

ΜΑΘΗΜΑ: Άλγεβρα**ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ****ΥΔΗ: Εξισώσεις και Ανισώσεις Πρώτου Βαθμού – Απόλυτη Τιμή - Ρίζες****A. Εξισώσεις Πρώτου Βαθμού**

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $9(8-x) - 10(9-x) - 4(x-1) = 1 - 8x$

iii) $5(x-3) + 10(2-5x) + 10x = -(15+10)x$

ii) $\frac{x+4}{3} - \frac{x-4}{5} = 2 + \frac{3x-1}{15}$

iv) $\frac{7y+4}{5} - y = \frac{3y-5}{2}$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\frac{\omega-1}{7} + \frac{23-\omega}{5} = 7 - \frac{4+\omega}{4}$

iii) $2x - \left(\frac{15}{9}x - 5\right) = \frac{x-6}{3} + 7$

ii) $\frac{1}{6}(8-t) + t - \frac{5}{3} = \frac{1}{2}(t+6) - \frac{t}{3}$

3. Να λύσετε και να επαληθεύσετε τις εξισώσεις:

i) $12 - \left(\frac{3y+1}{4} + \frac{2y+1}{3}\right) = 10 - \frac{5y-1}{4} + \frac{y+5}{6}$

ii) $\frac{\frac{3x-5}{4} - 1}{4} - \frac{4}{9}(2x-7) = \frac{13}{24} - \frac{\frac{5(x-2)}{3} - 3}{3}$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $(x+5)(x+4) - \frac{1}{2}(x-1)(x+2) - \frac{1}{2}(x-3)^2 = 0$

ii) $\frac{1}{3}y + \frac{1}{4}(y+2)^2 = \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 + \frac{5}{3}$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\lambda x + \lambda + 1 = x$

ii) $(\lambda^3 - 4\lambda)x = \lambda^2 + 4\lambda + 4$

6. Να εξετάσετε πότε η εξίσωση $\frac{\alpha x - \beta}{3} + \frac{x}{2} = 3x - \alpha$, έχει μια λύση, είναι ταυτότητα, είναι αδύνατη.

7. Να λύσετε τις παραμετρικές εξισώσεις:

i) $(\lambda - 1)x = \lambda^2 - 1$

ii) $\lambda x + 8\chi = 2(\lambda - 1)x + 10$

8. Να διερευνήσετε τις εξισώσεις για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου μ :

i) $\mu^2(x-2) - 3\mu = x + 1$

ii) $\frac{x+\mu}{5} = \frac{\mu x - 1}{15} + \frac{\mu^2 - 4\mu + 5}{3}$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $ax + a = bx + b$

ii) $a^2x - a = b^2x - b$

iii) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\lambda x - \frac{3x + 2\lambda\mu}{3} = \frac{1}{2} - \mu$ ii) $(\lambda + x)(1 + \mu x) - \lambda(1 + \mu) = \lambda^2\mu^2 + \mu x^2$

11. Να διερευνήσετε τις εξισώσεις

i) $\lambda(\lambda^2 x - 1) + 2 = \lambda x(5\lambda - 6)$ ii) $\frac{x}{a} - \frac{x}{b} = a - b, ab \neq 0.$

12. Ποιοι περιορισμοί πρέπει να ισχύουν για τα a και b ώστε η εξίσωση $(x - a)(2x - b)^2 = (x - b)(2x - a)^2$ να είναι αδύνατη.

13. Για ποιες τιμές των παραμέτρων λ και μ η παρακάτω εξίσωση αληθεύει για κάθε πραγματικό y ;
 $\frac{5\lambda y - 5\mu}{4} = \frac{3\lambda - 3\mu y}{4} + 8y - 4.$

14. Για ποιες τιμές των λ και μ η παρακάτω εξίσωση έχει μια λύση και ποια είναι αυτή;
 $(\lambda - x)(1 - \mu) + (x - \lambda)(1 - x) = (1 + x)(\mu - x)$

15. Ο Γιώργος λέει στον Μανώλη: «Πάρε έναν αριθμό, πολλαπλασίασε τον με το 5, πρόσθεσε το 20 στο γινόμενο, διαίρεσε το άθροισμα με το 5 και αφάιρεσε τώρα τον αριθμό που πήρες στην αρχή. Θα βρεις αποτέλεσμα 4.» Έχει δίκιο ο Γιώργος;

16. Για την αποπεράτωση ενός έργου εργάζονται δύο εργατές, ο Α και ο Β. Ο Α εργάζεται για 26 μέρες και ο Β για 21 μέρες. Ο Α έχει ημερομίσθιο κατά 5 ευρώ μεγαλύτερο από του Β και στο τέλος η αμοιβή του είναι κατά 150 ευρώ μεγαλύτερη. Να βρείτε το ημερομίσθιο των δύο εργατών.

