ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2014

ΘΕΜΑ 1ο :

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς της μορφής $z = x + xi$, $x \in R^*$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{z^4 + z^8 + z^{12} + \ldots + z^{4\nu}}{iz^2 + i^5 z^6 + i^9 z^{10} + \ldots + i^{4\nu-3} z^{4\nu-2}} = \mathrm{Im}(z^2) \ , \ \nu \in N^*, \ x \in R^* - \left\{ \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

β) Να βρείτε τους μιγαδικούς που έχουν την παραπάνω μορφή και επαληθεύουν την εξίσωση:

$$z^3 - z^2 + \bar{z} + i = 0$$

γ) Αν z_1 , z_2 οι λύσεις της προηγούμενης εξίσωσης, να αποδείξετε ότι:

i) $z_1^{\,4} = z_2^{\,4} = -1$

ii) $\dfrac{z_1^{\,2} + z_1}{z_2} + \dfrac{z_2^{\,2} + z_2}{z_1} = -2$

iii) $z_1^{\,2014} + z_2^{\,2014} = -2i$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$i^5 = i^{4\cdot1+1} = i \ , \ i^9 = i^{4\cdot2+1} = i \ , \ \ldots\ldots \ , \ i^{4\nu-3} = i^{4(\nu-1)+1} = i \quad \text{και}$$

$$z^2 = (x + xi)^2 = x^2 + 2x^2 i - x^2 = 2x^2 i$$

οπότε έχουμε:

$$\frac{z^4 + z^8 + z^{12} + \ldots + z^{4\nu}}{iz^2 + i^5 z^6 + i^9 z^{10} + \ldots + i^{4\nu-3} z^{4\nu-2}} =$$

$$= \frac{z^2 \cdot \left(z^2 + z^6 + z^{10} + \ldots + z^{4\nu-2}\right)}{i \cdot \left(z^2 + z^6 + z^{10} + \ldots + z^{4\nu-2}\right)} =$$

$$= \frac{z^2}{i} = \frac{2x^2 i}{i} = 2x^2 = \mathrm{Im}(z^2)$$

β) Είναι:

$$z^3 = z\cdot z^2 = (x+xi)\cdot 2x^2 i = -2x^3 + 2x^3 i$$

οπότε έχουμε:

$$z^3 - z^2 + \overline{z} + i = 0 \Leftrightarrow (-2x^3 + 2x^3 i) - 2x^2 i + (x - xi) + i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-2x^3 + x) + (2x^3 - 2x^2 - x + 1)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^3 + x = 0 \\ 2x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - x = 0 \\ (2x^3 - x) - 2x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - x = 0 \\ -2x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\cdot(2x^2 - 1) = 0 \\ 2x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \quad \text{και} \quad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

γ) i) Είναι:

- $z_1^4 = (z_1^2)^2 = \left(\frac{1}{2}(1+i)^2\right)^2 = \frac{1}{4}(1+2i-1)^2 = \frac{1}{4}\cdot 4i^2 = -1 \quad (1)$ και
- $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = -z_1 \quad (2)$

οπότε έχουμε:

$$z_2^4 = (-z_1)^4 = z_1^4 \overset{(1)}{=} -1$$

ii) Είναι:

$$\frac{z_1^2 + z_1}{z_2} + \frac{z_2^2 + z_2}{z_1} = \frac{z_1^3 + z_1^2 + z_2^3 + z_2^2}{z_1 z_2} \overset{(2)}{=}$$

$$= \frac{z_1^3 + z_1^2 + (-z_1)^3 + (-z_1)^2}{z_1(-z_1)} =$$

$$= \frac{z_1^3 + z_1^2 - z_1^3 + z_1^2}{-z_1^2} = \frac{2z_1^2}{-z_1^2} = -2$$

iii) Είναι:

- $z_1^{2014} = z_1^{4\cdot 503+2} = \left(z_1^4\right)^{503}\cdot z_1^2 \overset{(1)}{=} (-1)^{503}\cdot z_1^2 = -z_1^2 =$
  $= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)^2 = -\frac{1}{2}(1+2i-1) = -\frac{1}{2}\cdot 2i = -i \quad (3)$
- $z_2^{2014} \overset{(2)}{=} (-z_1)^{2014} = z_1^{2014} \overset{(3)}{=} -i$

οπότε έχουμε:

$$z_1^{2014} + z_2^{2014} = (-i) + (-i) = -2i$$

ΘΕΜΑ 2ο :

α) Να λύσετε την εξίσωση $4w^2 - 2w + 1 = 0$, $w \in C$

Θεωρούμε επιπλέον τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 , z_2 οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z_1| = 1 \quad (1) \quad \text{και} \quad 4\cdot\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = 2 \quad (2)$$

β) Να αποδείξετε ότι $|z_2| = 2$

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο που έχει κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών αριθμών 0 , z_1 και z_2 είναι ορθογώνιο.

δ) Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες του παραπάνω τριγώνου.

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση $4w^2 - 2w + 1 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 4\cdot 1 = -12 < 0$ και οι λύσεις της είναι: $w = \frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{3}}{4}$

β) Θέτουμε $\frac{z_1}{z_2} = w$. Επειδή $|z_1| = 1$ θα είναι $z_1 \neq 0$, άρα $w \neq 0$, οπότε η σχέση (2) ισοδύναμα γράφεται:

$$4w + \frac{1}{w} = 2 \Leftrightarrow 4w^2 - 2w + 1 = 0 \Leftrightarrow w = \frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Άρα $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{1}{2}$, επομένως $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{1}{2} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} |z_2| = 2$

γ) Αν O , A και B είναι οι εικόνες των 0 , z_1 και z_2, τότε έχουμε:

$$(OA)^2 = |z_1|^2 = 1^2 = 1 \ , \ (OB)^2 = |z_2|^2 = 2^2 = 4$$

Επίσης είναι:

$$4z_1^2 + z_2^2 = 2z_1z_2 \Rightarrow (z_1 - z_2)^2 = -3z_1^2 \Rightarrow |z_1 - z_2|^2 = 3|z_1|^2 \Rightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{3}$$

Οπότε:

$$(AB) = \sqrt{3} \Rightarrow (AB)^2 = 3$$

Παρατηρούμε ότι:

$$(OB)^2 = (OA)^2 + (AB)^2 ,$$

οπότε το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο.

δ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο OAB $\left(\widehat{OAB} = 90^0\right)$ είναι $(OA) = \frac{(OB)}{2}$, οπότε θα έχουμε

$\widehat{OBA} = 30^0$ και $\widehat{AOB} = 60^0$

ΘΕΜΑ 3ο :

α) Για δύο οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς w_1 και w_2 να αποδείξετε ότι ισχύει

$$|w_1+w_2|^2+|w_1-w_2|^2=2|w_1|^2+2|w_2|^2$$

β) Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $|z-2i|=1$

i) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

ii) Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί του προηγούμενου γεωμετρικού τόπου για τους οποίους ισχύει $|z_1-z_2|=1$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $|z_1+z_2-4i|$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|w_1+w_2|^2+|w_1-w_2|^2=(w_1+w_2)\left(\overline{w_1+w_2}\right)+(w_1-w_2)\left(\overline{w_1-w_2}\right)=$$

$$=(w_1+w_2)\left(\overline{w_1}+\overline{w_2}\right)+(w_1-w_2)\left(\overline{w_1}-\overline{w_2}\right)=$$

$$=w_1\overline{w_1}+w_1\overline{w_2}+\overline{w_1}w_2+w_2\overline{w_2}+w_1\overline{w_1}-w_1\overline{w_2}-\overline{w_1}w_2+w_2\overline{w_2}=$$

$$=2w_1\overline{w_1}+2w_2\overline{w_2}=2|w_1|^2+2|w_2|^2$$

β) i) Έστω $z=x+yi$, $x,y\in R$ με εικόνα στο επίπεδο το σημείο $M(x,y)$

Είναι $|z-2i|=1\Leftrightarrow|z-(0+2i)|=1\Leftrightarrow(MK)=1$, όπου $M(z)$ η εικόνα του z και $K(0,2)$

Παρατηρούμε ότι η εικόνα Μ του μιγαδικού αριθμού z απέχει από το σταθερό σημείο $K(0,2)$ σταθερή απόσταση 1

Οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(0,2)$ και ακτίνα $\rho=1$, που έχει εξίσωση $|z-2i|=1$

ii) Επειδή οι μιγαδικοί z_1, z_2 ικανοποιούν τη σχέση $|z-2i|=1$, θα ισχύει:

$$|z_1-2i|=1 \quad \text{και} \quad |z_2-2i|=1$$

Θέτοντας $w_1=z_1-2i$ και $w_2=z_2-2i$ στην ισότητα του (α) ερωτήματος διαδοχικά έχουμε:

$$|(z_1-2i)+(z_2-2i)|^2+|(z_1-2i)-(z_2-2i)|^2=2|z_1-2i|^2+2|z_2-2i|^2\Leftrightarrow$$

$$|z_1+z_2-4i|^2+|z_1-z_2|^2=2\cdot1^2+2\cdot1^2\Leftrightarrow$$

$$|z_1+z_2-4i|^2+1=4\Leftrightarrow$$

$$|z_1+z_2-4i|=\sqrt{3}$$

ΘΕΜΑ 4ο :

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z , w , οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $\left(3z-2i\right)^{2013}=\left(i\,\bar{z}-6\right)^{2013}$ **(1) και**
- $w=1+2\,\bar{z}\,i$ **(2)**

α) Να αποδείξετε ότι $|z|=2$

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $u=\left(z-\dfrac{4}{z}\right)^{2014}$ είναι πραγματικός.

γ) Να αποδείξετε ότι $|u|\le 2^{4028}$

δ) Αν w_1 , w_2 είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση (2), τότε να αποδείξετε ότι $|w_1-w_2|\le 8$

ΛΥΣΗ

α) Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\left|(3z-2i)^{2013}\right|=\left|(i\bar{z}-6)^{2013}\right|\Leftrightarrow\left|(3z-2i)\right|^{2013}=\left|(i\bar{z}-6)\right|^{2013}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left|(3z-2i)\right|=\left|(i\bar{z}-6)\right|\Leftrightarrow\left|(3z-2i)\right|^{2}=\left|(i\bar{z}-6)\right|^{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (3z-2i)(3\bar{z}+2i)=(i\bar{z}-6)(-iz-6)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 9|z|^2+6iz-6i\bar{z}+4=|z|^2+6iz-6i\bar{z}+36\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 8|z|^2=32\Leftrightarrow|z|^2=4\Leftrightarrow|z|=2$$

β) Είναι:

$$|z|=2\Rightarrow|z|^2=4\Rightarrow z\cdot\bar{z}=4\Rightarrow\frac{4}{z}=\bar{z}\qquad(3)$$

Οπότε αν $z=x+yi$ με $x,y\in R$, τότε έχουμε:

$$u=\left(z-\frac{4}{z}\right)^{2014}\overset{(3)}{=}(z-\bar{z})^{2014}=(2yi)^{2014}=$$

$$=(2y)^{2014}\cdot i^{2014}=(2y)^{2014}\cdot i^2=-(2y)^{2014}\in R$$

Επομένως $u\in R$

γ) Είναι:

$$|u|=\left|\left(z-\frac{4}{z}\right)^{2014}\right|\overset{(3)}{=}\left|(z-\bar{z})^{2014}\right|=|z-\bar{z}|^{2014}\le\left(|z|+|\bar{z}|\right)^{2014}=2^{4028}$$

Άρα:

$$|u|\le 2^{4028}$$

δ) Είναι $w_1 = 1 + 2\overline{z}_1 i$ και $w_2 = 1 + 2\overline{z}_2 i$, όπου οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 ικανοποιούν τη σχέση (1), οπότε θα ισχύει ότι $|z_1| = |z_2| = 2$. Άρα οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 ανήκουν στον κύκλο με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 2$, οπότε ισχύει $|z_1 - z_2| \le 4$

Είναι:

$$|w_1 - w_2| = |1 + 2\overline{z}_1 i - 1 - 2\overline{z}_2 i| = |2i(\overline{z}_1 - \overline{z}_2)| =$$

$$= 2|i| \cdot |\overline{z}_1 - \overline{z}_2| = 2|\overline{z_1 - z_2}| = 2|z_1 - z_2| \le 2 \cdot 4 = 8$$

ΘΕΜΑ 5ο :

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z που ικανοποιούν τη σχέση $|z^2 - 2zi| + 2|z| = 2 + |\overline{z} + 2i|$ είναι ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 1$

β) Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός του οποίου η εικόνα ανήκει στον κύκλο C. Να αποδείξετε ότι:

i) $|w + 3z| + |2w + 5z| \ge \frac{1}{2}$ για οποιοδήποτε μιγαδικό αριθμό w

ii) $\sqrt{2} \le |z - 1| + |z^2 + 1| \le 4$

γ) Έστω u, v δύο μιγαδικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μιγαδικός αριθμός z_o με εικόνα στον κύκλο C, ώστε να ισχύει $|z_o^2 + uz_o + v| \ge 1$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|z^2 - 2zi| + 2|z| = 2 + |\overline{z} + 2i| \Leftrightarrow$$

$$|z| \cdot |z - 2i| + 2|z| = 2 + |\overline{z - 2i}| \Leftrightarrow$$

$$|z| \cdot |z - 2i| - |z - 2i| + 2|z| - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$|z - 2i|(|z| - 1) + 2(|z| - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(|z| - 1)(|z - 2i| + 2) = 0 \Leftrightarrow |z| = 1 \quad (1),$$

αφού $|z - 2i| + 2 \ne 0$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 1$ που έχει κέντρο το σημείο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$

β) i) Για οποιοδήποτε μιγαδικό αριθμό w έχουμε:

$$|w + 3z| + |2w + 5z| = |w + 3z| + 2\left|w + \frac{5}{2}z\right| \ge$$

$$\ge |w + 3z| + \left|w + \frac{5}{2}z\right| \ge \left|(w + 3z) - (w + \frac{5}{2}z)\right| = \frac{1}{2}|z| = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Επομένως

$$|w + 3z| + |2w + 5z| \ge \frac{1}{2}$$

ii) Είναι:

$$|z-1|+|z^2+1|\le|z|+1+|z|^2+1\overset{(1)}{=}4$$

οπότε απομένει να αποδείξουμε το αριστερό μέλος της ζητούμενης ανισοτικής σχέσης.
Ισχύει:

$$|z-1|+|z^2+1|\ge|z-1+z^2+1|=|z(z+1)|=|z|\cdot|z+1| \qquad (2)$$

Επειδή $|z|=1$ από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $|z-1|+|z^2+1|\ge|z+1|$ (3)

Είναι προφανές ότι $|z-1|+|z^2+1|\ge|z-1|$ (4)

Αν $z=x+yi$ με $x,y\in[-1,1]$ τότε έχουμε:

- $|z|=1\Rightarrow|z|^2=1\Rightarrow x^2+y^2=1$ (5)
- $|z+1|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2+2x+1}\overset{(5)}{=}\sqrt{1+2x+1}=\sqrt{2(1+x)}=\sqrt{2}\sqrt{1+x}$ (6)
- $|z-1|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2-2x+1}\overset{(5)}{=}\sqrt{1-2x+1}=\sqrt{2(1-x)}=\sqrt{2}\sqrt{1-x}$ (7)

Από τις σχέσεις (3) και (6) προκύπτει ότι:

$$|z-1|+|z^2+1|\ge\sqrt{2}\sqrt{1+x} \qquad (8)$$

Από τις σχέσεις (4) και (7) προκύπτει ότι :

$$|z-1|+|z^2+1|\ge\sqrt{2}\sqrt{1-x} \qquad (9)$$

Αν $x\in[0,1]$ από τη σχέση (8) έχουμε:

$$|z-1|+|z^2+1|\ge\sqrt{2}$$

Αν $x\in[-1,0]$ από τη σχέση (9) έχουμε:

$$|z-1|+|z^2+1|\ge\sqrt{2}$$

Επομένως είναι:

$$\sqrt{2}\le|z-1|+|z^2+1|\le 4$$

γ) Έστω ότι για κάθε $z\in C$ με $|z|=1$ ισχύει:

$$|z^2+uz+v|<1 \qquad (10)$$

Αν στη σχέση (10) θέσουμε διαδοχικά $z=1$ και $z=-1$ έχουμε:

$$|1+u+v|<1 \quad \text{και} \quad |1-u+v|<1$$

οπότε

$$2>|1+u+v|+|1-u+v|\ge|(1+u+v)+(1-u+v)|\Rightarrow$$
$$2>|2+2v|\Rightarrow 2>2|1+v|\Rightarrow|v+1|<1 \qquad (11)$$

Αν στη σχέση (10) θέσουμε διαδοχικά $z=i$ και $z=-i$ έχουμε:

$$|-1+ui+v|<1 \quad \text{και} \quad |-1-ui+v|<1$$

οπότε

$$2>|-1+ui+v|+|-1-ui+v|\ge|(-1+ui+v)+(-1-ui+v)|\Rightarrow$$
$$2>|-2+2v|\Rightarrow 2>2|-1+v|\Rightarrow|v-1|<1 \qquad (12)$$

Από τις σχέσεις (11) και (12) συμπεραίνουμε ότι:

$$2>|v+1|+|v-1|\ge|(v+1)-(v-1)|\Rightarrow 2>2$$

που είναι άτοπο.

Άρα υπάρχει $z_o\in C$ με $|z_o|=1$, ώστε να ισχύει $|z_o^2+uz_o+v|\ge 1$

ΘΕΜΑ 6ο :

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύει:

- $\left|z-3-3i\right| = 2\left|\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{25}\right|$ **και**
- $2\left|\bar{w}-3+3i\right| = \left|iz+3-3i\right|$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z. Στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του Re(z)

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w

γ) Για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w των ερωτημάτων (α) και (β) να αποδείξετε ότι:

$$1 \le |z-w| \le 3 \quad \text{και} \quad 6\sqrt{2}-3 \le |z+w| \le 6\sqrt{2}+3$$

δ) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$k = (z_1 - z_2)\cdot\left(\frac{1}{z_1-3-3i} - \frac{1}{z_2-3-3i}\right)$$

είναι πραγματικός και ισχύει $0 \le k \le 4$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\left|\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{25}\right| = \left|\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right|^{25} = \left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|^{25} = \left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)^{25} = 1^{25} = 1$$

οπότε

$$\left|z-3-3i\right| = 2\left|\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{25}\right| \Leftrightarrow \left|z-(3+3i)\right| = 2$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο $K(3\,,\,3)$ και ακτίνα $\rho = 2$

Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z ισχύει $\left|\mathrm{Re}(z)-x_\kappa\right| \le \rho$, όπου $x_\kappa = 3$ η τετμημένη του κέντρου του κύκλου $(K\,,\,\rho)$ και $\rho = 2$

Είναι:

$$\left|\mathrm{Re}(z)-x_\kappa\right| \le \rho \Leftrightarrow x_\kappa - \rho \le \mathrm{Re}(z) \le x_\kappa + \rho \Leftrightarrow$$

$$3-2 \le \mathrm{Re}(z) \le 3+2 \Leftrightarrow 1 \le \mathrm{Re}(z) \le 5$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του Re(z) είναι το 1 και προκύπτει αν $z = 1+3i$, ενώ η μέγιστη τιμή του είναι το 5 και προκύπτει αν $z = 5+3i$

Σημείωση:

Είναι:

$$\left|z-(3+3i)\right| = 2 \overset{z=x+yi}{\Leftrightarrow} (x-3)^2+(y-3)^2 = 4$$

οπότε

$$(x-3)^2 \le 4 \Leftrightarrow |x-3| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le x-3 \le 2 \Leftrightarrow 1 \le x \le 5$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του Re(z) είναι το 1 και προκύπτει αν $z = 1+3i$, ενώ η μέγιστη τιμή του είναι το 5 και προκύπτει αν $z = 5+3i$

β) Είναι:

$$2\left|\,\overline{w}-3+3i\,\right|=\left|\,iz+3-3i\,\right|\Leftrightarrow 2\left|\,\overline{(w-3-3i)}\,\right|=\left|\,i(z-3-3i)\,\right|\Leftrightarrow$$

$$2|w-3-3i|=|i|\cdot|z-3-3i|\overset{\alpha)}{\Leftrightarrow}2|w-3-3i|=2\Leftrightarrow|w-3-3i|=1\Leftrightarrow|w-(3+3i)|=1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(3\,,\,3)$ και ακτίνα $\rho_1=1$

γ) 1ος τρόπος:

Για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w των ερωτημάτων (α) και (β) έχουμε:

$$|z-w|=\left|\left(z-(3+3i)\right)-\left(w-(3+3i)\right)\right|=|u-v|$$

όπου

$$u=z-(3+3i)\ \text{ και }\ v=w-(3+3i)\ \text{ με }\ |u|=2\ \text{ και }\ |v|=1$$

Ισχύει:

$$|z-w|=|u-v|\le|u|+|v|=2+1=3$$

και

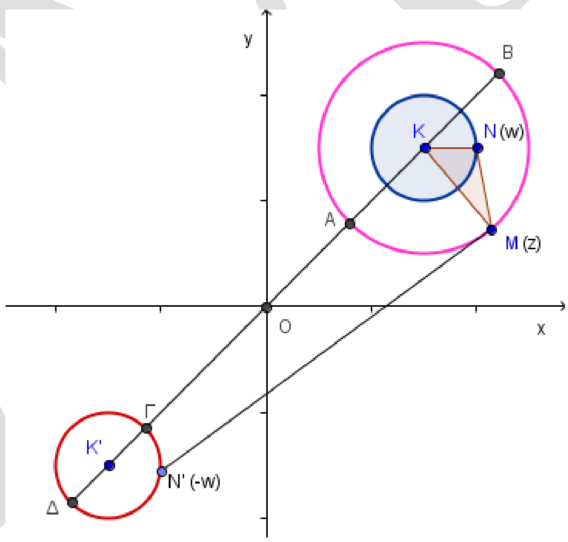
$$|z-w|=|u-v|\ge\big||u|-|v|\big|=|2-1|=1$$

Άρα

$$1\le|z-w|\le3$$

2ος τρόπος: Γεωμετρικά (Υπόδειξη)

Μπορούμε να αποδείξουμε την παραπάνω ανισότητα και **γεωμετρικά** μέσω της τριγωνικής ανισότητας στο τρίγωνο ΚΜΝ του παρακάτω σχήματος.



1ος τρόπος:

Είναι:

$$|z+w|=\left|\left(z-(3+3i)\right)+\left(w-(3+3i)\right)+6(1+i)\right|=|u+v+6(1+i)|$$

Ισχύει:

$$|z+w|=|u+v+6(1+i)|\le|u|+|v|+|6(1+i)|=2+1+6\sqrt{2}=6\sqrt{2}+3$$

και

$$|z+w|=\left|(u+v)+6(1+i)\right|\ge\big||6(1+i)|-|u+v|\big|\ge\big||6(1+i)|-(|u|+|v|)\big|=\left|6\sqrt{2}-3\right|=6\sqrt{2}-3$$

Άρα

$$6\sqrt{2}-3\le|z+w|\le6\sqrt{2}+3$$

2ος τρόπος : Γεωμετρικά (Υπόδειξη)

Είναι:

$$|z+w| = |z-(-w)| = (MN') \le (B\Delta) = 6\sqrt{2}+3$$

και

$$|z+w| = |z-(-w)| = (MN') \ge (A\Gamma) = 6\sqrt{2}-3, \text{ διότι } \dots$$

Άρα …

δ) Θέτουμε $u = z-(3+3i)$, τότε έχουμε:

$$|u| = |z-(3+3i)| = 2 \qquad (1)$$

και

$$|u| = 2 \Leftrightarrow |u|^2 = 4 \Leftrightarrow u\cdot\bar{u} = 4 \Leftrightarrow \bar{u} = \frac{4}{u} \qquad (2)$$

Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z, τότε:

$$k = (z_1 - z_2)\left(\frac{1}{z_1-3-3i} - \frac{1}{z_2-3-3i}\right) =$$

$$= \left((z_1-3-3i)-(z_2-3-3i)\right)\cdot\left(\frac{1}{z_1-3-3i} - \frac{1}{z_2-3-3i}\right) =$$

$$= (u_1-u_2)\left(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_2}\right) = \frac{1}{4}(u_1-u_2)\left(\frac{4}{u_1}-\frac{4}{u_2}\right) \overset{(2)}{=}$$

$$= \frac{1}{4}(u_1-u_2)(\bar{u}_1-\bar{u}_2) = \frac{1}{4}(u_1-u_2)\left(\overline{u_1-u_2}\right) = \frac{1}{4}|u_1-u_2|^2$$

Άρα ο αριθμός k είναι πραγματικός και ισχύει:

- $k = \frac{1}{4}|u_1-u_2|^2 \ge 0$ και
- $k = \frac{1}{4}|u_1-u_2|^2 \le \frac{1}{4}\left(|u_1|+|u_2|\right)^2 \overset{(1)}{=} \frac{1}{4}(2+2)^2 = 4$

Δηλαδή $0 \le k \le 4$

ΘΕΜΑ 7ο :

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση:

$$|iz+8| = 2|2iz+1|$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 2$

β) Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 είναι σημεία του προηγούμενου γεωμετρικού τόπου και ισχύει $|z_1 + xz_2| > \sqrt{3}$ για κάθε $x \in R$, να αποδείξετε ότι $|Re(z_1\bar{z}_2)| < 2$

