ω = {ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ} **Β.** Ω = {ΚΓ, ΓΚ}
Γ. Ω = {ΓΚ, ΚΓ} **Δ.** Ω = {ΚΚ, ΓΓ}
Ε. κανένα από τα παραπάνω

3. ***** Ελέγχουμε διαδοχικά βιβλία μέχρι να βρούμε ένα κακοτυπωμένο (Κ) ή δύο σωστά τυπωμένα (Σ). Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος είναι

Α. Ω = {Κ, Σ} **Β.** Ω = {ΚΚ, ΚΣ}

Γ. Ω = {ΚΚ, ΣΣ} **Δ.** Ω = {Κ, ΣΚ, ΣΣ} **Ε.** {Κ,ΣΣ}

4. ***** Έστω Α = {1, 3, 5} και Β = {2, 4, 6} δύο ενδεχόμενα της ρίψης ενός ζαριού μια φορά. Αν το αποτέλεσμα της ρίψης είναι ο αριθμός 3 τότε πραγματοποιείται το ενδεχόμενο

Α. $A \cup B$ **Β.** A' **Γ.** Β **Δ.** $A \cap B$ **Ε.** $B' \cap A'$

5. ***** Τα Α και Β είναι ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης και α ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού. Η φράση **«το Α πραγματοποιείται»** διατυπωμένη σε γλώσσα συνόλων είναι ισοδύναμη με την

Α. $\alpha \in A'$ **Β.** $\alpha \in A' - B$ **Γ.** $\alpha \in A' \cup B$ **Δ.** $\alpha \in A$

Ε. κανένα από τα παραπάνω

6. ***** Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α΄ ισχύει

Α. $P(A) + P(A') = 0$ **Β.** $P(A) + P(A') = 2$

Γ. $P(A) + P(A') = 1$ **Δ.** $P(A) = -P(A')$

Ε. κανένα από τα παραπάνω

7. ***** Το ενδεχόμενο Α να εμφανιστεί αριθμός μεγαλύτερος του 6 κατά τη ρίψη ενός συνήθους ζαριού μια φορά είναι

Α. Α = {1,3,5} **Β.** $A = \{x: x \geq 6\}$ **Γ.** Α = {2,4,6}

Δ. $A = \{x: x > 6\}$ **Ε.** $A = \varnothing$

8. ***** Αν f_A η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου Α τότε

Α. $1 < f_A < 2$ **Β.** $f_A > 1$ **Γ.** $f_A < 0$

Δ. $0 \leq f_A \leq 1$ **Ε.** κανένα από τα παραπάνω

9. ***** Από τις παρακάτω ισότητες **σωστή** είναι η

Α. $A \cap \varnothing = A$ **Β.** $A' \cap A = \Omega$ **Γ.** $A \cap B = A \cup B$

Δ. $\Omega' = \Omega$ **Ε.** $(A')' = A$

10. ***** Αν Α το ενδεχόμενο να φέρουμε περιττό αριθμό στις ρίψεις ενός αμερόληπτου ζαριού, τότε η συχνότητα εμφάνισής του αναμένεται να είναι

Α. $\frac{2}{3}$ **Β.** $\frac{1}{6}$ **Γ.** $\frac{1}{2}$ **Δ.** $\frac{1}{3}$ **Ε.** 1

11. ***** Έστω δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots \omega_\kappa\}$ με ισοπίθανα ενδεχόμενα. Η πιθανότητα $P(\omega_i)$, $i = 1, 2, \dots, \kappa$ ενός στοιχείου του Ω είναι

Α. $\frac{1}{2}$ **Β.** $\frac{1}{\kappa}$ **Γ.** κ **Δ.** 1 **Ε.** $\frac{1}{2\kappa}$

12. ***** Για την πιθανότητα P (A) κάθε ενδεχομένου Α ενός πειράματος τύχης ισχύει

Α. $1 < P(A) < 2$ **Β.** $P(A) > 1$ **Γ.** $P(A) < 0$

Δ. $0 \le P(A) < 1$ **Ε.** κανένα από τα παραπάνω

13. ***** Ο απλός προσθετικός νόμος των πιθανοτήτων για δύο ξένα μεταξύ τους ενδεχόμενα Α και Β είναι

Α. $P(A) + P(B) = P(A \cap B)$ **Β.** $P(A) + P(B') = P(A \cup B)$

Γ. $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$ **Δ.** $P(A) - P(B) = P(A \cup B)$

Ε. $P(A)\,P(B) = P(A \cup B)$

14. ***** Ο προσθετικός νόμος των πιθανοτήτων για δύο ενδεχόμενα Α και Β είναι ισοδύναμος με την ισότητα

Α. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Β. $P(A \cup B) = P(A) - [P(B) + P(A \cap B)]$

Γ. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A' \cap B')$

Δ. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

Ε. κανένα από τα παραπάνω

15. ***** Η έκφραση: «**η πραγματοποίηση του ενδεχομένου Α συνεπάγεται την πραγματοποίηση του ενδεχομένου Β**» διατυπωμένη στη γλώσσα των συνόλων είναι ισοδύναμη με την σχέση

Α. $B \subseteq A$ **Β.** $N(A) \geq N(B)$ **Γ.** $P(A) + P(B) = 2$

Δ. $A \cup B = \varnothing$ **Ε.** $A \cap B = A$

16. ***** Αν δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω έχουν την συνολοθεωρητική σχέση $A \subseteq B$, τότε

Α. $P(A) > P(B)$ **Β.** $\frac{P(A)}{P(B)} < 0$ **Γ.** $P(A) \leq P(B)$

Δ. $P(A) + P(B) = -1$ **Ε.** κανένα από τα παραπάνω

17. ***** Αν Α, Β ασυμβίβαστα ενδεχόμενα και $P(A) = 0{,}4$ και $P(B) = 0{,}6$ τότε ισχύει

Α. $P(A \cap B) = 1$ **Β.** $P(A \cup B) = 1$ **Γ.** $P(A \cap B) = 0{,}2$

Δ. $P(A \cup B) = 0{,}4$ **Ε.** $P(A \cup B) = 0{,}6$

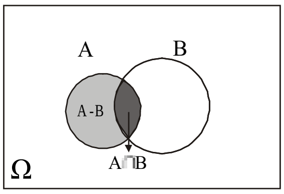
18. ***** Αν $A \subseteq B$ (Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω), τότε **δεν** ισχύει

Α. $P(A) = 0{,}3$ και $P(B) = 0{,}7$ **Β.** $P(B') + P(B) = 1$

Γ. $P(A) = 0{,}6$ και $P(B) = 0{,}4$ **Δ.** $P(A) + P(A') = 1$

Ε. $P(A) = 0{,}5$ και $P(B) = 0{,}5$

19. ***** Για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω (βλ. σχήμα) ισχύει



Α. $P(A - B) = P(A) + P(A \cup B)$

Β. $P(A - B) = P(A) - P(A \cup B)$

Γ. $P(A - B) = P(B) + P(A)$ **Δ.** $P(A - B) = P(A) - P(B)$

Ε. $P(A - B) + P(A \cap B) = P(A)$

20. ***** Το πλήθος των μεταθέσεων M_3 ενός κόκκινου, ενός λευκού και ενός γαλάζιου τετραδίου είναι

Α. 3 (3 - 1) (3 - 2) (3 - 3) **Β.** (3 - 3) (3 - 2) (3 - 1)

Γ. 3 **Δ.** 3! **Ε.** 2·3!

