ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΚΕΝΤΡΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Μάθημα Γενικής Παιδείας

ΤΕΥΧΟΣ Α΄

ΑΘΗΝΑ 1999

Ομάδα Σύνταξης

Εποπτεία:	Παπασταυρίδης Σταύρος, Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών
Συντονιστές:	Κοθάλη - Κολοκούρη Ευπραξία, Σχολικός Σύμβουλος, M.Ed. Σβέρκος Ανδρέας, Σχολικός Σύμβουλος Μακρής Κωνσταντίνος, Σχολικός Σύμβουλος
Συγγραφική ομάδα:	Βογιατζόγλου Σωτήρης, Μαθηματικός Δ.Ε. Βουργάνας Παναγιώτης, Μαθηματικός Δ.Ε. Γεωργακάκος Ηλίας, Μαθηματικός Δ.Ε. Κεΐσογλου Στέφανος, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed. Κοντογιάννης Ιωάννης, Μαθηματικός Δ.Ε. Κουτσανδρέας Γεράσιμος, Μαθηματικός Δ.Ε. Κωνσταντόπουλος Ηλίας, Μαθηματικός Δ.Ε. Μέτης Στέφανος, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed. Μπούρικα Μαρία, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed. Πέτρου Αθηνά, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed. Χάλκου Μάρα, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed. Χριστόφιλος Ευγένιος, Μαθηματικός Δ.Ε.
Για το τεύχος αυτό:	
Συντονίστρια:	Κοθάλη - Κολοκούρη Ευπραξία, Σχολικός Σύμβουλος, M.Ed.
Συντάκτες κειμένων:	Κοντογιάννης Ιωάννης, Μαθηματικός Δ.Ε. Μπούρικα Μαρία, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed. Πέτρου Αθηνά, Μαθηματικός Δ.Ε., M.Ed.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Α   Γ Ε Ν Ι Κ Η Σ   Π Α Ι Δ Ε Ι Α Σ

Φωτογραφία εξωφύλλου: Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή

Επιμέλεια εξωφύλλου: Σ. Βογιατζόγλου, Π. Βουργάνας, Η. Γεωργακάκος

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας (Κ.Ε.Ε.), συνεχίζοντας την προσπάθεια υποβοήθησης των εκπαιδευτικών στο δύσκολο έργο τους, συνέταξε νέα βιβλία που αναφέρονται στην αξιολόγηση των μαθητών της Γ΄ τάξης του Ενιαίου Λυκείου (Ε.Λ.). Κατά τη σύνταξή τους έχουν ληφθεί υπόψη οι παρατηρήσεις και υποδείξεις των εκπαιδευτικών που χρησιμοποίησαν κατά το σχολικό έτος 1998-99 τα αντίστοιχα βιβλία για τους μαθητές των Α΄ και Β΄ τάξεων του Λυκείου, και οι διαπιστώσεις που προέκυψαν από έρευνες σχετικές με την αξιοποίηση των βιβλίων αυτών στη σχολική πράξη.

Με την ευκαιρία της έκδοσης των νέων βιβλίων θα ήθελα να επαναλάβω ακόμη μια φορά τα κύρια σημεία του τρόπου χρησιμοποίησής τους. Η επανάληψη αυτή στοχεύει στην εξάλειψη μερικών παιδαγωγικών σφαλμάτων που, παρά τις συνεχείς ενημερώσεις, έγιναν κατά το πρόσφατο παρελθόν. Τα σημεία αυτά είναι τα εξής:

- Οι ερωτήσεις που περιλαμβάνονται στα βιβλία αξιολόγησης των μαθητών ***έχουν ενδεικτικό χαρακτήρα***. Οι εκπαιδευτικοί δεν είναι υποχρεωμένοι να τις χρησιμοποιούν αυτούσιες. ***Έχουν τη δυνατότητα να τις τροποποιούν έτσι ώστε να ανταποκρίνονται στις ιδιαιτερότητες των μαθητών τους, να τις απλουστεύουν, εφόσον τις θεωρούν δύσκολες, να παραλείπουν όσες κρίνουν πως δεν αντιστοιχούν στο επίπεδο των μαθητών τους ή στους διδακτικούς στόχους, τους οποίους οι ίδιοι θέτουν***. Τα παραδείγματα αυτά επιδιώκουν ακόμη να βοηθήσουν τους διδάσκοντες στο να εκπονούν ***οι ίδιοι δικές τους ερωτήσεις***. Πρόθεσή μας δεν είναι να περιορίσουμε την ελευθερία και την παιδαγωγική αυτονομία του εκπαιδευτικού, αλλά να του προσφέρουμε ιδέες που θα τον βοηθήσουν να αυξήσει τα περιθώρια της πρωτοβουλίας του και να βελτιώσει την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας του.
- Η προσπάθεια ορισμένων εκπαιδευτικών να αναθέτουν στους μαθητές τους την επεξεργασία όλων των ερωτήσεων που περιέχονται στα βιβλία του Κ.Ε.Ε. από το ένα μέρος, και το πλήθος των σχετικών παραδειγμάτων από το άλλο οδήγησαν κατά το πρόσφατο παρελθόν σε σημαντική αύξηση της εργασίας των μαθητών. Η τακτική αυτή, της οποίας οι αρνητικές συνέπειες είναι προφανείς, οφείλεται σε παρεξήγηση και σε μη ορθή κατανόηση του σκοπού, τον οποίο υπηρετεί το παραπάνω παιδαγωγικό υλικό. Οι Ομάδες Εργασίας του Κ.Ε.Ε. εκπόνησαν για κάθε ενότητα της διδακτέας ύλης ικανό αριθμό ερωτήσεων, επειδή στόχος τους ήταν: α) να καλύψουν ευρύ φάσμα διδακτικών στόχων, β) να ικανοποιήσουν ποικίλα επίπεδα απαιτήσεων και γ) να αξιοποιήσουν τα θετικά στοιχεία διαφορετικών τύπων ερωτήσεων. Επιδίωξαν, με άλλα λόγια, να διευρύνουν, μέσα από την παροχή πολλών παραδειγμάτων, τη δυνατότητα επιλογής ερωτήσεων από τους διδάσκοντες και να καλύψουν στο βαθμό του δυνατού, όλες τις πιθανές ανάγκες τους, οι οποίες είναι λογικό να διαφέρουν από εκπαιδευτικό σε εκπαιδευτικό και από τάξη σε τάξη. Ποτέ, όμως, και για κανένα λόγο, δε ζητήθηκε από τους εκπαιδευτικούς ούτε να εξαντλούν τα σχετικά παραδείγματα, ούτε να περιορίζονται αποκλειστικά σ' αυτά, ούτε να φωτοτυπούν τα βιβλία αξιολόγησης και να δίνουν όλες τις ερωτήσεις στους μαθητές τους. Κάτι τέτοιο και αντιπαιδαγωγικό είναι και αντίθετο προς το πνεύμα της εκπαιδευτικής μεταρρύθμισης. Κάθε διδάσκων οφείλει να επιλέγει από κάθε

ενότητα μικρό αριθμό ερωτήσεων, οι οποίες ανταποκρίνονται στους διδακτικούς στόχους που επιδιώκει και στα κριτήρια που ο ίδιος θέτει. Αυτές πρέπει να αξιοποιεί στο πλαίσιο της διδακτικής πράξης.

- Τα θέματα και οι ερωτήσεις που περιλαμβάνονται στα βιβλία αξιολόγησης δεν προορίζονται μόνο για εργασίες των μαθητών στο σπίτι ή για την εκπόνηση ολιγόλεπτων και ωριαίων διαγωνισμάτων. Πολλά από τα θέματα και τα ερωτήματα αυτά μπορούν και πρέπει να αξιοποιούνται στο πλαίσιο της καθημερινής σχολικής εργασίας. Αυτό ισχύει ιδιαίτερα για τα ζητήματα εκείνα που, κατά την κρίση του εκπαιδευτικού, παρουσιάζουν δυσκολίες για το μέσο μαθητή.
- Οι εκπαιδευτικοί πρέπει ακόμη να έχουν υπόψη τους ότι καμιά από τις ερωτήσεις που περιέχονται στα βιβλία αξιολόγησης δεν χρησιμοποιείται αυτούσια στις προαγωγικές και απολυτήριες εξετάσεις. Στις εξετάσεις αυτές τίθενται ερωτήσεις ανάλογες προς εκείνες που περιέχονται στα βιβλία αυτά και στα σχολικά εγχειρίδια, διαφορετικές, όμως, ως προς το περιεχόμενό τους. Οι προαγωγικές εξετάσεις που πραγματοποιήθηκαν κατά την περασμένη σχολική χρονιά (1998-99) επιβεβαιώνουν πλήρως όσα προαναφέρθηκαν. Μάταια, λοιπόν, μερικοί εκπαιδευτικοί καταπονούν τους μαθητές τους με υπέρμετρο φόρτο εργασίας, επειδή πιστεύουν ότι, εξαντλώντας όλες τις ερωτήσεις που περιέχονται στα βιβλία του Κ.Ε.Ε., θα "πιάσουν" -κατά το κοινώς λεγόμενο- τα θέματα των προαγωγικών και απολυτήριων εξετάσεων.
- Η χρησιμοποίηση, τέλος, των ερωτήσεων που περιέχονται στα παραπάνω βιβλία δεν αποκλείει ούτε εμποδίζει την αξιοποίηση των ερωτήσεων που περιλαμβάνονται στα σχολικά εγχειρίδια.

Για τη διεύρυνση της βοήθειας που φιλοδοξεί το Κ.Ε.Ε. να προσφέρει στους εκπαιδευτικούς στο κρίσιμο ζήτημα της αξιολόγησης των μαθητών, έχουν γίνει και οι εξής συμπληρωματικές ενέργειες: Τα παραδείγματα των ερωτήσεων που περιέχονται στα βιβλία αξιολόγησης έχουν καταχωρισθεί στη σελίδα του Internet του Υπουργείου Παιδείας, από την οποία μπορούν να τα αντλούν όσοι έχουν τη δυνατότητα πρόσβασης στο διαδίκτυο. Σύντομα το Κ.Ε.Ε. θα έχει τη δυνατότητα να προσφέρει τη βοήθεια αυτή με δικά του μέσα. Προωθείται, τέλος, η επανέκδοση όλων των ερωτήσεων που έχουν εκπονηθεί από το Κ.Ε.Ε. σε ηλεκτρονική μορφή (cd-rom).

Τελειώνοντας αισθάνομαι την ανάγκη να συγχαρώ τους επιστημονικούς συνεργάτες του Κ.Ε.Ε. για την εργασία τους και να ευχαριστήσω τις δεκάδες των εκπαιδευτικών για τα σχόλια που μας έστειλαν και τις υποδείξεις τους. Εύχομαι και τα νέα βιβλία να αποδειχθούν, όπως και τα προηγούμενα, πολύτιμο εργαλείο στην προσπάθεια βελτίωσης του τρόπου αξιολόγησης των μαθητών του Ενιαίου Λυκείου.

Ιούνιος 1999

Ο Πρόεδρος του Κ.Ε.Ε.

Καθηγητής Μιχάλης Κασσωτάκης

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Το Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας (Κ.Ε.Ε.), με την έκδοση του τεύχους αυτού, συνεχίζει την προσπάθεια στήριξης των Εκπαιδευτικών σε ζητήματα σχετικά με την αξιολόγηση των μαθητών στα Μαθηματικά της Γ΄ τάξης του Ενιαίου Λυκείου, σύμφωνα με το πνεύμα της Εκπαιδευτικής Μεταρρύθμισης.

Παράλληλα, τα θέματα του τεύχους αυτού (καθώς και τα αντίστοιχα των προηγουμένων εκδόσεων του Κ.Ε.Ε.) εισάγονται στην Τράπεζα Θεμάτων των προαγωγικών εξετάσεων. Για τον λόγο αυτό οι ερωτήσεις έχουν χωριστεί σε δύο κατηγορίες.

- Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι ερωτήσεις στις οποίες μετά τον αριθμό ακολουθεί ένας αστερίσκος (*) και είναι οι ερωτήσεις διαφόρων τύπων που αποτελούν απλή εφαρμογή της θεωρίας.
- Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι ερωτήσεις στις οποίες μετά τον αριθμό ακολουθούν δύο αστερίσκοι (**) και είναι προβλήματα ή ασκήσεις για τη λύση των οποίων απαιτείται ικανότητα συνδυασμού και σύνθεσης εννοιών αποδεικτικών ή υπολογιστικών διαδικασιών.

Οι ερωτήσεις που περιέχονται στο τεύχος αυτό καθώς και τα σχέδια κριτηρίων αξιολόγησης, ***έχουν ενδεικτικό και συμβουλευτικό χαρακτήρα*** για τον καθηγητή, ο οποίος έχει τη δυνατότητα να τα τροποποιήσει ή να διατυπώσει δικά του, αν το κρίνει αναγκαίο.

Αθήνα, Ιούνιος 1999

Σταύρος Παπασταυρίδης
Καθηγητής Πανεπιστημίου

Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Α
Γ Ε Ν Ι Κ Η Σ Π Α Ι Δ Ε Ι Α Σ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ανάλυση

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

1. * Η διαδικασία, με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α αντιστοιχίζεται σ' ένα ακριβώς στοιχείο ενός άλλου συνόλου Β είναι συνάρτηση. **Σ** **Λ**

2. * Η διαδικασία, με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε περισσότερα του ενός στοιχεία ενός άλλου συνόλου Β είναι συνάρτηση. **Σ** **Λ**

Στις παρακάτω ερωτήσεις όλες οι συναρτήσεις είναι πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο του R.

3. * Η σχέση f, με τύπο $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ ρητός} \\ 1, & x \text{ άρρητος} \end{cases}$, είναι συνάρτηση. **Σ** **Λ**

4. * Η σχέση $x^2 + y^2 = 1$ όπου $x, y \in R$, είναι συνάρτηση. **Σ** **Λ**

5. * Η σχέση g με τύπο $g(x) = x^2$ είναι συνάρτηση. **Σ** **Λ**

6. * Η σχέση f με τύπο $f(x) = 20x$ είναι συνάρτηση. **Σ** **Λ**

7. * Η σχέση h με τύπο $h(t) = \pm\sqrt{2t}$, $t \in R^+$, είναι συνάρτηση. **Σ** **Λ**

8. * Η σχέση f με τύπο $f(t) = \sqrt{2t}$, $t \in R^+$, είναι συνάρτηση. **Σ** **Λ**

9. * Αν για μια συνάρτηση f, που έχει πεδίο ορισμού το $A \subseteq R$, ισχύει $f(x) = f(y)$ για κάποια $x, y \in A$, τότε $x = y$. **Σ** **Λ**

0. * Αν οι συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σ' ένα σύνολο A, τότε και η συνάρτηση S = f + g ορίζεται στο ίδιο σύνολο. **Σ** **Λ**

1. * Αν οι συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σ' ένα σύνολο A, τότε και η συνάρτηση $h = \frac{f}{g}$ ορίζεται πάντοτε στο ίδιο ακριβώς σύνολο. **Σ** **Λ**

2. * Μια συνάρτηση γνησίως μονότονη είναι πάντοτε γνησίως αύξουσα. **Σ** **Λ**

3. * Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής. **Σ** **Λ**

4. * Οι συναρτήσεις f (x) = ημx και g (x) = συνx είναι συνεχείς. **Σ** **Λ**

5. * Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, x > 0, είναι συνεχής. **Σ** **Λ**

6. * Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, x < 0, είναι συνεχής. **Σ** **Λ**

7. * Η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης αναφέρεται μόνο σε σημεία του πεδίου ορισμού της. **Σ** **Λ**

8. * Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το A, λέγεται συνεχής, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του συνόλου A. **Σ** **Λ**

9. * Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 > x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$. **Σ** **Λ**

0. * Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$. **Σ** **Λ**

1. * Η παράγωγος $f'(x_0)$ μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι πραγματικός αριθμός. **Σ** **Λ**

2. * Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f, στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ αυτής, είναι η παράγωγος της f στο x_0. **Σ** **Λ**

3. * Η παράγωγος μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της $y = f(x)$, ως προς x, όταν $x = x_0$. **Σ** **Λ**

4. * Η παράγωγος $f'(x_0)$ μιας συνάρτησης f σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ισούται με το

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$. **Σ** **Λ**

5. * Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν και μόνο όταν υπάρχει το

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$. **Σ** **Λ**

6. * Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$. **Σ** **Λ**

7. * Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$. **Σ** **Λ**

8. * Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε το όριο $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $h \neq 0$, ισούται με τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης, που είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ αυτής. **Σ** **Λ**

9. * Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$ είναι $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. **Σ** **Λ**

0. * Η παράγωγος της συνάρτησης $g(\kappa) = \kappa^q$, όπου $q \in Q$, είναι $g'(\kappa) = q\kappa^{q-1}$. **Σ** **Λ**

1. * Οι παράγωγοι των συναρτήσεων $f(x) =$ ημx και $g(x) =$ συνx είναι αντίστοιχα $f'(x) =$ (ημx)΄ = συνx και $g'(x) =$ (συνx)΄ = - ημx. **Σ** **Λ**

2. * Οι παράγωγοι των συναρτήσεων $E(x) = e^x$ και $L(x) = \ln x$ είναι αντίστοιχα $E'(x) = (e^x)' = e^x$ και $L'(x) = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$. **Σ** **Λ**

3. * Αν η πρώτη παράγωγος μιας συνάρτησης g είναι η σταθερή συνάρτηση l, τότε η g είναι της μορφής $g(x) = cx$, $c \in R - \{1\}$. **Σ** **Λ**

4. * Αν η πρώτη παράγωγος μιας πολυωνυμικής συνάρτησης g είναι 4ου βαθμού, τότε η g είναι 5ου βαθμού. **Σ** **Λ**

5. * Αν η δεύτερη παράγωγος μιας πολυωνυμικής συνάρτησης g είναι σταθερή, τότε η g είναι το πολύ 2ου βαθμού. **Σ** **Λ**

6. * Η συνάρτηση f' με $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$, όπου x τα σημεία του πεδίου ορισμού της f στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη, λέγεται (πρώτη) παράγωγος της f. **Σ** **Λ**

7. * Η παράγωγος (αν υπάρχει) της συνάρτησης g' λέγεται πρώτη παράγωγος της g. **Σ** **Λ**

8. * Η παράγωγος (αν υπάρχει) της συνάρτησης g'' λέγεται τρίτη παράγωγος της g. **Σ** **Λ**

9. * Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = 5$ είναι $f'(x) = 5x$. **Σ** **Λ**

0. * Η παράγωγος της συνάρτησης $s(t) = t$ είναι $s'(t) = 1$. **Σ** **Λ**

1. ** Θέσεις πιθανών ακροτάτων συνάρτησης f ορισμένης και συνεχούς σ’ ένα διάστημα Δ είναι μόνο τα σημεία στα οποία η f παραγωγίζεται. **Σ** **Λ**

2. ** Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σ’ ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, και υπάρχει η παράγωγος f ΄ (x_0), τότε f ΄ (x_0) = 0. **Σ** **Λ**

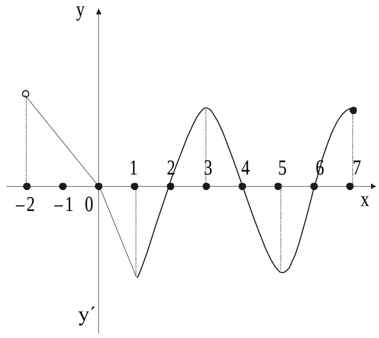
3. ** Αν για συνάρτηση f, ορισμένη και συνεχή σ’ ένα διάστημα Δ, υπάρχει η f ΄ (x_0) και είναι f ΄ (x_0) $\neq$ 0, με x_0 εσωτερικό σημείο του Δ, τότε το x_0 είναι θέση τοπικού ακρότατου της f. **Σ** **Λ**

4. ** Έστω συνάρτηση f, ορισμένη και συνεχής σ’ ένα διάστημα Δ. Τα εσωτερικά σημεία του Δ, στα οποία η f παραγωγίζεται και η παράγωγος ισούται με μηδέν, είναι θέσεις πιθανών τοπικών ακροτάτων της. **Σ** **Λ**

5. ** Έστω συνάρτηση f, ορισμένη και συνεχής σ’ ένα διάστημα Δ. Τα εσωτερικά σημεία x του Δ, στα οποία η f παραγωγίζεται και η παράγωγος f ΄ (x) ισούται με μηδέν, αποτελούν πάντοτε θέσεις τοπικών ακροτάτων της. **Σ** **Λ**

6. ** Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σ’ ένα εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της και είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (x_0, f (x_0)) είναι παράλληλη στον άξονα x΄x. **Σ** **Λ**

7. ****** Στο σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f. Να χαρακτηρίσετε με (Σ) ή (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

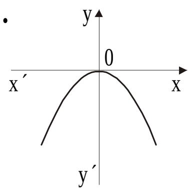


i.	Το πεδίο ορισμού της f είναι [- 2, 7].	**Σ**	**Λ**
ii.	Το πεδίο ορισμού της f είναι (- 2, 7].	**Σ**	**Λ**
iii.	Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο διάστημα (2, 4) τοπικό μέγιστο, για x = 3.	**Σ**	**Λ**
iv.	Ισχύει ότι $f\,'(3) \neq 0$.	**Σ**	**Λ**
v.	Ισχύει $f\,'(x) > 0$ για $x \in (2, 3)$ και $f\,'(x) > 0$ για $x \in (3, 4)$.	**Σ**	**Λ**
vi.	Στο διάστημα (2, 3) η συνάρτηση f είναι αύξουσα.	**Σ**	**Λ**
vii.	Ισχύει $f\,'(5) \neq 0$.	**Σ**	**Λ**
viii.	Οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία (3, f (3)) και (5, f (5)) είναι παράλληλες μεταξύ τους.	**Σ**	**Λ**
ix.	Στο διάστημα (0, 2) η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για x = 1.	**Σ**	**Λ**
x.	Ορίζεται το $f\,'(1)$.	**Σ**	**Λ**

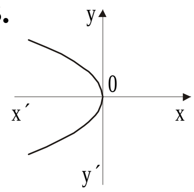
Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. ***** Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα είναι γραφική παράσταση συνάρτησης;

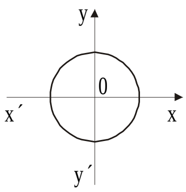
Α.



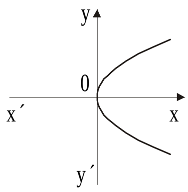
Β.



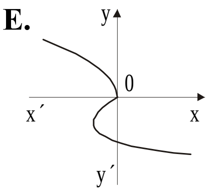
Γ.



Δ.

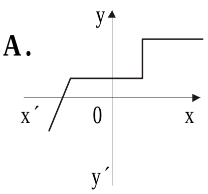


Ε.

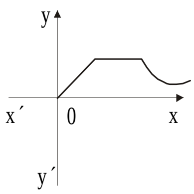


2. ***** Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα είναι γραφική παράσταση συνάρτησης;

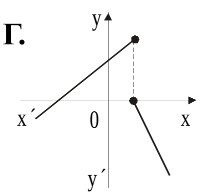
Α.



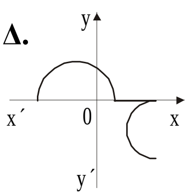
Β.



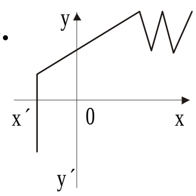
Γ.



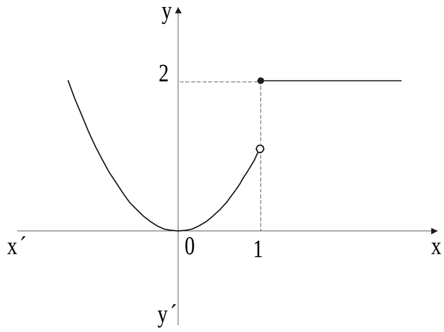
Δ.