17. Ένας πατέρας είναι 34 χρονών και ο γιος του 7 χρονών. Μετά από πόσα χρόνια ο πατέρας θα έχει τετραπλάσια ηλικία από το γιο του;

18. Να βρεθεί ο αριθμός του οποίου το μισό αυξημένο κατά 20 ισούται με το διπλάσιό του ελαττωμένο κατά 40.

19. Ένας πατέρας είναι μεγαλύτερος από το γιο του κατά 30 χρόνια και πριν 3 χρόνια το άθροισμα των ηλικιών τους ήταν 32. Να βρεθούν οι ηλικίες τους.

20. Μια βρύση Α γεμίζει μια δεξαμενή σε 5 ώρες, ενώ μια άλλη βρύση Β τη γεμίζει σε 6 ώρες. Αν ανοιχτούν και οι δύο βρύσες μαζί, σε πόσες ώρες θα γεμίσουν τη δεξαμενή;

21. Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 7. Αν εναλλάξουμε τη θέση των ψηφίων του προκύπτει αριθμός κατά 9 μεγαλύτερος. Να βρείτε τον αριθμό.

22. Να βρεθεί διψήφιος αριθμός αν είναι γνωστό ότι το ψηφίο των δεκάδων του είναι τριπλάσιο από το ψηφίο των μονάδων και αν εναλλάξουμε τη θέση των ψηφίων του να προκύπτει αριθμός κατά 36 μικρότερος.

23. Δανείζει κάποιος 20.000 ευρώ σε δύο άτομα Α, Β με επιτόκιο 20% και 25% αντίστοιχα. Μετά από ένα χρόνο παίρνει συνολικά τόκο 4500 ευρώ. Πόσα δάνεισε στον Α και πόσα στον Β;

24. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-6}{x+2} = 2$ ii) $\frac{3x-2}{x(x+1)} + \frac{1}{2x} = \frac{6}{x^2+3x+2}$

25. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x-1}{x+\lambda-\mu} - 2 = \frac{1-x}{x-\lambda+\mu}$, για τις διάφορες τιμές των λ, μ .

26. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\frac{2x+3}{x} + \frac{x}{2x+3} = 2$ ii) $\frac{x^2-x}{x} - \frac{1}{1-x} = -2$

27. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\frac{33x-2}{9x^2-4} + \frac{8}{3x+2} + \frac{12}{2-3x} = 0$ ii) $\frac{3x+1}{3-x} - \frac{5}{3} = \frac{3-x}{x+1}$
iii) $\frac{5}{x+3} - \frac{2x+1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{x+2}$

28. Να λύσετε την παραμετρική εξίσωση $\frac{x+\lambda+\mu}{x+\lambda} - \frac{x+\lambda-\mu}{x-\lambda} = \frac{\mu^2-\lambda^2}{\lambda^2-x^2}$.

B. Ανισώσεις

29. Αποδείξτε ότι για οποιουσδήποτε αριθμούς a, b ισχύει $a^2 + b^2 \geq 2ab$

30. Αποδείξτε ότι για οποιουσδήποτε αριθμούς a, b ισχύει

i) $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ ii) $a^2 - ab + b^2 \geq 0$ iii) $a^2 + 4 \geq 4a$
iv) $(a+b)^2 \geq 4ab$

31. Αν οι a, b είναι ετερόσημοι να δείξετε ότι $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$.

32. Αν $x > y > 0$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $a = \frac{x-y}{x+y}$, $b = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

33. Να δείξετε ότι $3(1+x^2+x^4) \geq (1+x+x^2)^2$.

34. Να λύσετε τις ανισώσεις

i) $\frac{x-3}{2} - \frac{x-4}{3} \geq 1 + \frac{x-3}{4}$ ii) $4(y+1)^2 - (y+3)^2 < 3(y-2)^2$ iii) $2x+3 \geq 4x+1$
iv) $(x+2)^2 - (x-2)^2 < 0$ vi) $\frac{a+5}{6} + 2 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a-1}{2} + \frac{a-1}{3} \right)$ vii) $y - \frac{y-2}{2} > \frac{y-1}{2} - \frac{y-3}{4}$

35. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\lambda(x+5) > x-4$ ii) $\frac{2+ax}{3} + \frac{a-x}{4} \leq \frac{2a-x}{6}$

36. για ποιες τιμές των λ, μ η ανίσωση αληθεύει για κάθε αριθμό x ;

$\lambda(x+4) > x+2\mu$

37. Να λύσετε τα συστήματα ανισώσεων:

$$3x - 7 > 2x - 1$$

$$(x + 3)(2x - 5) = 0$$

$$\text{i) } \frac{2x}{3} - 1 < \frac{x}{2}$$

$$\text{ii) } \frac{1}{4}(2x + 1) > 1 + \frac{2 - x}{3}$$

Γ Απόλυτη Τιμή

38. Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = 2|x - 3| - 4$.