21. ***** Το πλήθος των διατάξεων 5 διαφορετικών μαθητών σε δυάδες ισούται με

Α. $\frac{(5-2)!}{5!}$ **Β.** $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}$ **Γ.** $\frac{5!}{2!}$

Δ. 2·5 = 10 **Ε.** 5^2

22. ***** Το 0! ισούται με

Α. 0 **Β.** 1

Γ. (1 - 0)! + (2- 0)! **Δ.** (0 + 1)! +(1 - 0)! **Ε.** κανένα από τα παραπάνω

23. ***** Οι διαφορετικοί τρόποι που μπορούν να τοποθετηθούν 3 δρομείς σε τρία σημεία αφετηρίας του στίβου είναι

Α. 9 **Β.** 3 **Γ.** 1·2·3·2·1 **Δ.** 1·2·1 **Ε.** 1·2·3

24. ***** Το πλήθος των συνδυασμών των ν στοιχείων ανά κ δίνεται από τον τύπο

Α. $\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\nu\,(\nu-\kappa)!}$ **Β.** $\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa!\,(\nu-\kappa+1)!}$

Γ. $\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\kappa!}{\nu\,(\nu-\kappa)!}$ **Δ.** $\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu}{\kappa!\,(\nu-\kappa)!}$

Ε. $\binom{\nu}{\kappa} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot(\nu-2)\,(\nu-1)\,\nu}{\kappa!\,(\nu-\kappa)!}$

25. ***** Από τους παρακάτω συνδυασμούς των στοιχείων του Σ = {α, β, γ, δ} ανά 3 διαφορετικοί μεταξύ τους είναι οι

Α. {α, β, γ}, {α, δ, γ} **Β.** {α, β, γ}, {β, α, γ}

Γ. {γ, α, δ}, {δ, α, γ} **Δ.** {α, δ, β}, {β, δ, α}

Ε. κανένα από τους παραπάνω

26. ***** Από τις παρακάτω διατάξεις των στοιχείων του συνόλου Σ = {α, β, γ} ανά 2 ίσες είναι

Α. (α, β), (β, α) **Β.** (α, γ), (γ, α) **Γ.** (β, γ), (γ, β)

Δ. (β, γ), (β, α) **Ε.** (β, α), (β, α)

27. ***** Για το 1! ισχύει

Α. δεν ορίζεται **Β.** $1! = \frac{1}{2!}$ **Γ.** $1! = 0 \cdot 1$

Δ. 1! = 1 **Ε.** ισχύουν άλλοτε το (Β) και άλλοτε το (Γ)

28. ***** Αν Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης (P(A),P (B) > 0) τότε ισχύει

Α. $P(A|B) = \frac{P(A \cup B)}{P(B)}$ **Β.** $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Γ. $P(A|B) = \frac{P(A \cup B)}{P(A)}$ **Δ.** $P(A|B) = \frac{P(A - B)}{P(B)}$

Ε. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

29. ***** Ο πολλαπλασιαστικός νόμος των πιθανοτήτων είναι ισοδύναμος με τη σχέση ($A \cap B \neq \varnothing$)

Α. $P(A \cup B) = P(A)\, P(B|A)$ **Β.** $P(A \cup B) = P(B)\, P(A|B)$

Γ. $P(A \cap B) = P(B)\, P(B|A)$ **Δ.** $P(A \cap B) = P(A)\, P(A|B)$

Ε. $P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B|A)}$

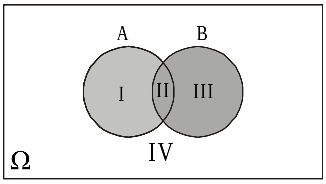
Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. Στη στήλη Α του πίνακα γράφονται ισχυρισμοί για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός πειράματος. Στη στήλη Β γράφονται ισοδύναμοι ισχυρισμοί διατυπωμένοι στη γλώσσα των συνόλων (w ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού). Αντιστοιχίστε κατάλληλα κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα μόνο της στήλης Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
	i) $w \in A$
1) Το Α δεν πραγματοποιείται	ii) $w \in (A \cup B')$
2) Ένα τουλάχιστον από τα Α και Β πραγματοποιείται	iii) $w \in (A' - A)$
	iv) $w \in (A \cap B)$
3) Πραγματοποιούνται συγχρόνως και το Α και το Β	v) $w \in (A \cup B)$
	vi) $w \in A'$
4) Το Α πραγματοποιείται	vii) $w \in (A \cup B)'$
5) Κανένα από τα Α και Β δεν πραγματοποιείται	viii) $w \in (A \cap B') \cup (A' \cap B)$
	ix) $w \in B$
6) Πραγματοποιείται μόνο το Α ή μόνο το Β	x) $w \in (A \cap B')$
	xi) $w \in (B \cap A')$
7) Το Β πραγματοποιείται	xii) $w \in (B \cap A)'$
8) Πραγματοποιείται μόνο το Α	xiii) $w \in (A \cap B)'$
9) Πραγματοποιείται μόνο το Β	xiv) $w \in (A' \cup B)$

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. Με βάση το διπλανό σχήμα συμπληρώστε τον πίνακα που ακολουθεί (Α, Β ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω).



Γραφή σε γλώσσα συνόλου	***Γραφή σε φυσική γλώσσα***	***μέρος του σχήματος***
$A \cap B$	Α τομή Β	ΙΙ
B'		
$A \cup B$		
A'		
$A - B$		
$B - A$		
$A \cap B'$		
$A' \cap B$		

Τι παρατηρείτε από τις τέσσερις τελευταίες γραμμές του πίνακα;

2. Συμπληρώστε τον πίνακα βάζοντας στη στήλη Β τον χαρακτηρισμό: Σ (σωστό) ή Λ (λάθος). Όπου βάλατε Λ (λάθος) συμπληρώστε στη στήλη Γ τη σωστή σχέση.

Α	**Β**	**Γ**
$A \cup A = A$		
$A \cup \varnothing = A$		
$A \cap A = \varnothing$	Λ	$A \cap A = A$
$A \cap \varnothing = A$		
$A' \cap A = \Omega$		
$A' \cup A = \varnothing$		
$\Omega' = \Omega$		
$(A')' = \Omega$		
$A \cap B = B \cap A$		
$A \cap B = B \cup A$		
$\varnothing' = \Omega$		
Αν $A \subseteq B$ τότε $A \cup B = B$		
$A' \cup A = \Omega$		
$A' \cap A = \varnothing$		
$(A')' = A$		
Αν $A \subseteq B$ τότε $A \cap B = A$		

3. * α) Βρείτε τον αριθμό των μεταθέσεων των στοιχείων του Α = {α, β, γ}.

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με τις μεταθέσεις αυτές

Μεταθέσεις των α, β, γ

4. * Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Φυσική γλώσσα	**Συμβολισμός**	**Ισότητα**
Μεταθέσεις των ν πραγμάτων		…… = ……
	Δ^{ν}_{κ}	…… = ……
		…… = $\dfrac{\nu!}{\kappa!\,(\nu-\kappa)!}$

5. ***** Στη στήλη Α του παρακάτω πίνακα υπάρχουν προτάσεις που χρησιμοποιούνται στις πιθανότητες. Συμπληρώστε στη Β στήλη τις αντίστοιχες αρνήσεις των προτάσεων αυτών.

Α	**Β**
Για κάθε χ που ανήκει σ' ένα σύνολο Σ η πρόταση π(χ) αληθεύει	
Υπάρχει τουλάχιστον ένα χ που ανήκει σ' ένα σύνολο Σ για το οποίο η πρόταση π(χ) αληθεύει	
«…το πολύ ν φορές »	
«…τουλάχιστον ν φορές »	

6. ***** Έστω ότι έχουμε τα τρία σχήματα **Ο, Δ, □** (κύκλος τρίγωνο τετράγωνο). Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αναγράφοντας σε κάθε στήλη όλες τις περιπτώσεις που υπάρχουν.

Α	**Β**	**Γ**
Μεταθέσεις των 3 σχημάτων	***Συνδυασμοί των 3 σχημάτων ανά 2***	***Διατάξεις των 3 σχημάτων ανά 2***

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Ρίχνουμε πρώτα ένα νόμισμα μετά ένα ζάρι και καταγράφουμε τα αποτελέσματα. Περιγράψτε ένα δειγματικό χώρο του πειράματος.