Ε.



3. * Το διπλανό διάγραμμα είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης



Α. $f(x) = \begin{cases} x^2, & -\infty < x \le 1 \\ 2, & 1 < x \end{cases}$

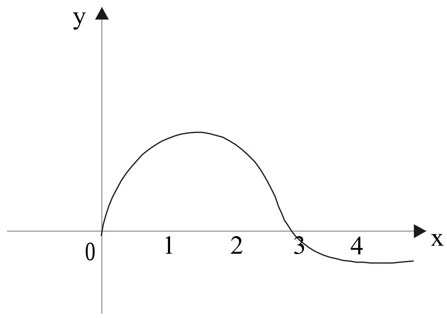
Β. $f(x) = \begin{cases} x^2, & -\infty < x < 1 \\ 2, & 1 \le x \end{cases}$

Γ. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & -\infty < x < 1 \\ 2, & 1 \le x \end{cases}$

Δ. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & -\infty < x \le 1 \\ 2, & 1 < x \end{cases}$

Ε. $f(x) = \begin{cases} e^x, & -\infty < x < 1 \\ 2, & 1 \le x \end{cases}$

4. * Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, με γραφική παράσταση που παρουσιάζεται στο διπλανό σχήμα, είναι

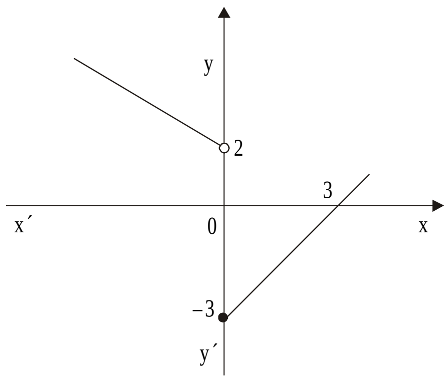


Α. [0, 3] **Β.** [0, ∞)

Γ. (0, 3) **Δ.** (0, + ∞)

Ε. [0, 4]

5. * Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, με γραφική παράσταση που παρουσιάζεται στο διπλανό σχήμα, είναι



Α. (-∞, 2) **Β.** (-∞, 3]

Γ. (-∞, + ∞) **Δ.** (-∞, 3]

Ε. (0, 3]

6. ***** Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ είναι

Α. $[-1, 1]$ **Β.** $[-1, \infty)$ **Γ.** $(-1, 1)$ **Δ.** $(-\infty, 1]$ **Ε.** $(-\infty, +\infty)$

7. ***** Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ είναι

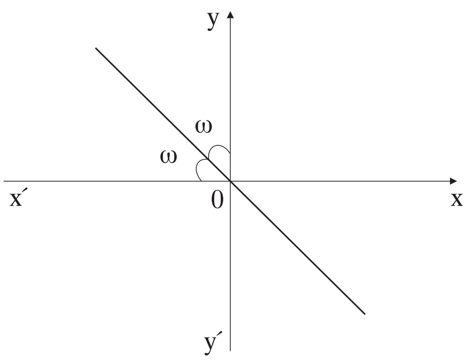
Α. $[-1, 1]$ **Β.** $[-1, \infty)$ **Γ.** $(-1, 1)$ **Δ.** $(-\infty, 1]$ **Ε.** $(-\infty, +\infty)$

8. ***** Το διάγραμμα που παρουσιάζεται στο διπλανό σχήμα είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης

Α. $f(x) = -x$ **Β.** $f(x) = x$

Γ. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **Δ.** $f(x) = -\dfrac{1}{x}$

Ε. $f(x) = -2x$

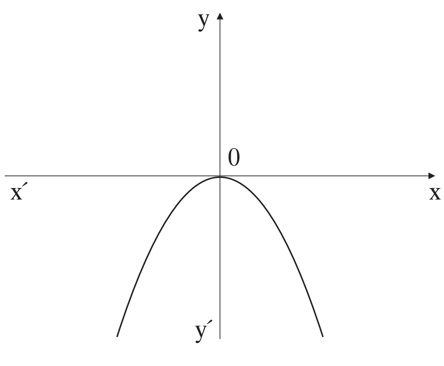


9. ***** Το διάγραμμα που παρουσιάζεται στο διπλανό σχήμα είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης

Α. $f(x) = x^2$ **Β.** $f(x) = -x^2$

Γ. $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ **Δ.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Ε. $f(x) = \dfrac{1}{x}$



10. ***** Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το $A \subseteq R$, τότε η συνάρτηση $h = \dfrac{f}{g}$ έχει πεδίο ορισμού

Α. το σύνολο R **Β.** τα $x \in A$: $f(x) \neq 0$ **Γ.** τα $x \in A$: $g(x) \neq 0$

Δ. τα $x \in A$: $f(x) = 0, g(x) \neq 0$ **Ε.** τα $x \in A$: $f(x) = g(x) = 0$

11. ***** Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν

Α. ισχύει $f\,(x_0) = 0$

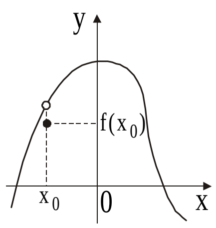
Β. ισχύει $f\,(x_0) \neq 0$

Γ. υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f\,(x)$

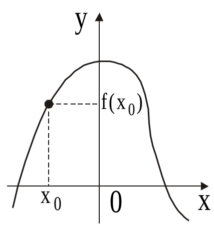
Δ. ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f\,(x) = f\,(x_0)$

Ε. ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f\,(x) \neq f\,(x_0)$

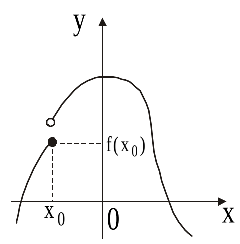
12. *****



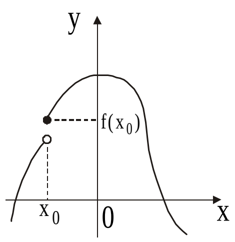
σχ.1



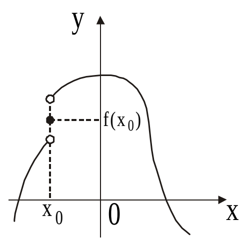
σχ.2



σχ.3



σχ.4



σχ.5

Στα παραπάνω σχήματα παρουσιάζονται πέντε γραφικές παραστάσεις ισάριθμων συναρτήσεων. Στη θέση x_0 συνεχής είναι η συνάρτηση

Α. του σχήματος 1 **Β.** του σχήματος 2 **Γ.** του σχήματος 3

Δ. του σχήματος 4 **Ε.** του σχήματος 5

13. ***** Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν

Α. υπάρχει το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(h)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$

Β. υπάρχει το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$

Γ. υπάρχει το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$ και είναι πραγματικός αριθμός

Δ. το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = +\infty$, $h \in R$, $h \neq 0$

Ε. το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -\infty$, $h \in R$, $h \neq 0$

14. ***** Η παράγωγος μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f, σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, εκφράζει

Α. την τιμή της συνάρτησης στη θέση x_0

Β. την τιμή του κλάσματος $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $h \neq 0$

Γ. το ρυθμό μεταβολής της f (x) ως προς x, όταν $x = x_0$

Δ. το ρυθμό μεταβολής της f (x) ως προς $x - x_0$

Ε. κανένα από τα παραπάνω

15. ***** Παράγωγο $f'(x_0)$ μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ονομάζουμε

Α. το πηλίκον $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$

Β. το $\lim\limits_{h \to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0))$, $h \in R$, $h \neq 0$

Γ. το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$

Δ. το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$

Ε. το πηλίκον $\dfrac{f(x_0 + h)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$

16. ***** Εάν S (t) είναι η θέση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t, που κινείται ευθύγραμμα, τότε το κλάσμα $\dfrac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$ εκφράζει

Α. τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή $t = t_0$

Β. τη μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα $[t_0, t_0 + h]$

Γ. τη μέση τιμή της επιτάχυνσης στο χρονικό διάστημα $[t_0, t_0 + h]$

Δ. τη στιγμιαία τιμή της επιτάχυνσης τη χρονική στιγμή $t = t_0$

Ε. τη διαφορά του διαστήματος που διήνυσε το κινητό από τη χρονική στιγμή t_0 μέχρι τη χρονική στιγμή $t_0 + h$

17. ***** Εάν S (t) είναι η θέση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t, που κινείται ευθύγραμμα, τότε η τιμή $A = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$ εκφράζει

Α. τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή $t = t_0$

Β. τη μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα $[t_0, t_0 + h]$

Γ. τη μέση τιμή της επιτάχυνσης στο χρονικό διάστημα $[t_0, t_0 + h]$

Δ. τη στιγμιαία τιμή της επιτάχυνσης τη χρονική στιγμή $t = t_0$

Ε. τη διαφορά του διαστήματος που διήνυσε το κινητό από τη χρονική στιγμή t_0 μέχρι τη χρονική στιγμή $t_0 + h$

18. ****** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα $\Delta \subseteq R$ και γνησίως φθίνουσα στο Δ , τότε η f ΄ είναι αρνητική

Α. μόνο σ' ένα σημείο του Δ

Β. σε όλα τα εσωτερικά σημεία του Δ

Γ. στο σημείο μηδέν

Δ. μόνο στα σημεία που μηδενίζουν την f

Ε. κανένα από τα παραπάνω

19. ***** Αν για συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ, ισχύουν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0$, με x_0 εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η συνάρτηση f

Α. παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = x_0$

Β. είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το διάστημα Δ

Γ. παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = x_0$

Δ. δεν παρουσιάζει ακρότατο για $x = x_0$

Ε. είναι σταθερή συνάρτηση

20. ***** Αν για συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ, ισχύουν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0$, με x_0 εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση f

Α. παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = x_0$

Β. είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ

Γ. παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = x_0$

Δ. δεν παρουσιάζει ακρότατο για $x = x_0$

Ε. είναι σταθερή συνάρτηση

21. ***** Η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σ' ένα ανοικτό διάστημα Δ, είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, αν ισχύει

Α. $f'(x) = 0$, για κάθε σημείο x του Δ

Β. $f(x) = 0$, για κάθε σημείο x του Δ

Γ. $f'(x) > 0$, για κάθε σημείο x του Δ

Δ. $f'(x) < 0$, για κάθε σημείο x του Δ

Ε. κανένα από τα παραπάνω

22. ***** Η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σ' ένα ανοικτό διάστημα Δ, είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, αν ισχύει

Α. $f'(x) = 0$, για κάθε σημείο x του Δ

Β. $f(x) = 0$, για κάθε σημείο x του Δ

Γ. $f'(x) > 0$, για κάθε σημείο x του Δ

Δ. $f'(x) < 0$, για κάθε σημείο x του Δ

Ε. κανένα από τα παραπάνω

23. ****** Έστω συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ για το οποίο υπάρχει $f''(x_0)$. Το εσωτερικό σημείο x_0, είναι σημείο ακροτάτου της f, αν ισχύει

Α. $f(x_0) = 0$ **Β.** $f'(x_0) \neq 0$ **Γ.** $f''(x_0) = 0$

Δ. $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) \neq 0$

Ε. $f'(x_0) > 0$ και $f(x_0) = 0$

24. ***** Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι (για $h \neq 0$)

Α. $\lim\limits_{h \to 2} \dfrac{h(2x+h)}{h}$ **Β.** $\lim\limits_{h \to 0} h(2x+h)$ **Γ.** $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

Δ. 2 **Ε.** x

25. ***** Αν ο μεγιστοβάθμιος όρος μιας πολυωνυμικής συνάρτησης είναι αx^{α}, όπου $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, τότε η παράγωγός της είναι

Α. σταθερή συνάρτηση

Β. τριγωνομετρική συνάρτηση

Γ. πολυωνυμική συνάρτηση με μεγιστοβάθμιο όρο τον $\alpha^2 x^{\alpha-1}$

Δ. πολυωνυμική συνάρτηση με μεγιστοβάθμιο όρο τον $\alpha x^{\alpha-1}$

Ε. δεν μπορούμε να το γνωρίζουμε χωρίς τον τύπο της συνάρτησης

26. ***** Η συνάρτηση $h(x) = \sqrt{x^2}$ είναι

Α. σύνθεση των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = x$

Β. σύνθεση των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = \sqrt{x^2}$

Γ. άλλη μορφή της συνάρτησης $f(x) = x$

Δ. άλλη μορφή της συνάρτησης $f(x) = |x|$

Ε. κανένα από τα παραπάνω

27. ***** Η συνάρτηση $f(x) = ημ3x$ είναι

Α. άλλη μορφή της συνάρτησης $f(x) = 3ημx$

Β. η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = συν3x$

Γ. σύνθεση των συναρτήσεων $f(x) = ημx$, $g(x) = 3x$

Δ. η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{συν3x}{3}$

Ε. κανένα από τα παραπάνω

28. ***** Αν $L(x) = f(g(x))$, όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε

Α. $L'(x) = f'(g(x))$

Β. $L'(x) = f'(x) \cdot g'(x)$

Γ. $L'(x) = f'(x) + g'(x)$

Δ. $L'(x) = f'(g(x)) \cdot f(x)$

Ε. $L'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

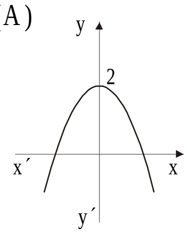
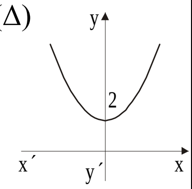
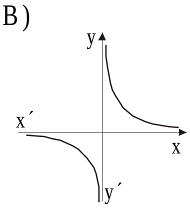
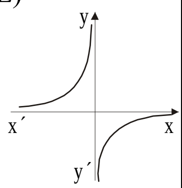
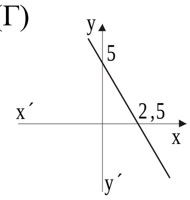
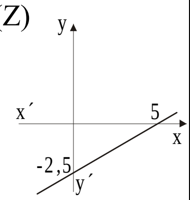
1. ***** Αντιστοιχίστε τον κάθε τύπο συνάρτησης της στήλης Α με το διάστημα ή ένωση διαστημάτων της στήλης Β, που είναι το πεδίο ορισμού της.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
	R
$f(x) = 2x$	$(0, 1)$
$f(x) = \frac{3}{x-1}$	$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$
$f(x) = \sqrt{x-1}$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$f(x) = \frac{2x}{x+1}$	$(1, \infty)$
	$[1, \infty)$

2. ***** Αντιστοιχίστε τον κάθε τύπο συνάρτησης της στήλης Α με το διάστημα ή ένωση διαστημάτων της στήλης Β, που είναι το πεδίο ορισμού της.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, +\infty)$
$f(x) = \sqrt{x+2}$	$[-2, +\infty)$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$(-2, 0) \cup (0, +\infty)$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$	$(-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$
	$(0, +\infty)$
	$(-2, 0) \cup (0, \infty)$
	$(-2, +\infty)$

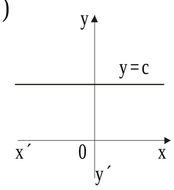
3. ***** Αντιστοιχίστε τον κάθε τύπο της συνάρτησης της στήλης Α με τη γραφική της παράσταση στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. $f(x) = -3x^2 + 2$	(Α)  (Δ) 
2. $\varphi(x) = \dfrac{6}{x}$	(Β)  (Ε) 
3. $h(x) = -2x + 5$	(Γ)  (Ζ) 

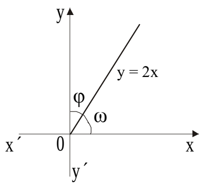
4. * Στη στήλη Α παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων. Αντιστοιχίστε καθεμιά από αυτές με τη γραφική παράσταση της πρώτης παραγώγου της που βρίσκεται στη στήλη Β.

<table>
<tr><th>Στήλη Α</th><th>Στήλη Β</th></tr>
<tr>
<td>

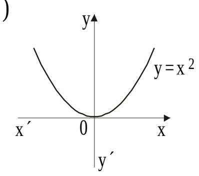
(1)



(2)

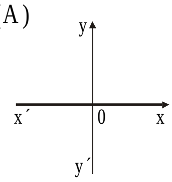


(3)

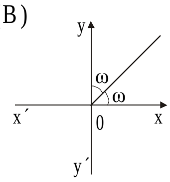


</td>
<td>

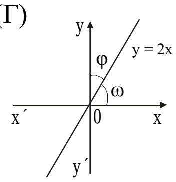
(Α)



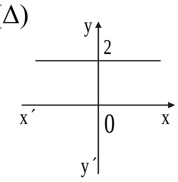
(Β)



(Γ)

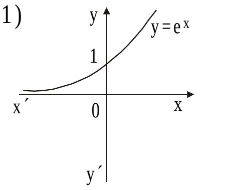
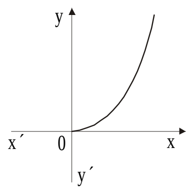
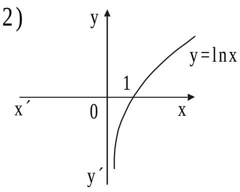
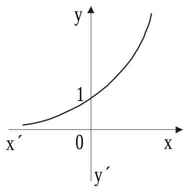
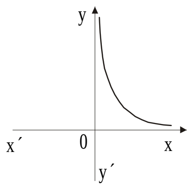


(Δ)



</td>
</tr>
</table>

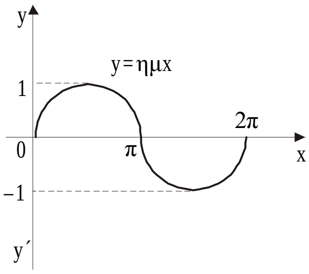
5. ***** Στη στήλη Α παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων. Αντιστοιχίστε καθεμιά από αυτές με τη γραφική παράσταση της πρώτης παραγώγου της που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
(1) 	(Α) 
(2) 	(Β) 
	(Γ) 

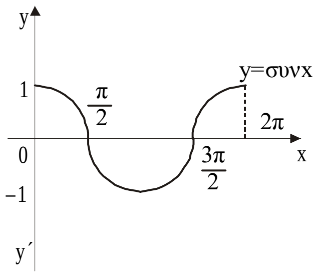
6. ***** Στη στήλη Α παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων. Αντιστοιχίστε καθεμιά από αυτές με τη γραφική παράσταση της πρώτης παραγώγου της που βρίσκεται στη στήλη Β.

<table>
<tr><th>Στήλη Α</th><th>Στήλη Β</th></tr>
<tr><td>

(1)

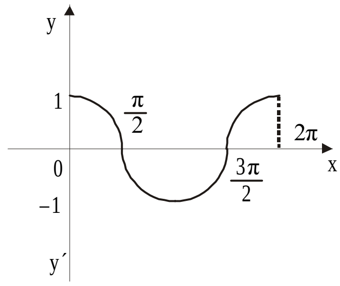


(2)

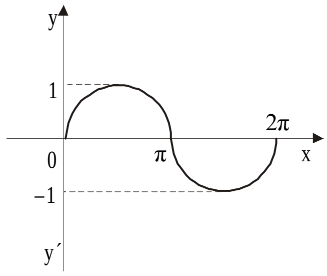


</td><td>

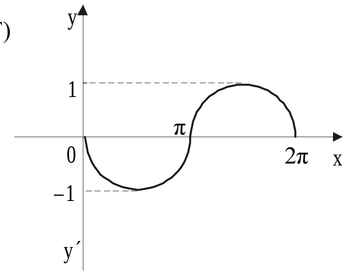
(Α)



(Β)



(Γ)



</td></tr>
</table>

7. ***** Αντιστοιχίστε κάθε τύπο συνάρτησης που είναι στη στήλη Α με τον τύπο της συνάρτησης της πρώτης παραγώγου της που είναι στη στήλη Β.

Στήλη Α ***f (x)***	**Στήλη Β** ***f ΄(x)***
$3x^2$	$6x^2 - 1$
	$6x$
$3x$	
	3
$2\,(x^2 - 1)$	$4x$
	$3x - 1$
$(3x)^2$	
	$18x$
$(3x - 1)^2$	$6\,(3x - 1)$
	$6x^2$
$3x^2 - x$	
	$6x - 1$

8. ***** Αντιστοιχίστε κάθε τύπο συνάρτησης που είναι στη στήλη Α με τον τύπο της συνάρτησης της πρώτης παραγώγου της που είναι στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
f (x)	***f ΄(x)***
α	0
	α
αx	
	β
$\beta x + \alpha$	$\alpha x + \beta$
	$2\alpha x$
$\alpha x^2 + \beta$	
	$2\beta x + \gamma$
βx^2	$2\beta x$
	$2\alpha x - \beta$
$\alpha x^2 - \beta x$	
	$2\alpha x + \beta$
$\beta x^2 + \alpha x - \gamma$	$2\beta x + \alpha$
	$2\alpha + \beta x$

9. ***** Στη στήλη Α του παρακάτω πίνακα υπάρχουν τα πρώτα μέλη ισοτήτων, οι οποίες εκφράζουν τους κανόνες παραγώγισης. Στη στήλη Β υπάρχουν τα δεύτερα μέλη των ισοτήτων αυτών. Αντιστοιχίστε τα στοιχεία της στήλης Α με εκείνα της στήλης Β ώστε να προκύψουν οι γνωστοί κανόνες παραγώγισης.

Στήλη Α	Στήλη Β
	$f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$
$(c\,f(x))' =$	$\dfrac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$
$(f(x) + g(x))' =$	$f'(x) + g'(x)$
$(f(x) \cdot g(x))' =$	$c\,f'(x)$
$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' =$	$f'(x) \cdot g'(x)$
$[f(g(x))]' =$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$
	$\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Ερωτήσεις συμπλήρωσης - σύντομης απάντησης

1. ***** Να συμπληρώσετε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt{x^2}$ $\quad$ A = ...

β) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\quad$ A = ...

γ) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ $\quad$ A = ...

δ) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ $\quad$ A = ...

ε) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad$ A = ...

2. ***** Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -2$, να βρείτε και να συμπληρώσετε τα $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, όταν:

α) $g(x) = 3f(x) - 1$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) =$ ....

β) $g(x) = 2 - 4f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) =$ ....

γ) $g(x) = (2f(x))^2$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) =$ ....

δ) $g(x) = \dfrac{2f(x) - 1}{5 - 3f(x)}$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) =$ ....

ε) $g(x) = \sqrt[3]{-8f(x) + 11}$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) =$ ....

3. ***** Να συμπληρώσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 1} (2x^2 + 6x - 1) =$ ....

β) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x+1}{3x} =$ ....

γ) $\lim\limits_{x \to 3} (5\sqrt{6x-1}) =$ ....

δ) $\lim\limits_{x \to -1} [(3x+2)(5x-3)]^2 =$ ....

ε) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}}$ [ημx + 3συνx] = ...

στ) $\lim\limits_{x \to 0}$ [2ημx - 4συνx] = ...

4. ***** Να συμπληρώσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ = ...

β) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4 - 16}{x^3 + 8}$ = ...

γ) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 + 5x + 3}{2(x + 1)}$ = ...

δ) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 4x - 5}$ = ...

5. ***** Να συμπληρώσετε τις τιμές των παραγώγων των παρακάτω συναρτήσεων στα αντίστοιχα σημεία:

α) f (x) = x^2 f ΄ (0) =...........................

β) f (x) = x^2 + 1 f ΄ (1) =...........................

γ) f (x) = $2x^2$ - 3 f ΄ (- 1) = ...

δ) f (x) = ημx f ΄ ($\frac{\pi}{2}$) = ...