39. Δείξτε ότι $|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$

40. Δείξτε ότι $\frac{|x|}{|x + y|} + \frac{|y|}{|x + y|} \geq 1$.

41. Λύστε τις εξισώσεις:

$$\text{i) } |3x - 1| = 2|x + 1|$$

$$\text{ii) } \frac{|2x - 1| - 4}{5} = \frac{|2x - 1| - 3}{2} + \frac{4|2x - 1| - 1}{3} \quad \text{iii) } |x| - \frac{|x| - 1}{2} = -1.$$

42. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\text{i) } |x| = 3$$

$$\text{ii) } |x| = 0$$

$$\text{iii) } |x| = -2$$

$$\text{iv) } |2x - 5| = 1$$

$$\text{v) } |x + 2| = 3|1 - 4x|$$

$$\text{vi) } \left| \frac{x + 3}{x + 1} \right| = 2$$

43. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\text{i) } |x + 2| - 2|x - 1| = 1$$

$$\text{ii) } |x + 2| + |x - 2| = |3x - 1|$$

44. Να λύσετε τις ανισώσεις

$$\text{i) } |x - 1| < 2$$

$$\text{ii) } |x + 2| > 3$$

$$\text{iii) } |3x - 1| > 3$$

$$\text{iv) } |5x - 2| \geq -7$$

45. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i) } \frac{5|x| - 7}{2} - \frac{3|x| + 1}{4} < |x| + 5$$

$$\text{ii) } \frac{7|x - 2| - 8}{3} \leq |x - 2| < \frac{7|x - 2| - 1}{5}$$

$$\text{iii) } 2|x| + 3|x - 1| > 5x - 2$$

Δ. Ρίζες

46. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A = 2a^2 + 3ab - 5b^2$, για $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ και $b = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

47. Να βρείτε τα αθροίσματα:

$$\text{i) } 3\sqrt{8} - 5\sqrt{18} + 2\sqrt{72} - 5\sqrt{50}$$

$$\text{ii) } 5\sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}\sqrt{12} + 8\sqrt{27} - 10\sqrt{\frac{3}{16}}$$

48. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

$$\text{i) } \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$$

$$\text{ii) } \sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$$

$$\text{iii) } \sqrt{5 + \sqrt{24}} - \sqrt{5 - \sqrt{24}}$$

49. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

ii) $\sqrt{9-\sqrt{80}}$

iii) $\sqrt{4+\sqrt{15}} + \sqrt{4-\sqrt{15}}$

iv) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

50. Αν α, β είναι θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha + \beta}{2} \geq \sqrt{\alpha\beta} \geq \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}$.

51. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sqrt{2x-1} = 3$

ii) $\sqrt{3x+1} = \sqrt{x-2}$

iii) $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x+2} = 0$.

52. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\sqrt[3]{a^3 b^6 c^{12}}$

ii) $\sqrt[3]{\sqrt{64x}}$

iii) $\sqrt{\frac{x}{y} \sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{y^3}{x^3}}}$

iv) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$

53. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt{2}$.

54. Να κάνετε τις πράξεις:

i) $\sqrt{a^3} \sqrt{a}$

ii) $\sqrt[4]{a} : \sqrt[3]{a}$

iii) $\frac{\sqrt{a^3} \sqrt[3]{a^4} \sqrt{a^3}}{\sqrt[6]{a^5}}$

55. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\sqrt[3]{\sqrt{x^3}}$

ii) $\sqrt[3]{a^3 \sqrt{a}}$

iii) $\sqrt[4]{a^2 \sqrt[3]{a} \sqrt{a}}$

iv) $\sqrt[3]{9x^2} \sqrt{\frac{2y}{3x}} \sqrt[3]{4y^2} \sqrt{\frac{3x}{2y}}$

56. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.

i) $\frac{3}{\sqrt{2}}$

ii) $\frac{a}{\sqrt{a}}$

iii) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

iv) $\frac{a^2}{\sqrt[3]{a}}$

v) $\frac{x}{\sqrt[4]{x^3}}$

vi) $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt[4]{27}}$

57. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^4 - 27x = 0$

ii) $x^3 = x$

iii) $3x^5 + 2x = 0$

iv) $x^{\frac{2}{3}} = 4$

v) $x^{\frac{3}{4}} = 27$

vi) $(x+1)^{\frac{1}{2}} = (x+1)^{\frac{1}{3}}$

vii) $(2x-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt{x}$.