2. ** Δύο χάρτινες σακούλες περιέχουν φρούτα. Η πρώτη περιέχει 1 μήλο (Μ), 1 πορτοκάλι (Π) και 1 αχλάδι (Α). Η δεύτερη περιέχει 1 μήλο και 1 αχλάδι. Επιλέγουμε στην τύχη μία σακούλα και στη συνέχεια ένα φρούτο από αυτή.
Να γραφούν: α) ο δειγματικός χώρος του πειράματος.
β) Το ενδεχόμενο το φρούτο να είναι μήλο.
γ) Το ενδεχόμενο το φρούτο να είναι πορτοκάλι .

3. ** Σ' ένα κουτί υπάρχουν 4 ομοιόμορφα μολύβια 1 κόκκινο (Κ), 1 πράσινο (Π), 1 μαύρο (Μ), 1 λευκό (Λ). Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος στις ακόλουθες περιπτώσεις: (μας ενδιαφέρει το χρώμα)
α) Επιλέγουμε τυχαία ένα μολύβι.
β) Επιλέγουμε τυχαία ένα μολύβι, το τοποθετούμε ξανά στο κουτί και μετά επιλέγουμε άλλο ένα (επανατοποθέτηση).
γ) Επιλέγουμε τυχαία ένα μολύβι και μετά επιλέγουμε άλλο ένα (χωρίς επανατοποθέτηση).

4. ** Αν Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α , $(B \cap A')$ είναι ασυμβίβαστα.

5. ** Μια δισκογραφική εταιρεία ελέγχει τα compact disks (CD) που παράγει. Ο έλεγχος σταματά όταν βρεθούν 2 ελαττωματικά CD ή όταν έχουν ελεγχθεί 4 CD. Να βρείτε: α) το δειγματικό χώρο Ω
β) τα ενδεχόμενα: i) ακριβώς 2 ελαττωματικά CD
ii) τουλάχιστον 2 ελαττωματικά CD
iii) το πολύ 2 ελαττωματικά CD

6. ****** Δύο ομάδες O_1, O_2 παίζουν μεταξύ τους σε μια σχολική ποδοσφαιρική συνάντηση (**οι αγώνες δεν τελειώνουν ποτέ με ισοπαλία**). Νικήτρια θεωρείται η ομάδα που θα νικήσει σε δύο αγώνες στη σειρά ή σε δύο αγώνες ανεξαρτήτως σειράς. Να βρείτε:

   α) το δειγματικό χώρο Ω των αποτελεσμάτων των αγώνων της συνάντησης.

   β) τα ενδεχόμενα: i) ακριβώς μία νίκη της ομάδας O_1

   ii) καμία νίκη της ομάδας O_1

   iii) τουλάχιστον μία νίκη της ομάδας O_1

   γ) Πόσους αγώνες το πολύ θα είχε μία τέτοια ποδοσφαιρική συνάντηση

   δ) Τι παρατηρείτε για τα ενδεχόμενα β(ii) και β(iii);

7. ****** Ρίχνουμε ένα νόμισμα δύο φορές και καταγράφουμε τα αποτελέσματα.

   α) Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

   β) Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα:

   Α = {να παρουσιαστεί Κ (κεφαλή) στην πρώτη ρίψη}.

   Β = {να παρουσιαστεί Κ στη δεύτερη ρίψη}.

   Γ = {να παρουσιαστεί Κ σε μία μόνο από τις δύο ρίψεις}.

   γ) Είναι τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ ανά δύο ασυμβίβαστα; (Δικαιολογήστε την απάντησή σας).

8. ****** Ρίχνοντας ένα ζάρι ποια πιθανότητα είναι μεγαλύτερη να φέρουμε 5 ή να μη φέρουμε 5;

9. ****** Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α, Β ενός πειράματος τύχης με πιθανότητες τέτοιες ώστε $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, $P(A') = \frac{2}{3}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Να βρείτε τις:

   α) P (A)

   β) P (B)

10. **** I)** Αποδείξτε με τη βοήθεια ενός διαγράμματος Venn ότι:

α) $(A \cap B') \cup (A \cap B) = A$

β) $(A \cap B') \cap (A \cap B) = \varnothing$

γ) $P(A \cap B') + P(A \cap B) = P(A)$.

II) Αν $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, τότε βρείτε τις πιθανότητες $P(A \cap B')$ και $P(A' \cap B)$.

11. ****** Ρίχνουμε ένα ζάρι και κατόπιν τραβούμε ένα χαρτί από μια τράπουλα. Ποια είναι η πιθανότητα το ζάρι να δείξει τον αριθμό 5 και το τραπουλόχαρτο να είναι α) 5 σπαθί; β) 5 οποιουδήποτε είδους;

Σημείωση: *Η άσκηση λύνεται με στοιχειώδη τρόπο, αλλά και με τον πολλαπλασιαστικό νόμο άρα μπορεί να χρησιμοποιηθεί κατάλληλα κατά την κρίση του διδάσκοντος.*

12. ****** Ένας μαθητής διαλέγει τυχαία και ταυτόχρονα δύο από τους αριθμούς του συνόλου $A = \{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\}$. Ποια η πιθανότητα οι δύο αυτοί αριθμοί να είναι ημίτονο και συνημίτονο της ίδιας γωνίας φ;

13. ****** Υψώνουμε ένα τυχαίο μονοψήφιο ακέραιο αριθμό (διάφορο του 0) στο τετράγωνο. Ποια είναι η πιθανότητα ο αριθμός που προκύπτει να έχει τελευταίο ψηφίο:

α) το 1 β) το 4

γ) το 1 ή το 4 δ) το 2

14. ****** Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(A' \cap B) = \frac{1}{3}$. Υπολογίστε τις πιθανότητες:

α) $P(A \cap (A' \cap B))$ β) $P(A \cup (A' \cap B))$

Σημείωση: *Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε διάγραμμα Venn.*

15. ****** Δύο ομάδες O_1, O_2 παίζουν μεταξύ τους σε μια σχολική ποδοσφαιρική συνάντηση (**οι αγώνες δεν τελειώνουν ποτέ με ισοπαλία**). Νικήτρια θεωρείται η ομάδα που θα νικήσει σε δύο αγώνες στη σειρά ή σε δύο αγώνες ανεξαρτήτως σειράς. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων: (θεωρούμε τα απλά ενδεχόμενα ισοπίθανα)

α) ακριβώς μία νίκη της ομάδας O_1

β) καμία νίκη της ομάδας O_1

γ) τουλάχιστον μία νίκη της ομάδας O_1

Σημείωση: *Η άσκηση αυτή σχετίζεται με την άσκηση ανάπτυξης 6*

16. ****** Η πιθανότητα να κρυολογήσουμε το χειμώνα είναι 3-πλάσια από του να μην κρυολογήσουμε. Μπορείτε να υπολογίσετε την πιθανότητα να κρυολογήσουμε το χειμώνα;

17. ****** Μια μέρα με πολύ άσχημες καιρικές συνθήκες η πιθανότητα να λειτουργήσουν τα τα υπεραστικά λεωφορεία είναι 30%, η πιθανότητα να μη λειτουργήσουν τα τραίνα είναι 40% και η πιθανότητα να λειτουργήσει ένα τουλάχιστον συγκοινωνιακό μέσο από τα προηγούμενα είναι 90%. Ποια η πιθανότητα να λειτουργήσουν συγχρόνως και τα δύο;

18. ****** Σ' ένα συρτάρι της ντουλάπας μας υπάρχουν δύο ζευγάρια ίδιες μαύρες κάλτσες και ένα ζευγάρι λευκές. Επιλέγουμε ταυτόχρονα τρεις κάλτσες χωρίς να βλέπουμε το χρώμα τους. Ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε έτσι επιλέξει ένα ζευγάρι του ίδιου χρώματος;

19. ****** Το σύνολο $A = \{20°, 60°, 80°, 100°\}$ περιέχει σαν στοιχεία μέτρα γωνιών. Επιλέγουμε τυχαία και ταυτόχρονα τρία στοιχεία του Α. Ποια η πιθανότητα αυτά να είναι μέτρα των γωνιών ενός τριγώνου.