ε) f (x) = $\dfrac{1}{x^2 - 2}$ f ΄ (0) =...........................

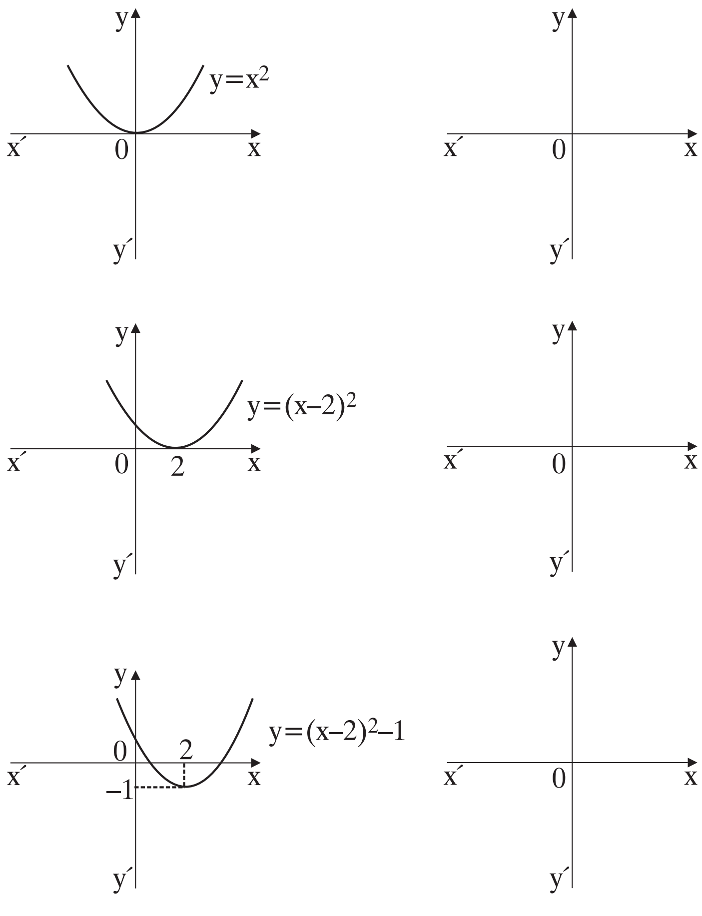
6. ***** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων στα αντίστοιχα σημεία:

α) f (x) = x^2 - 1 A (0, f (0)) y = ...

β) f (x) = $2x^2$ - 1 A (1, f (1)) y = ...

γ) f (x) = $3x^2$ - 2 A (- 1, f (- 1)) y = ...

7. * Για κάθε γραφική παράσταση της y = f (x) χαράξτε την αντίστοιχη γραφική παράσταση της πρώτης παραγώγου της.



8. * Στη στήλη Α δίνονται τύποι συναρτήσεων. Συμπληρώστε στη στήλη Β τους αντίστοιχους τύπους των πρώτων παραγώγων τους.

Στήλη Α ***f (x)***	**Στήλη Β** ***f ΄(x)***
$x - 1$	
$(x - 1)^2$	
$(x^2 - 1)^2$	
$(x - 1)^{\frac{2}{3}}$	
$\dfrac{1}{(x-1)^2}$	
$\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$	
$\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)^3}}$	

9. ***** Στη στήλη Α δίνονται τύποι συναρτήσεων. Συμπληρώστε στη στήλη Β τους αντίστοιχους τύπους των πρώτων παραγώγων τους.

Στήλη Α ***f (x)***	**Στήλη Β** ***f ΄(x)***
$\sqrt{ημx}$	
$\sqrt{ημx \cdot συνx}$	
$x - ημx \cdot συνx$	
$\dfrac{x}{\sqrt{ημx}}$	
$\dfrac{ημx}{\sqrt{x}}$	

10. ***** Στη στήλη Α δίνονται τύποι συναρτήσεων. Συμπληρώστε στη στήλη Β τους αντίστοιχους τύπους των πρώτων παραγώγων τους.

Στήλη Α ***f (x)***	**Στήλη Β** ***f ΄(x)***
$x - \ln x$	
$x \cdot e^{\frac{1}{x}}$	
e^{-2x^3+1}	
$\ln\sqrt{x^2 - 2}$	

11. * Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τύποι τεσσάρων συναρτήσεων. Να συμπληρώσετε τη στήλη Β με το αντίστοιχο πεδίο ορισμού τους, τη στήλη Γ με την πρώτη παράγωγό τους και τη στήλη Δ και τη δεύτερη παράγωγό τους.

Στήλη Α	**Στήλη Β** ***πεδίο ορισμού***	**Στήλη Γ** ***πρώτη παράγωγος***	**Στήλη Δ** ***δεύτερη παράγωγος***
$h(x) = \frac{1}{x^2}$			
$\varphi(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$			
$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$			
$g(x) = \frac{x - 1}{x^2}$			

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ****** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Να βρείτε:
   α) το πεδίο ορισμού της, A
   β) για ποιες τιμές του $x \in A$ έχουμε $f(x) = 0$
   γ) το πεδίο ορισμού B της συνάρτησης $g(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 3x + 2}$

2. ****** Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = x^2 + 2$.
   α) Για ποιες τιμές του $x \in R$ έχουμε $g(x) = 0$;
   β) Να βρείτε: i) το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$
   ii) το πεδίο ορισμού B της συνάρτησης $h(x) = \sqrt{x^2 + 2}$

3. ****** Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = x^2 - 1$.
   α) Για ποιες τιμές του $x \in R$ έχουμε $g(x) = 0$;
   β) Για ποιες τιμές του $x \in R$ η συνάρτηση g (x) είναι θετική;
   γ) Να βρείτε: i) το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$
   ii) το πεδίο ορισμού B της συνάρτησης $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
   iii) το πεδίο ορισμού Γ της συνάρτησης $\varphi(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

4. ****** Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = x - 4$.
   α) Για ποιες τιμές του $x \in R$ έχουμε $g(x) = 0$;
   β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 4}$

5. ** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = x^2 - 4x - 2$ και $g(x) = 3x - 2$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) τον τύπο της συνάρτησης $f(x) + g(x)$ και να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της, Α

β) τον τύπο της συνάρτησης $3f(x) - 2g(x)$ και να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της, Β

γ) τον τύπο της συνάρτησης $f(x) \cdot g(x)$ και να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της, Γ

δ) τον τύπο της συνάρτησης $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ και να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της, Δ

6. ** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $g(x) = 5x^2 - 1$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ και το $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

β) το $\lim\limits_{x \to 0} [f(x) + 2g(x)]$

7. ** Δίνεται η συνάρτηση φ με $\varphi(x) = \dfrac{3x - 2}{2x + 3}$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της, Α

β) το $\lim\limits_{x \to 1} \varphi(x)$

γ) το $\lim\limits_{x \to 1} [\varphi(x)]^3$

8. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{6x^2 - 2}$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της, Α

β) το $\lim\limits_{x \to -\frac{\sqrt{3}}{3}} f(x)$

9. ****** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = 6x^3 + 5x - 1$, $g(x) = 2x - 1$, $x \in R$.

Να βρείτε:

α) τα $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$

β) το $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

10. ****** Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -2$, να βρείτε το $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$, όταν:

α) $\varphi(x) = 3f(x)$

β) $\varphi(x) = 3f(x) - 2$

γ) $\varphi(x) = \dfrac{5f(x)}{f^3(x) - 2}$

δ) $\varphi(x) = \sqrt{2f^2(x) - 1}$

11. ****** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της, A

β) το $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

12. ****** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{9x^2 - 1}{3x + 1}$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της, A

β) το $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} f(x)$

13. ****** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της, A

β) το $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

14. ** Για ποιες τιμές του $\alpha \in R$ η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2 + \alpha}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο R των πραγματικών αριθμών;

15. ** Για ποιες τιμές του $\alpha \in R$ η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 - 4x + (\alpha + 2)}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο R των πραγματικών αριθμών;

16. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 4}$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της, Α

β) το $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

γ) Να εξετάσετε, αν η f (x) είναι συνεχής στη θέση $x_0 = 1$.

17. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x \neq 3 \\ \alpha, & x = 3 \end{cases}$.

α) Για $x \neq 3$ είναι συνεχής η συνάρτηση;

β) Για ποια τιμή του $\alpha \in R$ η συνάρτηση f (x) είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 3$;

18. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ \alpha, & x = 2 \end{cases}$. Να βρείτε:

α) το $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

β) την τιμή του $\alpha \in R$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$.

19. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x+x^2}{x-1}, & x \neq 1 \\ \alpha, & x = 1 \end{cases}$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της, A

β) το $\lim\limits_{x \to +1} \dfrac{-x+x^2}{x-1}$

γ) την τιμή του $\alpha \in R$, ώστε η f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$

20. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}, & x \neq 2 \\ \alpha, & x = 2 \end{cases}$. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in R$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$.

21. ** Η διαγώνιος ενός τετραγώνου είναι δ. Να εκφράσετε, ως συνάρτηση της διαγωνίου δ:

α) την περίμετρό του β) το εμβαδό του

22. ** Οι κάθετες πλευρές ΑΒ, ΑΓ ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (Α = 90°) μεταβάλλονται έτσι ώστε το εμβαδό του να παραμένει σταθερό και ίσο με 12 m^2. Να εκφράσετε το μήκος x της πλευράς ΑΒ, ως συνάρτηση του μήκους y της πλευράς ΑΓ.

23. ** Ένας κυκλικός τομέας ακτίνας r έχει εμβαδό 30 cm^2. Να εκφράσετε την περίμετρό του, ως συνάρτηση της ακτίνας r.

24. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{x^2}{3}$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) την $f'(3)$

β) το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης f, στο σημείο με x = 3

γ) την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης

25. ****** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^2$, $x \in R$, $\alpha \in R$.

α) Να βρείτε την $f'(2)$.

β) Να προσδιορίσετε το α, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο $(2, f(2))$ να είναι 4.

26. ****** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + 1$, $x \in R$.

α) Να βρείτε την $f'(0)$.

β) Να προσδιορίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο με $x = 0$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο $(0, f(0))$.

27. ****** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - 5x + 6$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) την $f'(x)$

β) την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, που είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

28. ****** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^2 - \alpha x$, $x \in R$, $\alpha \in R$.

α) Να βρείτε την $f'(2)$.

β) Να προσδιορίσετε το α, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $(2, f(2))$ να σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $45°$.

29. ****** Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x΄x η εφαπτομένη της καμπύλης, που είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -2x^2 + x - 3$ στο σημείο $\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$.

30. ****** Η θέση ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα, δίνεται συναρτήσει του χρόνου από τον τύπο $S(t) = 2t + t^2$, όπου το t μετριέται σε sec και το S σε μέτρα. Να βρείτε:

α) τη μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα [0, 4] sec

β) τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού, όταν $t = 1$ sec (1 sec μετά την εκκίνησή του).

31. ****** Η θέση ενός κινητού, που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση, δίνεται συναρτήσει του χρόνου t (σε sec) από τον τύπο $S(t) = 3t^2 - t$. Να βρείτε:

α) τη μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα [2, 4] sec

β) τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού, όταν $t = 3$ sec (3 sec μετά την εκκίνησή του).

32. ****** Η ταχύτητα, ενός κινητού, που κινείται ευθύγραμμα, συναρτήσει του χρόνου t (σε sec), δίνεται από τον τύπο $υ(t) = 3t^2 - 5$.

α) Να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας (επιτάχυνση) του κινητού ως προς t, όταν $t = t_0$.

β) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας (επιτάχυνση) του κινητού ως προς t, όταν $t = 10$ sec (10 sec μετά την εκκίνησή του).

33. ****** Ένας πληθυσμός μικροβίων P μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t (σε ώρες) σύμφωνα με τον τύπο $P(t) = 10^3 - 5 \cdot 10^2 (1 + t)^{-1}$.

α) Να βρείτε τον αρχικό αριθμό μικροβίων ($t = 0$).

β) Να βρείτε τον αριθμό των μικροβίων όταν $t = 9$ ώρες.

γ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού των μικροβίων ως προς το χρόνο, όταν $t = 9$ ώρες.

34. ****** Ο πληθυσμός Α μιας περιοχής δίνεται, συναρτήσει του χρόνου t (σε έτη) από τον τύπο $A(t) = 10 \cdot e^{0 \cdot 04t}$ (σε χιλιάδες). Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού αυτής της περιοχής, ως προς το χρόνο, ύστερα από 25 έτη.

35. ** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \dfrac{x^3}{e^x}$, $g(x) = e^x \cdot x^2$. Να βρείτε:

α) Την πρώτη παράγωγο i) της f και ii) της g.

β) Τις παραγώγους i) $f'(1)$ και ii) $g'(1)$.

36. ** Να βρείτε πολυώνυμο P (x) τρίτου βαθμού, τέτοιο ώστε $P(0) = -1$, $P'(1) = 5$, $P'(0) = 2$, $P''(1) = 2$.

37. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x - x^2$.

α) Να βρείτε: i) την $f'(x)$ ii) την $f''(x)$

β) Να αποδειχθεί ότι: $(1 - x) f''(x) + f'(x) = 0$, για κάθε $x \in R$.

38. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^{2x}$.

α) Να βρείτε: i) την $f'(x)$ ii) την $f''(x)$

β) Να δείξετε ότι: $2f'(x) - f''(x) = 0$, για κάθε $x \in R$.

39. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^{\alpha x}$, $\alpha \in R$. Να βρείτε:

α) Την $f'(x)$

β) Την $f''(x)$

γ) Τις τιμές του α, ώστε να ισχύει η σχέση $f''(x) + 2f'(x) = 3f(x)$, για κάθε $x \in R$.

40. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (3x - 2) \cdot \sqrt{(x+1)^3}$. Να βρείτε:

α) Την $f'(x)$

β) Το $f'(0)$.

41. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$. Να βρείτε:

α) Το πεδίο ορισμού της, A

β) Την $f'(x)$.

42. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$. Να βρείτε:

α) Το πεδίο ορισμού της, Α

β) Την $f'(x)$.

43. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{1 - ημx}{1 - συνx}$. Να βρείτε:

α) Το πεδίο ορισμού της, Α

β) Την $f'(x)$.

44. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + 1$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) Την $f'(x)$

β) Τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης, στα οποία οι εφαπτόμενες σ' αυτήν, είναι παράλληλες στον άξονα x΄x.

45. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x + 1)^2$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) Την $f'(x)$

β) Το συντελεστή διεύθυνσης λ της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο με τετμημένη 4.

46. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = -x^2 + 3x - 1$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) Την $f'(x)$

β) Την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f, που σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 135°.

47. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = α(x + 1)^2$, $x \in R$, $α \in R$.

α) Να βρείτε την $f'(x)$.

β) Να προσδιορίσετε τον α, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο $(1, f(1))$ να είναι 4.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης ευθείας.

48. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - 4x + 2$, $x \in R$.

α) Να βρείτε την $f'(x)$

β) Να προσδιορίσετε το σημείο Α της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο οποίο η εφαπτομένη της σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x΄x.

49. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^2 - αx + β$, α, β $\in$ R και η ευθεία $y = 3x - 1$, $x \in R$. Να υπολογίσετε τα α, β ώστε η ευθεία $y = 3x - 1$ να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 2.

50. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) Την $f'(x)$.

β) Τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f, που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = x + 3$.

51. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{2}{x^2}$, $x \in R$, $x \neq 0$.

α) Να δείξετε ότι $f'(α) = -\frac{4}{α^3}$ για κάθε $α \in R$, $α \neq 0$.

β) Να προσδιορίσετε την εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στο σημείο $(α, \frac{2}{α^2})$ της γραφικής παράστασης της f.

52. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$, $x \in R$.

α) Να βρείτε την $f'(x)$.

β) Να εξετάσετε τη μονοτονία της.

γ) Να προσδιορίσετε τα ακρότατά της (αν υπάρχουν).

53. ** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους: $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$ και $g(x) = 4x - x^2 + 2$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) i) την $f'(x)$ και ii) την $g'(x)$.

β) Τις θέσεις για τις οποίες οι συναρτήσεις παρουσιάζουν ακρότατο

γ) Τις τιμές των ακροτάτων αυτών.

54. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x - 2$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) Την $f'(x)$

β) Για ποιες τιμές του x έχουμε $f'(x) = 0$

γ) Ποιες από τις παραπάνω τιμές των x είναι θέσεις ακροτάτων για την f

δ) Τις τιμές των ακροτάτων.

55. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = κx^2 + λx + 3$, $x \in R$, $κ, λ \in R$.

α) Να βρείτε τα κ, λ ώστε η f να έχει στη θέση $x = 1$ τοπικό ακρότατο ίσο με -2.

β) Τι είδους ακρότατο παρουσιάζει η συνάρτηση στη θέση $x = 1$;

56. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - 3x$, $x \in R$. Να βρεθούν τα διαστήματα που η f είναι:

α) Αύξουσα

β) Φθίνουσα

57. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

α) Να βρεθούν οι $f'(x)$, $f''(x)$.

β) Να μελετηθεί η συνάρτηση f, ως προς τη μονοτονία της.

γ) Να προσδιοριστούν τα ακρότατά της (αν υπάρχουν).

58. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (2x - x^2)\,e^x$, $x \in R$.

α) Να βρεθούν: i) το πεδίο ορισμού της, ii) η $f'(x)$ και η $f''(x)$.

β) Να μελετηθεί η f ως προς: i) τη μονοτονία της,

ii) τα ακρότατά της και να εντοπιστούν αυτά, αν υπάρχουν.

59. ****** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = κx^3 + λx^2 + 3x - 1$, $x \in R$, $κ, λ \in R$.

α) Να βρείτε την $f'(x)$.

β) Να προσδιορίσετε τα κ, λ, ώστε η f να έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία με τετμημένες $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

γ) Να βρείτε τις τιμές των ακροτάτων.

60. ****** Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με την ίδια περίμετρο, ποιο είναι εκείνο που έχει το μέγιστο εμβαδό;

61. ****** Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με εμβαδό 1600 m^2, να βρείτε τις διαστάσεις εκείνου, που έχει την μικρότερη περίμετρο.

62. ****** Να αποδείξετε ότι από όλα τα ισοσκελή τρίγωνα, που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο ακτίνας R, το ισόπλευρο έχει μεγαλύτερο εμβαδό.

63. ****** Να βρεθούν δύο αριθμοί x, y με σταθερό άθροισμα 12, που να έχουν το μεγαλύτερο γινόμενο.

64. ****** Η τιμή πώλησης ενός μηχανικού εξαρτήματος είναι 1.000 δρχ. Το κόστος του συναρτήσει του χρόνου κατασκευής (σε ώρες) προσεγγίζεται από τον τύπο της συνάρτησης:

$$K(t) = t^2 + 250t^{-1}$$

α) Πότε πραγματοποιήθηκε το μέγιστο κέρδος;

β) Πόσο είναι αυτό;

65. ****** Η ενέργεια που καταναλώνει ένας μικροοργανισμός που κινείται μέσα στο αίμα ενός ασθενούς με ταχύτητα υ, προσεγγίζεται από τον τύπο της συνάρτησης:

$$E(υ) = \frac{1}{υ}\,[2(υ - 35)^2 + 750]$$

α) Με ποια ταχύτητα πρέπει να κινηθεί για να καταναλώσει τη μικρότερη ενέργεια;

β) Πόση είναι η ελάχιστη ενέργεια;

66. ****** Η ενέργεια W (t), που αποδίδεται από ένα πηνίο, μεταβάλλεται με το χρόνο t σύμφωνα με τον τύπο της συνάρτησης:

$$W(t) = 6t^2 - t^4$$

και μετριέται σε Joules.

α) Να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής της ενέργειας ως προς το χρόνο (την ισχύ του πηνίου) τη χρονική στιγμή $t = t_0$.

β) Σε ποια χρονική στιγμή το πηνίο έχει μέγιστη ισχύ;

γ) Πόσα Joules είναι η μέγιστη ισχύς;

67. ****** Η τιμή εισιτηρίου των αστικών λεωφορείων είναι σταθερή τα τελευταία 8 χρόνια στις 100 δρχ. Το κόστος μεταφοράς ανά επιβάτη στη διάρκεια των 8 χρόνων προσεγγίζεται από τον τύπο της συνάρτησης:

$$K(t) = t^2 + \frac{250}{t}$$

όπου $t \in (0, 8]$ ο χρόνος.

α) Να προσδιοριστεί η χρονική στιγμή κατά την οποία πραγματοποιήθηκε το μέγιστο κέρδος.

β) Πόσο είναι αυτό το κέρδος;

68. ****** Η θετική αντίδραση ενός οργανισμού σ’ ένα φάρμακο περιγράφεται (δίνεται) από τον τύπο της συνάρτησης $f(x) = x^2 (α - x)$, $α > 0$ σταθερά και x η ημερήσια δόση του φαρμάκου σε mg. Ποια είναι η ενδεδειγμένη ποσότητα δόσης του φαρμάκου ώστε να έχουμε τη μεγαλύτερη θετική αντίδραση του οργανισμού;

69. ****** Ένα εργοστάσιο ζαχαροπλαστικής παρασκευάζει μεταξύ άλλων ταψάκια γαλακτομπούρεκου. Υπολογίστηκε ότι η παρασκευή x ταψιών την εβδομάδα κοστίζει περίπου ($\frac{x^2}{4} + 25x + 25$) δρχ. Αν η τιμή πώλησης του ταψιού είναι ($1000 - \frac{x}{2}$) δρχ., πόσα ταψάκια γαλακτομπούρεκο πρέπει να παράγει την εβδομάδα, ώστε να έχει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος;

ΣΧΕΔΙΑ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ

1ο Σχέδιο

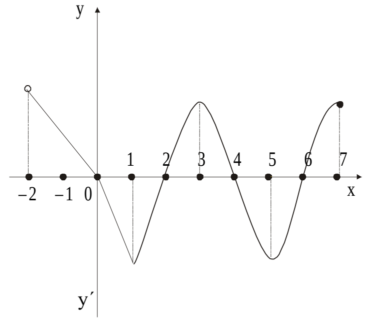
ΘΕΜΑ 1ο

Α. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ.

α) Πότε η f είναι γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα στο Δ;

β) Εάν $x_0 \in (\alpha, \beta) \subseteq \Delta$, πότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) μέγιστο για $x = x_0$ και πότε ελάχιστο για $x = x_0$;

Β. Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f. Να χαρακτηρίσετε με (Σ) ή (Λ) τις προτάσεις που ακολουθούν:



– Το πεδίο ορισμού της f είναι [- 2, 7]	**Σ**	**Λ**
– Το πεδίο ορισμού της f είναι (- 2, 7]	**Σ**	**Λ**
– Στο διάστημα (2, 4), η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για x = 3.	**Σ**	**Λ**
– Ισχύει ότι $f'(3) \neq 0$.	**Σ**	**Λ**
– Ισχύει ότι $f'(x) > 0$ για $x \in (2, 3)$ και $f'(x) > 0$ για $x \in (3, 4)$.	**Σ**	**Λ**
– Στο διάστημα (2, 3) η f είναι γνησίως αύξουσα και στο διάστημα (3, 4) είναι γνησίως φθίνουσα	**Σ**	**Λ**
– Ισχύει ότι $f'(5) \neq 0$.	**Σ**	**Λ**
– Οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία (3, f (3)) και (5, f (5)) είναι παράλληλες μεταξύ τους.	**Σ**	**Λ**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = α(x + 1)^2$, $x \in R$, $α \in R$.

α) Να βρείτε την $f'(x)$.

β) Να προσδιορίσετε το α, ώστε ο συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης f, στο σημείο $(1, f(1))$ να είναι 4.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης ευθείας.