γ) Έστω πραγματικός αριθμός α με $\alpha \in (-1,1)$. Αν z μιγαδικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει:

$$z^4 + 2\alpha z^3 + 8\alpha z + 16 = 0 \qquad (1)$$

να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού z:

i) Ανήκει στο γεωμετρικό τόπο του (α) ερωτήματος

ii) Δεν ανήκει στους άξονες $x'x$ και $y'y$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|iz+8|=2|2iz+1| \Leftrightarrow |iz+8|^2=4|2iz+1|^2 \Leftrightarrow$$

$$(iz+8)\left(\overline{iz+8}\right)=4(2iz+1)\left(\overline{2iz+1}\right) \Leftrightarrow$$

$$(iz+8)(-i\overline{z}+8)=4(2iz+1)(-2i\overline{z}+1) \Leftrightarrow$$

$$|z|^2+8iz-8i\overline{z}+64=16|z|^2+8iz-8i\overline{z}+4 \Leftrightarrow$$

$$15|z|^2=60 \Leftrightarrow |z|^2=4 \Leftrightarrow |z|=2$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2$

β) Είναι:

$$|z_1|=2 \quad \text{και} \quad |z_2|=2$$

οπότε έχουμε:

$$|z_1+xz_2|>\sqrt{3} \Leftrightarrow |z_1+xz_2|^2>3 \Leftrightarrow (z_1+xz_2)\cdot\left(\overline{z_1+xz_2}\right)>3 \Leftrightarrow$$

$$(z_1+xz_2)\cdot(\overline{z}_1+x\overline{z}_2)>3 \Leftrightarrow |z_1|^2+xz_1\overline{z}_2+x\overline{z}_1z_2+x^2|z_2|^2>3 \Leftrightarrow$$

$$4x^2+(z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2)\cdot x+1>0 \Leftrightarrow 4x^2+\left(z_1\overline{z}_2+\overline{z_1\overline{z}_2}\right)\cdot x+1>0 \Leftrightarrow$$

$$4x^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)\cdot x+1>0, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Επομένως για τη διακρίνουσα του τριωνύμου $4x^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)\cdot x+1$ ισχύει:

$$\Delta<0 \Leftrightarrow 4\left(\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)\right)^2-16<0 \Leftrightarrow \left(\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)\right)^2<4 \Leftrightarrow \left|\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)\right|<2$$

γ) i) 1ος τρόπος:

Αν z μιγαδικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει η σχέση (1), τότε έχουμε:

$$z^4+2\alpha z^3+8\alpha z+16=0 \Leftrightarrow z^3(z+2\alpha)=-8(\alpha z+2)$$

Άρα

$$|z|^3\cdot|z+2\alpha|=8|\alpha z+2| \qquad (2)$$

Αν υποθέσουμε ότι $|z|>2$, τότε $|z|^3>8$ και από τη σχέση (2) έχουμε:

$$|z+2\alpha|<|\alpha z+2| \Leftrightarrow |z+2\alpha|^2<|\alpha z+2|^2 \Leftrightarrow$$

$$(z+2\alpha)\left(\overline{z+2\alpha}\right)<(\alpha z+2)\left(\overline{\alpha z+2}\right) \Leftrightarrow$$

$$(z+2\alpha)(\overline{z}+2\alpha)<(\alpha z+2)(\alpha\overline{z}+2) \Leftrightarrow$$

$$|z|^2+2\alpha z+2\alpha\overline{z}+4\alpha^2<\alpha^2|z|^2+2\alpha z+2\alpha\overline{z}+4 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha^2-1)|z|^2-4(\alpha^2-1)>0 \Leftrightarrow (\alpha^2-1)\left(|z|^2-4\right)>0 \qquad (3)$$

Επειδή $\alpha\in(-1,1)$ το $\alpha^2-1<0$ και από τη σχέση (3) προκύπτει ότι:

$$|z|^2-4<0 \Rightarrow |z|^2<4 \Rightarrow |z|<2 \text{ , που είναι άτοπο, αφού } |z|>2$$

Αν υποθέσουμε ότι $|z| < 2$, τότε ομοίως προκύπτει $|z| > 2$, που είναι επίσης άτοπο.
Επομένως υποχρεωτικά ισχύει ότι $|z| = 2$, άρα οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, για τους οποίους ισχύει η σχέση (1) ανήκουν στο κύκλο $C: x^2 + y^2 = 4$, δηλαδή στο γεωμετρικό τόπο του (α) ερωτήματος.

2ος τρόπος:

Αν υποθέσουμε ότι $z = 0$, τότε από την (1) έχουμε $16 = 0$, που είναι άτοπο.
Για $z \neq 0$ έχουμε:

$$z^4 + 2\alpha z^3 + 8\alpha z + 16 = 0 \overset{\div z^2 \neq 0}{\Leftrightarrow} z^2 + 2\alpha z + \frac{8\alpha}{z} + \frac{16}{z^2} = 0 \Leftrightarrow \left(z^2 + \frac{16}{z^2}\right) + 2\alpha\left(z + \frac{4}{z}\right) = 0 \quad (4)$$

Αν θέσουμε $z + \dfrac{4}{z} = u$ (5), τότε έχουμε:

$$\left(z + \frac{4}{z}\right)^2 = u^2 \Rightarrow z^2 + 2z \cdot \frac{4}{z} + \frac{16}{z^2} = u^2 \Rightarrow z^2 + \frac{16}{z^2} = u^2 - 8,$$

οπότε η (4) ισοδύναμα γράφεται:

$$(u^2 - 8) + 2\alpha u = 0 \Leftrightarrow u^2 + 2\alpha u - 8 = 0 \quad (6)$$

Είναι:

$$\Delta = 4\alpha^2 + 32 = 4(\alpha^2 + 8) > 0$$

Οπότε οι ρίζες της εξίσωσης (6) είναι:

$$u = \frac{-2\alpha \pm 2\sqrt{\alpha^2 + 8}}{2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 8} \quad (7)$$

Επομένως η εξίσωση (5) ισοδύναμα γράφεται:

$$z^2 - uz + 4 = 0 \overset{(7)}{\Leftrightarrow} z^2 + \left(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 8}\right)z + 4 = 0 \quad (8)$$

Είναι:

$$\Delta = \left(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 8}\right)^2 - 16 = \alpha^2 + \alpha^2 + 8 \pm 2\alpha\sqrt{\alpha^2 + 8} - 16 = 2\left(\alpha^2 - 4 \pm \alpha\sqrt{\alpha^2 + 8}\right)$$

Από τη σχέση $-1 < \alpha < 1$ έχουμε:

- $0 \leq \alpha^2 < 1 \Rightarrow -4 \leq \alpha^2 - 4 < -3$
- $-\sqrt{\alpha^2 + 8} < \alpha\sqrt{\alpha^2 + 8} < \sqrt{\alpha^2 + 8} \Leftrightarrow -\sqrt{\alpha^2 + 8} < -\alpha\sqrt{\alpha^2 + 8} < \sqrt{\alpha^2 + 8}$

οπότε

$$\alpha^2 - 4 + \alpha\sqrt{\alpha^2 + 8} < -3 + \sqrt{\alpha^2 + 8} < -3 + 3 = 0$$

και

$$\alpha^2 - 4 - \alpha\sqrt{\alpha^2 + 8} < -3 + \sqrt{\alpha^2 + 8} < -3 + 3 = 0$$

Άρα σε κάθε περίπτωση είναι $\Delta < 0$
Οπότε οι ρίζες z_1, z_2 της εξίσωσης (8) είναι μιγαδικοί συζυγείς με $z_1 \cdot z_2 = 4$
Επομένως έχουμε:

$$z_1 \cdot z_2 = 4 \Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z_1} = 4 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 4 \Leftrightarrow |z_1| = 2$$

Άρα για κάθε ρίζα z της εξίσωσης ισχύει ότι $|z| = 2$, οπότε οι εικόνες όλων των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει η σχέση (1) ανήκουν στο κύκλο $C: x^2 + y^2 = 4$, δηλαδή στο γεωμετρικό τόπο του (α) ερωτήματος.

ii) • Αν $y=0$, τότε $z=x+0\cdot i=x\in R$ (πραγματικός αριθμός) και επειδή $|z|=2\Rightarrow z=\pm 2$

Για $z=2$ έχω:

$$2^4+2\alpha\cdot 2^3+8\alpha\cdot 2+16=0\Leftrightarrow \alpha=-1$$, που είναι άτοπο, αφού $\alpha\in(-1,1)$

Για $z=-2$ έχω:

$$(-2)^4+2\alpha\cdot(-2)^3+8\alpha\cdot(-2)+16=0\Leftrightarrow \alpha=1$$, που είναι άτοπο, αφού $\alpha\in(-1,1)$

Άρα $y\neq 0$

• Αν $x=0$, τότε $z=0+yi=yi\in I$ (φανταστικός αριθμός) και επειδή $|z|=2\Rightarrow z=\pm 2i$

Για $z=2i$ έχω:

$$(2i)^4+2\alpha\cdot(2i)^3+8\alpha\cdot 2i+16=0\Leftrightarrow$$

$$2^4i^4+2\alpha\cdot 2^3i^3+8\alpha\cdot 2i+16=0\Leftrightarrow$$

$$16-16\alpha i+16\alpha i+16=0\Leftrightarrow 32=0$$, που είναι άτοπο.

Για $z=-2i$ έχω:

$$(-2i)^4+2\alpha\cdot(-2i)^3+8\alpha\cdot(-2i)+16=0\Leftrightarrow$$

$$2^4i^4+2\alpha\cdot(-2)^3i^3-8\alpha\cdot 2i+16=0\Leftrightarrow$$

$$16+16\alpha i-16\alpha i+16=0\Leftrightarrow 32=0$$, που είναι άτοπο.

Άρα $x\neq 0$

Επομένως οι μιγαδικοί που ικανοποιούν τη σχέση (1) είναι της μορφής $x+yi$ με $xy\neq 0$

ΘΕΜΑ 8ο :

Έστω συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο διάστημα $[1,2]$ με $f(1)=-1$ και $f(2)=1$. Θεωρούμε επίσης τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $|z-2i|=|z|$. Να αποδείξετε ότι:

α) Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι η ευθεία y=1

β) Υπάρχει ακριβώς μια τιμή του Re(z) τέτοια, ώστε ο αριθμός $w=z^2-\frac{1}{z}$ να είναι πραγματικός.

γ) $-1\leq f(|z|^2)\leq 1$, αν $Re(z)\in[0,1]$

ΛΥΣΗ

α) Έστω $z=x+yi$, $x,y\in R$ με εικόνα στο επίπεδο το σημείο $M(x,y)$.

Είναι:

$$|z-2i|=|z|\Leftrightarrow|x+yi-2i|=|x+yi|\Leftrightarrow|x+(y-2)i|=|x+yi|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+(y-2)^2}=\sqrt{x^2+y^2}\Leftrightarrow x^2+(y-2)^2=x^2+y^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-4y+4=x^2+y^2\Leftrightarrow -4y+4=0\Leftrightarrow 4y=4\Leftrightarrow y=1$$

β) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z είναι σημεία της ευθείας $y=1$, άρα είναι $z=x+i$, $x\in R$

Είναι:

$$w=z^2-\frac{1}{z}=(x+i)^2-\frac{1}{x+i}=(x+i)^2-\frac{x-i}{(x+i)(x-i)}=$$

$$=x^2+2xi-1-\frac{x-i}{x^2+1}=\left(x^2-1-\frac{x}{x^2+1}\right)+\left(2x+\frac{1}{x^2+1}\right)i$$

Είναι:

$$w\in R \Leftrightarrow 2x+\frac{1}{x^2+1}=0 \Leftrightarrow 2x^3+2x+1=0 \quad (1)$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση (1) έχει μια ακριβώς ρίζα ως προς x στο R, αφού $x=\text{Re}(z)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=2x^3+2x+1$, $x\in R$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=6x^2+2$, $x\in R$

Για κάθε $x\in R$ είναι $g'(x)>0$, οπότε η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο R

Έχουμε:

- g συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R
- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3+2x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3=-\infty$ και

  $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^3+2x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3=+\infty$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι $g(R)=R$, οπότε υπάρχει ένα $\xi\in R$ τέτοιο, ώστε $g(\xi)=0$ και μάλιστα είναι μοναδικό, αφού η g είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Έχουμε $|z|^2=x^2+1$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $-1\le f(x^2+1)\le 1$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $[1,2]$ με $f(1)<f(2)$, επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$

Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι $\text{Re}(z)\in[0,1]$, οπότε έχουμε:

$$0\le x\le 1 \Rightarrow 0\le x^2\le 1 \Rightarrow 1\le x^2+1\le 2 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow}$$

$$f(1)\le f(x^2+1)\le f(2) \Rightarrow -1\le f(x^2+1)\le 1$$

ΘΕΜΑ 9ο :

I) Να αποδείξετε ότι για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύει η σχέση:

$$|z-w|^2=|z|^2+|w|^2-2\text{Re}(z\overline{w})$$

II) Δίνονται:

- **η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(R)=R$ και**
- **οι μιγαδικοί αριθμοί $z=3+f(2)i$ και $w=f^{-1}(2)+3i$**

Αν ισχύει $|z|^2 + |w|^2 = 2\mathrm{Re}(z\overline{w})$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $z = w$

β) Οι συναρτήσεις f και g με $g(x) = f(2x - f(x)) - x$, $x \in R$, είναι γνησίως φθίνουσες.