20. ****** Έστω Α , Β ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω. Τότε ισχύει:

α) Αν P (A) = P (B), τότε Α = Β

β) Αν P (A) ≠ P (B), τότε Α ≠ Β

γ) Αν Α = Β, τότε P (A) = P (B)

δ) Αν Α ≠ Β, τότε P (A) ≠ P (B)

ε) Αν P (A) + P (B) = 1, τότε Β = Α΄

Εξετάστε ποιες από τις παραπάνω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.

21. ****** Σε μια τάξη της Β΄ Λυκείου υπάρχουν 20 αγόρια και 9 κορίτσια. Από τα αγόρια το $\frac{1}{4}$ και από τα κορίτσια το $\frac{1}{3}$ είναι άριστοι στα Μαθηματικά. Καλούμε τυχαία ένα άτομο για μια εξέταση. Ποια η πιθανότητα:

α) να μην είναι άριστο στα Μαθηματικά

β) να είναι κορίτσι

γ) να είναι κορίτσι άριστο στα Μαθηματικά

δ) να είναι κορίτσι ή να μην είναι άριστο στα Μαθηματικά

22. ****** Ρίχνουμε ένα ζάρι (ειδικής κατασκευής) για το οποίο έχουμε την πληροφορία ότι φέρνει ζυγά νούμερα δύο φορές συχνότερα απ' ότι μονά. Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε μονό νούμερο; (*μη ισοπίθανα ενδεχόμενα*)

23. ****** Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν δέκα μαθητές γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι σε δέκα αριθμημένες καρέκλες;

24. ****** Επιλέγοντας ψηφία από το σύνολο Α = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} σχηματίζουμε ακέραιους τριψήφιους αριθμούς γραμμένους στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.

α) Πόσους συνολικά μπορούμε να σχηματίσουμε;

β) Πόσοι από αυτούς θα έχουν όλα τα ψηφία τους διαφορετικά; (π.χ. 123)

25. ****** Στο γνωστό τυχερό παιχνίδι ΛΟΤΤΟ:

α) Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσουμε εξάρι παίζοντας μία μόνο εξάδα (6 αριθμούς);

β) Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσουμε εξάρι παίζοντας 10 διαφορετικές εξάδες;

γ) Πόσες διαφορετικές εξάδες πρέπει να παίξουμε για να είμαστε βέβαιοι ότι θα κερδίσουμε εξάρι;

26. ****** Πόσες ευθείες ορίζονται από ν σημεία (ανά τρία μη συνευθειακά);

27. ****** Πόσα τρίγωνα ορίζονται από ν σημεία (ανά τρία μη συνευθειακά);

28. ****** Να βρείτε το πλήθος των διαγωνίων ενός πολυγώνου με ν πλευρές.

29. ****** Σε μια διεθνή διοργάνωση αγώνων μπάσκετ συμμετέχουν δέκα ισοδύναμες ομάδες εκ των οποίων δυο είναι ελληνικές. Να υπολογιστεί η πιθανότητα:

α) οι ομάδες στις δύο πρώτες θέσεις της τελικής κατάταξης να είναι ελληνικές.

β) οι ομάδες στις δύο πρώτες θέσεις της τελικής κατάταξης να είναι ξένες.

γ) μία τουλάχιστον ομάδα στις δύο πρώτες θέσεις να είναι ελληνική.

30. ****** Υπολογίστε τους συνδυασμούς:

α) $\binom{\nu}{\nu}$ β) $\binom{\nu}{0}$ γ) $\binom{\nu}{1}$

31. ****** Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε κατά μάθημα σ' ένα ράφι μιας βιβλιοθήκης 4 βιβλία Αρχαίων Ελληνικών, 2 βιβλία Μαθηματικών και 3 βιβλία Φυσικής;

32. ****** Πόσοι θετικοί ακέραιοι υπάρχουν, γραμμένοι στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, με πλήθος ψηφίων ένα έως και εννέα (μονοψήφιοι,διψήφιοι κ.λπ) **και με όλα τα ψηφία τους διάφορα του μηδενός;**

33. ****** Τραβούμε συγχρόνως δυο χαρτιά από μια τράπουλα (52 φύλλων). Ποια η πιθανότητα να είναι και τα δύο ντάμες;

34. ****** Ένας μαθητής διαλέγει τυχαία και ταυτόχρονα δύο από τους αριθμούς του συνόλου $A = \{\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\}$. Ποια η πιθανότητα οι δύο αυτοί αριθμοί να είναι αντίστοιχα ημίτονο και συνημίτονο της ίδιας γωνίας φ;

Σημείωση: *Προτείνεται η λύση της με χρήση συνδυασμών ενώ η παρόμοια άσκηση 12 λύνεται εύκολα και με στοιχειώδη τρόπο.*

35. ****** Πέντε παντρεμένα ζευγάρια βρίσκονται σε μία αίθουσα. Επιλέγουμε τυχαία δύο άτομα απ' αυτά.

α) Ποια η πιθανότητα να είναι άνδρας - γυναίκα παντρεμένοι μεταξύ τους;

β) Ποια η πιθανότητα να είναι μεν άνδρας - γυναίκα αλλά όχι παντρεμένοι μεταξύ τους;

γ) Ποια η πιθανότητα να είναι του ιδίου φύλου;

36. ****** Δύο αδιαφανείς σακούλες περιέχουν ομοιόμορφα μπαλάκια.. Η πρώτη περιέχει ένα μπαλάκι μαύρο (Μ), ένα μπαλάκι πράσινο (Π) και ένα μπαλάκι άσπρο (Α). Η δεύτερη περιέχει περιέχει ένα μπαλάκι μαύρο (Μ) και ένα μπαλάκι άσπρο (Α). Επιλέγουμε τυχαία μία σακούλα και στη συνέχεια ένα μπαλάκι από αυτή. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων: *(δεσμευμένη πιθανότητα)*

α) το μπαλάκι να είναι μαύρο.

β) το μπαλάκι να είναι άσπρο.

γ) το μπαλάκι να είναι πράσινο.

37. ****** Σ' ένα ζευγάρι η πιθανότητα να ζει ο σύζυγος το 2010 είναι 70%, ενώ η πιθανότητα να ζει η σύζυγος το 2010 είναι 80%. Ποια είναι η πιθανότητα να ζει μόνο η σύζυγος το 2010;

38. ****** Να δειχθεί ότι δύο ασυμβίβαστα και μη αδύνατα ενδεχόμενα **<u>δεν</u>** είναι ανεξάρτητα**.**

39. ****** Να δειχθεί ότι για δυο ενδεχόμενα Α , Β (P (A) > 0) ισχύει:

α) Αν $A \subseteq B$ τότε $P(B|A) = 1$

β) Αν $B \subseteq A$ τότε $P(B|A) = \dfrac{P(B)}{P(A)}$

40. ****** Ο παρακάτω πίνακας αναφέρεται στο κάπνισμα και τα προβλήματα υγείας 200 ατόμων.

	Καπνιστές	***Μη καπνιστές***	ΣΥΝΟΛΟ
με προβλήματα υγείας	20	20	40
χωρίς προβλήματα υγείας	30	130	160
ΣΥΝΟΛΟ	50	150	200

Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο. Να βρεθεί η πιθανότητα

α) να είναι καπνιστής.

β) να έχει προβλήματα υγείας.

γ) να είναι καπνιστής χωρίς προβλήματα υγείας.

δ) να είναι καπνιστής με προβλήματα υγείας.