2ο Σχέδιο

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Στη στήλη Α του παρακάτω πίνακα υπάρχουν οι παράγωγοι βασικών συναρτήσεων. Στη στήλη Β συμπληρώστε αντίστοιχα την ένδειξη Σ (σωστό) ή Λ (λάθος). Όπου συμπληρώσατε Λ, βάλτε δίπλα ακριβώς τη σωστή ισότητα.

στήλη Α	στήλη Β
$(c)' = 1$	
$(x)' = 1$	
$(x^{\nu})' = \nu x^{\nu}$, $\nu \in Q$	
$(ημx)' = συνx$	
$(συνx)' = ημx$	
$(e^{x})' = e^{x}$	
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	
$(x^{\frac{1}{2}})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	

Β. Να αποδείξετε ότι $(x')= 1$ (ή όποια από τις ισότητες της στήλης Α θέλετε).

ΘΕΜΑ 2ο

Η τιμή πώλησης ενός μηχανικού εξαρτήματος είναι 1.000 δρχ. Το κόστος του συναρτήσει του χρόνου κατασκευής (σε ώρες) προσεγγίζεται από τον τύπο της συνάρτησης:

$$K(t) = t^2 + 250t^{-1}$$

α) Πότε πραγματοποιήθηκε το μέγιστο κέρδος;

β) Πόσο είναι αυτό;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου "Σωστό-Λάθος"

1.	**Σ**	**20.**	**Σ**	**39.**	**Λ**
2.	**Λ**	**21.**	**Σ**	**40.**	**Σ**
3.	**Σ**	**22.**	**Σ**	**41.**	**Λ**
4.	**Λ**	**23.**	**Σ**	**42.**	**Σ**
5.	**Σ**	**24.**	**Σ**	**43.**	**Λ**
6.	**Σ**	**25.**	**Λ**	**44.**	**Σ**
7.	**Λ**	**26.**	**Λ**	**45.**	**Λ**
8.	**Σ**	**27.**	**Σ**	**46.**	**Σ**
9.	**Λ**	**28.**	**Σ**	**47. i)**	**Λ**
10.	**Σ**	**29.**	**Σ**	**ii)**	**Σ**
11.	**Λ**	**30.**	**Σ**	**iii)**	**Σ**
12.	**Λ**	**31.**	**Σ**	**iv)**	**Λ**
13.	**Σ**	**32.**	**Σ**	**v)**	**Λ**
14.	**Σ**	**33.**	**Λ**	**vi)**	**Σ**
15.	**Σ**	**34.**	**Σ**	**vii)**	**Λ**
16.	**Σ**	**35.**	**Σ**	**viii)**	**Σ**
17.	**Σ**	**36.**	**Σ**	**ix)**	**Σ**
18.	**Σ**	**37.**	**Λ**	**x)**	**Λ**
19.	**Λ**	**38.**	**Σ**		

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	Α
2.	Β
3.	Β
4.	Β
5.	Γ
6.	Α
7.	Γ
8.	Α
9.	Β
10.	Γ

11.	Δ
12.	Β
13.	Γ
14.	Γ
15.	Γ
16.	Β
17.	Α
18.	Ε
19.	Γ

20.	Α
21.	Γ
22.	Δ
23.	Δ
24.	Γ
25.	Γ
26.	Δ
27.	Γ
28.	Ε

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

Στήλη Α	Στήλη Β
$f(x) = 2x$	R
$f(x) = \dfrac{3}{x-1}$	$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$f(x) = \sqrt{x-1}$	$[1, \infty)$
$f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$	$(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

2.

Στήλη Α	Στήλη Β
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, +\infty)$
$f(x) = \sqrt{x+2}$	$[-2, +\infty)$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$(0, +\infty)$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$	$(-2, +\infty)$

3.	1	Α
	2	Β
	3	Γ

4.	1	Α
	2	Δ
	3	Γ

5.	1	Β
	2	Γ

6.	1	Α
	2	Γ

7.

Στήλη Α ***f (x)***	**Στήλη Β** ***f ΄ (x)***
$3x^2$	$6x$
$3x$	3
$2(x^2 - 1)$	$4x$
$(3x)^2$	$18x$
$(3x - 1)^2$	$6(3x - 1)$
$3x^2 - x$	$6x - 1$

8.

Στήλη Α ***f (x)***	**Στήλη Β** ***f ΄ (x)***
α	0
αx	α
$\beta x + \alpha$	β
$\alpha x^2 + \beta$	$2\alpha x$
βx^2	$2\beta x$
$\alpha x^2 - \beta x$	$2\alpha x - \beta$
$\beta x^2 + \alpha x + \gamma$	$2\beta x + \alpha$

9.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
$(c\,f(x))' =$	$c\,f'(x)$
$(f(x) + g(x))' =$	$f'(x) + g'(x)$
$(f(x) \cdot g(x))' =$	$f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' =$	$\frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$
$[f(g(x))]' =$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Απαντήσεις στις ερωτήσεις συμπλήρωσης - σύντομης απάντησης

1. α) $f(x) = \sqrt{x^2}$ $\quad$ A = R

β) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\quad$ A = R - {0}

γ) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ $\quad$ A = R

δ) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ $\quad$ A = R

ε) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad$ A = R

2. α) $g(x) = 3f(x) - 1$ $\quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -7$

β) $g(x) = 2 - 4f(x)$ $\quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 10$

γ) $g(x) = (2f(x))^2$ $\quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 16$

δ) $g(x) = \dfrac{2f(x)-1}{5-3f(x)}$ $\quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\dfrac{5}{11}$

ε) $g(x) = \sqrt[3]{-8f(x)+11}$ $\quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 3$

3. α) $\lim\limits_{x \to 1} (2x^2 + 6x - 1) = 7$

β) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x+1}{3x} = \dfrac{5}{6}$

γ) $\lim\limits_{x \to 3} (5\sqrt{6x-1}) = 5\sqrt{17}$

δ) $\lim\limits_{x \to -1} [(3x+2)(5x-3)]^2 = 64$

ε) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} [\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x] = 1$

στ) $\lim\limits_{x \to 0} [2\eta\mu x - 4\sigma\upsilon\nu x] = -4$

4. α) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \dfrac{1}{2}$

β) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4 - 16}{x^3 + 8} = -\dfrac{8}{3}$

γ) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 + 5x + 3}{2(x + 1)} = \dfrac{1}{2}$

δ) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 4x - 5} = -\dfrac{1}{2}$

5. α) $f'(0) = 0$

β) $f'(1) = 2$

γ) $f'(-1) = -4$

δ) $f'(\dfrac{\pi}{2}) = 0$

ε) $f'(0) = 0$

6. α) $y = -1$

β) $y = 4x - 3$

γ) $y = -6x - 5$

8.

Στήλη Α ***f (x)***	**Στήλη Β** ***f ΄(x)***
$x - 1$	1
$(x - 1)^2$	$2(x - 1)$
$(x^2 - 1)^2$	$4x(x^2 - 1)$
$(x - 1)^{\frac{2}{3}}$	$\frac{2}{3}(x - 1)^{-\frac{1}{3}}$
$\frac{1}{(x-1)^2}$	$\frac{-2}{(x-1)^3}$
$\frac{1}{\sqrt{x-1}}$	$-\frac{1}{2}(x - 1)^{-\frac{3}{2}}$
$\frac{1}{\sqrt{(x-1)^3}}$	$-\frac{3}{2}(x - 1)^{-\frac{5}{2}}$

9.

Στήλη Α *f (x)*	Στήλη Β *f ΄(x)*
$\sqrt{ημx}$	$\dfrac{συνx}{2\sqrt{ημx}}$
$\sqrt{ημx \cdot συνx}$	$\dfrac{συν^2x - ημ^2x}{2\sqrt{ημx \cdot συνx}}$
$x - ημx \cdot συνx$	$1 + ημ^2x - συν^2x$
$\dfrac{x}{\sqrt{ημx}}$	$\dfrac{2\sqrt{ημ^2x} - xσυνx}{2\sqrt{ημ^3x}}$
$\dfrac{ημx}{\sqrt{x}}$	$\dfrac{2\sqrt{x^2}συνx - ημx}{2\sqrt{x^3}}$

10.

Στήλη Α *f (x)*	Στήλη Β *f ΄(x)*
$x - \ln x$	$1 - \dfrac{1}{x}$
$x \cdot e^{\frac{1}{x}}$	$e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$
e^{-2x^3+1}	$- 6x^2 \cdot e^{-2x^3+1}$
$\ln\sqrt{x^2 - 2}$	$\dfrac{x}{x^2 - 2}$

11.

Στήλη Α	**Στήλη Β** *πεδίο ορισμού*	**Στήλη Γ** *α΄ παράγωγος*	**Στήλη Δ** *β΄ παράγωγος*
$h(x) = \frac{1}{x^2}$	$R - \{0\}$	$-\frac{2}{x^3}$	$\frac{6}{x^4}$
$\varphi(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$	$R - \{-1, 1\}$	$-\frac{2x}{(x^2-1)^2}$	$\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$
$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$	R	$\frac{2x}{(x^2+1)^2}$	$\frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}$
$g(x) = \frac{x-1}{x^2}$	$R - \{0\}$	$\frac{2-x}{x^3}$	$\frac{2(x-3)}{x^4}$

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. **α)** $A = R$ **β)** $x = 1, x = 2$ **γ)** $B = R - \{1, 2\}$

2. **α)** Δεν υπάρχουν $x \in R : g(x) = 0$

β) $A = R$ **γ)** $B = R$

3. **α)** $x = \pm 1$ **β)** $g(x) > 0$ όταν $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

γ) **i)** $A = R - \{-1, 1\}$

ii) $B = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

iii) $\Gamma = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

4. **α)** $x = 4$ **β)** $A = R - \{4\}$

5. **α)** $f(x) + g(x) = x^2 - x - 4$ $A = R$

β) $3f(x) - 2g(x) = 3x^2 - 18x - 2$ $B = R$

γ) $f(x) \cdot g(x) = 3x^3 - 14x^2 + 2x + 4$ $\Gamma = R$

δ) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2 - 4x - 2}{3x - 2}$ $\Delta = R - \{\frac{2}{3}\}$

6. **α)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -1$ **β)** $\lim\limits_{x \to 0} [f(x) + 2g(x)] = -1$

7. **α)** $A = R - \{-\frac{3}{2}\}$ **β)** $\lim\limits_{x \to 1} \varphi(x) = \dfrac{1}{5}$ **γ)** $\lim\limits_{x \to 1} [\varphi(x)]^3 = \dfrac{1}{125}$

8. **α)** $A = (-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ **β)** $\lim\limits_{x \to -\frac{\sqrt{3}}{3}} f(x) = 0$

9. **α)** $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -12$, $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = -3$ **β)** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 4$

10. **α)** $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = -6$ **β)** $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = -8$

γ) $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 1$ **δ)** $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \sqrt{7}$

11. **α)** $A = R - \{-2\}$ **β)** $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -4$

12. **α)** $A = R - \{-\frac{1}{3}\}$ **β)** $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} f(x) = -2$

13. **α)** $A = R - \{3\}$ **β)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

14. $\alpha \in (0, +\infty)$

15. $\alpha > 2$

16. **α)** $A = R - \{-4\}$ **β)** $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\dfrac{1}{5}$

γ) η f (x) είναι συνεχής στη θέση $x_0 = 1$

17. **α)** Για $x \neq 3$ η συνάρτηση f (x) είναι συνεχής, ως πολυωνυμική

β) $\alpha = 2$

18. **α)** $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$ **β)** $\alpha = 3$

19. **α)** $A = R$ **β)** $\lim\limits_{x \to +1} \frac{-x + x^2}{x - 1} = 1$ **γ)** $\alpha = 1$

20. $\alpha = -1$

21. **α)** $\Pi(\delta) = 2\sqrt{2}\,\delta$ **β)** $E(\delta) = \frac{\delta^2}{2}$

22. $x(y) = \frac{24}{y}$

23. $\Pi(r) = 2r + \frac{60}{r}$

24. **α)** $f'(3) = 2$ **β)** συντελεστής διεύθυνσης: 2 **γ)** $y = 2x - 3$

25. **α)** $f'(2) = 4\alpha$ **β)** $\alpha = 1$

26. **α)** $f'(0) = 0$ **β)** συντελεστής διεύθυνσης: 0 **γ)** $y = 1$

27. **α)** $f'(x) = 2x - 5$ **β)** $y = -\frac{1}{4}$

28. **α)** $f'(2) = 8 - \alpha$ **β)** $\alpha = 7$

29. $\hat{\omega} = 0°$

30. **α)** $\overline{\upsilon} = 6$ m/sec **β)** $\upsilon = 4$ m/sec με $t = 1$ sec

31. **α)** $\overline{\upsilon} = 17$ m/sec **β)** $\upsilon = 17$ m/sec με $t = 3$ sec

32. **α)** $\gamma = \upsilon'(t_0) = 6t_0$ m/sec^2 **β)** $\gamma = \upsilon'(10) = 60$ m/sec^2

33. **α)** 500 μονάδες **β)** 950 μονάδες

γ) 5 μονάδες ανά ώρα

34. Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού ύστερα από 25 χρόνια θα είναι 1.080 κάτοικοι ανά έτος ($e \approx 2{,}7$).

35. **α)** i) $f'(x) = e^{-x} \cdot x^2 (3 - x)$ ii) $g'(x) = e^{x} \cdot x (2 + x)$

β) i) $f'(1) = \dfrac{2}{e}$ ii) $g'(1) = 3e$

36. $P(x) = -\dfrac{1}{3} x^3 + 2x^2 + 2x - 1$

37. **α)** **i)** $f'(x) = 2 - 2x$ **ii)** $f''(x) = -2$

38. **α)** **i)** $f'(x) = 2e^{2x}$ **ii)** $f''(x) = 4e^{2x}$

39. **α)** $f'(x) = \alpha e^{\alpha x}$ **β)** $f''(x) = \alpha^2 e^{\alpha x}$ **γ)** $\alpha = -3$, $\alpha = 1$

40. **α)** $f'(x) = 3\sqrt{x+1}\left[\,|x+1| + \dfrac{3x-2}{2}\right]$ **β)** $f'(0) = 0$

41. **α)** $A = R$ **β)** $f'(x) = \dfrac{2 \cdot e^x}{(e^x + 1)^2}$

42. **α)** $A = R - \{0\}$ **β)** $f'(x) = \dfrac{e^x - 1 - x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2}$

43. **α)** $A = \{x : x \neq 2\kappa\pi,\ \kappa \in Z\}$ **β)** $f'(x) = \dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{(1 - \sigma\upsilon\nu x)^2}$

44. **α)** $f'(x) = x^2 + 4x + 3$ **β)** $A(-3, 1)$ $B(-1, -\frac{1}{3})$

45. **α)** $f'(x) = 2(x + 1)$ **β)** $\lambda = 10$

46. **α)** $f'(x) = -2x + 3$ **β)** $y = -x + 3$

47. **α)** $f'(x) = 2\alpha(x + 1)$ **β)** $\alpha = 1$ **γ)** $y = 4x$

48. **α)** $f'(x) = 2x - 4$ **β)** $A(\frac{5}{2}, -\frac{7}{4})$

49. $\alpha = 5$, $\beta = 7$

50. **α)** $f'(x) = x^2 + 2x - 2$ **β)** $y = x - \frac{2}{3}$ και $y = x + 10$

51. **β)** $y = -\frac{4}{\alpha^3}x + \frac{6}{\alpha^2}$

52. **α)** $f'(x) = 3(x^2 - 6x + 5)$

β) $(-\infty, 1]$ f αύξουσα $[1, 5]$ f φθίνουσα $[5, +\infty)$ f αύξουσα

γ) Για $x = 1$, $f(1) = 4$ max Για $x = 5$, $f(5) = -28$ min

53. **α)** i) $f'(x) = 4x - 4$ ii) $g'(x) = -2x + 4$

β) Η f για $x = 1$ παρουσιάζει min Η g για $x = 2$ παρουσιάζει max

γ) $f(1) = -3$ min $g(2) = 6$ max

54. **α)** $f'(x) = x^2 - 4x - 5$ **β)** $x_1 = 5$, $x_2 = -1$

γ) Για $x_1 = 5$ η f παρουσιάζει min Για $x_2 = -1$ η f παρουσιάζει max

δ) $f(5) = -\frac{106}{3}$ min $\qquad f(-1) = \frac{2}{3}$ max

55. **α)** $\kappa = 5, \quad \lambda = -10$ $\qquad$ **β)** η f παρουσιάζει min για $x = 1$

56. **α)** Η f είναι αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$

β) Η f είναι φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 1]$

57. **α)** $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2)$ $\qquad f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, $[2, \infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 2]$

γ) Για $x = 0$ παρουσιάζει ελάχιστο ίσο με $f(0)$

Για $x = 2$ παρουσιάζει μέγιστο ίσο με $f(2)$

58. **α) i)** $A = R$ $\qquad$ **ii)** $f'(x) = e^x(-x^2 + 2)$, $\quad f''(x) = e^x(-x^2 - 2x + 2)$

β) i) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -\sqrt{2}]$, $[\sqrt{2}, +\infty)$

και γνησίως αύξουσα στο $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

ii) Για $x = \sqrt{2}$ έχουμε μέγιστο με τιμή μεγίστου την $f(\sqrt{2}) = 3,4$

Για $x = -\sqrt{2}$ έχουμε ελάχιστο με τιμή ελαχίστου την $f(-\sqrt{2}) = -1{,}174$

59. **α)** $f'(x) = 3\kappa x^2 + 2\lambda x + 3$ $\qquad$ **β)** $\kappa = -\frac{1}{4}, \quad \lambda = 0$

γ) Για $x = 2$ η f παρουσιάζει max $f(2) = 3$

Για $x = -2$ η f παρουσιάζει min $f(-2) = -5$

60. Είναι το τετράγωνο με $x = y = \frac{\Pi}{4}$, όπου Π η περίμετρος.

61. Οι ζητούμενες διαστάσεις είναι του τετραγώνου με $x = y = 40$ m.

63. $x = y = 6$.

64. **α)** Τη χρονική στιγμή $t = 5$ h το κέρδος γίνεται μέγιστο.

β) Η μέγιστη τιμή του κέρδους είναι 925 δρχ.

65. **α)** $υ = 40$ μονάδες ταχύτητας

β) $E_{min} = 20$ μονάδες ενέργειας

66. **α)** $P(t_0) = W'(t_0) = 12t_0 - 4t_0^3$.

β) Για $t = 1$ h το πηνίο έχει μέγιστη ισχύ.

γ) Η μέγιστη ισχύς είναι $P(1) = 8$ Joules.

67. **α)** Το κέρδος γίνεται μέγιστο όταν $t = 5$ χρόνια.

β) Η μέγιστη τιμή του κέρδους ανά επιβάτη είναι 25 δρχ.

68. Για $x = \frac{2α}{3}$ ποσότητα φαρμάκου έχουμε τη μέγιστη θετική αντίδραση του οργανισμού.

69. 650 ταψάκια

Στατιστική

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

1. * Το χρώμα κάθε αυτοκινήτου είναι ποιοτική μεταβλητή.	**Σ**	**Λ**
2. * Ο αριθμός των ανθρώπων που παρακολουθούν μια συγκεκριμένη τηλεοπτική εκπομπή είναι διακριτή ποσοτική μεταβλητή.	**Σ**	**Λ**
3. * Ο αριθμός των απουσιών των μαθητών της Γ΄ Λυκείου είναι συνεχής ποσοτική μεταβλητή.	**Σ**	**Λ**
4. * Συχνότητα $ν_i$ της τιμής x_i μιας μεταβλητής Χ είναι ο φυσικός αριθμός, που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της μεταβλητής αυτής.	**Σ**	**Λ**
5. * Το άθροισμα όλων των συχνοτήτων μιας κατανομής είναι ίσο με 1, δηλαδή $ν_1 + ν_2 +\ldots + ν_κ =1$.	**Σ**	**Λ**
6. * Η συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής Χ είναι αρνητικός αριθμός.	**Σ**	**Λ**
7. * Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα $ν_i$ μιας μεταβλητής Χ με το μέγεθος ν του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i.	**Σ**	**Λ**
8. * Το άθροισμα όλων των σχετικών συχνοτήτων μιας κατανομής είναι ίσο με το μέγεθος ν του δείγματος.	**Σ**	**Λ**
9. * Το σύνολο των ζευγών (x_i, f_i) όπου f_i η σχετική συχνότητα της τιμής x_i, αποτελεί την κατανομή των σχετικών συχνοτήτων.	**Σ**	**Λ**
0. * Οι αθροιστικές συχνότητες N_i και οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i μιας κατανομής χρησιμοποιούνται στην περίπτωση των ποιοτικών μεταβλητών.	**Σ**	**Λ**
1. * Οι αθροιστικές συχνότητες N_i μιας κατανομής εκφράζουν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i.	**Σ**	**Λ**

2. * Οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i μιας κατανομής εκφράζουν το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες ή ίσες της τιμής x_i. **Σ** **Λ**

3. * Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής. **Σ** **Λ**

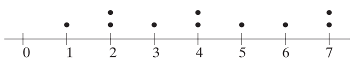
4. * Όταν θέλουμε να κάνουμε τη γραφική παράσταση των τιμών της μεταβλητής Χ: "αριθμός αδελφών μαθητών της Γ΄ Λυκείου" χρησιμοποιούμε το διάγραμμα συχνοτήτων. **Σ** **Λ**

5. * Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποιοτικών δεδομένων. **Σ** **Λ**

6. * Το κυκλικό διάγραμμα είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς τα εμβαδά των οποίων είναι αντιστρόφως ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες v_i. **Σ** **Λ**

7. * Το σημειόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική απεικόνιση της διαχρονικής εξέλιξης μιας εξεταζόμενης μεταβλητής. **Σ** **Λ**

8. * Το διπλανό σχήμα είναι ένα χρονόγραμμα. **Σ** **Λ**



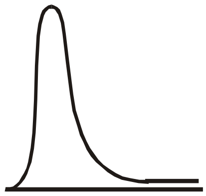
9. * Όταν το πλήθος των τιμών μιας μεταβλητής είναι αρκετά μεγάλο είναι απαραίτητο να ταξινομηθούν τα δεδομένα σε κλάσεις. **Σ** **Λ**

0. * Πλάτος κλάσης ενός δείγματος ονομάζεται το άθροισμα του κατωτέρου και του ανωτέρου ορίου της κλάσης. **Σ** **Λ**

1. * Όταν ο αριθμός των κλάσεων για μια συνεχή μεταβλητή είναι αρκετά μικρός και το πλάτος των κλάσεων είναι αρκετά μεγάλο τότε η πολυγωνική γραμμή συχνοτήτων τείνει να πάρει τη μορφή μιας ομαλής καμπύλης, η οποία ονομάζεται καμπύλη συχνοτήτων. **Σ** **Λ**

2. * Η κατανομή συχνοτήτων με "κωδωνοειδή" μορφή λέγεται κανονική κατανομή. **Σ** **Λ**

3. * Η παρακάτω κατανομή είναι ασύμμετρη με αρνητική ασυμμετρία. **Σ** **Λ**



4. * Σε όλες τις περιπτώσεις οι κλάσεις ενός δείγματος έχουν όλες το ίδιο πλάτος. **Σ** **Λ**

5. * Το εύρος του δείγματος χρησιμοποιείται για να κατασκευάσουμε ισοπλατείς κλάσεις. **Σ** **Λ**

6. * Οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης ενός δείγματος μπορούν να αντιπροσωπευθούν από τις κεντρικές τιμές τους. **Σ** **Λ**

7. * Το κέντρο κάθε κλάσης ενός δείγματος ισούται με την ημιδιαφορά των άκρων της κλάσης. **Σ** **Λ**