γ) Ισχύει η ισοδυναμία:

$$f^{-1}(x) = 2x - f(x) \Leftrightarrow g(x) = 0,\ x \in R$$

δ) Αν επιπλέον η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (1, 4)$ και $\xi_2 \in (2, 3)$ τέτοια, ώστε $3f'(\xi_1) = g'(\xi_2) + 1$

ΛΥΣΗ

I) Είναι:

$$|z-w|^2 = (z-w)\left(\overline{z-w}\right) = (z-w)(\overline{z}-\overline{w}) = z\overline{z} - z\overline{w} - \overline{z}w + w\overline{w} =$$

$$= |z|^2 + |w|^2 - (z\overline{w} + \overline{z}w) = |z|^2 + |w|^2 - \left(z\overline{w} + \overline{z\overline{w}}\right) = |z|^2 + |w|^2 - 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) \quad (1)$$

II) α) Είναι:

$$|z|^2 + |w|^2 = 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) \Leftrightarrow |z|^2 + |w|^2 - 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow |z-w|^2 = 0 \Leftrightarrow |z-w| = 0 \Leftrightarrow z - w = 0 \Leftrightarrow z = w$$

β) Είναι:

$$z = w \Leftrightarrow 3 + f(2)i = f^{-1}(2) + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 3 \\ f^{-1}(2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 3 \\ f(3) = 2 \end{cases}$$

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, επομένως ή θα είναι γνησίως αύξουσα ή θα είναι γνησίως φθίνουσα.

  Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε:

  $$2 < 3 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(2) < f(3) \Rightarrow 3 < 2$$

  που είναι άτοπο. Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

- Για τυχαία $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow -f(x_1) < -f(x_2)$

  Είναι:

  $$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ -f(x_1) < -f(x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 < 2x_2 \\ -f(x_1) < -f(x_2) \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 2x_1 - f(x_1) < 2x_2 - f(x_2) \overset{f\downarrow}{\Rightarrow}$$

  $$\Rightarrow f\left(2x_1 - f(x_1)\right) > f\left(2x_2 - f(x_2)\right)$$

  Είναι:

  $$\begin{cases} f\left(2x_1 - f(x_1)\right) > f\left(2x_2 - f(x_2)\right) \\ -x_1 > -x_2 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} f\left(2x_1 - f(x_1)\right) - x_1 > f\left(2x_2 - f(x_2)\right) - x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

  Επομένως η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα.

γ) Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f^{-1}(x) = 2x - f(x) \Leftrightarrow f\left(2x - f(x)\right) = x \Leftrightarrow f\left(2x - f(x)\right) - x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

δ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, επομένως ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[1, 4]$, οπότε θα υπάρχει $\xi_1 \in (1, 4)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} \Rightarrow f'(\xi_1) = \frac{f(4) - f(1)}{3} \Rightarrow 3f'(\xi_1) = f(4) - f(1) \quad (2)$$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g(x) = f\left(2x - f(x)\right) - x$$

Η συνάρτηση $2x - f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο R, ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων, οπότε η συνάρτηση $f\left(2x - f(x)\right)$ είναι παραγωγίσιμη στο R, ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων και η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R, ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων.

Επομένως η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[2, 3]$, οπότε θα υπάρχει $\xi_2 \in (2, 3)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(\xi_2) = \frac{g(3) - g(2)}{3 - 2} \Rightarrow g'(\xi_2) = g(3) - g(2) \quad (3)$$

Για $x = 2$ είναι $g(2) = f\left(2 \cdot 2 - f(2)\right) - 2 = f(4-3) - 2 = f(1) - 2$, οπότε $f(1) - g(2) = 2 \quad (4)$

Για $x = 3$ είναι $g(3) = f\left(2 \cdot 3 - f(3)\right) - 3 = f(6-2) - 3 = f(4) - 3$, οπότε $f(4) - g(3) = 3 \quad (5)$

Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$3f'(\xi_1) - g'(\xi_2) = \left(f(4) - f(1)\right) - \left(g(3) - g(2)\right) \Rightarrow$$

$$3f'(\xi_1) - g'(\xi_2) = \left(f(4) - g(3)\right) - \left(f(1) - g(2)\right) \overset{(4),(5)}{\Rightarrow}$$

$$3f'(\xi_1) - g'(\xi_2) = 3 - 2 \Rightarrow 3f'(\xi_1) = g'(\xi_2) + 1$$

ΘΕΜΑ 10ο :

α) Να λύσετε την εξίσωση $z^2 - 6\sigma\upsilon\nu\theta \cdot z + 5\sigma\upsilon\nu^2\theta + 4 = 0$, όπου $\theta \in R$

β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών z_1, z_2 της εξίσωσης κινούνται πάνω στην έλλειψη $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ για τις διάφορες τιμές του $\theta \in R$

γ) Για $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$

δ) Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$ και z_1 η ρίζα της εξίσωσης με $Im(z_1) > 0$, να βρείτε τιμές του $\nu \in N^*$, ώστε $z_1^\nu \in R$

ε) Αν $A(2, 3)$ και C το τμήμα της έλλειψης που ορίζεται από τα σημεία (x, y) με $x \in [-1, 2]$ και $y > 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της C, που απέχει από το A ελάχιστη απόσταση και ένα τουλάχιστον σημείο της C που απέχει από το A μέγιστη απόσταση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$\Delta=(-6\sigma\upsilon\nu\theta)^2-4\left(5\sigma\upsilon\nu^2\theta+4\right)=36\sigma\upsilon\nu^2\theta-20\sigma\upsilon\nu^2\theta-16=-16\left(1-\sigma\upsilon\nu^2\theta\right)=-16\eta\mu^2\theta$$

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$z_{1,2}=\frac{6\sigma\upsilon\nu\theta\pm i4\eta\mu\theta}{2}=3\sigma\upsilon\nu\theta\pm2\eta\mu\theta\, i$$

β) Αν $z_{1,2}=x+yi\ ,x,y\in R$, τότε:

$$\begin{cases} x=3\sigma\upsilon\nu\theta \\ y=\pm 2\eta\mu\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{3}=\sigma\upsilon\nu\theta \\ \dfrac{y}{\pm 2}=\eta\mu\theta \end{cases} \quad (1)$$

Είναι:

$$\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta=1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

Επομένως οι εικόνες των ριζών z_1 , z_2 της εξίσωσης κινούνται πάνω στην έλλειψη $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, για τις διάφορες τιμές του $\theta\in R$

γ) Έχουμε:

$$|z_1-z_2|=|4i\eta\mu\theta|=4\eta\mu\theta\ ,\ \ 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$$

Είναι:

$$0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\Rightarrow 0\le\eta\mu\theta\le\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow 0\le 4\eta\mu\theta\le 2\sqrt{2}$$

Άρα

$|z_1-z_2|\le 2\sqrt{2}$, οπότε η μέγιστη τιμή του $|z_1-z_2|$ είναι $2\sqrt{2}$

δ) Για $\theta=\frac{\pi}{2}$ έχουμε $z_1=2i$, άρα $z_1{}^{\nu}=2^{\nu}i^{\nu}$

Για $\nu=4\kappa$, $\kappa\in N^*$ έχουμε $z_1{}^{\nu}=2^{\nu}\in R$

Για $\nu=4\kappa+1$, $\kappa\in N^*$ έχουμε $z_1{}^{\nu}=2^{\nu}i\notin R$

Για $\nu=4\kappa+2$, $\kappa\in N^*$ έχουμε $z_1{}^{\nu}=-2^{\nu}\in R$

Για $\nu=4\kappa+3$, $\kappa\in N^*$ έχουμε $z_1{}^{\nu}=-2^{\nu}i\notin R$

Άρα $\nu=2\mu$, $\mu\in N^*$

ε) Έχουμε:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\Leftrightarrow 4x^2+9y^2=36\Leftrightarrow y^2=\frac{36-4x^2}{9}\Leftrightarrow y^2=\frac{4\left(9-x^2\right)}{9}\overset{y>0}{\Leftrightarrow} y=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$$

Αν $M(x,y)$ σημείο του C ,τότε:

$$d(M,A)=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+\left(\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}-3\right)^2}$$

Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{(x-2)^2+\left(\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}-3\right)^2}$ είναι συνεχής στο $[-1,2]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων, άρα από το Θεώρημα Μέγιστης – Ελάχιστης Τιμής θα υπάρχουν $x_1,x_2\in[-1,2]$ τέτοια, ώστε:

$$m=f(x_1) \text{ και } M=f(x_2), \text{ με } m\le f(x)\le M$$

Άρα υπάρχουν σημεία του C , που απέχουν ελάχιστη και μέγιστη απόσταση από το σημείο Α.

ΘΕΜΑ 11ο :

Δίνονται οι μιγαδικοί z , w και u, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $|z-1|=\mathrm{Re}(z)+1$ **(1)**
- $|w-2|^2-|w-2i|^2=8$ **(2)**
- $w\cdot u=2$ **(3)**

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y^2=4x$

β) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w είναι η ευθεία (ε) με εξίσωση $x-y+2=0$

γ) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών u είναι ο κύκλος με κέντρο $K\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{2}}{2}$, με εξαίρεση το σημείο του $O(0,0)$

δ) Να βρείτε σημείο της παραβολής, το οποίο απέχει ελάχιστη απόσταση από την ευθεία (ε)

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός z με $z=u$ και $\mathrm{Im}(z)<0$

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $z=x+yi$ με $x,y\in\mathbb{R}$ και από τη σχέση (1) ισοδύναμα έχουμε:

$$|x+yi-1|=x+1\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+y^2}=x+1\overset{x>-1}{\Leftrightarrow}(x-1)^2+y^2=(x+1)^2\Leftrightarrow$$

$$x^2-2x+1+y^2=x^2+2x+1\Leftrightarrow y^2=4x\,,\quad x\ge 0$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y^2=4x$

β) Θέτουμε $w=\alpha+\beta i$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και από τη σχέση (2) ισοδύναμα έχουμε:

$$|\alpha+\beta i-2|^2-|\alpha+\beta i-2i|^2=8\Leftrightarrow(\alpha-2)^2+\beta^2-\left(\alpha^2+(\beta-2)^2\right)=8\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2-4\alpha+4+\beta^2-\alpha^2-\beta^2+4\beta-4=8\Leftrightarrow-4\alpha+4\beta-8=0\Leftrightarrow\alpha-\beta+2=0$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w είναι η ευθεία με εξίσωση $x-y+2=0$

γ) Θέτουμε $u = x + yi$ με $x, y \in R$ και από τη σχέση (3) ισοδύναμα έχουμε:

$$w = \frac{2}{u} \overset{u\neq 0}{\Leftrightarrow} \alpha + \beta i = \frac{2}{x+yi} \Leftrightarrow \alpha + \beta i = \frac{2(x-yi)}{x^2+y^2} \Leftrightarrow \left(\alpha = \frac{2x}{x^2+y^2} \text{ και } \beta = -\frac{2y}{x^2+y^2} \right)$$

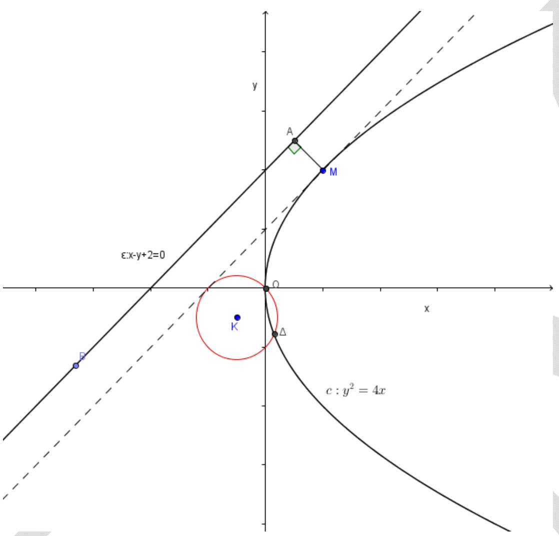
Όμως $\alpha - \beta + 2 = 0$, άρα έχουμε:

$$\frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{2y}{x^2+y^2} + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2x + 2y = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 + x + y = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

Για $x = y = 0$ επαληθεύεται η εξίσωση, όμως τότε $u = 0$, άτοπο. Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών u είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$, με εξαίρεση το σημείο του $O(0,0)$

δ) 1ος τρόπος: Αν $M(x_1, y_1)$ σημείο της παραβολής ,τότε η εξίσωση εφαπτομένης της στο Μ είναι:



$$yy_1 = 2(x + x_1) \Leftrightarrow 2x - y_1 y + 2x_1 = 0 \text{ με } \lambda_{\varepsilon\varphi} = \frac{2}{y_1}$$

Αν η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) τότε:

$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{y_1} = 1 \Leftrightarrow y_1 = 2 \text{ και } x_1 = 1$$

Άρα το σημείο $M(1,2)$, απέχει ελάχιστη απόσταση από την ευθεία (ε), (απόσταση παραλλήλων ευθειών).