ε) να έχει προβλήματα υγείας , **αν γνωρίζουμε ότι είναι καπνιστής.**

Σημείωση: *Το ερώτημα (ε) είναι δυνατόν να απαντηθεί με τη βοήθεια του πίνακα αλλά και με τη χρήση δεσμευμένης πιθανότητας, άρα είναι ενδεχομένως κατάλληλο για την εισαγωγή της δεσμευμένης πιθανότητας.*

41. ******* Η πιθανότητα βροχής για οποιαδήποτε μέρα του Μαρτίου είναι $\frac{2}{3}$. Αν σήμερα είναι 25 Μαρτίου ποια είναι η πιθανότητα να βρέξει τις επόμενες τρεις μέρες;

α) ακριβώς μια φορά   β) το πολύ μια φορά   γ) τουλάχιστον μια φορά

ΣΧΕΔΙΑ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1^o Σχέδιο

Θέμα 1^o

Α. Αποδείξτε ότι για δυο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α΄ ισχύει:
$P(A) + P(A') = 1$

Β. Συμπληρώστε τον πίνακα βάζοντας στη στήλη Β τον χαρακτηρισμό:
Σ (σωστό) ή Λ (λάθος). Όπου βάλατε Λ (λάθος) συμπληρώστε στη στήλη Γ τη σωστή σχέση.

Α	Β	Γ
$A \cup A = A$		
$A \cup \varnothing = A$		
$A \cap A = \varnothing$	Λ	$A \cap A = A$
$A \cap \varnothing = A$		
$A' \cap A = \Omega$		
$A' \cup A = \varnothing$		
$\Omega' = \Omega$		
$(A')' = \Omega$		
$A \cap B = B \cap A$		
$A \cap B = B \cup A$		
$\varnothing' = \Omega$		
Αν $A \subseteq B$ τότε $A \cup B = B$		
$A' \cup A = \Omega$		
$A' \cap A = \varnothing$		
$(A')' = A$		
Αν $A \subseteq B$ τότε $A \cap B = A$		

Θέμα 2°

Δύο ομάδες O_1, O_2 παίζουν μεταξύ τους σε μια σχολική ποδοσφαιρική συνάντηση (**οι αγώνες δεν τελειώνουν ποτέ με ισοπαλία**). Νικήτρια θεωρείται η ομάδα που θα νικήσει σε δύο αγώνες στη σειρά ή σε δύο αγώνες ανεξαρτήτως σειράς. Να βρείτε:

α) το δειγματικό χώρο Ω των αποτελεσμάτων των αγώνων της συνάντησης.

β) τα ενδεχόμενα: i) ακριβώς μία νίκη της ομάδας O_1

ii) καμία νίκη της ομάδας O_1

iii) τουλάχιστον μία νίκη της ομάδας O_1

γ) Πόσους αγώνες το πολύ θα είχε μία τέτοια ποδοσφαιρική συνάντηση

δ) Τι παρατηρείτε για τα ενδεχόμενα β(ii) και β(iii);

Σχέδιο 2ο

Θέμα 1^{o}

Α. Αποδείξτε το προσθετικό νόμο για δυο ενδεχόμενα Α,Β ενός δειγματικού χώρου Ω.

Β. Στη στήλη Α του πίνακα γράφονται ισχυρισμοί για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός πειράματος. Στη στήλη Β γράφονται ισοδύναμοι ισχυρισμοί διατυπωμένοι στη γλώσσα των συνόλων (w ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού).Αντιστοιχίστε κατάλληλα κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα μόνο της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1) Το Α δεν πραγματοποιείται	i) $w \in A$
2) Ένα τουλάχιστον από τα Α και Β πραγματοποιείται	ii) $w \in (A \cup B')$
3) Πραγματοποιούνται συγχρόνως και το Α και το Β	iii) $w \in (A' - A)$
4) Το Α πραγματοποιείται	iv) $w \in (A \cap B)$
5) Κανένα από τα Α και Β δεν πραγματοποιείται	v) $w \in (A \cup B)$
6) Πραγματοποιείται μόνο το Α ή μόνο το Β	vi) $w \in A'$
7) Το Β πραγματοποιείται	vii) $w \in (A \cup B)'$
8) Πραγματοποιείται μόνο το Α	viii) $w \in (A \cap B') \cup (A' \cap B)$
9) Πραγματοποιείται μόνο το Β	ix) $w \in B$
	x) $w \in (A \cap B')$
	xi) $w \in (B \cap A')$
	xii) $w \in (B \cap A)'$
	xiii) $w \in (A \cap B)'$
	xiv) $w \in (A' \cup B)$

Θέμα 2ο

Σε μια τάξη της Β΄ Λυκείου υπάρχουν 20 αγόρια και 9 κορίτσια. Από τα αγόρια το $\frac{1}{4}$ και από τα κορίτσια το $\frac{1}{3}$ είναι άριστοι στα Μαθηματικά. Καλούμε τυχαία ένα άτομο για μια εξέταση. Ποια η πιθανότητα:

α) να μην είναι άριστο στα Μαθηματικά

β) να είναι κορίτσι

γ) να είναι κορίτσι ή να μην είναι άριστο στα Μαθηματικά

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΣΥΝΤΟΜΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις «Σωστό - Λάθος»

1	Σ	**10**	Σ	**19**	Λ	**28**	Σ	**viii**	Σ	**32**	Σ	**41**	Λ	**50**	Σ
2	Σ	**11**	Λ	**20**	Λ	**29**	Λ	**ix**	Λ	**33**	Λ	**42**	Σ	**51**	Λ
3	Σ	**12**	Σ	**21**	Σ	**30 i**	Λ	**x**	Λ	**34**	Σ	**43**	Σ	**52**	Λ
4	Σ	**13**	Λ	**22**	Λ	**ii**	Σ	**xi**	Σ	**35**	Σ	**44**	Σ	**53**	Σ
5	Σ	**14**	Σ	**23**	Σ	**iii**	Σ	**xii**	Σ	**36**	Σ	**45**	Λ	**54**	Λ
6	Σ	**15**	Λ	**24**	Σ	**iv**	Λ	**xiii**	Λ	**37**	Λ	**46**	Σ		
7	Σ	**16**	Σ	**25**	Λ	**v**	Σ	**xiv**	Σ	**38**	Σ	**47**	Σ		
8	Σ	**17**	Λ	**26**	Σ	**vi**	Σ	**xv**	Σ	**39**	Σ	**48**	Λ		
9	Σ	**18**	Λ	**27**	Σ	**vii**	Σ	**31**	Σ	**40**	Σ	**49**	Σ		

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1	Β	**5**	Δ	**9**	Ε	**13**	Γ	**17**	Β	**21**	Β	**25**	Α	**39**	Ε
2	Α	**6**	Γ	**10**	Γ	**14**	Δ	**18**	Γ	**22**	Β	**26**	Ε		
3	Δ	**7**	Ε	**11**	Β	**15**	Ε	**19**	Ε	**23**	Ε	**27**	Δ		
4	Α	**8**	Δ	**12**	Ε	**16**	Γ	**20**	Δ	**24**	Ε	**28**	Ε		

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	VI	5	VII
2	V	6	VIII
3	IV	7	IX
4	I	8	X
		9	XI

Απαντήσεις στις ερωτήσεις συμπλήρωσης

1.

Γραφή σε γλώσσα συνόλου	***Γραφή σε φυσική γλώσσα***	***μέρος του σχήματος***
$A \cap B$	Α τομή Β	ΙΙ
B'	Συμπλήρωμα του Β	IV + I
$A \cup B$	Α ένωση Β	I + II + III
A'	Συμπλήρωμα του Α	III + IV
$A - B$	Α μείον Β	I
$B - A$	Β μείον Α	III
$A \cap B'$	Α τομή συμπλήρωμα Β	I
$A' \cap B$	Α συμπλήρωμα τομή Β	III

2.

Α	Β	Γ
$A \cup A = A$	Σ	
$A \cup \varnothing = A$	Σ	
$A \cap A = \varnothing$	Λ	$A \cap A = A$
$A \cap \varnothing = A$	Λ	$A \cap \varnothing = \varnothing$
$A' \cap A = \Omega$	Λ	$A' \cap A = \varnothing$
$A' \cup A = \varnothing$	Λ	$A' \cup A = \Omega$
$\Omega' = \Omega$	Λ	$\Omega' = \varnothing$
$(A')' = \Omega$	Λ	$(A')' = A$
$A \cap B = B \cap A$	Σ	
$A \cap B = B \cup A$	Λ	$A \cap B = B \cap A$
$\varnothing' = \Omega$	Σ	
Αν $A \subseteq B$ τότε $A \cup B = B$	Σ	
$A' \cup A = \Omega$	Σ	
$A' \cap A = \varnothing$	Σ	
$(A')' = A$	Σ	
Αν $A \subseteq B$ τότε $A \cap B = A$	Σ	

3.