8. * Το πλάτος των κεντρικών τιμών ισοπλατών κλάσεων ενός δείγματος ισούται με το πλάτος των κλάσεων αυτών. **Σ** **Λ**

9. * Η γραφική παράσταση ενός πίνακα συχνοτήτων μιας κατανομής με ομαδοποιημένα δεδομένα γίνεται με το ιστόγραμμα συχνοτήτων. **Σ** **Λ**

0. * Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων κατασκευάζουμε διαδοχικά ορθογώνια καθένα από τα οποία έχει εμβαδόν ίσο με τη σχετική συχνότητα της κάθε κλάσης. **Σ** **Λ**

1. * Ο σταθμικός μέσος χρησιμοποιείται σε όλες τις περιπτώσεις όπως και ο αριθμητικός μέσος. **Σ** **Λ**

2. * Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτή. **Σ** **Λ**

3. * Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν ο ν είναι περιττός. **Σ** **Λ**

4. * Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται η ημιδιαφορά των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν ο ν είναι άρτιος αριθμός. **Σ** **Λ**

5. * Η διάμεσος (δ) ενός δείγματος είναι ένα μέτρο διασποράς. **Σ** **Λ**

6. * Η μέση τιμή ενός συνόλου ν παρατηρήσεων είναι ένα μέτρο θέσης. **Σ** **Λ**

7. * Επικρατούσα τιμή ενός δείγματος ν παρατηρήσεων ορίζεται η τιμή με τη μεγαλύτερη σχετική συχνότητα. **Σ** **Λ**

8. * Ορίζουμε ως κ εκατοστιαίο σημείο ή $P_κ$ εκατοστημόριο ενός συνόλου παρατηρήσεων την τιμή εκείνη για την οποία το πολύ κ% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του $P_κ$ και το πολύ (100 - κ) % των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτή. **Σ** **Λ**

9. * Για το Q_1 τεταρτημόριο ενός συνόλου παρατηρήσεων έχουμε αριστερά το πολύ 75% των παρατηρήσεων και δεξιά το πολύ 25% των παρατηρήσεων. **Σ** **Λ**

0. * Το Q_2 τεταρτημόριο ενός συνόλου παρατηρήσεων ισούται με τη διάμεσο. **Σ** **Λ**

1. * Έχουμε τις παρατηρήσεις: 0 1 1 2 2 2 3 4 5.

i) Η διάμεσος είναι 2. **Σ** **Λ**

ii) Το τεταρτημόριο Q_1 είναι ίσο με 1. **Σ** **Λ**

iii) Το τεταρτημόριο Q_3 είναι ίσο με 4. **Σ** **Λ**

2. * Η επικρατούσα τιμή των παρατηρήσεων 0 1 2 2 3 3 5 6 6 6 7 είναι ο αριθμός 7. **Σ** **Λ**

3. * Ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας (CV) είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης. **Σ** **Λ**

4. * Ο συντελεστής μεταβλητότητας εκφράζει τη μεταβλητότητα των δεδομένων απαλλαγμένη από την επίδραση της μέσης τιμής. **Σ** **Λ**

5. * Ο συντελεστής μεταβλητότητας (CV) παριστάνει ένα μέτρο απόλυτης διασποράς και όχι σχετικής διασποράς. **Σ** **Λ**

6. * Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές αν ο συντελεστής μεταβολής ξεπερνά το 10%. **Σ** **Λ**

7. * Αν οι παρατηρήσεις εκφράζονται σε cm και η διακύμανση εκφράζεται σε cm. **Σ** **Λ**

8. * Τα μέτρα διασποράς εκφράζουν τις αποκλίσεις των τιμών μιας μεταβλητής γύρω από τα μέτρα κεντρικής τάσης. **Σ** **Λ**

9. * Το εύρος ή κύμανση (R) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων ορίζεται ως το άθροισμα της μεγαλύτερης και της ελάχιστης παρατήρησης. **Σ** **Λ**

0. * Το εύρος ενός δείγματος βασίζεται στις δύο ακραίες παρατηρήσεις και είναι αξιόπιστο μέτρο διασποράς. **Σ** **Λ**

1. * Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι η διαφορά του πρώτου τεταρτημορίου Q_1 από το τρίτο τεταρτημόριο Q_3. **Σ** **Λ**

2. * Η διακύμανση ή διασπορά είναι ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων των t_i παρατηρήσεων από τη μέση τιμή τους $\overline{x}$. **Σ** **Λ**

3. * Τα μέτρα θέσης δίνουν τη θέση του “κέντρου” των παρατηρήσεων στον κατακόρυφο άξονα Oy. **Σ** **Λ**

4. * Τα μέτρα διασποράς μας δίνουν πόσο επεκτείνονται οι παρατηρήσεις γύρω από το “κέντρο” τους. **Σ** **Λ**

5. * Τα μέτρα ασυμμετρίας καθορίζουν τη μορφή της κατανομής. **Σ** **Λ**

6. * Τα μέτρα ασυμμετρίας εκφράζονται μόνο σε συνάρτηση με τα μέτρα θέσης. **Σ** **Λ**

7. * Η ανάλυση παλινδρόμησης είναι ο κλάδος της Στατιστικής που εξετάζει τη σχέση μεταξύ δύο ή περισσότερων μεταβλητών με απώτερο σκοπό την πρόβλεψη μιας από αυτές μέσω των άλλων. **Σ** **Λ**

8. * Στην απλή γραμμική παλινδρόμηση υπάρχει μόνο μια ανεξάρτητη μεταβλητή X και μια εξαρτημένη μεταβλητή Y η οποία μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά από μια γραμμική συνάρτηση του X. **Σ** **Λ**

9. * Η γραμμική παλινδρόμηση εμφανίζεται μόνο σε πειραματικές μελέτες και όχι σε μη πειραματικές. **Σ** **Λ**

0. * Όταν μας ενδιαφέρει "τι συμβαίνει με το βάρος (Y) των παιδιών όταν αλλάζει το ύψος τους (X)" τότε η Y είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και η X η εξαρτημένη. **Σ** **Λ**

1. * Όταν μας ενδιαφέρει "τι συμβαίνει με το βάρος (Y) των παιδιών όταν αλλάζει το ύψος τους (X)" τότε ενδιαφερόμαστε για την παλινδρόμηση του βάρους (Y) πάνω στο ύψος (X). **Σ** **Λ**

2. * Η "μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων" χρησιμοποιείται για την εύρεση της εξίσωσης της καλύτερης ευθείας γραμμής σε ένα διάγραμμα διασποράς, που προσαρμόζεται στα δεδομένα. **Σ** **Λ**

3. * Η ευθεία $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ καλείται ευθεία ελαχίστων τετραγώνων ή ευθεία παλινδρόμησης της X (πάνω) στη Y. **Σ** **Λ**

4. * Η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων διέρχεται από το σημείο $(\bar{x}, \bar{y})$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης το $\hat{\beta}$. **Σ** **Λ**

5. * Στην εξίσωση ελαχίστων τετραγώνων η τιμής της εκτιμήτριας $\hat{\alpha}$ της παραμέτρου α παριστάνει την τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν x = 0. **Σ** **Λ**

6. * Όταν $\hat{\alpha} = 0$ τότε η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων. **Σ** **Λ**

7. * Ο συντελεστής διεύθυνσης $\hat{\beta}$ της ευθείας των ελαχίστων τετραγώνων παριστάνει τη μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν το X μεταβληθεί κατά μία μονάδα. **Σ** **Λ**

8. * Όταν το x αυξηθεί κατά μία μονάδα τότε το $\hat{y}$ αυξάνεται κατά $\hat{\beta}$ μονάδες όταν $\hat{\beta} < 0$. **Σ** **Λ**

9. * Η συσχέτιση είναι διαδικασία μελέτης πληθυσμού με μια μεταβλητή. **Σ** **Λ**

0. * Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης είναι ένα μέτρο που μας δίνει το βαθμό συγκέντρωσης των σημείων του διαγράμματος διασποράς γύρω από την ευθεία παλινδρόμησης. **Σ** **Λ**

1. * Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης εκφράζεται σε συγκεκριμένες μονάδες μέτρησης. **Σ** **Λ**

2. * Αν r είναι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών X και Y ισχύει πάντοτε ότι $-1 \le r \le +1$. **Σ** **Λ**

3. * Αν ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης r δύο μεταβλητών X και Y πλησιάζει το + 1 τότε τα σημεία του διαγράμματος διασποράς τείνουν να βρίσκονται σε μια ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης $\hat{\beta} > +1$. **Σ** **Λ**

4. * Αν για το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης r ισχύει $r = +1$, τότε οι μεταβλητές X και Y είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες. **Σ** **Λ**

5. * Αν για το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης r ισχύει $r = 0$, τότε οι μεταβλητές X και Y είναι γραμμικά ασυσχέτιστες. **Σ** **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. ***** Από τις παρακάτω μεταβλητές διακριτή ποσοτική είναι

Α. το βάρος μαθητών

Β. η μηνιαία κατανάλωση ρεύματος

Γ. ο χαρακτηρισμός της διαγωγής των μαθητών

Δ. ο αριθμός απουσιών

Ε. η ποιότητα του περιεχομένου των βιβλίων

2. ***** Το ζεύγος που αποτελεί την κατανομή συχνοτήτων είναι

Α. (x_i, ν_i) **Β.** (x_i, f_i) **Γ.** (ν_i, f_i) **Δ.** $(x_i f_i, \nu x_i)$ **Ε.** $(\nu f_i, x_i)$

3. ***** Σε ένα δείγμα μεγέθους ν με συχνότητα ν_i της τιμής x_i μιας μεταβλητής Χ η σχετική συχνότητα f_i ισούται με

Α. $f_i = \frac{\nu}{\nu_i}$ **Β.** $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$ **Γ.** $f_i = \nu_i - \nu$ **Δ.** $f_i = \nu_i \cdot \nu$ **Ε.** $f_i = \frac{100}{\nu_i}$

4. ***** Αν $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής Χ, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, τότε αν στην τιμή x_i αντιστοιχίσουμε τη συχνότητα ν_i ισχύει

Α. $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa = 100$ **Β.** $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa = \nu$

Γ. $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa = \kappa$ **Δ.** $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa = \nu\kappa$

Ε. $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa = 100\nu$

5. ***** Αν $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής Χ, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, $\kappa \leq \nu$, τότε για τις σχετικές συχνότητες $f_1, f_2, \ldots, f_\kappa$ ισχύει

Α. $f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = 100$ **Β.** $f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = \kappa^2$

Γ. $f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = 1$ **Δ.** $f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = 100\kappa$

Ε. $f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = \kappa$

6. ***** Στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων αν συμβολίσουμε με $α_i$ το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος τότε το $α_i$ ισούται με

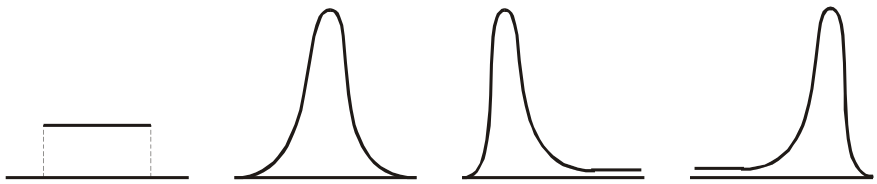
Α. $360°\ ν_i$ **Β.** $360°\ f_i$ **Γ.** $90°\ f_i$

Δ. $180°\ ν_i$ **Ε.** $180°\ f_i$

7. ***** Κατά την ομαδοποίηση παρατηρήσεων, αν R είναι το εύρος του δείγματος και κ ο αριθμός των κλάσεων, το πλάτος των κλάσεων c θα είναι

Α. $c \approx \frac{R}{κ}$ **Β.** $c \approx \frac{κ}{R}$ **Γ.** $c \approx κ \cdot R$ **Δ.** $c \approx κ - R$ **Ε.** $c \approx R - κ$

8. ***** Από τις παρακάτω κατανομές συχνοτήτων



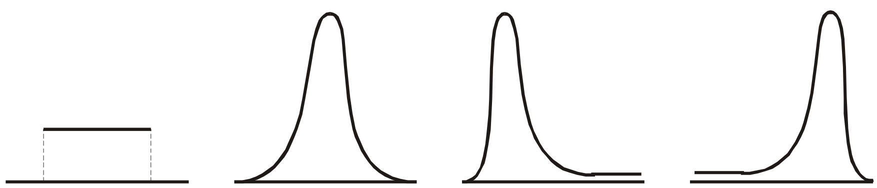
(1) (2) (3) (4)

αυτή που προσεγγίζει καλύτερα την κανονική είναι η

Α. (1) **Β.** (2) **Γ.** (3)

Δ. (4) **Ε.** καμία από τις παραπάνω

9. ***** Από τις παρακάτω κατανομές συχνοτήτων



(1) (2) (3) (4)

ομοιόμορφη είναι η

Α. (1) **Β.** (2) **Γ.** (3)

Δ. (4) **Ε.** καμία από τις παραπάνω

10. ***** Αν α, β είναι τα άκρα των κλάσεων σε μια ομαδοποίηση παρατηρήσεων, οι κλάσεις είναι της μορφής

Α. (α, β) **Β.** [α, β) **Γ.** (α, β] **Δ.** [α, β]

Ε. όλα τα παραπάνω

11. ***** Σε ένα δείγμα μεγέθους ν αν οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ είναι $t_1, t_2, \dots, t_\nu$. Τότε η μέση τιμή $\overline{x}$ ισούται με

Α. $\dfrac{1}{\nu^2} \sum\limits_{i=1}^{\nu} t_i$ **Β.** $\dfrac{1}{\nu} \sum\limits_{i=1}^{\nu} t_i$ **Γ.** $\dfrac{1}{\nu^2} \sum\limits_{i=1}^{\nu} t_i^2$

Δ. $\dfrac{1}{\nu} \sum\limits_{i=1}^{\nu} t_i^2$ **Ε.** $\dfrac{1}{\nu - 1} \sum\limits_{i=1}^{\nu} t_i$

12. ***** Αν σε κάθε τιμή $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ ενός συνόλου δεδομένων δώσουμε διαφορετική βαρύτητα που εκφράζεται με τους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) $w_1, w_2, \dots, w_\nu$, τότε ο σταθμικός μέσος βρίσκεται από τον τύπο

Α. $\overline{x} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\nu}$ **Β.** $\overline{x} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum\limits_{i=1}^{\nu} \nu_i}$

Γ. $\overline{x} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum\limits_{i=1}^{\nu} w_i}$ **Δ.** $\overline{x} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum\limits_{i=1}^{\nu} x_i}$

Ε. $\overline{x} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum\limits_{i=1}^{\nu} \nu_i^2}$

13. ***** Στις παρατηρήσεις 0, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6 η επικρατούσα τιμή είναι

Α. 1 **Β.** 2 **Γ.** 3 **Δ.** 4 **Ε.** 6

14. ***** Στις παρατηρήσεις 0, 1, 2, 3, 4, 5 η επικρατούσα τιμή είναι

Α. 0 **Β.** 1 **Γ.** 2 **Δ.** 3

Ε. καμία από τις παραπάνω

15. ***** Μέτρο θέσης είναι

Α. το εύρος **Β.** το ενδοτεταρτημοριακή εύρος

Γ. η διάμεσος **Δ.** η διακύμανση **Ε.** η τυπική απόκλιση

16. ***** Αν η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε είναι κανονική, τότε το εύρος ισούται περίπου με

Α. 2 τυπικές αποκλίσεις **Β.** 3 τυπικές αποκλίσεις

Γ. 4 τυπικές αποκλίσεις **Δ.** 5 τυπικές αποκλίσεις

Ε. 6 τυπικές αποκλίσεις

17. ***** Αν η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε είναι κανονική, τότε το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα

Α. $(\bar{x} + s, \bar{x} + 2s)$ **Β.** $(\bar{x} - s, \bar{x} + 2s)$ **Γ.** $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$

Δ. $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ **Ε.** $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$

18. ***** Αν η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε είναι κανονική, τότε το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα

Α. $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ **Β.** $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + s)$ **Γ.** $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$

Δ. $(\bar{x} - s, \bar{x} + 3s)$ **Ε.** $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$

19. ***** Η μέση τιμής μιας κανονικής κατανομής είναι 25 και η τυπική απόκλιση είναι 5. Το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεταξύ 20 και 30 είναι περίπου

Α. 34% **Β.** 65% **Γ.** 68% **Δ.** 95% **Ε.** 99,7%

20. ***** Η μέση τιμή μιας κανονικής κατανομής είναι 20 και η τυπική απόκλιση είναι 3. Το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεταξύ 14 και 26 είναι περίπου

Α. 34% **Β.** 47,5% **Γ.** 68% **Δ.** 95% **Ε.** 99,7%

21. ***** Η μέση τιμής μιας κανονικής κατανομής είναι 30 και η τυπική απόκλιση είναι 3. Το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεταξύ 30 και 33 είναι περίπου

Α. 34% **Β.** 47,5% **Γ.** 68% **Δ.** 95% **Ε.** 99,7%

22. ***** Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει μεταλλικούς δίσκους για τη λειτουργία μιας μηχανής. Η κατανομή συχνοτήτων ως προς τη διάμετρό τους είναι κανονική με μέση τιμή (διάμετρο) 32 cm και τυπική απόκλιση 0,2 cm.

i) Αν αγοράσουμε ένα τέτοιο δίσκο η διάμετρός του είναι σχεδόν βέβαιο ότι θα βρίσκεται στο διάστημα μεταξύ

Α. 33,5 cm και 35,2 cm **Β.** 31,4 cm και 32,6 cm

Γ. 29,2 cm και 31,4 cm **Δ.** 32,6 cm και 35,5 cm

Ε. 20,7 cm και 22,3 cm

ii) Αν διαλέξουμε ένα τέτοιο δίσκο στην τύχη, πρέπει να ελέγξουμε τη λειτουργία της μηχανής για πιθανή βλάβη, όταν η διάμετρός του είναι

Α. 31,5 cm **Β.** 31,7 cm **Γ.** 31,2 cm

Δ. 31,9 cm **Ε.** 32,5 cm

23. ***** Σε ένα δείγμα μεγέθους ν, αν $x_1, x_2, \ldots, x_κ$ είναι οι τιμές της μεταβλητής X με συχνότητες αντίστοιχα $ν_1, ν_2, \ldots, ν_κ$ και αν f_i οι σχετικές συχνότητες, ποια (ή ποιες) από τις παρακάτω σχέσεις **δεν** ορίζει τη μέση τιμή $\overline{x}$ του δείγματος

Α. $\overline{x} = \frac{1}{ν} \sum_{i=1}^{κ} x_i ν_i$ **Β.** $\overline{x} = \frac{1}{ν} \sum_{i=1}^{κ} x_i^2 f_i$

Γ. $\overline{x} = \frac{1}{ν} \sum_{i=1}^{κ} x_i f_i$ **Δ.** οι σχέσεις Α και Γ

24. ***** Με βάση την ευθεία παλινδρόμησης $\hat{y} = 15 + 2x$, με $0 \le x \le 11$, η προβλεπόμενη τιμή $\hat{y}$ για $x = 25$ είναι

Α. 15 **Β.** 25 **Γ.** 65 **Δ.** 11

Ε. δεν μπορούμε να ξέρουμε

25. ***** Ο συντελεστής μεταβολής εκφράζεται από το λόγο

Α. $\frac{s^2}{\bar{x}}100\%$ **Β.** $\frac{s}{\bar{x}}100\%$ **Γ.** $\frac{\bar{x}}{s}100\%$

Δ. $\frac{\bar{x}}{s^2}100\%$ **Ε.** $\frac{\bar{x}^2}{s}100\%$

26. ***** Στις περιπτώσεις που δίνεται έμφαση (διαφορετική βαρύτητα) στις τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ ενός συνόλου δεδομένων σαν μέτρο θέσης χρησιμοποιούμε

Α. τη διάμεσο **Β.** τον αριθμητικό μέσο

Γ. τον σταθμικό μέσο **Δ.** τα εκατοστημόρια

Ε. την επικρατούσα τιμή

27. ***** Ο συντελεστής διεύθυνσης $\hat{\beta}$ της ευθείας $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ παριστάνει τη μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν το X μεταβληθεί κατά

Α. μία μονάδα **Β.** δύο μονάδες **Γ.** τρεις μονάδες

Δ. $\hat{\alpha}$ μονάδες **Ε.** $\hat{\beta}$ μονάδες

28. ***** Στην ευθεία $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ αν $\hat{\beta} > 0$ και το x αυξηθεί κατά μία μονάδα τότε το $\hat{y}$ αυξάνεται κατά

Α. μία μονάδα **Β.** δύο μονάδες **Γ.** τρεις μονάδες

Δ. $\hat{\alpha}$ μονάδες **Ε.** $\hat{\beta}$ μονάδες

29. ***** Με βάση την ευθεία παλινδρόμησης $\hat{y} = -15 + 2{,}25x$, με $0 \le x \le 15$, η προβλεπόμενη τιμή $\hat{y}$ για $x = 10$ είναι

Α. 2,25 **Β.** - 15 **Γ.** 7,5

Δ. 10 **Ε.** δεν μπορούμε να ξέρουμε

30. ***** Αν $r = -1$ είναι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών Χ, Υ, τότε

Α. οι Χ, Υ είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες

Β. οι Χ, Υ είναι αρνητικά γραμμικά συσχετισμένες

Γ. έχουμε τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση

Δ. έχουμε τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση

Ε. δεν έχουμε γραμμική συσχέτιση

31. ***** Αν r είναι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών Χ, Υ και $-1 < r < 0$, τότε

Α. οι Χ, Υ είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες

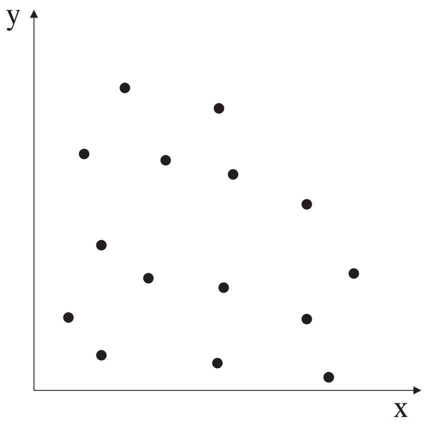
Β. οι Χ, Υ είναι αρνητικά γραμμικά συσχετισμένες

Γ. έχουμε τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση

Δ. έχουμε τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση

Ε. δεν έχουμε γραμμική συσχέτιση

2. ***** Στο διπλανό σχήμα έχουμε το διάγραμμα διασποράς δύο μεταβλητών Χ και Υ. Στην περίπτωση αυτή



Α. οι Χ, Υ είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες

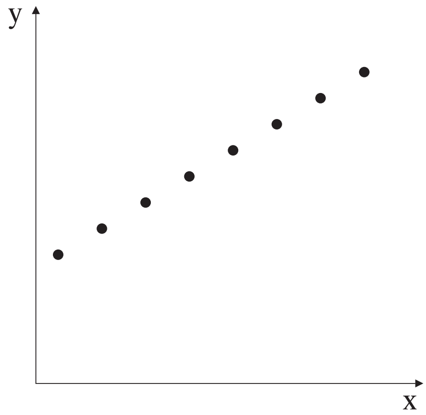
Β. οι Χ, Υ είναι αρνητικά γραμμικά συσχετισμένες

Γ. έχουμε τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση

Δ. έχουμε τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση

Ε. δεν έχουμε γραμμική συσχέτιση

3. ***** Στο διπλανό σχήμα έχουμε το διάγραμμα διασποράς δύο μεταβλητών X και Y. Στην περίπτωση αυτή