2ος τρόπος:

Αν $M(x, y)$ είναι σημείο της παραβολής, τότε:

$$d(M,\varepsilon) = \frac{|x-y+2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\left|\frac{y^2}{4} - y + 2\right|}{\sqrt{2}} = \frac{|y^2 - 4y + 8|}{4\sqrt{2}} = \frac{y^2 - 4y + 8}{4\sqrt{2}}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(y) = y^2 - 4y + 8$, $y \in R$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και για κάθε $y \in R$ έχουμε:

$$f'(y) = 2y - 4$$

Είναι:

- $f'(y) = 0 \Leftrightarrow 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 2$
- $f'(y) > 0 \Leftrightarrow 2y - 4 > 0 \Leftrightarrow y > 2$

Το πρόσημο της $f'(y)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(y)$	$-$	0	$+$
$f(y)$	↘	ελαχ.	↗

Η συνάρτηση f παίρνει ελάχιστη τιμή για $y = 2$. Για $y = 2$ είναι $x = 1$, οπότε το σημείο $M(1,2)$ απέχει ελάχιστη απόσταση από την ευθεία (ε).

ε) Λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4x \\ x^2+y^2+x+y=0 \end{cases} \overset{y<0}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{cases} y = -2\sqrt{x} & (4) \\ x^2+5x-2\sqrt{x}=0 & (5) \end{cases}$$

Επειδή $y<0$ από τη σχέση (4) συμπεραίνουμε ότι $x>0$

Για $x>0$ η σχέση (5) ισοδύναμα γράφεται:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x}}+5\frac{x}{\sqrt{x}}-2=0 \Leftrightarrow x\sqrt{x}+5\sqrt{x}-2=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x\sqrt{x}+5\sqrt{x}-2$, $x>0$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{5}{2\sqrt{x}}$, $x>0$

Είναι:

$$g'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $A=(0,+\infty)$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x\sqrt{x}+5\sqrt{x}-2\right)=-2$$

και

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(x\sqrt{x}+5\sqrt{x}-2\right)=+\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι $g(A)=(-2,+\infty)$

Το $0\in g(A)$ και η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο Α, οπότε η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $A=(0,+\infty)$

Συνεπώς υπάρχει μοναδικός μιγαδικός z με $z=w$ και $\text{Im}(z)<0$

ΘΕΜΑ 12ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ όπου $\alpha,\beta,\gamma\in R$ για τους οποίους ισχύει $\beta^2<3\alpha\gamma$

α) Να αποδείξετε ότι η $f(x)=0$ έχει δύο μιγαδικές ρίζες z_1 , z_2

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w=\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός και μικρότερος της μονάδας.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=xe^x$, $x>0$. Να αποδείξετε ότι:

i) Υπάρχει μοναδικό $x_o\in(0,+\infty)$ τέτοιος, ώστε να ισχύει $f(x_o)\cdot g(x_o)=\alpha$

ii) Η συνάρτηση $h(x)=\frac{g(x)f(x_o)-\alpha}{f(x_o)(x-x_o)}$ είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού της.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\alpha \neq 0$, διότι αν ήταν $\alpha = 0$, τότε από τη σχέση $\beta^2 < 3\alpha\gamma$ προκύπτει $\beta^2 < 0$ που είναι άτοπο, αφού $\beta \in R$. Άρα το $f(x)$ είναι τριώνυμο $2^{ου}$ βαθμού, για τη διακρίνουσα Δ του οποίου έχουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \quad \text{και} \quad \beta^2 < 3\alpha\gamma$$

οπότε

$$\Delta < 3\alpha\gamma - 4\alpha\gamma \Rightarrow \Delta < -\alpha\gamma \Rightarrow \Delta < 0$$

αφού $$0 \leq \beta^2 < 3\alpha\gamma \Rightarrow \alpha\gamma > 0 \Rightarrow -\alpha\gamma < 0$$

Επομένως η εξίσωση έχει δύο μιγαδικές (συζυγείς) ρίζες z_1, z_2

β) Ισχύουν:

$$z_1 + z_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad z_1 \cdot z_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Επίσης

$$z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 \cdot z_2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} - 2\frac{\gamma}{\alpha}$$

οπότε

$$w = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1 z_2} = \frac{\frac{\beta^2}{\alpha^2} - 2\frac{\gamma}{\alpha}}{\frac{\gamma}{\alpha}} = \frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha\gamma} \in R$$

Επιπλέον

$$w = \frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha\gamma} < \frac{3\alpha\gamma - 2\alpha\gamma}{\alpha\gamma} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha\gamma} = 1$$

οπότε

$$w < 1$$

γ) i) Είναι:

$$f(x) \cdot g(x) = \alpha \Leftrightarrow (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x)e^x = \alpha \Leftrightarrow$$

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x = \alpha e^{-x} \Leftrightarrow x^3 + \frac{\beta}{\alpha}x^2 + \frac{\gamma}{\alpha}x - e^{-x} = 0$$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $x^3 + \frac{\beta}{\alpha}x^2 + \frac{\gamma}{\alpha}x - e^{-x} = 0$ έχει μοναδική θετική λύση x_o.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = x^3 + \frac{\beta}{\alpha}x^2 + \frac{\gamma}{\alpha}x - e^{-x}$, $x \geq 0$

Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$\varphi'(x) = 3x^2 + 2\frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} + e^{-x}$$

Η διακρίνουσα Δ του τριωνύμου $3x^2 + 2\frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}$ είναι: $\Delta = 4\frac{\beta^2}{\alpha^2} - 12\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4}{\alpha^2}(\beta^2 - 3\alpha\gamma) < 0$

και επειδή ο συντελεστής του x^2, στο τριώνυμο, είναι θετικός έχουμε:

$$3x^2 + 2\frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} > 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

Επιπλέον $e^{-x} > 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε $\varphi'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$. Άρα η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της και

- $\varphi(0) = -1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3 + \frac{\beta}{\alpha}x^2 + \frac{\gamma}{\alpha}x - e^{-x}\right) = +\infty$

αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^3 + \frac{\beta}{\alpha}x^2 + \frac{\gamma}{\alpha}x\right) = \lim_{x\to+\infty}x^3 = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}e^{-x} = 0$$

Επομένως για το σύνολο τιμών της φ έχουμε $\varphi([0, +\infty)) = [-1, +\infty)$.

Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της φ και $\varphi(0) \neq 0$, οπότε θα υπάρχει $x_o \in (0, +\infty)$ και μάλιστα μοναδικό, αφού η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα, ώστε $\varphi(x_o) = 0$

Δηλαδή θα υπάρχει μοναδικό $x_o \in (0, +\infty)$ τέτοιος, ώστε $f(x_o)\cdot g(x_o) = \alpha$ (1)

ii) Το πεδίο ορισμού της h είναι $A_h = (0, x_o)\cup(x_o, +\infty)$. Η συνάρτηση h της οποίας ο τύπος γράφεται

$$h(x) = \frac{g(x)f(x_o) - \alpha}{f(x_o)(x - x_o)} \overset{(1)}{=} \frac{g(x)f(x_o) - g(x_o)f(x_o)}{f(x_o)(x - x_o)} = \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o}$$

είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της με

$$h'(x) = \frac{g'(x)(x - x_o) - g(x) + g(x_o)}{(x - x_o)^2} = \frac{1}{x - x_o}\left[g'(x) - \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o}\right] \quad (2)$$

Έστω $x > x_o$, τότε στο διάστημα $[x_o, x]$ η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (x_o, x)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi_1) = \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o}$ (3)

Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$h'(x) = \frac{1}{x - x_o}\left(g'(x) - g'(\xi_1)\right)$$

Η g είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με

- $g'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$ και
- $g''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x > 0$ για κάθε $x > x_o > 0$

Επομένως η συνάρτηση g' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για κάθε $x > \xi_1$ έχουμε $g'(x) > g'(\xi_1)$ και κατά συνέπεια

$$h'(x) = \frac{1}{x - x_o}(g'(x) - g'(\xi_1)) > 0 \text{ για κάθε } x > x_o > 0$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(x_o, +\infty)$

Έστω $0 < x < x_o$, τότε στο διάστημα $[x, x_o]$ η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (x, x_o)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi_2) = \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o}$ (4)

Από τις σχέσεις (2) και (4) έχουμε:

$$h'(x)=\frac{1}{x-x_o}\left(g'(x)-g'(\xi_2)\right)$$

Η g είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με

- $g'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$ και
- $g''(x)=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x>0$ για κάθε $x\in(0\,,x_o)$

Επομένως η συνάρτηση g' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για κάθε $x<\xi_2$ έχουμε $g'(x)<g'(\xi_2)$ και κατά συνέπεια

$$h'(x)=\frac{1}{x-x_o}(g'(x)-g'(\xi_2))>0 \text{ για κάθε } x\in(0\,,x_o)$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0\,,x_o)$

ΘΕΜΑ 13ο :

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z , w οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση:

$$\left|z\overline{w}+2i\right|=\left|z\right|\cdot\left|w\right|$$

α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Im}(\overline{z}w)=1$

β) Να αποδείξετε ότι $|z|^2+|w|^2+\mathrm{Re}(\overline{z}w)\geq\sqrt{3}$

γ) Αν $|z|^2+|w|^2+\mathrm{Re}(\overline{z}w)=\sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι $|z|^2=|w|^2=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

δ) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $\dfrac{|z|^2|w|^2}{|z|^2|w|^2+\mathrm{Re}(\overline{z}w)}$

ΛΥΣΗ

α) 1ος τρόπος:

Είναι:

$$\left|z\overline{w}+2i\right|=\left|z\right|\cdot\left|w\right|\Leftrightarrow$$

$$\left|z\overline{w}+2i\right|^2=\left|z\right|^2\cdot\left|w\right|^2\Leftrightarrow$$

$$(z\overline{w}+2i)\cdot\left(\overline{z\overline{w}+2i}\right)=\left|z\right|^2\cdot\left|w\right|^2\Leftrightarrow$$

$$(z\overline{w}+2i)\cdot\left(\overline{z\overline{w}}+\overline{2i}\right)=\left|z\right|^2\cdot\left|w\right|^2\Leftrightarrow$$

$$(z\overline{w}+2i)\cdot\left(\overline{z}w-2i\right)=\left|z\right|^2\cdot\left|w\right|^2\Leftrightarrow$$

$$\left|z\right|^2\cdot\left|w\right|^2+2i\cdot\overline{z}w-2i\cdot z\overline{w}+4=\left|z\right|^2\cdot\left|w\right|^2\Leftrightarrow$$

$$2i\cdot(\overline{z}w-z\overline{w})=-4\Leftrightarrow 2i\cdot\left(\overline{z}w-\overline{\overline{z}w}\right)=-4\Leftrightarrow$$

$$2i\cdot2i\cdot\mathrm{Im}(\overline{z}w)=-4\Leftrightarrow -4\cdot\mathrm{Im}(\overline{z}w)=-4\Leftrightarrow \mathrm{Im}(\overline{z}w)=1$$

2ος τρόπος:

Είναι:

$$|z\overline{w}+2i|=|z|\cdot|w| \Leftrightarrow |\overline{z\overline{w}+2i}|=|\overline{z}|\cdot|w| \Leftrightarrow$$

$$|\overline{z}w-2i|=|\overline{z}w| \overset{\overline{z}w=u}{\Leftrightarrow} |u-2i|=|u| \Leftrightarrow |u-(0+2i)|=|u-(0+0i)|$$

Άρα η εικόνα του μιγαδικού u κινείται στη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος OA με $O(0,0)$ και $A(0,2)$, δηλαδή στην ευθεία με εξίσωση $y=1$, οπότε $\mathrm{Im}(u)=1 \Rightarrow \mathrm{Im}(\overline{z}w)=1$