Μεταθέσεις των α, β, γ	
αβγ	βγα
αγβ	γαβ
βαγ	γβα

4.

Φυσική γλώσσα	**Συμβολισμός**	**Ισότητα**
Μεταθέσεις των ν πραγμάτων	$M_ν$	$M_ν = ν!$
Διατάξεις των ν πραγμάτων ανά κ	$Δ_κ^ν$	$Δ_κ^ν = \dfrac{ν!}{(ν-κ)!}$
Συνδυασμοί των ν πραγμάτων ανά κ	$\binom{ν}{κ}$	$\binom{ν}{κ} = \dfrac{ν!}{κ!\,(ν-κ)!}$

5.

Α	**Β**
Για κάθε χ που ανήκει σ' ένα σύνολο Σ η πρόταση π(χ) αληθεύει	Υπάρχει τουλάχιστον ένα χ που ανήκει σ' ένα σύνολο Σ για το οποίο η πρόταση π(χ) δεν αληθεύει
Υπάρχει τουλάχιστον ένα χ που ανήκει σ' ένα σύνολο Σ για το οποίο η πρόταση π(χ) αληθεύει	Για κάθε χ που ανήκει σ' ένα σύνολο Σ η πρόταση π(χ) δεν αληθεύει
«…το πολύ ν φορές »	«…τουλάχιστον ν + 1 φορές »
«…τουλάχιστον ν φορές »	«…το πολύ ν-1 φορές »

6.

Α	**Β**	**Γ**
Μεταθέσεις των 3	***Συνδυασμοί των 3 ανά 2***	***Διατάξεις των 3 ανά 2***
Ο ☐ Δ	**Ο ☐**	**Ο ☐**
Ο Δ ☐	**Ο Δ**	**Ο Δ**
Δ Ο ☐	**☐ Δ**	**☐ Δ**
Δ ☐ Ο		**☐ Ο**
☐ Ο Δ		**Δ ☐**
☐ Δ Ο		**Δ Ο**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. Ω = {Κ1, Κ2, Κ3, Κ4, Κ5, Κ6, Γ1, Γ2, Γ3, Γ4, Γ5, Γ6}

2. Σ_1 **:** Σακούλα που περιέχει 1(Μ), 1(Π), 1(Α).
Σ_2 **:** Σακούλα που περιέχει 1(Μ), 1(Α).
α) Ω = {Σ_1Μ, Σ_1Π, Σ_1Α, Σ_2Μ, Σ_2Α}
β) Α = {Σ_1Μ, Σ_2Μ}
γ) Β = {Σ_1Π}

3. α) Ω = {Κ, Π, Μ, Λ}
β) Ω = {ΚΠ, ΚΜ, ΚΛ, ΚΚ, ΠΚ, ΠΜ, ΠΛ, ΠΠ, ΜΚ, ΜΠ, ΜΛ, ΜΜ, ΛΚ, ΛΠ, ΛΜ, ΛΛ}
γ) Ω = {ΚΠ, ΚΜ, ΚΛ, ΠΚ, ΠΜ, ΠΛ, ΜΚ, ΜΠ, ΜΛ, ΛΚ, ΛΠ, ΛΜ}

4. Είναι ασυμβίβαστα διότι η πραγματοποίηση του ενός συνεπάγεται την μη πραγματοποίηση του άλλου.

5. Ε: ελαττωματικό CD, Κ: μη ελαττωματικό CD.

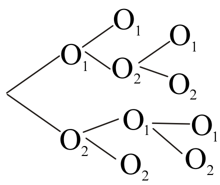
α) Ω = {ΕΕ, ΕΚΕ, ΕΚΚΕ, ΕΚΚΚ, ΚΕΕ, ΚΕΚΕ, ΚΕΚΚ, ΚΚΕΕ, ΚΚΕΚ, ΚΚΚΕ, ΚΚΚΚ}

β) i) Β = {ΕΕ, ΕΚΕ, ΕΚΚΕ, ΚΕΕ, ΚΕΚΕ, ΚΚΕΕ}

ii) Γ = {ΕΕ, ΕΚΕ, ΕΚΚΕ, ΚΕΕ, ΚΕΚΕ, ΚΚΕΕ}

iii) Δ = {ΕΕ, ΕΚΕ, ΕΚΚΕ, ΕΚΚΚ, ΚΕΕ, ΚΕΚΕ, ΚΕΚΚ, ΚΚΕΕ, ΚΚΕΚ, ΚΚΚΕ, ΚΚΚΚ}

6. α) $\Omega = \{O_1O_1, O_1O_2O_1, O_1O_2O_2, O_2O_1O_1, O_2O_1O_2, O_2O_2\}$



β) i) $A = \{O_1O_2O_2, O_2O_1O_2\}$

ii) $B = \{O_2O_2\}$

iii) $\Gamma = \{O_1O_1, O_1O_2O_1, O_1O_2O_2, O_2O_1O_1, O_2O_1O_2\}$

γ) 3

δ) Είναι συμπληρωματικά.

7. α) Ω = {ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ}

β) i) Α = {ΚΚ, ΚΓ} ii) Β = {ΚΚ, ΓΚ} iii) Γ = {ΚΓ, ΓΚ}

γ) Όχι, διότι $A \cap B = \{KK\}$, $A \cap \Gamma = \{K\Gamma\}$, $B \cap \Gamma = \{\Gamma K\}$.

8. Αν $A = \{5\}$, τότε $A' = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ άρα $P(A) = \frac{1}{6}$ και

$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

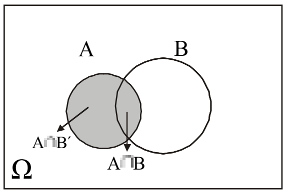
9. α) $P(A) = 1 - P(A') = \frac{1}{3}$.

β) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ … $P(B) = \frac{2}{3}$.

0. **I)** α) (A ∩ B΄) ∪ (A ∩ B) = A (βλ. σχήμα)

β) (A ∩ B΄) ∩ (A ∩ B) = ∅ (βλ. σχήμα)

γ) Αφού A ∩ B΄ και A ∩ B ασυμβίβαστα,



$$P(A) = P((A \cap B') \cup (A \cap B)) = P(A \cap B') + P(A \cap B)$$

II) $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

$$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

11. α) $P = \dfrac{1}{6 \cdot 52}$ β) $P = \dfrac{4}{6 \cdot 52}$

Λύση με τον πολλαπλασιαστικό νόμο:

α) A : το ζάρι να δείξει 5 B : το τραπουλόχαρτο να είναι 5 σπαθί

A, B φυσικώς ανεξάρτητα.

Άρα $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{52} = \frac{1}{312}$.