Α. οι X, Y είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες

Β. οι X, Y είναι αρνητικά γραμμικά συσχετισμένες

Γ. έχουμε τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση

Δ. έχουμε τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση

Ε. δεν έχουμε γραμμική συσχέτιση

34. ***** Αν r είναι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών X, Y τότε ισχύει πάντοτε

Α. $-1 < r \leq +1$ **Β.** $-1 \leq r \leq +1$ **Γ.** $-1 \leq r < 1$

Δ. $-2 \leq r < -1$ **Ε.** $1 \leq r \leq 2$

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. ***** Αντιστοιχίστε καθένα μέτρο της στήλης Α με το σύμβολό του στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
Μέτρο	***Σύμβολο***
	1. s^2
Α. εύρος	**2.** Q
Β. ενδοτεταρτημοριακό εύρος	**3.** R
Γ. διακύμανση	**4.** s
Δ. τυπική απόκλιση	**5.** f
Ε. συντελεστής μεταβολής	**6.** CV
	7. $\overline{x}$

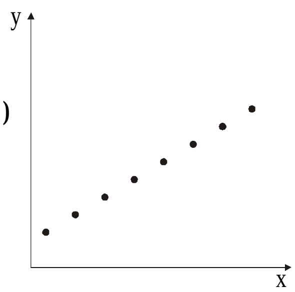
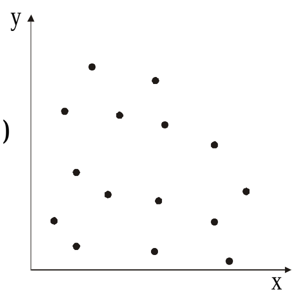
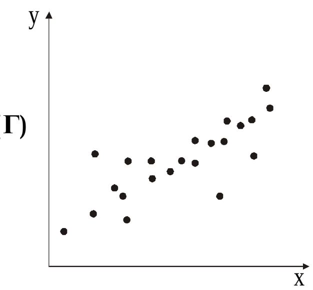
2. ***** Αντιστοιχίστε κάθε ποσοστό των παρατηρήσεων μιας κανονικής ή περίπου κανονικής καμπύλης της στήλης Α με το διάστημά του που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Ποσοστό	***Διάστημα***
	1. $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$
Α. 68%	**2.** $(2\bar{x} - s, 2\bar{x} + s)$
Β. 95%	**3.** $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$
Γ. 99,7%	**4.** $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$
	5. $(3\bar{x} - s, 3\bar{x} + s)$

3. * Αντιστοιχίστε κάθε μέτρο που βρίσκεται στη στήλη Α με την αντίστοιχη παράσταση που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Μέτρο	***Παράσταση***
Α. μέση τιμή ($\bar{x}$)	**1.** $Q_3 - Q_1$
Β. ενδοτεταρτημοριακό εύρος (Q)	**2.** $\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i$
Γ. διακύμανση (s^2)	**3.** $\frac{1}{\nu}\sum(t_i - \bar{x})^2$
Δ. τυπική απόκλιση (s)	**4.** $\sqrt{s^2}$
Ε. συντελεστής μεταβολής (CV)	**5.** $\frac{s}{\bar{x}}100\%$
	6. $\frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i}$

4. ***** Αντιστοιχίστε κάθε διάγραμμα διασποράς της στήλης Α με το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Διάγραμμα διασποράς δύο μεταβλητών X, Y	***Συντελεστής γραμμικής συσχέτισης***
(Α) 	**1.** $r \approx 0$ **2.** $r \approx -0{,}2$
(Β) 	**3.** $r \approx +0{,}8$ **4.** $r = +1$ **5.** $r \approx -0{,}8$
(Γ) 	**6.** $r \approx +0{,}2$

5. * Αντιστοιχίστε κάθε συντελεστή γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών Χ, Υ της στήλης Α με τη γραμμική συσχέτιση των μεταβλητών Χ, Υ της στήλης Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Συντελεστής γραμμικής συσχέτισης	***Γραμμική συσχέτιση των Χ, Υ***
Α. $r = 0$	**1.** οι Χ, Υ είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες
Β. $r = +1$	**2.** οι Χ, Υ είναι αρνητικά γραμμικά συσχετισμένες
Γ. $0 < r < +1$	**3.** έχουμε τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση
	4. οι Χ, Υ είναι γραμμικά ασυσχέτιστες

Ερωτήσεις συμπλήρωσης - σύντομης απάντησης

1. * Ένα σύνολο στο οποίο εξετάζουμε τα στοιχεία του ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά του λέγεται ………………………

2. * Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό λέγονται ………………………

3. * Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή λέγονται ……………

4. * Τις μεταβλητές τις διακρίνουμε:

α) Σε .... των οποίων οι τιμές τους δεν είναι αριθμοί.

β) Σε .... των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί και διακρίνονται:

i) Σε ...., που παίρνουν μόνο “μεμονωμένες” τιμές.

ii) Σε ...., που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α, β).

5. * Ένας τρόπος για να πάρουμε τις απαραίτητες πληροφορίες που χρειαζόμαστε για κάποιο πληθυσμό είναι να εξετάσουμε όλα τα άτομα του πληθυσμού ως προς το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει. Η μέθοδος αυτή συλλογής των δεδομένων καλείται ………………………

6. * Οι αρχές και οι μέθοδοι για τη συλλογή και ανάλυση δεδομένων από πεπερασμένους πληθυσμούς είναι το αντικείμενο της ……………………… που αποτελεί τη βάση της Στατιστικής.

7. * Μετά τη συλλογή των στατιστικών δεδομένων είναι αναγκαία η κατασκευή συνοπτικών ………………………………, ώστε να είναι εύκολη η κατανόησή τους και η εξαγωγή σωστών συμπερασμάτων.

8. ***** Ας υποθέσουμε ότι x_1, x_2, …, $x_κ$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής Χ, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, $κ \leq ν$. Στην τιμή x_i αντιστοιχίζεται η ………………… ……, δηλαδή ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής Χ στο σύνολο των παρατηρήσεων.

9. ***** Οι ποσότητες x_i, $ν_i$, f_i για ένα δείγμα συγκεντρώνονται σε ένα συνοπτικό πίνακα, που ονομάζεται ……………………… ή απλά …………………… .

10. ***** Για μια μεταβλητή, το σύνολο των ζευγών $(x_i, ν_i)$ λέμε ότι αποτελεί την ……………………… και το σύνολο των ζευγών (x_i, f_i), ή των ζευγών $(x_i, f_i\%)$, την …………………… .

11. ***** Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών εκτός από τις συχνότητες $ν_i$ και f_i χρησιμοποιούνται συνήθως και οι λεγόμενες ……………………… και οι …………………… οι οποίες εκφράζουν το πλήθος και το ποσοστό αντίστοιχα των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i.

12. ***** Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα $ν_i$ με το μέγεθος ν του δείγματος, προκύπτει η ……………………… της τιμής x_i.

13. ***** Το ……………………… χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής. Στην περίπτωση που έχουμε μια ποσοτική μεταβλητή χρησιμοποιείται το διάγραμμα…………………… .

14. ***** Το ……………………… διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών όσο και των ποσοτικών δεδομένων, όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες.

15. ***** Η γραφική παράσταση ενός πίνακα συχνοτήτων με ομαδοποιημένα δεδομένα γίνεται με το ……………………… . Στον οριζόντιο άξονα ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων σημειώνουμε, με κατάλληλη κλίμακα, τα όρια των κλάσεων. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε διαδοχικά ορθογώνια καθένα από τα οποία έχει βάση ίση με το πλάτος της κλάσης και ύψος τέτοιο, ώστε το ....
....

16. ***** Να συμπληρωθεί ο πίνακας, ο οποίος παρουσιάζει τους ανεξεταστέους μαθητές της Α΄ Λυκείου:

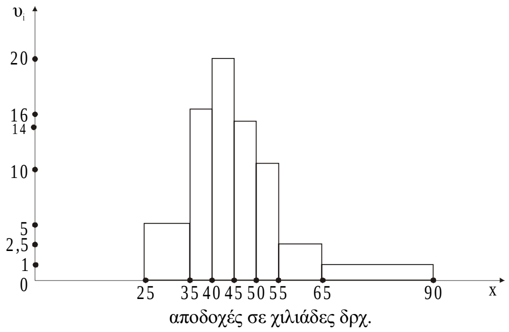
Μαθήματα x_i	**ν_i**	**f_i %**
Αρχαία Ελληνικά	6	
Νέα Ελληνικά		5
Αγγλικά	8	
Μαθηματικά	8	
Φυσική	10	25
Χημεία		

17. ***** Μερικά από τα αποτελέσματα των εκλογών σ’ ένα εκλογικό τμήμα δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Κόμματα	**Συχνότητα ν_i (ψήφοι)**	**Σχετική συχνότητα f_i %**
Α	3.000	
Β		50
Γ		
Δ	2.010	10
		100

Πόσους ψήφους πήρε καθένα από τα κόμματα Α, Β, Γ και Δ;

8. ***** Στο σχήμα που ακολουθεί έχουμε το ιστόγραμμα των εβδομαδιαίων αποδοχών ενός δείγματος από τους υπαλλήλους ενός οργανισμού. Να συμπληρώσετε τον αντίστοιχο πίνακα:



α) Συχνοτήτων ν_i. β) Σχετικών συχνοτήτων f_i%.

Αποδοχές σε χιλιάδες δρχ.	ν_i	f_i %
[25, 35)		
[35, 40)		
[40, 45)		
[45, 50)		
[50, 55)		
[55, 65)		
[65, 90)		
	80	

19. ***** Τα ……………………… μας δίνουν τη θέση του “κέντρου” των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα και τα ……………………… ή ……………………… μας δείχνουν πόσο οι παρατηρήσεις εκτείνονται γύρω από το “κέντρο” τους.

20. ***** Ειδική περίπτωση εκατοστημορίων είναι τα P_{25}, P_{50}, P_{75} τα οποία καλούνται ……………………… και συμβολίζονται με …………………… αντίστοιχα.

21. ***** Τα μέτρα που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της θέσης ενός συνόλου δεδομένων πάνω στον οριζόντιο άξονα Ox είναι:

α) ……………………… β) ………………………

γ) ……………………… δ) ………………………

ε) ………………………

22. ***** Τα σπουδαιότερα μέτρα διασποράς ή μεταβλητότητας είναι:

α) ……………………… β) ………………………

γ) ……………………… δ) ………………………

23. ***** Το μέτρο το οποίο μας βοηθά στη σύγκριση ομάδων τιμών, που είτε εκφράζονται σε διαφορετικές μονάδες μέτρησης είτε εκφράζονται στην ίδια μονάδα μέτρησης, αλλά έχουν σημαντικά διαφορετικές μέσες τιμές, είναι ο ……………………………… .

24. ***** Σε μια έρευνα μεταξύ 500 ανέργων για το χρόνο σε μήνες που είναι άνεργοι προέκυψε ο παρακάτω πίνακας:

Χρόνος ανεργίας	ν_i	f_i %	N_i
[0, 3)		19	
[3, 6)		38,6	
[6, 12)		24,4	
[12, 24)		13,6	
[24, 36)		4,4	
		100	

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

β) Να κατασκευάσετε πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.

γ) Να εκτιμήσετε τη διάμεσο από το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.

25. ***** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

x_i	ν_i	f_i	N_i	F_i	f_i %	F_i %
1	8	0,4				
2			10			
3	5	0,25	15			
4			0,9			
5					10	
Σύνολο						

26. ***** Ο κλάδος της Στατιστικής που εξετάζει τη σχέση μεταξύ δύο ή περισσότερων μεταβλητών με απώτερο σκοπό την πρόβλεψη μιας από αυτές μέσω των άλλων χαρακτηρίζεται με την ονομασία ……………………… .

27. ***** Η απλούστερη περίπτωση παλινδρόμησης είναι η απλή γραμμική παλινδρόμηση, κατά την οποία υπάρχει μόνο μια ανεξάρτητη μεταβλητή …………………… και η εξαρτημένη μεταβλητή …………………, η οποία μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά από μια γραμμική συνάρτηση του X.

28. ***** Αν αυτό που μας ενδιαφέρει είναι το "τι συμβαίνει με το βάρος (Y) των παιδιών όταν αλλάζει το ύψος τους (X)" τότε ενδιαφερόμαστε για την παλινδρόμηση του ……………………… .

29. ***** Η μέθοδος που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των παραμέτρων α και β μιας ευθείας άρα και για την εύρεση της εξίσωσης της καλύτερης ευθείας γραμμής σ' ένα διάγραμμα διασποράς, που προσαρμόζεται στα δεδομένα, είναι η ……………………… .

30. ***** Η ευθεία $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ καλείται ……………………… ή ………………… της Y πάνω στη X.

31. ***** Ένα μέτρο που μας δίνει το μέγεθος της γραμμικής σχέσης ή το βαθμό συγκέντρωσης των σημείων του διαγράμματος διασποράς γύρω από την ευθεία παλινδρόμησης είναι ο λεγόμενος ……………………… .

32. ***** Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης είναι ……………………… των χρησιμοποιούμενων μονάδων μέτρησης των μεταβλητών X και Y.

33. ***** Έστω r είναι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών X και Y. Αν

i) $0 < r < +1$, τότε οι X, Y είναι …………………

ii) $-1 < r < 0$, τότε οι X, Y είναι …………………

iii) $r = +1$, τότε έχουμε ………………… και όλα τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία με κλίση …………………

iv) $r = -1$, τότε έχουμε ………………… και όλα τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία με κλίση …………………

v) $r = 0$, τότε ………………… και οι μεταβλητές X, Y είναι ………………

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ****** Έγινε μια δειγματοληπτική έρευνα για το βάρος των εμπορευμάτων μιας αποθήκης λαχανικών. Βρήκαμε ότι τα βάρη 10 κιβωτίων είναι σε κιλά 17, 12, 12, 15, 18, 22, 24, 25, 19, 20. Να βρείτε:

α) Ποιος είναι ο πληθυσμός.

β) Ποιες είναι οι μονάδες.

γ) Ποιο είναι το δείγμα.

δ) Ποια είναι η μεταβλητή και ποιες οι τιμές της.

2. ****** Σ’ ένα Λύκειο θέλουμε να εξετάσουμε την επίδοση 10 μαθητών στη Στατιστική στο τέλος του β΄ τριμήνου. Πήραμε τις επόμενες βαθμολογίες 15, 11, 10, 10, 14, 16, 19, 18, 13, 17. Να βρείτε:

α) Ποιος είναι ο πληθυσμός.

β) Ποια είναι τα άτομα.

γ) Ποια είναι η μεταβλητή.

δ) Η μεταβλητή είναι i) ποιοτική ή ποσοτική

ii) συνεχής ή διακριτή

ε) Ποιες είναι οι παρατηρήσεις.

3. ****** Σε μια δειγματοληπτική έρευνα του βάρους των μαθητών της τρίτης τάξης ενός Δημοτικού Σχολείου 15 μαθητές είχαν τα επόμενα βάρη σε κιλά: 23, 25, 25, 26, 27, 30, 28, 28, 29, 24, 26, 26, 23, 27, 30. Να βρείτε:

α) Το σύνολο των τιμών της μεταβλητής Χ (όπου Χ είναι το βάρος των μαθητών).

β) Τη συχνότητα των τιμών της μεταβλητής Χ.

4. ****** Μελετάμε τους μαθητές της Γ΄ τάξης ενός Λυκείου ως προς το βαθμό απολυτηρίου τους, τη διαγωγή τους, τον αριθμό απουσιών, την κατεύθυνση που παρακολουθούν, το βάρος τους. Να βρείτε:

α) Ποιες από τις μεταβλητές αυτές είναι i) ποιοτικές, ii) ποσοτικές.

β) Από τις ποσοτικές μεταβλητές, ποιες είναι i) διακριτές, ii) συνεχείς.

5. ****** Οι παρακάτω αριθμοί παρουσιάζουν τις ενδείξεις ενός ζαριού το οποίο ρίξαμε 30 φορές.

2	5	6	1	2	5	4	3	2	5
1	3	5	4	1	3	2	6	5	4
1	2	6	2	4	3	1	6	4	5

Να κατασκευάσετε πίνακα:

α) Συχνοτήτων.

β) Αθροιστικών συχνοτήτων.

6. ** Σε μια πόλη μετρήσαμε τη μεγαλύτερη ημερήσια θερμοκρασία επί 30 συνεχείς ημέρες και βρήκαμε (σε βαθμούς Κελσίου):

25	26	26	26	24	21	21	22	24	26
25	27	22	22	24	23	23	26	25	26
22	23	27	24	23	21	21	23	23	22

α) Να κατασκευάσετε πίνακα: i) Συχνοτήτων.
ii) Αθροιστικών συχνοτήτων.

β) Πόσες ημέρες η θερμοκρασία ήταν: i) Μικρότερη από 23° C;
ii) Μεγαλύτερη από 24° C;
iii) Τουλάχιστον 24° C;

7. ** Τα 16 τμήματα ενός Λυκείου έχουν τους εξής μαθητές:

31	27	28	30	29	31	31	27
29	29	28	28	30	29	27	29

α) Να κατασκευάσετε πίνακα: i) Σχετικών συχνοτήτων.
ii) Αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

β) Να κάνετε το διάγραμμα: i) Συχνοτήτων.
ii) Αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

γ) Να κάνετε το πολύγωνο των συχνοτήτων.

8. ** Οι αποστάσεις (σε km) των 26 κοινοτήτων ενός νομού από το πλησιέστερο νοσοκομείο είναι:

5	10	8	8	13	10	4	2	0	16	5	15	9
6	4	7	5	4	6	7	7	5	8	10	3	9

α) Να κατασκευάσετε πίνακα: i) Συχνοτήτων.
ii) Αθροιστικών συχνοτήτων των αποστάσεων.

β) Πόσες κοινότητες απέχουν από το νοσοκομείο περισσότερο από 10 km;

9. ****** Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει την κατανομή (%) του πληθυσμού της Ελλάδας κατά τις απογραφές των ετών 1951, 1961, 1971. Να κατασκευάσετε το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

Έτος απογραφής	**Αστικός πληθυσμός %**	**Ημιαστικός πληθυσμός %**	**Αγροτικός πληθυσμός %**
1951	37,7	14,8	47,5
1961	43,3	12,9	43,8
1971	53,2	11,6	35,2

10. ****** Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παριστάνονται οι εξαγωγές της χώρας μας αξίας 97.000.000.000 δρχ. κατά το έτος 1980 ανάλογα με το μέσο μεταφοράς. Η γωνία του κυκλικού τομέα για μέσο μεταφοράς "θαλασσίως" είναι 180°. Το 13,917% της αξίας των εξαγωγών έγινε "σιδηροδρομικώς". Οι μεταφορές που έγιναν "οδικώς" ήταν τετραπλάσιες σε αξία από αυτές που έγιναν "αεροπορικώς". Να μετατρέψετε το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

11. ****** α) Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

Ήπειρος	**Έκταση**	**f_i %**
Αμερική	20,8	
Ασία	44	
Αφρική	30,5	
Ευρώπη	10,5	
Ωκεανία	9	
	114,8	

β) Να σχεδιάσετε το κυκλικό διάγραμμα.

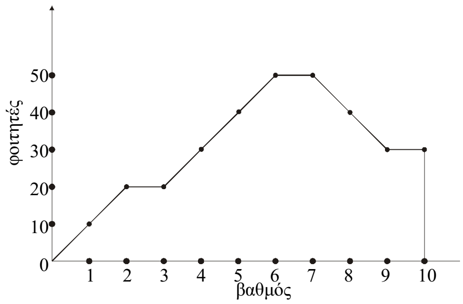
12. ****** Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τις εξαγωγές της χώρας μας κατά το 1977, ανάλογα με το μέσο μεταφοράς.

Μέσο μεταφοράς	***Θαλασσίως***	***Σιδηροδρομικώς***	***Οδικώς***	***Αεροπορικώς***
Αξία σε εκατ. δρχ.	51.000	11.000	33.000	7.000

Να κάνετε το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα.

3. ****** Το διπλανό πολύγωνο συχνοτήτων παρουσιάζει τους βαθμούς των φοιτητών μιας σχολής στο μάθημα της Στατιστικής. Να κατασκευάσετε πίνακα:

α) Συχνοτήτων που αντιστοιχούν στο πολύγωνο αυτό.



β) Σχετικών συχνοτήτων για το ίδιο πολύγωνο.

14. ****** Χρησιμοποιώντας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων που δίνει την κατανομή συχνοτήτων 50 οικογενειών ως προς τον αριθμό των παιδιών τους, να βρεθεί ο αριθμός και το ποσοστό των οικογενειών που έχουν:

α) τουλάχιστον 1 παιδί β) πάνω από 3 παιδιά

γ) από 3 έως και 5 παιδιά δ) το πολύ 6 παιδιά

ε) ακριβώς 6 παιδιά.

Αριθμός παιδιών (x_i)	**Αριθμός οικογενειών (v_i)**
0	5
1	10
2	15
3	8
4	5
5	4
6	3
	50

15. ****** Το βάρος ενός ζώου κατά τους πρώτους 10 μήνες της ζωής του φαίνεται στον πίνακα:

Μήνες	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Βάρος σε κιλά	2	3	4,5	5,3	6	7	9	10,5	13	15	19

Να γράψετε το χρονόγραμμα της εξέλιξης του βάρους του.

16. ****** Στα διόδια Σχηματαρίου η τροχαία σημείωνε στο χρονικό διάστημα μιας ώρας το συνολικό αριθμό αυτοκινήτων που είχαν περάσει. Έτσι, από το μεσημέρι ως τις 8 μ.μ., προέκυψε ο παρακάτω πίνακας:

Χρόνος (ώρες)	13:00	14:00	15:00	16:00	17:00	18:00	19:00	20:00
Συν. αριθμ. αυτοκ.	400	200	300	350	350	400	600	900

Να γράψετε το αντίστοιχο χρονόγραμμα.

17. ****** Εξετάστηκε ένα δείγμα 400 οικογενειών ως προς τον αριθμό των παιδιών τους και προέκυψε ο παρακάτω πίνακας:

Αριθμός παιδιών (x_i)	**Αριθμός (ν_i) οικογενειών**	**f_i**	**f_i %**	**$\nu_i x_i$**
0	135			
1	220			
2	8			
3	15			
4	12			
5	10			
	400			

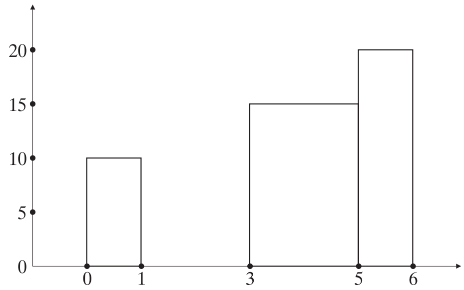
α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

β) Να παραστήσετε την κατανομή αυτή με ραβδόγραμμα.

β) Να υπολογίσετε: i) Τη μέση τιμή.

ii) Τη διάμεσο της κατανομής.

8. ****** Στο διπλανό ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων σβήστηκε κατά λάθος το ορθογώνιο της κλάσης [1, 3). Να κατασκευάσετε το ορθογώνιο αυτό.



19. ****** Οι παρακάτω αριθμοί δίνουν (σε cm) τα αναστήματα ενός δείγματος 41 μαθητών ενός σχολείου.

159	168	162	183	180	179	153	168	170	170	
172	175	175	181	165	166	171	185	169	180	
180	182	160	157	175	167	162	174	174	187	
192	166	172	167	187	177	178	174	171	177	172

α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο.