β) Είναι:

$$\mathrm{Im}(\overline{z}w)=1$$

Άρα:

$$\overline{z}w=x+i \quad \text{με } x\in R \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) και επειδή $\overline{z}\neq 0$ έχουμε $w=\dfrac{x+i}{\overline{z}}$ με $x\in R$, οπότε είναι:

$$|w|=\left|\frac{x+i}{\overline{z}}\right| \Rightarrow |w|=\frac{|x+i|}{|\overline{z}|} \Rightarrow |w|=\frac{\sqrt{x^2+1}}{|z|} \quad (2)$$

Άρα έχουμε:

$$|z|^2+|w|^2+\mathrm{Re}(\overline{z}w)\geq\sqrt{3} \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$|z|^2+\frac{x^2+1}{|z|^2}+x\geq\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$|z|^4+x^2+1+x|z|^2\geq\sqrt{3}\cdot|z|^2 \Leftrightarrow$$

$$|z|^4+\left(x-\sqrt{3}\right)|z|^2+x^2+1\geq 0 \overset{y=|z|^2}{\Leftrightarrow}$$

$$y^2+\left(x-\sqrt{3}\right)y+x^2+1\geq 0 \qquad (3)$$

Η παράσταση $y^2+\left(x-\sqrt{3}\right)y+x^2+1$ είναι τριώνυμο ως προς y με διακρίνουσα:

$$\Delta=\left(x-\sqrt{3}\right)^2-4(x^2+1)=x^2-2\sqrt{3}x+3-4x^2-4=$$

$$=-3x^2-2\sqrt{3}x-1=-(3x^2+2\sqrt{3}x+1)=-(\sqrt{3}x+1)^2\leq 0$$

Άρα η ανισότητα (3) αληθεύει για κάθε $x, y\in R$, οπότε ισχύει $|z|^2+|w|^2+\mathrm{Re}(\overline{z}w)\geq\sqrt{3}$

γ) Αν υποθέσουμε ότι $\Delta<0$, τότε από το (β) ερώτημα προκύπτει ότι $|z|^2+|w|^2+\mathrm{Re}(\overline{z}w)>\sqrt{3}$, που είναι άτοπο, άρα υποχρεωτικά είναι $\Delta=0$

Έχουμε:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow -(\sqrt{3}x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x+1=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (4)$$

Είναι:

$$|z|^2 + |w|^2 + \mathrm{Re}(\overline{z}w) = \sqrt{3} \Leftrightarrow y^2 + \left(x-\sqrt{3}\right)y + x^2 + 1 = 0$$

και δεδομένου ότι $\Delta = 0$, προκύπτει ότι:

$$y = \frac{-x+\sqrt{3}}{2} \overset{(4)}{\Rightarrow} y = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = \frac{2\sqrt{3}}{3} \overset{y=|z|^2}{\Rightarrow} |z|^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (5)$$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$|w|^2 = \frac{x^2+1}{|z|^2} \overset{(2),(5)}{\Rightarrow} |w|^2 = \frac{\frac{1}{3}+1}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow |w|^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow |w|^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (6)$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) έχουμε: $|z|^2 = |w|^2 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

δ) Είναι:

$$\frac{|z|^2|w|^2}{|z|^2|w|^2 + \mathrm{Re}(\overline{z}w)} = \frac{|\overline{z}|^2|w|^2}{|\overline{z}|^2|w|^2 + \mathrm{Re}(\overline{z}w)} =$$

$$= \frac{|\overline{z}w|^2}{|\overline{z}w|^2 + \mathrm{Re}(\overline{z}w)} \overset{(1)}{=} \frac{x^2+1}{x^2+1+x} = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$$

Θεωρούμε συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$, $x \in R$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+x+1)-(x^2+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2-1>0 \Leftrightarrow x^2>1 \Leftrightarrow |x|>1 \Leftrightarrow x<-1$ ή $x>1$

Επίσης έχουμε:

- $f(-1) = \dfrac{(-1)^2+1}{(-1)^2+(-1)+1} = \dfrac{2}{1} = 2$
- $f(1) = \dfrac{1^2+1}{1^2+1+1} = \dfrac{2}{3}$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	2	↘	$\frac{2}{3}$	↗	1
			μεγ.		ελαχ.		

Η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_1 = -1$ με τιμή $f(-1) = 2$ και ελάχιστο στο $x_2 = 1$ με ελάχιστη τιμή $f(1) = \frac{2}{3}$, άρα για κάθε $x \in R$ είναι $\frac{2}{3} \le f(x) \le 2$

Άρα η ελάχιστη τιμή της παράστασης $\dfrac{|z|^2|w|^2}{|z|^2|w|^2 + \mathrm{Re}(\overline{z}w)}$ είναι $\frac{2}{3}$ και η μέγιστη τιμή της είναι 2

ΘΕΜΑ 14ο :

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση:

$$|z+2-4i|^2 + |z-2+4i|^2 = 58$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 9$ και να βρείτε τα κοινά σημεία του με τον άξονα $y'y$

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w = z + \frac{9}{z}$ είναι πραγματικός και για κάθε w ισχύει $-6 \le w \le 6$

γ) Αν z_1, z_2 και z_3 είναι τρεις από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1| = 3|z_1 + z_2 + z_3|$$

δ) Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί v, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση:

$$v\,\text{συν}\theta - i\,\text{ημ}\theta = z(w-\overline{z}) + \overline{z}(w-z) + 2|z|^2 - |w|^2 + 3,$$

όπου $\theta \in R$ και $\theta \ne \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in Z$

i) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών v ανήκουν στην υπερβολή $C: \frac{x^2}{9} - y^2 = 1$

ii) Να βρείτε τα σημεία της υπερβολής $C: \frac{x^2}{9} - y^2 = 1$, που απέχουν ελάχιστη απόσταση από το σημείο $A(0,3)$

ΛΥΣΗ

Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in R$

α) Έχουμε:

$$|z+2-4i|^2 + |z-2+4i|^2 = 58 \Leftrightarrow$$

$$|x+yi+2-4i|^2+|x+yi-2+4i|^2=58 \Leftrightarrow$$
$$|x+2+(y-4)i|^2+|x-2+(y+4)i|^2=58 \Leftrightarrow$$
$$(x+2)^2+y-4)^2+(x-2)^2+(y+4)^2=58 \Leftrightarrow$$
$$x^2+4x+4+y^2-8y+16+x^2-4x+4+y^2+8y+16=58 \Leftrightarrow$$
$$2x^2+2y^2=18 \Leftrightarrow x^2+y^2=9 \Leftrightarrow C: x^2+y^2=3^2$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=3$

Για $x=0$ έχουμε:

$$0^2+y^2=3^2 \Leftrightarrow y^2=3^2 \Leftrightarrow y=3 \quad ή \quad y=-3$$

Οπότε τα κοινά σημεία του γεωμετρικού τόπου με τον άξονα $y'y$ είναι τα $A(0,3)$ και $B(0,-3)$

β) Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=3$, άρα ισχύει:

$$|z|=3 \Leftrightarrow |z|^2=9 \Leftrightarrow z\overline{z}=9 \Leftrightarrow \overline{z}=\frac{9}{z} \quad ή \quad z=\frac{9}{\overline{z}} \qquad (1)$$

Ισχύει:

$$\overline{w}=\overline{z}+\frac{9}{\overline{z}} \overset{(1)}{=} \frac{9}{z}+z=w$$

Άρα ο w είναι πραγματικός αριθμός.

Επίσης έχουμε:

$$w=z+\frac{9}{z} \overset{(1)}{=} z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z) \qquad (2)$$

Ισχύει $|z|=3$, οπότε $-3\le \mathrm{Re}(z)\le 3 \Leftrightarrow -6\le 2\mathrm{Re}(z)\le 6 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} -6\le w\le 6$

γ) Για τους μιγαδικούς z_1, z_2 και z_3 ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1\overline{z_1}=9 \Leftrightarrow \overline{z_1}=\frac{9}{z_1} \quad , \quad z_2\overline{z_2}=9 \Leftrightarrow \overline{z_2}=\frac{9}{z_2} \quad \text{και} \quad z_3\overline{z_3}=9 \Leftrightarrow \overline{z_3}=\frac{9}{z_3}$$

Είναι:

$$|z_1+z_2+z_3|=|\overline{z_1+z_2+z_3}|=|\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}|=\left|\frac{9}{z_1}+\frac{9}{z_2}+\frac{9}{z_3}\right|=$$

$$=9\cdot\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|=9\cdot\frac{|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{|z_1z_2z_3|}=9\cdot\frac{|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{|z_1|\cdot|z_2|\cdot|z_3|}=$$

$$=\frac{9\cdot|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{3\cdot3\cdot3}=\frac{|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{3}$$

Δείξαμε ότι:

$$|z_1+z_2+z_3|=\frac{|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{3}$$

Άρα έχουμε:

$$|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|=3|z_1+z_2+z_3|$$

δ) **i)** Έχουμε:

$$\nu\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta = z(w-\overline{z}) + \overline{z}(w-z) + 2|z|^2 - |w|^2 + 3 \Leftrightarrow$$

$$\nu\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta = z\cdot w - z\cdot\overline{z} + \overline{z}\cdot w - z\cdot\overline{z} + 2z\cdot\overline{z} - |w|^2 + 3 \Leftrightarrow$$

$$\nu\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta = z\cdot w + \overline{z}\cdot w - |w|^2 + 3 \Leftrightarrow$$

$$\nu\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta = z\cdot w + \overline{z}\cdot w - w\cdot\overline{w} + 3 \Leftrightarrow$$

$$\nu\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta = w\cdot(z + \overline{z} - \overline{w}) + 3 \Leftrightarrow$$

$$\nu\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta = 2x\cdot(2x - 2x) + 3 \Leftrightarrow$$

$$\nu\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta = 3 \Leftrightarrow \nu\sigma\upsilon\nu\theta = 3 + i\eta\mu\theta \quad (3)$$

Επειδή $\theta \in R$ και $\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in Z$ συμπεραίνουμε ότι $\sigma\upsilon\nu\theta \neq 0$, οπότε διαιρώντας και τα δύο μέλη της σχέσης (3) με $\sigma\upsilon\nu\theta$ ισοδύναμα έχουμε:

$$\nu = \frac{3}{\sigma\upsilon\nu\theta} + i\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} \Leftrightarrow \nu = \frac{3}{\sigma\upsilon\nu\theta} + i\varepsilon\varphi\theta$$

Αν θέσουμε $\nu = \alpha + \beta i$ με $\alpha, \beta \in R$, τότε έχουμε:

$$\frac{3}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\alpha}{3} \quad \text{και} \quad \varepsilon\varphi\theta = \beta$$

Ισχύει:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = 1 + \varepsilon\varphi^2\theta, \ \theta \in R \text{ με } \theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \ \kappa \in Z$$

Οπότε έχουμε:

$$\frac{\alpha^2}{9} = 1 + \beta^2 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{9} - \beta^2 = 1$$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών ν ανήκουν στην υπερβολή $C: \frac{x^2}{9} - y^2 = 1$

ii) Έστω $M(\alpha, \beta)$ σημείο της υπερβολής $C: \frac{x^2}{9} - y^2 = 1$

Η απόσταση του σημείου $A(0,3)$ από το σημείο $M(\alpha, \beta)$ είναι:

$$d(A,M) = d = \sqrt{(\alpha-0)^2 + (\beta-3)^2} = \sqrt{\alpha^2 + (\beta-3)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 6\beta + 9} \quad (4)$$

Επειδή το σημείο $M(\alpha, \beta) \in C$ έχουμε:

$$\frac{\alpha^2}{9} - \beta^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{9} = 1 + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 9 + 9\beta^2$$

Με αντικατάσταση του α^2 στη σχέση (4) έχουμε:

$$d = \sqrt{9 + 9\beta^2 + \beta^2 - 6\beta + 9} = \sqrt{10\beta^2 - 6\beta + 18}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $d(\beta) = \sqrt{10\beta^2 - 6\beta + 18}$, $\beta \in R$

Για κάθε $\beta \in R$ είναι:

$$d'(\beta) = \frac{(10\beta^2 - 6\beta + 18)'}{2\sqrt{10\beta^2 - 6\beta + 18}} = \frac{20\beta - 6}{2\sqrt{10\beta^2 - 6\beta + 18}} = \frac{10\beta - 3}{\sqrt{10\beta^2 - 6\beta + 18}}$$

Είναι:

- $d'(\beta) = 0 \Leftrightarrow 10\beta - 3 = 0 \Leftrightarrow 10\beta = 3 \Leftrightarrow \beta = \frac{3}{10}$
- $d'(\beta) > 0 \Leftrightarrow 10\beta - 3 > 0 \Leftrightarrow 10\beta > 3 \Leftrightarrow \beta > \frac{3}{10}$