β) B : το τραπουλόχαρτο να είναι 5

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{52} = \frac{4}{312} = \frac{1}{78}.$$

12. $\Omega = \left\{ \{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\}, \{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\}, \{\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\} \right\}$

Φ: το ενδεχόμενο να είναι ημίτονο και συνημίτονο του ιδίου τόξου

$\Phi = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right\}$, διότι $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = 1$. Άρα $P(\Phi) = \frac{1}{3}$

13. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

α) $A = \{1, 9\}$ άρα $P(A) = \dfrac{2}{9}$

β) $B = \{2, 8\}$ άρα $P(B) = \dfrac{2}{9}$

γ) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{4}{9}$ (αφού $A \cap B = \varnothing$)

δ) $\Gamma = \varnothing$ άρα $P(\Gamma) = 0$

14. α) $P(\, A \cap (A' \cap B)\,) = P(\varnothing) = 0$ (αφού A, $A' \cap B$ ασυμβίβαστα - βλ. άσκ. 5)

β) $P(\, A \cup (A' \cap B)\,) = P(A) + P(A' \cap B) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6}$

15. α) $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{2}{6}$ β) $P(B) = \dfrac{1}{6}$ γ) $P(\Gamma) = \dfrac{5}{6}$

16. $P(A)$: η πιθανότητα να κρυολογήσουμε

$P(A')$: η πιθανότητα να μην κρυολογήσουμε

Έτσι $P(A) = 3\,P(A')$. Όμως $P(A) + P(A') = 1, \ldots, P(A) = \dfrac{3}{4}$

17. A : λειτουργούν τα λεωφορεία

B′: δεν λειτουργούν τα τραίνα

$P(A) = 0{,}3$ $P(B') = 0{,}4$ άρα $P(B) = 0{,}6$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ άρα $0{,}9 = 0{,}3 + 0{,}6 - P(A \cap B)$ άρα

$P(A \cap B) = 0$

18. Είναι βέβαιο ότι επιλέγοντας τρεις κάλτσες θα έχουμε 1 ζευγάρι του ιδίου χρώματος. Άρα η πιθανότητα είναι 1 (η άσκηση μπορεί επίσης να λυθεί ορίζοντας κατάλληλα ενδεχόμενα).

19. $\Omega = \big\{\{80°, 100°, 60°\}, \{80°, 100°, 20°\}, \{100°, 60°, 20°\}, \{60°, 80°, 20°\}\big\}$

Η ευνοϊκή τριάδα είναι $\{100°, 60°, 20°\}$. Άρα $P = \dfrac{1}{4}$

20. α) Λάθος, διότι αν π.χ. $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ και $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ τότε

$P(A) = P(B)$ αλλά $A \neq B$

β) Σωστή (άρνηση της πρότασης (α))

γ) Σωστή, αφού αν $A = B$ τότε $N(A) = N(B)$, συνεπώς

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = P(B)$$

δ) Λάθος (βλέπε πρόταση (α))

ε) Λάθος, διότι αν π.χ. $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ και $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 4\}$ τότε

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$. Άρα $P(A) + P(B) = 1$, όμως $B \neq A' = \{3, 4\}$

21.

	Αγόρια	***Κορίτσια***	**ΣΥΝΟΛΟ**
Άριστοι	5	3	8
Μη άριστοι	15	6	21
ΣΥΝΟΛΟ	20	9	29

Α : να μην είναι άριστο στα Μαθηματικά

Β : να είναι κορίτσι

Γ : να είναι κορίτσι άριστο στα Μαθηματικά

Δ: να είναι κορίτσι ή να μην είναι άριστο στα Μαθηματικά

α) $P(A) = \frac{21}{29}$ β) $P(B) = \frac{9}{29}$ γ) $P(\Gamma) = \frac{3}{29}$

δ) $P(\Delta) = P(B) + P(A) - P(A \cap B) = \frac{9}{29} + \frac{21}{29} - \frac{6}{29} = \frac{24}{29}$

22. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $A = \{2, 4, 6\}$ $A' = \{1, 3, 5\}$

Όμως $P(A) = 2P(A')$, αλλά $P(A) + P(A') = 1, \ldots, P(A') = \frac{1}{3}$

23. Με 10! τρόπους.

24. α) Η θέση του πρώτου ψηφίου μπορεί να πληρωθεί με 9 τρόπους. Όμοια η θέση του δεύτερου και του τρίτου μπορεί επίσης να πληρωθεί με 9 τρόπους. Άρα μπορούμε να σχηματίσουμε 9^3 τριψήφιους αριθμούς.

β) $\Delta_3^9 = 504$

25. α) Όλες οι δυνατές στήλες είναι $\binom{49}{6}$.

Η ευνοϊκή είναι 1, άρα $P = \dfrac{1}{\binom{49}{6}} = \dfrac{1}{13.983.816}$.

β) $P = 10 \cdot \dfrac{1}{13.983.816}$ (προσθετικός νόμος)

γ) 13.983.816

26. $\binom{\nu}{2}$ ευθείες.

27. $\binom{\nu}{3}$ τρίγωνα.

28. $\binom{\nu}{2} - \nu = \dfrac{\nu(\nu-3)}{2}$ διαγώνιοι.

29. α) N (Ω) = 10! Στις δύο πρώτες θέσεις μπορούν να είναι ελληνικές ομάδες κατά 2! τρόπους. Στις υπόλοιπες οκτώ θέσεις μπορούν να είναι ξένες ομάδες κατά 8! τρόπους. Άρα οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι συνολικά $2! \cdot 8!$.

Άρα $P_\alpha = \dfrac{2! \cdot 8!}{10!} = \dfrac{1}{45}$.

β) Στις δύο πρώτες θέσεις μπορούν να είναι ξένες ομάδες κατά Δ_2^8 τρόπους. Στις υπόλοιπες μπορούν να είναι ελληνικές και ξένες κατά 8!. Άρα οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι συνολικά $(\Delta_2^8) \cdot 8! = 56 \cdot 8!$.

Άρα $P_\beta = \dfrac{56 \cdot 8!}{10!} = \dfrac{56}{90} = \dfrac{28}{45}$.

γ) $P_\gamma = 1 - P_\beta = 1 - \dfrac{28}{45} = \dfrac{17}{45}$.

30. $\binom{\nu}{\nu} = 1,\ \binom{\nu}{0} = 1,\ \binom{\nu}{1} = \nu$

31. Τα 4 βιβλία Αρχαίων τοποθετούνται κατά 4! τρόπους (μεταθέσεις). Όμοια των Μαθηματικών κατά 2!, της Φυσικής κατά 3!. Οι τρεις ομάδες μπορούν να τοποθετηθούν κατά 3!. Άρα συνολικά έχουμε $3!\cdot 4!\cdot 2!\cdot 3!$ τρόπους.

32. Μπορούμε να σχηματίσουμε:
9 μονοψήφιους αριθμούς, 9^2 διψήφιους,
9^3 τριψήφιους ,…, 9^9 εννεαψήφιους.
Άρα συνολικά $9 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 + 9^6 + 9^7 + 9^8 + 9^9$
(Γεωμετρική πρόοδος με λόγο 9)

33. $P = \dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}}$

34. $\binom{4}{2} = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = \dfrac{4!}{2\cdot 2} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 2} = 6$ δυνατές περιπτώσεις.

Ευνοϊκές 2, διότι $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$ και $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$

Άρα $P = \dfrac{1}{3}$.

35. α) $\binom{10}{2} = \dfrac{10!}{2!(10-2)!} = \dfrac{8!\cdot 9\cdot 10}{2!\cdot 8!} = 45$ τρόποι επιλογής δύο ατόμων.

Οι ευνοϊκοί είναι 5 (αφού 5 είναι τα παντρεμένα ζευγάρια).

Άρα $P_\alpha = \dfrac{5}{45} = \dfrac{1}{9}$.

β) Υπάρχουν πέντε τρόποι επιλογής ενός άνδρα και 4 τρόποι επιλογής μιας γυναίκας που δεν είναι η σύζυγός του. Άρα $P_\beta = \dfrac{5\cdot 4}{\binom{10}{2}} = \dfrac{20}{45}$.

γ) $P_\gamma = 1 - P_\alpha - P_\beta = \dfrac{4}{9}$

36. α) $P(M) = P(M|\Sigma_1)\cdot P(\Sigma_1) + P(M|\Sigma_2)\, P(\Sigma_2) = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{4} =$

$\dfrac{10}{24} = \dfrac{5}{12}$

β) $P(A) = P(A|\Sigma_1)\cdot P(\Sigma_1) + P(A|\Sigma_2)\, P(\Sigma_2) = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{12}$

γ) $P(\Pi) = P(\Pi|\Sigma_1)\cdot P(\Sigma_1) = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$

37. A : ο σύζυγος ζει το 2010 B : η σύζυγος ζει το 2010

Θεωρούνται ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

Ζητούμε $P(A' \cap B) = P(A')\cdot P(B) = \dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{8}{10} = \dfrac{24}{100} = 24\%$.