β) Να ομαδοποιήσετε τα αναστήματα σε κλάσεις πλάτους 5 cm και να προσδιορίσετε γραφικά τη διάμεσο από το διάγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων.

γ) Να συγκρίνετε τα δύο αποτελέσματα.

20. ****** Οι υπάλληλοι μιας εταιρείας έχουν τις παρακάτω ηλικίες:

28	36	22	41	27	50	32	29	42	29
25	38	36	45	27	29	32	39	47	33
53	33	31	40	20	34	37	29	33	27
39	37	44	26	43	26	36	34	49	36
26	31	28	59	30	28	30	34	28	24

α) Να ομαδοποιήσετε τις ηλικίες αυτές σε 8 κλάσεις ίσου πλάτους.

β) Να βρείτε πόσοι υπάλληλοι είναι: i) Μεγαλύτεροι των 44 χρόνων

ii) Νεότεροι των 35 χρόνων.

γ) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο ιστόγραμμα συχνοτήτων των ηλικιών.

21. ****** Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τη διάρκεια ζωής 400 οθονών τηλεόρασης από την παραγωγή ενός εργοστασίου.

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Διάρκεια ζωής σε ώρες λειτουργίας	ν_i	f_i %	N_i	F_i %
[400, 500)	15			
[500, 600)	45			
[600, 700)	60			
[700, 800)	75			
[800, 900)	70			
[900, 1000)	60			
[1000, 1100)	50			
[1100, 1200)	25			
	400			

β) Να κάνετε: i) Το ιστόγραμμα συχνοτήτων

ii) Το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων

iii) Το διάγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων

22. ****** Τα 16 τμήματα ενός Λυκείου έχουν τους εξής μαθητές:

31, 27, 28, 30, 29, 31, 21, 27, 29, 29, 28, 28, 30, 29, 27, 29.

Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της μεταβλητής “αριθμός μαθητών ανά τμήμα”.

23. ****** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της μεταβλητής του παρακάτω πίνακα:

Ηλικία σε χρόνια	ν_i
[0, 4)	3
[4, 8)	5
[8, 12)	6
[12, 16)	6
[16, 20)	2
	22

24. ****** Η μέση τιμή επτά αριθμών είναι 5. Οι πέντε από αυτούς τους αριθμούς είναι οι 3, 4, 5, 6, 11. Να βρείτε τους άλλους δύο αριθμούς αν γνωρίζουμε ότι ο ένας είναι διπλάσιος του άλλου.

25. ****** Τα ύψη 8 αθλητών μιας ομάδας καλαθοσφαίρισης (μπάσκετ μπωλ) είναι (σε cm): 172, 175, 183, 177, 190, 193, 189, 195

α) Να βρείτε: i) Το μέσο ύψος των αθλητών.
ii) Τη διάμεσο των υψών.
iii) Το εύρος (R) των υψών.

β) Επίσης, σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε:
i) Το μέσο ύψος των αθλητών.
ii) Τη διάμεσο των υψών.
iii) Το εύρος (R) των υψών.

Περίπτωση 1: Φεύγει ο αθλητής με το ύψος 172 cm
Περίπτωση 2: Έρχεται ακόμα ένας αθλητής με ύψος 197 cm
Περίπτωση 3: Φεύγει ο αθλητής με το ύψος 195 cm και έρχεται ένας αθλητής με ύψος 198 cm

26. ****** Η βαθμολογία ενός μαθητή στα τέσσερα τεστ ενός μαθήματος ήταν (σε εκατονταβάθμια κλίμακα): 38, 67, 43, 72. Η βαρύτητα σε καθένα ήταν αντίστοιχα 1, 2, 2 και 3. Να βρείτε τη μέση επίδοση του μαθητή στα τεστ.

27. ****** Σ' ένα τεστ πήραν μέρος 100 μαθητές προκειμένου ο καθένας να απαντήσει σε 200 ερωτήσεις. Η βαθμολογία είναι 1 ή 0, ανάλογα αν ο μαθητής απαντάει ή όχι στην ερώτηση. Ο επόμενος πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα της βαθμολογίας.

Βαθμοί	**Συχνότητα**
[60, 80)	5
[80, 100)	20
[100, 120)	26
[120, 140)	30
[140, 160)	15
[160, 180)	4
	100

α) Να κάνετε: i) Το ιστόγραμμα.

ii) Το πολύγωνο των συχνοτήτων.

β) Να βρείτε την επικρατούσα τιμή.

28. ** Η βαθμολογία στα 10 μαθήματα ενός μαθητή είναι:

13, 9, 6, 10, 15, 12, 11, 0, 20, 14. Να υπολογίσετε:

α) Τη μέση τιμή. β) Τη διακύμανση.

γ) Την τυπική απόκλιση. δ) Τη διάμεσο.

ε) Τα τεταρτημόρια Q_1, Q_2, Q_3.

στ) Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των βαθμών.

ζ) Το εύρος (R).

η) Το συντελεστή μεταβολής (CV).

29. ** Δίνεται ο πίνακας:

Κλάσεις	**Κέντρο κλάσης (x_i)**	ν_i	$x_i\nu_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$\nu_i (x_i - \bar{x})^2$
[4, 6)		7				
[6, 8)		13				
[8, 10)		17				
[10, 12)		18				
[12, 14)		29				
[14, 16)		11				
[16, 18)		5				
	ΣΥΝΟΛΑ	100				

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

β) Να υπολογίσετε: i) Τη μέση τιμή.

ii) Τη διακύμανση.

iii) Την τυπική απόκλιση της κατανομής.

iv) Το συντελεστή μεταβολής.

γ) Να κάνετε το ιστόγραμμα.

δ) Να βρείτε την επικρατούσα τιμή.

30. ****** Οι μηνιαίες αποδοχές ενός δείγματος 70 υπαλλήλων ενός οργανισμού δίνονται στον επόμενο πίνακα:

Αποδοχές σε χιλιάδες δρχ.	**Κεντρικές τιμές x_i**	ν_i	x_i^2	$x_i\,\nu_i$	$x_i^2\,\nu_i$
[30, 35)		8			
[35, 40)		10			
[40, 45)		16			
[45, 50)		15			
[50, 55)		10			
[55, 60)		8			
[60, 65)		3			
ΣΥΝΟΛΑ		70			

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

β) Να υπολογίσετε: i) Τη μέση τιμή.

ii) Τη διακύμανση.

iii) Την τυπική απόκλιση της κατανομής.

iv) Το συντελεστή μεταβολής.

31. ****** Η αντοχή 100 ηλεκτρικών συσκευών δίνεται από τον επόμενο πίνακα:

Χρόνος αντοχής σε ώρες	**Αριθμός συσκευών**	**Αθροιστική συχνότητα**
[1000, 1200)	8	
[1200, 1400)	16	
[1400, 1600)	28	
[1600, 1800)	32	
[1800, 2000)	12	
[2000, 2200)	4	
[2200, 2400)	0	
ΣΥΝΟΛΑ	100	

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα κατανομής αθροιστικών συχνοτήτων.

β) Να κάνετε: i) Το ιστόγραμμα.

ii) Το πολύγωνο συχνοτήτων.

iii) Το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.

iv) Το διάγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων.

γ) Να βρείτε: i) Τη διάμεσο.

ii) Το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο.

iii) Την επικρατούσα τιμή.

δ) Πόσες συσκευές έχουν διάρκεια αντοχής μικρότερη από τη μέγιστη συχνότητα;

32. ****** α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα στον οποίο παρουσιάζονται οι απουσίες 80 μαθητών μιας τάξης ενός Λυκείου, αν γνωρίζουμε ότι $\bar{x} = 2$.

Απουσίες	**Μαθητές**	$\nu_i x_i$
10	x	2x
20	y	y
20	5	15
	80	

β) Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2.

33. ****** Η τυπική απόκλιση μιας μεταβλητής Χ είναι ίση με το μηδέν. Αν $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ είναι οι τιμές της Χ και $\bar{x}$ η μέση τιμή, δείξτε ότι $t_1 = t_2 = \ldots = t_\nu = \bar{x}$.

34. ****** Αν είναι $\sum_{i=1}^{5} x_i = 3$ και $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 23$, να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α) $\sum_{i=1}^{5} (x_i + 10)$

β) $\sum_{i=1}^{5} (2x_i + 3)^2$

35. ****** Εξετάζουμε ένα δείγμα μαθητών ενός σχολείου ως προς τη βαθμολογία τους σ' ένα διαγώνισμα. Έστω $\overline{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση. Ποια θα είναι η νέα μέση τιμή και ποια η τυπική απόκλιση όταν η βαθμολογία κάθε μαθητή αυξηθεί

α) κατά 2 μονάδες

β) κατά C μονάδες;

γ) Τι συμπεραίνετε από τις παραπάνω περιπτώσεις για τη μέση τιμή και τη διακύμανση;

36. ****** Η μέση τιμή των παρατηρήσεων $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν είναι $\overline{x}$. Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο των παρατηρήσεων:

α) $t_1 + \lambda, t_2 + \lambda, \ldots, t_\nu + \lambda$

β) $t_1 - \lambda, t_2 - \lambda, \ldots, t_\nu - \lambda$

γ) $\lambda t_1, \lambda t_2, \ldots, \lambda t_\nu$

δ) $\frac{t_1}{\lambda}, \frac{t_2}{\lambda}, \ldots, \frac{t_\nu}{\lambda}$ $(\lambda \neq 0)$

ε) $\lambda t_1 + \kappa, \lambda t_2 + \kappa, \ldots, \lambda t_\nu + \kappa$

37. ****** Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι βαθμοί 10 μαθητών σε δύο εξετάσεις ενός μαθήματος.

Πρώτη εξέταση (x)	**Δεύτερη εξέταση (y)**
6	8
5	7
8	7
8	10
7	5
6	8
10	10
4	6
9	8
7	6

α) Παραστήστε τα σημεία σ' ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων.

β) Προσαρμόστε στα δεδομένα μια ευθεία ελαχίστων τετραγώνων με ανεξάρτητη μεταβλητή την x.

γ) Παραστήστε γραφικά την ευθεία αυτή.

38. ****** α) Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

x	**y**	**x^2**	**xy**	**y^2**
1	1			
3	2			
4	4			
6	4			
8	5			
9	7			
11	8			
14	9			
Σx =	Σy =	Σx^2 =	Σxy =	Σy^2 =

β) Προσαρμόστε μια ευθεία ελαχίστων τετραγώνων στα δεδομένα του παραπάνω πίνακα παίρνοντας την x ως ανεξάρτητη μεταβλητή.

γ) Εκτιμήστε την τιμή του y όταν x = 12.

δ) Σχεδιάστε την ευθεία.

39. ****** Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τελικοί βαθμοί (σε εκατονταβάθμια κλίμακα) στην Άλγεβρα και τη Γεωμετρία 10 μαθητών που διαλέχθηκαν τυχαία από μια μεγάλη ομάδα μαθητών ενός Λυκείου.

Άλγεβρα (x)	**Γεωμετρία (y)**
75	82
80	78
93	86
65	72
87	91
71	80
98	95
68	72
84	89
77	74

α) Παραστήστε γραφικά τα δεδομένα.

β) Προσαρμόστε στα δεδομένα μια ευθεία ελαχίστων τετραγώνων με ανεξάρτητη μεταβλητή την x.

γ) Ένας μαθητής πήρε 72 μονάδες στην Άλγεβρα. Τι βαθμό αναμένεται να έχει στη Γεωμετρία;

40. ****** Για οκτώ ζεύγη παρατηρήσεων (x, y) έχουμε $\Sigma x = 56$, $\Sigma y = 40$, $\Sigma xy = 364$, $\Sigma x^2 = 524$, $\Sigma y^2 = 256$.

α) Να υπολογίσετε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης.

β) Να ερμηνεύσετε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης.

41. ****** Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι μέσες τιμές χρεογράφων και ομολογιών στο Χρηματιστήριο της Νέας Υόρκης για τα έτη 1950-1959 (σε δολάρια).

Έτος	**1950**	**1951**	**1952**	**1953**	**1954**	**1955**	**1956**	**1957**	**1958**	**1959**
Μέση τιμή των χρεογράφων	35	39	41	43	40	53	50	49	40	50
Μέση τιμή των ομολογιών	102	100	97	97	98	100	97	91	94	94

α) Να υπολογίσετε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης.

β) Να ερμηνεύσετε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης.

γ) Να διατυπώσετε το συμπέρασμά σας.

Σημείωση: Το έτος χρησιμεύει μόνο για να καθοριστεί η αντιστοιχία μεταξύ των x και y.

42. ****** α) Να υπολογίσετε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των τιμών x και y του παρακάτω πίνακα:

x	2	4	5	6	8	11
y	18	12	10	8	7	5

β) Πολλαπλασιάστε κάθε x επί 2 και προσθέστε 6. Πολλαπλασιάστε κάθε y επί 3 και αφαιρέστε 15. Υπολογίστε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των νέων τιμών.

γ) Να συγκρίνετε τα δύο αποτελέσματα.

43. ****** Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι ηλικίες και οι (συστολικές) πιέσεις αίματος 10 γυναικών.

Ηλικία (x) σε έτη	56	42	72	36	63	47	55	49	38	60
Πίεση αίματος (y)*	17	12	14	10	13	09	11	08	11	15

**** σε ακέραια προσέγγιση cm Hg***

α) Να υπολογίσετε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των x και y.

β) Να βρείτε την ευθεία παλινδρόμησης ελαχίστων τετραγώνων της y ως προς x.

γ) Εκτιμήστε την πίεση μιας γυναίκας ηλικίας 45 ετών.

44. ****** α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

	x	**y**	**$x - \bar{x}$**	**$y - \bar{y}$**	**$(x - \bar{x})^2$**	**$(y - \bar{y})^2$**	**$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$**
	1	2,5					
	1	4,0					
	2	-					
	3	4,5					
	-	4,0					
	4	3,5					
	7	6,5	4	2,5			
Σύνολα							

β) Να υπολογίσετε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης.

45. ****** Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι βαθμοί 10 φοιτητών σε δύο εξετάσεις ενός μαθήματος.

Πρώτη εξέταση x	**Δεύτερη εξέταση y**	**x^2**	**xy**	**y^2**
6	8			
5	7			
8	7			
8	10			
7	5			
6	8			
10	10			
4	6			
9	8			
7	6			
$\Sigma x =$ ……	$\Sigma y =$ ……	$\Sigma x^2 =$ ……	$\Sigma xy =$ ……	$\Sigma y^2 =$ ……

α) Να συμπληρώστε τον πίνακα.

β) Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης.

Η παρακάτω ερώτηση είναι ανοικτό πρόβλημα και συνίσταται μόνο για ομαδική εργασία.

- Υπάρχει γραμμική συσχέτιση των ωρών που ένας μαθητής βλέπει τηλεόραση και της επίδοσής του στα Νέα Ελληνικά;

ΣΧΕΔΙΑ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ ΣΤΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

1ο Σχέδιο

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αντιστοιχίστε κάθε ποσοστό των Παρατηρήσεων μιας κανονικής ή περίπου κανονικής καμπύλης της στήλης Α με το διάστημά του που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Ποσοστό	***Διάστημα***
	$(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$
68%	$(2\bar{x} - s, 2\bar{x} + s)$
95%	$(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$
99,7%	$(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$
	$(3\bar{x} - s, 3\bar{x} + s)$

Β. **α)** Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει μεταλλικούς δίσκους για τη λειτουργία μιας μηχανής. Η κατανομή συχνοτήτων ως προς τη διάμετρό τους είναι η κανονική με μέση τιμή (διάμετρο) 32 cm και τυπική απόκλιση 0,2 cm.

i) Αν αγοράσουμε ένα τέτοιο δίσκο η διάμετρός του είναι σχεδόν βέβαιο ότι θα βρίσκεται στο διάστημα μεταξύ

Α. 33,5 cm και 35,2 cm **Β.** 31,4 cm και 32,6 cm
Γ. 29,2 cm και 31,4 cm **Δ.** 32,6 cm και 35,5 cm
Ε. 20,7 cm και 22,3 cm

ii) Αν διαλέξουμε ένα τέτοιο δίσκο στην τύχη πρέπει να ελέγξουμε τη λειτουργία της μηχανής για πιθανή βλάβη, όταν η διάμετρός του είναι

Α. 31,5 cm **Β.** 31,7 cm **Γ.** 31,2 cm
Δ. 31,9 cm **Ε.** 32,5 cm

β)

i) Η μέση τιμή μιας κανονικής κατανομής είναι 25 και η τυπική απόκλιση είναι 5. Το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεταξύ 20 και 30 είναι

Α. 34% **Β.** 65% **Γ.** 68%
Δ. 95% **Ε.** 99,7%

ii) Η μέση τιμή μιας κανονικής κατανομής είναι 20 και η τυπική απόκλιση είναι 3. Το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεταξύ 14 και 26 είναι:

Α. 34% **Β.** 47,5% **Γ.** 68%
Δ. 95% **Ε.** 99,7%

iii) Η μέση τιμής μιας κανονικής κατανομής είναι 30 και η τυπική απόκλιση είναι 3. Το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεταξύ 30 και 33 είναι περίπου

Α. 34% **Β.** 47,5% **Γ.** 68%
Δ. 95% **Ε.** 99,7%

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Κατά τη διάρκεια μιας επιδημίας, ένα δείγμα 100 θανάτων είχε την εξής κατανομή συχνοτήτων κατά ηλικίες:

Ηλικία σε έτη	**Κέντρο κλάσης (x_i)**	ν_i	$\nu_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$\nu_i (x_i - \bar{x})^2$
[0, 10)		14				
[10, 20)		1				
[20, 30)		2				
[30, 40)		6				
[40, 50)		5				
[50, 60)		15				
[60, 70)		17				
[70, 80)		21				
[80, 90)		19				
	ΣΥΝΟΛΑ					

α) Να συμπληρώσετε τις στήλες του πίνακα.

β) Να υπολογίσετε: i) Τη μέση τιμή.

ii) Τη διακύμανση.

iii) Την τυπική απόκλιση της κατανομής.

iv) Το συντελεστή μεταβολής.

2ο Σχέδιο

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνονται οι αριθμοί: 5, 3, 6, 5, 4, 5, 2, 8, 6, 5, 4, 8, 3, 4, 5, 4, 8, 2, 5, 4. Να υπολογίσετε:

α) Τη μέση τιμή των αριθμών

β) Τη διασπορά των αριθμών

γ) Την τυπική απόκλιση των αριθμών

δ) Τα τεταρτημόρια Q_1, Q_2, Q_3

ε) Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q

στ) Το εύρος R

ζ) Το συντελεστή μεταβολής CV

ΘΕΜΑ 2ο

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι ηλικίες και οι (συστολικές) πιέσεις αίματος 10 γυναικών.

Ηλικία (x) σε έτη	56	42	72	36	63	47	55	49	38	60
Πίεση αίματος (y)*	17	12	14	10	13	09	11	08	11	15

**** σε ακέραια προσέγγιση cm Hg***

α) Να υπολογίσετε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των x και y.

β) Να βρείτε την ευθεία παλινδρόμησης ελαχίστων τετραγώνων της y ως προς x.

γ) Εκτιμήστε την πίεση μιας γυναίκας ηλικίας 45 ετών.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου "Σωστό-Λάθος"

1.	**Σ**
2.	**Σ**
3.	**Λ**
4.	**Σ**
5.	**Λ**
6.	**Λ**
7.	**Σ**
8.	**Λ**
9.	**Σ**
10.	**Λ**
11.	**Σ**
12.	**Λ**
13.	**Λ**
14.	**Σ**
15.	**Λ**
16.	**Λ**
17.	**Λ**
18.	**Λ**
19.	**Σ**
20.	**Λ**
21.	**Λ**
22.	**Σ**
23.	**Λ**
24.	**Λ**
25.	**Σ**
26.	**Σ**

27.	**Λ**
28.	**Σ**
29.	**Σ**
30.	**Λ**
31.	**Λ**
32.	**Σ**
33.	**Σ**
34.	**Λ**
35.	**Λ**
36.	**Σ**
37.	**Σ**
38.	**Σ**
39.	**Λ**
40.	**Σ**
41. i)	**Σ**
ii)	**Σ**
iii)	**Λ**
42.	**Λ**
43.	**Σ**
44.	**Σ**
45.	**Λ**
46.	**Λ**
47.	**Λ**
48.	**Σ**
49.	**Λ**
50.	**Λ**

51.	**Σ**
52.	**Σ**
53.	**Λ**
54.	**Σ**
55.	**Σ**
56.	**Λ**
57.	**Σ**
58.	**Σ**
59.	**Λ**
60.	**Λ**
61.	**Σ**
62.	**Σ**
63.	**Λ**
64.	**Σ**
65.	**Σ**
66.	**Λ**
67.	**Σ**
68.	**Λ**
69.	**Λ**
70.	**Σ**
71.	**Λ**
72.	**Σ**
73.	**Λ**
74.	**Σ**
75.	**Σ**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	**Δ**
2.	**Α**
3.	**Β**
4.	**Β**
5.	**Γ**
6.	**Β**
7.	**Α**
8.	**Β**
9.	**Α**
10.	**Β**
11.	**Β**
12.	**Γ**

13.	**Β**
14.	**Ε**
15.	**Γ**
16.	**Ε**
17.	**Γ**
18.	**Γ**
19.	**Γ**
20.	**Δ**
21.	**Α**
22. i)	**Β**
ii)	**Γ**
23.	**Β**

24.	**Ε**
25.	**Β**
26.	**Γ**
27.	**Α**
28.	**Ε**
29.	**Γ**
30.	**Δ**
31.	**Β**
32.	**Ε**
33.	**Γ**
34.	**Β**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.	Α	3
	Β	2
	Γ	1
	Δ	4
	Ε	6

2.	Α	1
	Β	3
	Γ	4

3.	Α	2
	Β	1
	Γ	3
	Δ	4
	Ε	5

4.	Α	4
	Β	2
	Γ	3

5.	Α	4
	Β	3
	Γ	1

Απαντήσεις στις ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. πληθυσμός

2. μεταβλητές

3. τιμές της μεταβλητής

4. **α)** ποιοτικές ή κατηγορικές
β) ποσοτικές, **i)** διακριτές μεταβλητές, **ii)** συνεχείς μεταβλητές

5. απογραφή (census)

6. της Δειγματοληψίας

7. πινάκων

8. συχνότητα ν_i

9. πίνακας κατανομής συχνοτήτων ή πίνακας συχνοτήτων

10. κατανομή συχνοτήτων - κατανομή σχετικών συχνοτήτων

11. αθροιστικές συχνότητες N_i - αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i

12. σχετική συχνότητα f_i

13. ραβδόγραμμα - συχνοτήτων

14. κυκλικό

15. ιστόγραμμα - εμβαδόν του ορθογωνίου να ισούται με τη συχνότητα της κλάσης αυτής

16.

Μαθήματα x_i	**ν_i**	**f_i %**
Αρχαία Ελληνικά	6	15
Νέα Ελληνικά	2	5
Αγγλικά	8	20
Μαθηματικά	8	20
Φυσική	10	25
Χημεία	6	15
	40	100

17.

Κόμματα	**Συχνότητα ν_i (ψήφοι)**	**Σχετική συχνότητα f_i %**
Α	3.000	14,92
Β	10.050	50
Γ	5.040	25,08
Δ	2.010	10
	20.100	100

18.