Το πρόσημο της $d'(\beta)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης d φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

β	$-\infty$	$\frac{3}{10}$	$+\infty$
$d'(\beta)$	$-$	0	$+$
$d(\beta)$	$\searrow$		$\nearrow$
		Ελάχιστο	

Η συνάρτηση d παρουσιάζει ελάχιστο για $\beta = \frac{3}{10}$

Βρίσκουμε τις τετμημένες των σημείων της υπερβολής με τεταγμένη $\beta = \frac{3}{10}$

Έχουμε:

$$\frac{\alpha^2}{9} - \left(\frac{3}{10}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{9} = 1 + \frac{9}{100} \Leftrightarrow \alpha^2 = 9 \cdot \frac{109}{100} \Leftrightarrow \alpha = \pm \frac{3\sqrt{109}}{10}$$

Οπότε τα σημεία της υπερβολής που έχουν την ελάχιστη απόσταση από το σημείο $A(0,3)$ είναι:

$$M_1\left(\frac{3\sqrt{109}}{10}, \frac{3}{10}\right) \text{ και } M_2\left(-\frac{3\sqrt{109}}{10}, \frac{3}{10}\right)$$

ΘΕΜΑ 15ο :

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w και τη συνάρτηση $f(z) = z + 1 - i$ που ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $\left|(1+2i)w - 5\right| = 3\sqrt{5}$
- $\overline{f(z)} = f(z)$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z

γ) Αν οι εικόνες των μιγαδικών w και z ανήκουν στον κύκλο με κέντρο $K(1, -2)$ και ακτίνα $R = 3$ και στην ευθεία $y = 1$ αντιστοίχως, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί αριθμοί w και z για τους οποίους ισχύει $z = w$

ii) Να βρείτε τους w, που είναι πραγματικοί αριθμοί.

iii) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του μέτρου $|w - 5 + 6i|$

δ) Έστω $M(x,y)$ η εικόνα ενός μιγαδικού αριθμού z με $\mathrm{Re}(z)>0$, η οποία κινείται στην ευθεία $y=1$. Αν το σημείο M απομακρύνεται από τον άξονα $y΄y$ και ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι ίσος με $1\,\mathrm{cm/s}$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας, την οποία σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού z με τον άξονα $x΄x$, τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $(3,1)$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\left|(1+2i)w-5\right|=3\sqrt{5}\Leftrightarrow\left|(1+2i)\left(w-\frac{5}{1+2i}\right)\right|=3\sqrt{5}\Leftrightarrow$$

$$\left|1+2i\right|\left|w-\frac{5(1-2i)}{5}\right|=3\sqrt{5}\Leftrightarrow\left|w-(1-2i)\right|=3$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με κέντρο $K(1,-2)$ και ακτίνα $R=3$

β) Είναι:

$$\overline{f(z)}=f(z)\Leftrightarrow\overline{z}+1+i=z+1-i\Leftrightarrow z-\overline{z}=2i\Leftrightarrow\overset{z=x+yi}{\Leftrightarrow}\ 2yi=2i\Leftrightarrow y=1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία με εξίσωση $y=1$

γ) i) Ο παραπάνω κύκλος και η ευθεία $y=1$ εφάπτονται, αφού $d(K,\varepsilon)=\dfrac{\left|-2-1\right|}{\sqrt{1}}=3=R$. Άρα υπάρχουν μοναδικοί αριθμοί w και z για τους οποίους ισχύει $z=w$

ii) Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του $w=x+yi$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με κέντρο $K(1,-2)$ και ακτίνα $R=3$, που έχει εξίσωση $(x-1)^2+(y+2)^2=9$

Για $y=0$ από την εξίσωση του κύκλου προκύπτει:

$$(x-1)^2=5\Leftrightarrow x=\sqrt{5}+1\ \text{ ή }\ x=-\sqrt{5}+1$$

Επομένως οι αριθμοί w, που είναι πραγματικοί αριθμοί είναι:

$$w=\sqrt{5}+1+0i=\sqrt{5}+1\quad\text{και}\quad w=-\sqrt{5}+1+0i=-\sqrt{5}+1$$

iii) Το μέτρο $\left|w-(5-6i)\right|$ ισούται με την απόσταση της εικόνας του w από το σημείο $A(5,-6)$, που είναι η εικόνα του μιγαδικού $5-6i$

Άρα η μέγιστη τιμή του μέτρου $\left|w-(5-6i)\right|$ είναι:

$$\left|w-5+6i\right|_{max}=(KA)+R=\sqrt{(5-1)^2+(-6+2)^2}+3=$$

$$=\sqrt{16+16}+3=\sqrt{32}+3=4\sqrt{2}+3$$

δ) Έστω θ η γωνία που σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού αριθμού z με τον άξονα $x΄x$, τότε:

$$\varepsilon\varphi\theta=\frac{y}{x}\overset{y=1}{\Rightarrow}\varepsilon\varphi\theta=\frac{1}{x},\ x>0$$

Επειδή η τετμημένη x μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t είναι:

$$\varepsilon\varphi\theta(t)=\frac{1}{x(t)}$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη ως προς t έχουμε:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\cdot\theta'(t)=-\frac{x'(t)}{x^2(t)} \qquad (1)$$

Όμως:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}=1+\varepsilon\varphi^2\theta(t) \qquad (2)$$

Η σχέση (1) με βάση τη σχέση (2) γράφεται:

$$\left(1+\varepsilon\varphi^2\theta(t)\right)\cdot\theta'(t)=-\frac{x'(t)}{x^2(t)} \qquad (3)$$

Έστω t_o η χρονική στιγμή κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $(3,1)$, τότε για $t=t_o$ από τη σχέση (3) έχουμε:

$$\left(1+\varepsilon\varphi^2\theta(t_o)\right)\cdot\theta'(t_o)=-\frac{x'(t_o)}{x^2(t_o)} \qquad (4)$$

Επίσης έχουμε:

$$x(t_o)=3\ ,\ \ x'(t_o)=1$$

και

$$1+\varepsilon\varphi^2\theta(t_o)=1+\frac{1}{x^2(t_o)}=1+\frac{1}{9}=\frac{10}{9}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (4) έχουμε:

$$\frac{10}{9}\cdot\theta'(t_o)=-\frac{1}{9}\Leftrightarrow\theta'(t_o)=-\frac{1}{10}\,\text{rad}/\text{s}$$

Δηλαδή καθώς το σημείο M απομακρύνεται από τον άξονα $y'y$ η γωνία της διανυσματικής ακτίνας του z με τον άξονα $x'x$ μειώνεται.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2014

ΘΕΜΑ 16ο :

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$x^2 f(x)-2x^5+1-συν^2x=0,\ \text{για κάθε}\ x\in R$$

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in R^*$ είναι $f(x)>2x^3-1$

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=f(x)+\dfrac{ημ^2x}{x^2}$ αντιστρέφεται και να ορίσετε την F^{-1}

ΛΥΣΗ

α) Για $x\neq 0$ είναι:

$$f(x)=2x^3-\frac{1-συν^2x}{x^2}=2x^3-\frac{ημ^2x}{x^2}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x=0$ έχουμε:

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(2x^3-\frac{ημ^2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}(2x^3)-\lim_{x\to 0}\left(\frac{ημx}{x}\right)^2=0-1=-1$$

Επομένως:

$$f(x)=\begin{cases}2x^3-\dfrac{ημ^2x}{x^2}, & x\neq 0\\ -1, & x=0\end{cases}$$

β)
- Από υπόθεση η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, άρα και στο διάστημα $[0,π]$
- $f(0)\cdot f(π)=(-1)\cdot(2π^3)=-2π^3<0$

Επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0,π]$, άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,π)$, δηλαδή μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

γ) Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - 2x^3 + 1$, $x \in R^*$, τότε:

$$h(x) = 2x^3 - \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} - 2x^3 + 1 = 1 - \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} = \frac{x^2 - \eta\mu^2 x}{x^2}$$

Είναι γνωστό ότι για κάθε $x \in R$ ισχύει:

$$|\eta\mu x| \le |x| \Leftrightarrow \eta\mu^2 x \le x^2 \Leftrightarrow 0 \le x^2 - \eta\mu^2 x$$

και η ισότητα ισχύει μόνον για $x = 0$

Η συνάρτηση h όμως έχει πεδίο ορισμού το R^*, επομένως $x^2 - \eta\mu^2 x > 0$, άρα $h(x) > 0$ για κάθε $x \in R^*$, δηλαδή $f(x) - 2x^3 + 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) > 2x^3 - 1$ για κάθε $x \in R^*$

δ) Η συνάρτηση f ορίζεται στο R και η συνάρτηση $\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}$ ορίζεται στο R^*, επομένως η συνάρτηση F ορίζεται στο R^*

Για κάθε $x \in R^*$ είναι:

$$F(x) = f(x) + \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} = 2x^3 - \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} + \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} = 2x^3$$

Έστω $x_1, x_2 \in R^*$ με $F(x_1) = F(x_2)$, τότε έχουμε:

$$2x_1^3 = 2x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η F είναι «1 – 1», οπότε αντιστρέφεται.

Για να βρούμε τον τύπο της F^{-1} λύνουμε την $y = F(x)$ ως προς x στο R^*

Είναι:

$$\begin{cases} y = F(x) \\ x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^3 \\ x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = \frac{y}{2} \\ x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{y}{2}} & , \ y>0 \\ -\sqrt[3]{-\frac{y}{2}} & , \ y<0 \end{cases} \Leftrightarrow F^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{y}{2}} & , \ y>0 \\ -\sqrt[3]{-\frac{y}{2}} & , \ y<0 \end{cases}$$

Άρα $F^{-1} : R^* \to R$ με $F^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x}{2}} & , \ x>0 \\ -\sqrt[3]{-\frac{x}{2}} & , \ x<0 \end{cases}$

ΘΕΜΑ 17ο :

Έστω συνάρτηση $f : R \to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x) + f(x) = (x^2 - \eta\mu^2 x)^3$ (1) για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι:

α) $0 \le f(x) \le x^2 - \eta\mu^2 x$ **για κάθε** $x \in R$

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0

γ) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$|\eta\mu x| \le |x| \Leftrightarrow \eta\mu^2 x \le x^2 \Leftrightarrow x^2 - \eta\mu^2 x \ge 0$$

Από τη σχέση (1) έχουμε ότι:

$$f^3(x) + f(x) \ge 0 \Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x)+1\right) \ge 0$$

που σημαίνει ότι:

$$f(x) \ge 0 \qquad (2)$$

οπότε από (1) προκύπτει ότι:

$$f^3(x) \le f^3(x) + f(x) = \left(x^2 - \eta\mu^2 x\right)^3 \Rightarrow$$

$$f^3(x) \le \left(x^2 - \eta\mu^2 x\right)^3$$

Άρα

$$f(x) \le x^2 - \eta\mu^2 x \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε ότι:

$$0 \le f(x) \le x^2 - \eta\mu^2 x \qquad (4)$$

β) Για $x = 0$ από τη σχέση (4) έχουμε:

$$0 \le f(0) \le 0 \Rightarrow f(0) = 0 \quad (5)$$

Επίσης είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$ και
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 - \eta\mu^2 x\right) = 0$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \quad (6)$

Από τις σχέσεις (5) και (6) έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, οπότε η f είναι συνεχής στο 0

γ) Από τη σχέση (4) για $x \in R^*$ έχουμε:

$$0 \le \frac{f(x)}{x^2} \le 1 - \frac{\eta\mu^2 x}{x^2}$$

Επίσης είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$ και
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 - \dfrac{\eta\mu^2 x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left[1 - \left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right] = 1 - 1^2 = 0$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 0$

ΘΕΜΑ 18ο :

Έστω συνεχής συνάρτηση $f:[0,8]\to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x)+f(x)=x+2$ (1) για κάθε $x\in[0,8]$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) $f\left(\frac{23}{8}\right)=\frac{3}{2}$

γ) Η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}

δ) Οι γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα, έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο και να βρείτε τις συντεταγμένες του .

ΛΥΣΗ

α) 1ος τρόπος:

Έστω $x_1, x_2 \in [0,8]$ με $x_1 < x_2$, τότε $x_1 - x_2 < 0$

Είναι:

$$f^3(x_1)+f(x_1)=x_1+2$$

$$f^3(x_2)+f(x_2)=x_2+2$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις, οπότε έχουμε:

$$f^3(x_1)-f^3(x_2)+f(x_1)-f(x_2)=x_1+2-x_2-2 \Rightarrow$$

$$\big(f(x_1)-f(x_2)\big)\cdot\big(f^2(x_1)+f(x_1)f(x_2)+f^2(x_2)\big)+f(x_1)-f(x_2)=x_1-x_2 \Rightarrow$$

$$\big(f(x_1)-f(x_2)\big)\cdot\left(\underbrace{f^2(x_1)+f(x_1)f(x_2)+f^2(x_2)+1}_{>0}\right)=\underbrace{x_1-x_2}_{<0} \Rightarrow$$

$$f(x_1)-f(x_2)<0 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

2ος τρόπος:

Έστω ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα, τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in [0,8]$ με

$x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)\ge f(x_2)$, άρα και $f^3(x_1)\ge f^3(x_2)$, οπότε

$$f^3(x_1)+f(x_1)\ge f^3(x_2)+f(x_2) \overset{(2),(3)}{\Rightarrow} x_1+2\ge x_2+2 \Rightarrow x_1\ge x_2,$$

που είναι άτοπο.