38. Αφού A, B είναι ασυμβίβαστα, τότε $A \cap B = \varnothing$ άρα $P(A \cap B) = 0$ **(1)**

Αν ήταν ανεξάρτητα, θα έπρεπε $P(A \cap B) = P(A)\cdot P(B)$.

Τότε όμως $P(A \cap B) = P(A)\cdot P(B) = 0$ **(2)** λόγω της **(1),**

αλλά $P(A) > 0$ και $P(B) > 0$ (αφού A, B δεν είναι αδύνατα ενδεχόμενα),

άρα η **(2)** είναι αδύνατη , άρα τα A, B δεν είναι ανεξάρτητα.

39. α) $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$

β) $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(B)}{P(A)}$

40. α) Α : είναι καπνιστής $\quad P(A) = \dfrac{50}{200} = 25\%$

β) Β : έχει προβλήματα υγείας $\quad P(B) = \dfrac{40}{200} = 20\%$

γ) Γ : είναι καπνιστής χωρίς προβλήματα υγείας $\quad P(\Gamma) = \dfrac{30}{200} = 15\%$

δ) $A \cap B$: είναι καπνιστής με προβλήματα υγείας $\quad P(A \cap B) = \dfrac{20}{200} = 10\%$

ε) Ε : έχει προβλήματα υγείας **δεδομένου** ότι είναι καπνιστής

Με χρήση του πίνακα υπάρχουν 20 καπνιστές με προβλήματα υγείας σε σύνολο 50 καπνιστών. Άρα $P(E) = \dfrac{20}{50} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$

ή $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{2}{20}}{\frac{5}{20}} = 0{,}4$

41. α) Η πιθανότητα να βρέξει την 1η επόμενη μέρα είναι $P = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{27}$.

Είναι όμως δυνατό να βρέξει τη 2η μέρα **ή** την 3η μέρα. Άρα η πιθανότητα βροχής την 1η **ή** την 2η **ή** την 3η μέρα είναι $P_\alpha = 3P = \dfrac{6}{27}$

β) Η πιθανότητα να μη βρέξει τις επόμενες τρεις μέρες είναι

$P = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{27}$ (1)

Το **πολύ μια φορά** σημαίνει **καμία φορά ή μία φορά**. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P_\beta = \dfrac{1}{27} + \dfrac{6}{27} = \dfrac{7}{27}$.

γ) Το ενδεχόμενο **να βρέξει τουλάχιστον μια φορά** είναι συμπληρωματικό του ενδεχομένου **να μη βρέξει.** Άρα $P_\gamma = 1 - P = 1 - \dfrac{1}{27} = \dfrac{26}{27}$ λόγω της (1).

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ Α΄ ΤΕΥΧΟΥΣ

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ			
σελίδα	***νούμερο άσκησης***	***αντί του:***	***να γραφεί:***
104	25	«N_i = 0,9»	«F_i = 0,9»
102	18	«80»	«400»
103	24	(γ) ερωτήματος	να διαγραφεί
134	18	της στήλης $ν_i$	«50, 80, 100, 70, 50, 25, 25» σύνολο «400»
144	32 (β)		s^2 = 133,5
150	43	«3» στη στήλη x^2	«3969»

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ

Ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή γεννήθηκε στο Βερολίνο στις 13 Σεπτεμβρίου 1873. Κατά την περίοδο 1881-91 ολοκλήρωσε τις σπουδές του στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση σε σχολεία του Βελγίου όπου διακρίθηκε για την επίδοσή του στα Μαθηματικά. Κατά την περίοδο 1891-95 φοίτησε στη Βελγική Στρατιωτική Σχολή απ' όπου πήρε πτυχίο μηχανικού. Κατά την περίοδο 1897-98 παρακολούθησε μαθήματα στα Πανεπιστήμια του Λονδίνου και των Παρισίων, ενώ το φθινόπωρο του 1898 έως την άνοιξη του 1900 εργάστηκε ως μηχανικός στην Αίγυπτο στην κατασκευή των φραγμάτων Assuan και Assiout. Αμέσως μετά μεταβαίνει στο Βερολίνο με μοναδικό σκοπό **τη σπουδή των Μαθηματικών.**

Το καλοκαίρι του 1902 αναχωρεί για το Göttingen, προπύργιο τότε των μαθηματικών ερευνών και τόπο συγκέντρωσης διασήμων μαθηματικών (Klein - Hilbert - Minkowski κ.ά.). Το 1905 γίνεται υφηγητής στο Πανεπιστήμιο του Göttingen. Το 1909 γίνεται τακτικός καθηγητής στο Πολυτεχνείο του Αννόβερου, ενώ το 1910 γίνεται καθηγητής στο Πολυτεχνείο της Breslaw. Το 1913 γίνεται τακτικός καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Göttingen και διαδέχεται τον Felix Klein στην σημαντικότερη μαθηματική έδρα στην Ευρώπη. Το 1918 γίνεται τακτικός καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου.

Το 1920 η ελληνική κυβέρνηση τον προσκάλεσε για να οργανώσει το Ιωνικό Πανεπιστήμιο στη Σμύρνη. Το 1922 Ο Καραθεοδωρή κατάφερε να διασώσει την Πανεπιστημιακή Βιβλιοθήκη του Ιωνικού Πανεπιστημίου από την τουρκική εισβολή στη Σμύρνη και τη μετέφερε στην Αθήνα. Κατά το ίδιο έτος γίνεται τακτικός καθηγητής της Μαθηματικής Ανάλυσης στο Πανεπιστήμιο Αθηνών, το 1923 τακτικός καθηγητής της Μηχανικής στο ΕΜΠ και ανακηρύσσεται ακαδημαϊκός. Το 1924 γίνεται τακτικός καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Μονάχου, όπου και διδάσκει μέχρι το τέλος της ακαδημαϊκής του καριέρας.

Η βασική επιστημονική εργασία του Καραθεοδωρή είναι στα θέματα του Λογισμού των Μεταβολών (55 συνολικά εργασίες, μεταξύ των οποίων η διδακτορική του διατριβή "περί των ασυνεχών λύσεων του λογισμού των μεταβολών", 1905). Επίσης εργάστηκε με μεγάλη επιτυχία σε θέματα Θεωρίας Μιγαδικών Συναρτήσεων, Θεωρίας Πραγματικών Συναρτήσεων, Θεωρίας κυρτότητας, Θεωρίας μέτρου, Θεωρίας Συνόλων, Θερμοδυναμικής, Θεωρίας σχετικότητας, Γεωμετρικής οπτικής και Θεωρητικής μηχανικής, δημοσιεύοντας συνολικά 132 πρωτότυπες εργασίες.

Η προσφορά του στη μαθηματική επιστήμη έχει αναγνωριστεί στη διεθνή βιβλιογραφία. Μια πρωτότυπη εργασία του αναφέρεται στις αρχιτεκτονικές καμπύλες του Παρθενώνα (δημοσιεύτηκε το 1937 στην "αρχαιολογική εφημερίδα").

Ο καθηγητής E. Schmidt γράφει για τον Κ. Σ. Καραθεοδωρή: *"Ανήκει εις την πλειάδα των μεγάλων εργατών της μαθηματικής επιστήμης, οίτινες ανεκάλυψαν απροσδόκητους και βασικάς σχέσεις εις όλους σχεδόν τους κλάδους αυτής… Θα μείνει εις τα μαθηματικά ο Καραθεοδωρή εις την πρώτην γραμμήν των ερευνητών των μάλλον ικανών, οίτινες δια της δυνάμεως της μεγαλοφυΐας των, επέτυχον καταπληκτικήν επέκτασιν του ορίου της επιστήμης ταύτης…".*

Ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή απεβίωσε στο Μόναχο στις 2 Φεβρουαρίου 1950 και το θάνατό του πένθησαν όλα τα πνευματικά ιδρύματα του κόσμου με τα οποία είχε σχέση κατά τη διάρκεια της ζωής του.