Αποδοχές σε χιλιάδες δρχ.	**ν_i**	**f_i %**
[25, 35)	10	12,5
[35, 40)	16	20
[40, 45)	20	25
[45, 50)	14	17,5
[50, 55)	10	12,5
[55, 65)	5	6,25
[65, 90)	5	6,25
	80	100

19. μέτρα θέσης - μέτρα διασποράς ή μέτρα μεταβλητότητας

20. τεταρτημόρια - Q_1, Q_2, Q_3

21. α) ο αριθμητικός μέσος ή μέση τιμή β) η διάμεσος
γ) κορυφή ή επικρατούσα τιμή δ) σταθμικός μέσος
ε) εκατοστημόρια ($P_κ$)

22. α) το εύρος β) η ενδοτεταρτημοριακή απόκλιση
γ) η διακύμανση δ) η τυπική απόκλιση

23. συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας

24.

Χρόνος ανεργίας	**v_i**	**f_i %**	**N_i**
[0, 3)	95	19	95
[3, 6)	193	38,6	288
[6, 12)	122	24,4	410
[12, 24)	68	13,6	478
[24, 36)	22	4,4	500
	500	100	

25.

x_i	**v_i**	**f_i**	**N_i**	**F_i**	**f_i %**	**F_i %**
1	8	0,4	8	0,4	40	40
2	2	0,1	10	0,5	10	50
3	5	0,25	15	0,75	25	75
4	3	0,15	18	0,9	15	90
5	2	0,1	20	1	10	100
Σύνολο	20	1			100	

26. ανάλυση παλινδρόμησης

27. X - Y

28. παλινδρόμηση του βάρους Y πάνω στο ύψος X

29. μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

30. ευθεία ελαχίστων τετραγώνων ή ευθεία παλινδρόμησης

31. συντελεστής γραμμικής συσχέτισης

32. ανεξάρτητος

33. i) θετικά γραμμικά συσχετισμένες
ii) αρνητικά γραμμικά συσχετισμένες
iii) τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση - θετική
iv) τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση - αρνητική
v) δεν υπάρχει γραμμική συσχέτιση - γραμμικά ασυσχέτιστες

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. α) Πληθυσμός είναι το σύνολο Κ των κιβωτίων της αποθήκης.

β) Αν συμβολίσουμε με $κ_1$, $κ_2$, …, $κ_{10}$ τα κιβώτια που ζυγίσαμε, τότε οι μονάδες είναι τα στοιχεία $κ_1$, $κ_2$, …, $κ_{10}$.

γ) Δείγμα είναι το σύνολο $Δ = \{ κ_1, κ_2, …, κ_{10}\}$.

δ) Μεταβλητή είναι το βάρος των κιβωτίων και το σύνολο τιμών της είναι $Σ = \{12, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 24, 25\}$.

2. α) Ο πληθυσμός Μ είναι οι 10 μαθητές.

β) Κάθε μαθητής είναι ένα άτομο.

γ) Μεταβλητή είναι ο βαθμός στη Στατιστική.

δ) Η μεταβλητή είναι ποσοτική γιατί το σύνολο Σ των τιμών της μεταβλητής, δηλαδή το σύνολο $Σ = \{10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$ είναι υποσύνολο του R. Η μεταβλητή είναι διακριτή.

ε) Οι παρατηρήσεις είναι οι βαθμοί στη Στατιστική
15, 11, 10, 10, 14, 16, 19, 18, 13, 17.

3. α) Το σύνολο των τιμών της μεταβλητής Χ είναι το σύνολο $Σ = \{23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\}$.

β) Η συχνότητα του 23 είναι 2
Η συχνότητα του 24 είναι 1
Η συχνότητα του 25 είναι 2
Η συχνότητα του 26 είναι 3
Η συχνότητα του 27 είναι 2
Η συχνότητα του 28 είναι 2
Η συχνότητα του 29 είναι 1
Η συχνότητα του 30 είναι 2.

4. α) i) Ποιοτικές: διαγωγή, κατεύθυνση. ii) Ποσοτικές: Βαθμός απολυτηρίου (διακριτή), Αριθμός απουσιών (διακριτή), Βάρος (συνεχής).

5.

ενδείξεις ζαριού	**Συχνότητα ν_i**	**Αθροιστική συχνότητα N_i**
1	5	5
2	6	11
3	4	15
4	5	20
5	6	26
6	4	30
	30	

6.

°C	**ν_i**	**N_i**
21	4	4
22	5	9
23	6	15
24	4	19
25	3	22
26	6	28
27	2	30
	30	

β) i) 9 ημέρες ii) 11 ημέρες iii) 15 ημέρες

7.

Μαθητές	**ν_i**	**f_i %**	**F_i %**
27	3	19	19
28	3	19	38
29	5	31	69
30	2	12	81
31	3	19	100
	16	100	

8. α)

x_i	Διαλογή	v_i	N_i
0	I	1	1
2	I	1	2
3	I	1	3
4	I I I	3	6
5	I I I I	4	10
6	I I	2	12
7	I I I	3	15
8	I I I	3	18
9	I I	2	20
10	I I I	3	23
13	I	1	24
15	I	1	25
16	I	1	26
		26	

β) 3 κοινότητες.

10. Ο αντίστοιχος πίνακας είναι:

Μέσο μεταφοράς	***Θαλασσίως***	***Σιδηροδρομικώς***	***Οδικώς***	***Αεροπορικώς***	
Αξία σε εκατ. δρχ.	48.500	13.500	28.000	7.000	97.000

11. α)

Ήπειρος	**Έκταση**	**f_i %**
Αμερική	20,8	18
Ασία	44	38
Αφρική	30,5	27
Ευρώπη	10,5	9
Ωκεανία	9	8
	114,8	100

β) Για το κυκλικό διάγραμμα

Αμερική:	περίπου 65°
Ασία:	138°
Αφρική:	96°
Ευρώπη:	33°
Ωκεανία:	28°

12.

Θαλασσίως:	180°
Σιδηροδρομικώς:	38,8°
Οδικώς:	116,5°
Αεροπορικώς:	24,7°

13.

Βαθμός	**ν_i**	**f_i %**
0	0	0
1	10	3
2	20	6
3	20	6
4	30	9
5	40	13
6	50	16
7	50	16
8	40	13
9	30	9
10	30	9
	320	100

14. α) 45 οικογένειες β) 12 οικογένειες
γ) 17 οικογένειες δ) 50 οικογένειες ε) 3 οικογένειες

17.

Αριθμός παιδιών (x_i)	**Αριθμός (ν_i) οικογενειών**	**f_i**	**f_i %**	**$\nu_i x_i$**
0	135	0,338	34	0
1	220	0,55	55	220
2	8	0,02	2	16
3	15	0,037	4	45
4	12	0,03	3	48
5	10	0,025	2	50
	400	1	100	379

β) i) $\bar{x} \approx 0{,}947$ ii) $\delta = 2$

18. Το εμβαδόν του πρώτου ορθογωνίου είναι $E_1 = 10$.
Το εμβαδόν του τρίτου ορθογωνίου είναι $E_3 = 30$.
Το εμβαδόν του τέταρτου ορθογωνίου είναι $E_4 = 20$.
Άρα το εμβαδόν του δεύτερου ορθογωνίου είναι $E_2 = 40$.
Επειδή το πλάτος του είναι 2, το ύψος του θα είναι 20.

19. α) Αν διατάξουμε τα αναστήματα κατά αύξουσα τάξη, βρίσκουμε ότι η διάμεσος είναι η 21^{η} παρατήρηση και είναι $\delta = 172$ cm.

β)

Ανάστημα (σε cm)	ν_i	**Αθροιστική συχνότητα N_i**
[150 - 155)	1	1
[155 - 160)	2	3
[160 - 165)	3	6
[165 - 170)	8	14
[170 - 175)	10	24
[175 - 180)	7	31
[180 - 185)	6	37
[185 - 190)	3	40
[190 - 195)	1	41
	41	

γ) Μετά τον υπολογισμό γραφικά της διαμέσου από το διάγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων κάνοντας ομαδοποίηση έχουμε μια απόκλιση 1 cm από την πραγματική τιμή της διαμέσου.

20. α)

Ηλικίες [α, β)	ν_i
[20 - 25)	3
[25 - 30)	15
[30 - 35)	12
[35 - 40)	9
[40 - 45)	5
[45 - 50)	3
[50 - 55)	2
[55 - 60)	1
	50

β) i) 6 υπάλληλοι ii) 30 υπάλληλοι.

21.

Διάρκεια ζωής σε ώρες	ν_i	f_i %	N_i	F_i %
[400, 500)	15	3,75	15	3,75
[500, 600)	45	11,25	60	15
[600, 700)	60	15	120	30
[700, 800)	75	18,75	195	48,75
[800, 900)	70	17,5	265	66,25
[900, 1000)	60	15	325	81,25
[1000, 1100)	50	12,5	375	93,75
[1100, 1200)	25	6,25	400	100
	400	100		

22. $\overline{x} \approx 28{,}9$ μαθητές

23. $\overline{x} \approx 9{,}8$ χρόνια

24. Οι αριθμοί είναι ο 2 και ο 4.

25. α) i) $\overline{x} = 184{,}25$ ii) $\delta = 186$ iii) $R = 23$

β) *Περίπτωση 1:* i) $\overline{x} = 186$ ii) $\delta = 189$ iii) $R = 20$

Περίπτωση 2: i) $\overline{x} = 185{,}66$ ii) $\delta = 189$ iii) $R = 25$

Περίπτωση 3: i) $\overline{x} = 184{,}62$ ii) $\delta = 186$ iii) $R = 26$

26. $\overline{x}_w = 59{,}25$

28. α) $\overline{x} = 11$ β) $s^2 = 26{,}2$ γ) $s \approx 5{,}11$

δ) $\delta = 11{,}5$ ε) $Q_1 = 7{,}5$ $Q_2 = 11{,}5$ $Q_3 = 14{,}5$

στ) 7 ζ) $R = 20$ η) $CV = 46{,}4\%$

29.

Κλάσεις	Κέντρο κλάσης (x_i)	ν_i	$x_i\nu_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - x)^2$	$\nu_i (x_i - \bar{x})^2$
[4, 6)	5	7	35	- 6	36	252
[6, 8)	7	13	91	- 4	16	208
[8, 10)	9	17	153	- 2	4	68
[10, 12)	11	18	198	0	0	0
[12, 14)	13	29	377	2	4	116
[14, 16)	15	11	165	4	16	176
[16, 18)	17	5	85	6	36	180
	ΣΥΝΟΛΑ	100	1104			1000

β) i) $\bar{x} \approx 11$ ii) $s^2 = 10$ iii) $s \approx 3{,}16$ iv) $CV \approx 29\%$

30.

Αποδοχές σε χιλιάδες δρχ.	Κεντρικές τιμές x_i	ν_i	x_i^2	$x_i \nu_i$	$x_i^2 \nu_i$
[30, 35)	32,5	8	1056,25	260	8450
[35, 40)	37,5	10	1406,25	375	14062,5
[40, 45)	42,5	16	1806,25	680	28900
[45, 50)	47,5	15	2256,25	712,5	33843,75
[50, 55)	52,5	10	2756,25	525	27562,5
[55, 60)	57,5	8	3306,25	460	26450
[60, 65)	62,5	3	3906,25	187,5	11718,75
ΣΥΝΟΛΑ		70		3200	150987,5

β) i) $\bar{x} \approx 46$ χιλ. ii) $s^2 = 67$ iii) $s \approx 8{,}5$ iv) $CV = 17{,}39\%$

31.

Χρόνος αντοχής σε ώρες	**Αριθμός συσκευών**	**Αθροιστική συχνότητα**
[1000, 1200)	8	8
[1200, 1400)	16	24
[1400, 1600)	28	52
[1600, 1800)	32	84
[1800, 2000)	12	96
[2000, 2200)	4	100
[2200, 2400)	0	100
ΣΥΝΟΛΑ	100	

δ) 52 συσκευές έχουν διάρκεια αντοχής μικρότερη από τη μέγιστη συχνότητα.

32.

Απουσίες	**Μαθητές**	**$\nu_i x_i$**
10	70	140
20	5	5
20	5	15
	80	

33. Αν $\bar{x}$ είναι η μέση τιμή της Χ τότε $s^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} (t_i - \bar{x})^2$.

Αλλά $s = 0$ ή $s^2 = 0$ ή $\sum_{i=1}^{\nu} (t_i - \bar{x})^2 = 0$ ή

$$(t_1 - \bar{x})^2 + (t_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (t_\nu - \bar{x})^2 = 0 \iff t_1 = t_2 = \ldots = t_\nu = \bar{x}.$$

34. α) 53 β) 173

35. α) $\bar{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\kappa} y_i}{\nu} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} (x_i + 2)}{\nu} = \bar{x} = 2, \quad s_y^2 = s_x^2.$

β) $\bar{y} = \bar{x} + c, \quad s_y^2 = s_x^2.$

γ) Αν οι τιμές μιας μεταβλητής αυξηθούν κατά c μονάδες, τότε η διακύμανση μένει αμετάβλητη και η μέση τιμή αυξάνεται κατά c.

36. α) $\overline{x+\lambda} = \dfrac{(t_1+\lambda)+(t_2+\lambda)+\ldots+(t_\nu+\lambda)}{\nu} = \ldots = \bar{x} + \lambda$

β) $\overline{x - \lambda} = \bar{x} - \lambda$

γ) $\overline{x \cdot \lambda} = \lambda \bar{x}$

δ) $\overline{\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)} = \dfrac{1}{\lambda} \cdot \bar{x} \quad (\lambda \neq 0)$

ε) $\overline{\lambda x + \kappa} = \lambda \bar{x} + \kappa$

37. α)

Πρώτη εξέταση x	**Δεύτερη εξέταση y**	**x^2**	**xy**	**y^2**
6	8	36	48	64
5	7	25	35	49
8	7	64	56	49
8	10	64	80	100
7	5	49	35	25
6	8	36	48	64
10	10	100	100	100
4	6	16	24	36
9	8	81	72	64
7	6	49	42	36
Σx = 70	Σy = 75	$\Sigma x^2 = 520$	Σxy = 540	$\Sigma y^2 = 587$

β) $\hat{y} = 4 + 0{,}5x$

38. α)

x	**y**	**x^2**	**xy**	**y^2**
1	1	1	1	1
3	2	9	6	4
4	4	16	16	16
6	4	36	24	16
8	5	64	40	25
9	7	81	63	49
11	8	121	88	64
14	9	196	126	81
$\Sigma x = 56$	$\Sigma y = 40$	$\Sigma x^2 = 524$	$\Sigma xy = 364$	$\Sigma y^2 = 256$

β) $\hat{y} = 0{,}548 + 0{,}636\ x$, έχει συντελεστή διεύθυνσης 0,636 και διέρχεται από το σημείο (7, 5)

γ) $\hat{y} = 8{,}18$

39. α)

Άλγεβρα (x)	**Γεωμετρία (y)**	**x^2**	**xy**	**y^2**
75	82	5625	6150	6724
80	78	64000	6240	6084
93	86	8649	7998	7396
65	72	4225	4680	5184
87	91	7569	7917	8281
71	80	5041	5680	6400
98	95	9604	9310	9025
68	72	4624	4896	5184
84	89	7056	7476	7921
77	74	5929	5698	5476
$\Sigma x = 882$	$\Sigma xy = 819$	$\Sigma x^2 = 64722$	$\Sigma xy = 66045$	$\Sigma y^2 = 67675$

β) $\hat{y} = 29{,}23 + 0{,}66x$

γ) Αν x = 72, τότε στη Γεωμετρία θα πάρει 77.

40. α) r = 0,977 β) οι x, y είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες.

41.

	x	**y**	**$x - \bar{x}$**	**$y - \bar{y}$**	**$(x - \bar{x})^2$**	**$(y - \bar{y})^2$**	**$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$**
	35	102	- 9	5	81	25	- 45
	39	100	- 5	3	25	9	- 15
	41	97	- 3	0	9	0	0
	43	97	- 1	0	1	0	0
	40	98	- 4	1	16	1	- 4
	53	100	9	3	81	9	27
	50	97	6	0	36	0	0
	49	91	5	- 6	25	36	- 30
	40	94	- 4	- 3	16	9	12
	50	94	6	- 3	36	9	- 18
Σύνολα	440	970			326	98	- 73

α) r = - 0,4

β) Τα x και y είναι αρνητικά γραμμικά συσχετισμένα.

γ) Επειδή υπάρχει αρνητική συσχέτιση μεταξύ της τιμής των χρεογράφων και της τιμής των ομολογιών σημαίνει ότι όταν η τιμή των χρεογράφων πέφτει η τιμή των ομολογιών ανεβαίνει.

42. α)

x	**y**	**x^2**	**xy**	**y^2**
2	18	4	36	324
4	12	16	48	144
5	10	25	50	100
6	8	36	48	64
8	7	64	56	49
11	5	121	55	25
Σx = 36	Σxy = 60	$Σx^2$ = 266	Σxy = 293	$Σy^2$ = 706

r = - 0,92.

β) Αν x΄ = 2x + 6 και y΄ = 3y - 15 τότε:

x΄	**y΄**	**x'^2**	**x΄y΄**	**y'^2**
10	39	100	390	1521
14	21	196	294	441
16	15	256	240	225
18	9	324	162	81
22	6	484	132	36
28	0	784	0	0
Σx΄ = 108	Σx΄y΄ = 90	$Σx'^2$ = 2144	Σx΄y΄ = 1218	$Σy'^2$ = 2304

r = - 0,92.

43.

Ηλικία (x)	**Πίεση αίματος (y)**	x^2	**xy**	y^2
56	17	3136	952	289
42	12	1764	504	144
72	14	5184	1008	196
36	10	1296	360	100
63	13	3969	819	169
47	09	2209	423	81
55	11	3025	605	121
49	08	2401	392	64
38	11	1444	418	121
60	15	3600	900	225
$\Sigma x = 518$	$\Sigma xy = 120$	$\Sigma x^2 = 28028$	$\Sigma xy = 6381$	$\Sigma y^2 = 1510$

α) $r = 0{,}57$

β) $\hat{y} = 4{,}852 + 0{,}138x$

γ) Η πίεση γυναίκας ηλικίας 45 ετών είναι περίπου 11.

44. α)

	x	**y**	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
	1	2,5	- 2	- 1,5	4	2,25	3
	1	4,0	- 2	0	4	0	0
	2	3,0	- 1	- 1	1	1	1
	3	4,5	0	0,5	0	0,25	0
	3	4,0	0	0	0	0	0
	4	3,5	1	- 0,5	1	0,25	- 0,5
	7	6,5	4	2,5	16	6,25	10
Σύνολα	21	28	0	0	26	10	13,5

β) $r \approx 0{,}83$

45. α)

Πρώτη εξέταση x	**Δεύτερη εξέταση y**	x^2	**xy**	y^2
6	8	36	48	64
5	7	25	35	49
8	7	64	56	49
8	10	64	80	100
7	5	49	35	25
6	8	36	48	64
10	10	100	100	100
4	6	16	24	36
9	8	81	72	64
7	6	49	42	36
$\Sigma x = 70$	$\Sigma y = 75$	$\Sigma x^2 = 520$	$\Sigma xy = 540$	$\Sigma y^2 = 587$

β) $r \approx 0{,}55$ και είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες γιατί $0 < 0{,}55 < 1$.

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ

Ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή γεννήθηκε στο Βερολίνο στις 13 Σεπτεμβρίου 1873. Κατά την περίοδο 1881-91 ολοκλήρωσε τις σπουδές του στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση σε σχολεία του Βελγίου όπου διακρίθηκε για την επίδοσή του στα Μαθηματικά. Κατά την περίοδο 1891-95 φοίτησε στη Βελγική Στρατιωτική Σχολή απ' όπου πήρε πτυχίο μηχανικού. Κατά την περίοδο 1897-98 παρακολούθησε μαθήματα στα Πανεπιστήμια του Λονδίνου και των Παρισίων, ενώ το φθινόπωρο του 1898 έως την άνοιξη του 1900 εργάστηκε ως μηχανικός στην Αίγυπτο στην κατασκευή των φραγμάτων Assuan και Assiout. Αμέσως μετά μεταβαίνει στο Βερολίνο με μοναδικό σκοπό **τη σπουδή των Μαθηματικών.**

Το καλοκαίρι του 1902 αναχωρεί για το Göttingen, προπύργιο τότε των μαθηματικών ερευνών και τόπο συγκέντρωσης διασήμων μαθηματικών (Klein - Hilbert - Minkowski κ.ά.). Το 1905 γίνεται υφηγητής στο Πανεπιστήμιο του Göttingen. Το 1909 γίνεται τακτικός καθηγητής στο Πολυτεχνείο του Αννόβερου, ενώ το 1910 γίνεται καθηγητής στο Πολυτεχνείο της Breslaw. Το 1913 γίνεται τακτικός καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Göttingen και διαδέχεται τον Felix Klein στην σημαντικότερη μαθηματική έδρα στην Ευρώπη. Το 1918 γίνεται τακτικός καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου.

Το 1920 η ελληνική κυβέρνηση τον προσκάλεσε για να οργανώσει το Ιωνικό Πανεπιστήμιο στη Σμύρνη. Το 1922 Ο Καραθεοδωρή κατάφερε να διασώσει την Πανεπιστημιακή Βιβλιοθήκη του Ιωνικού Πανεπιστημίου από την τουρκική εισβολή στη Σμύρνη και τη μετέφερε στην Αθήνα. Κατά το ίδιο έτος γίνεται τακτικός καθηγητής της Μαθηματικής Ανάλυσης στο Πανεπιστήμιο Αθηνών, το 1923 τακτικός καθηγητής της Μηχανικής στο ΕΜΠ και ανακηρύσσεται ακαδημαϊκός. Το 1924 γίνεται τακτικός καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Μονάχου, όπου και διδάσκει μέχρι το τέλος της ακαδημαϊκής του καριέρας.

Η βασική επιστημονική εργασία του Καραθεοδωρή είναι στα θέματα του Λογισμού των Μεταβολών (55 συνολικά εργασίες, μεταξύ των οποίων η διδακτορική του διατριβή "περί των ασυνεχών λύσεων του λογισμού των μεταβολών", 1905). Επίσης εργάστηκε με μεγάλη επιτυχία σε θέματα Θεωρίας Μιγαδικών Συναρτήσεων, Θεωρίας Πραγματικών Συναρτήσεων, Θεωρίας κυρτότητας, Θεωρίας μέτρου, Θεωρίας Συνόλων, Θερμοδυναμικής, Θεωρίας σχετικότητας, Γεωμετρικής οπτικής και Θεωρητικής μηχανικής, δημοσιεύοντας συνολικά 132 πρωτότυπες εργασίες.

Η προσφορά του στη μαθηματική επιστήμη έχει αναγνωριστεί στη διεθνή βιβλιογραφία. Μια πρωτότυπη εργασία του αναφέρεται στις αρχιτεκτονικές καμπύλες του Παρθενώνα (δημοσιεύτηκε το 1937 στην "αρχαιολογική εφημερίδα").

Ο καθηγητής E. Schmidt γράφει για τον Κ. Σ. Καραθεοδωρή: *"Ανήκει εις την πλειάδα των μεγάλων εργατών της μαθηματικής επιστήμης, οίτινες ανεκάλυψαν απροσδόκητους και βασικάς σχέσεις εις όλους σχεδόν τους κλάδους αυτής… Θα μείνει εις τα μαθηματικά ο Καραθεοδωρή εις την πρώτην γραμμήν των ερευνητών των μάλλον ικανών, οίτινες δια της δυνάμεως της μεγαλοφυΐας των, επέτυχον καταπληκτικήν επέκτασιν του ορίου της επιστήμης ταύτης…".*

Ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή απεβίωσε στο Μόναχο στις 2 Φεβρουαρίου 1950 και το θάνατό του πένθησαν όλα τα πνευματικά ιδρύματα του κόσμου με τα οποία είχε σχέση κατά τη διάρκεια της ζωής του.