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta=[0,8]$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι $f(\Delta)=[f(0),\ f(8)]$. Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε τις τιμές $f(0)$ και $f(8)$

Για $x=0$ από τη σχέση (1) έχουμε $f^3(0)+f(0)=2 \Leftrightarrow f^3(0)+f(0)-2=0$ (2)

Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner

1	**0**	**1**	**–2**	**1**
///	**1**	**1**	**2**	
1	**1**	**2**	**0**	

η εξίσωση (2) ισοδύναμα γράφεται

$$\left(f(0)-1\right)\underbrace{\left(f^2(0)+f(0)+2\right)}_{\neq 0}=0 \Leftrightarrow f(0)=1$$

Για $x=8$ από τη σχέση (1) έχουμε $f^3(8)+f(8)=10 \Leftrightarrow f^3(8)+f(8)-10=0$ (3)

Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner

1	**0**	**1**	**–10**	**2**
///	**2**	**4**	**10**	
1	**2**	**5**	**0**	

η εξίσωση (3) ισοδύναμα γράφεται

$$\left(f(8)-2\right)\underbrace{\left(f^2(8)+2f(8)+5\right)}_{\neq 0}=0 \Leftrightarrow f(8)=2$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:

$$f(\Delta)=[1\,,\,2]$$

β) Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[0\,,\,8]$ και $1=f(0)\neq f(8)=2$, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών η f θα παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(0)=1$ και $f(8)=2$, δηλαδή θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(0,8)$ τέτοιο, ώστε $f(x_o)=\frac{3}{2}$

Για $x=x_o$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f^3(x_o)+f(x_o)=x_o+2 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^3+\frac{3}{2}=x_o+2 \Rightarrow$$

$$\frac{27}{8}+\frac{3}{2}=x_o+2 \Rightarrow x_o=\frac{27}{8}+\frac{12}{8}-\frac{16}{8} \Rightarrow x_o=\frac{23}{8}$$

γ) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0\,,\,8]$, άρα είναι και « 1 – 1 » στο διάστημα αυτό, οπότε αντιστρέφεται. Επομένως ορίζεται η συνάρτηση f^{-1}, η οποία έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της συνάρτησης f, δηλαδή $A_{f^{-1}}=[1\,,\,2]$

Επίσης για κάθε $x\in[0,8]$ έχουμε:

$$f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$$

οπότε η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$y^3+y=f^{-1}(y)+2 \Leftrightarrow f^{-1}(y)=y^3+y-2\,,\quad y\in[1\,,\,2]$$

Επομένως:

$$f^{-1}:[1\,,\,2]\to R \quad \text{με} \quad f^{-1}(x)=x^3+x-2$$

δ) Για να βρούμε το κοινό σημείο των C_f και $C_{f^{-1}}$ λύνουμε το σύστημα:

$$(\Sigma):\begin{cases} y=f(x) \\ y=f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y)=f^{-1}\left(f(x)\right) \\ y=f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y)=x \\ y=f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3+y-2=x \\ x^3+x-2=y \end{cases}$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις, οπότε έχουμε:

$$y^3-x^3+y-x=x-y \Leftrightarrow y^3-x^3+2(y-x)=0 \Leftrightarrow$$

$$(y-x)(y^2+xy+x^2)+2(y-x)=0 \Leftrightarrow$$

$$(y-x)(\underbrace{y^2+xy+x^2+2}_{>0})=0 \Leftrightarrow$$

$$y-x=0 \Leftrightarrow y=x$$

Το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$(\Sigma):\begin{cases} y=x \\ x^3+x-2=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x^3+x-2=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x^3=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt[3]{2} \\ x=\sqrt[3]{2} \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2})$$

Άρα οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $\left(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2}\right)$

ΘΕΜΑ 19ο :

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,-e-1)$. Δίνονται επίσης οι μιγαδικοί $z=f(x)+\sqrt{2}f(x)i$ και $w=f(x)+2f^2(x)i$ με $|z|=\sqrt{3}(1+e^x)$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=-(1+e^x)$

β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty,-1)$

γ) Να βρείτε το είδος της γραμμής που διαγράφουν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο.

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g με $g(x)=\mathrm{Re}(z\cdot\bar{w})$ δεν έχει τοπικά ακρότατα.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$|z|=\sqrt{f^2(x)+2f^2(x)}=\sqrt{3f^2(x)}=\sqrt{3}|f(x)|$$

και λόγω της (1) έχουμε ότι $|f(x)|=1+e^x>0$, που σημαίνει ότι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x \in R$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και δε μηδενίζεται στο R, οπότε ότι διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R. Είναι $f(1)=-1-e<0$ άρα $f(x)<0$, για κάθε $x \in R$. Επομένως $f(x)=-1-e^x$, $x \in R$

β) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x)=-e^x<0$$

οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο R

Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}(-1-e^x)=-1-\lim_{x\to-\infty}e^x=-1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}(-1-e^x)=-\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty,-1)$

γ) Αν $z=\kappa+\lambda i$, με $\kappa,\lambda \in R$ θα είναι : $\begin{cases} \kappa=f(x) \\ \lambda=\sqrt{2}f(x) \end{cases}$, οπότε $\lambda=\sqrt{2}\cdot\kappa$, με $\kappa,\lambda \in R$

Όμως από το (β) ερώτημα έχουμε ότι $f(x)<-1 \Leftrightarrow \kappa<-1$, που σημαίνει ότι η εικόνα του z ανήκει στην ημιευθεία $y=\sqrt{2}\cdot x$ με $x<-1$, (εξαιρείται η αρχή της)

δ) Έχουμε:

$$z \cdot \bar{w} = \left(f(x) + \sqrt{2}f(x) \cdot i\right) \cdot \left(f(x) - 2f^2(x) \cdot i\right) =$$

$$= f^2(x) + 2\sqrt{2}f^3(x) + \left(\sqrt{2}f^2(x) - 2f^3(x)\right) \cdot i$$

Είναι:

$$\mathrm{Re}\left(z \cdot \bar{w}\right) = f^2(x) + 2\sqrt{2}f^3(x), \text{ οπότε } g(x) = f^2(x) + 2\sqrt{2}f^3(x)\ ,\ x \in R$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R, ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = 2f(x)f'(x)\left(1+3\sqrt{2}f(x)\right) = 2(-1-e^x)(-e^x)\left[1+3\sqrt{2}(-1-e^x)\right] =$$

$$= 2e^x(1+e^x)\left(1-3\sqrt{2}-3\sqrt{2}e^x\right) < 0\ ,\ x \in R$$

Οπότε η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο R, άρα δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

ΘΕΜΑ 20ο :

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x+2)-5}{x-1} = 6$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(3) = 5$ και ii) $f'(3) = 6$

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+2-f(x)}{ημ(x-3)}$

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = xf(x) - 3x - 7συνx$, $x \in R$, τέμνει τον άξονα $x'x$ τουλάχιστον σε ένα σημείο.

δ) Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: R \to R$, για την οποία ισχύει $g'(x) \le f'(3)$, για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = x^6$, έχει το πολύ μία ρίζα μεγαλύτερη του 1.

ΛΥΣΗ

α) i) Για $x \neq 1$, θέτουμε $w(x) = \dfrac{f(x+2)-5}{x-1}$

Είναι:

$$\lim_{x\to 1} w(x) = 6 \quad \text{και} \quad f(x+2) = (x-1)w(x) + 5$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 1} f(x+2) = \lim_{x\to 1}\left[(x-1)w(x)+5\right] = 5$$

Η συνάρτηση $f(x+2)$ είναι συνεχής, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 1} f(x+2) = f(1+2) = f(3)$$

οπότε:

$$f(3) = 5$$

ii) Αρκεί να δείξουμε ότι για x κοντά στο $x_o = 3$ είναι $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = 6$

Αν θέσουμε $x = u + 2$ τότε όταν $x \to 3$ το $u \to 1$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{u\to 1}\frac{f(u+2)-f(3)}{u-1} = \lim_{u\to 1}\frac{f(u+2)-5}{u-1} = 6$$

Επομένως:

$$f'(3) = 6$$

β) Για x κοντά στο $x_o = 3$ είναι:

$$\lim_{x\to3}\frac{x+2-f(x)}{\eta\mu(x-3)} = \lim_{x\to3}\frac{\frac{x+2-f(x)}{x-3}}{\frac{\eta\mu(x-3)}{x-3}} = \lim_{x\to3}\frac{\frac{x+2-f(x)-5+5}{x-3}}{\frac{\eta\mu(x-3)}{x-3}} =$$

$$= \lim_{x\to3}\frac{\frac{x-3-\left(f(x)-5\right)}{x-3}}{\frac{\eta\mu(x-3)}{x-3}} = \lim_{x\to3}\frac{\frac{x-3-\left(f(x)-f(3)\right)}{x-3}}{\frac{\eta\mu(x-3)}{x-3}} = \frac{1-f'(3)}{1} = 1-6 = -5 \text{ , γιατί}$$

$$\lim_{x\to3}\frac{\eta\mu(x-3)}{x-3} \overset{x-3=u}{=} \lim_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = f'(3)$$

Σχόλιο: Δεν μπορούμε να εργαστούμε με τον κανόνα De L' Hospital γιατί δεν γνωρίζουμε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,3)\cup(3,\beta)$

γ) Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο R, άρα και στο διάστημα $[0,3]$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης ισχύουν:

- $h(0) = -7 < 0$ και
- $h(3) = 3f(3) - 9 - 7\sigma\upsilon\nu3 = 15 - 9 - 7\sigma\upsilon\nu3 = 6 - 7\sigma\upsilon\nu3 > 0$,

  αφού $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$ και στο 2^o τεταρτημόριο το συνημίτονο είναι αρνητικός αριθμός.

Επομένως $h(0)\cdot h(3) < 0$

Άρα η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0,3]$, οπότε η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0,3)$, δηλαδή η γραφική παράσταση της h τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

δ) Έστω ότι η εξίσωση $g(x)=x^6$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις x_1 και x_2 με $1 < x_1 < x_2$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=g(x)-x^6$, $x\in[x_1,x_2]$. Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με παράγωγο $\varphi'(x) = g'(x) - 6x^5$ και ισχύει $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$

Άρα η συνάρτηση φ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1,x_2]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $\varphi'(\xi) = 0$

Είναι:

$$\varphi'(\xi) = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) - 6\xi^5 = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) = 6\xi^5$$

Όμως:

$$g'(\xi) \le f'(3) \Leftrightarrow g'(\xi) \le 6$$

Άρα:

$$6\xi^5 \le 6 \Leftrightarrow \xi^5 \le 1 \Leftrightarrow \xi \le 1 \text{ που είναι άτοπο, αφού } 1 < x_1 < \xi < x_2$$

Επομένως η εξίσωση $g(x)= x^6$, έχει το πολύ μία ρίζα μεγαλύτερη του 1

ΘΕΜΑ 21ο :

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$ και η συνάρτηση $g : R \to R$ με $g(x) = \ln f(x)$

Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha < \beta < \gamma$ και οι $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε να αποδείξετε ότι:

I) Υπάρχουν $x_1, x_2 \in R$, ώστε να ισχύει:

$$f(x_2) \cdot f'(x_1) = f(x_1) \cdot f'(x_2)$$

II) Υπάρχει $\xi \in R$, ώστε να ισχύει:

$$f(\xi) \cdot f''(\xi) = \left(f'(\xi)\right)^2$$

ΛΥΣΗ

I) Οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ με $\alpha < \beta < \gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Αν ονομάσουμε ω τη διαφορά της προόδου, τότε έχουμε:

$$2\beta = \alpha + \gamma \Rightarrow \beta - \alpha = \gamma - \alpha = \omega \quad (1) \quad \text{με } \omega > 0$$

Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Αν ονομάσουμε λ το λόγο της προόδου, τότε έχουμε:

$$f^2(\beta) = f(\alpha) \cdot f(\gamma) \Rightarrow \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} = \frac{f(\gamma)}{f(\beta)} = \lambda \quad (2) \quad \text{με } \lambda > 0$$

Από τη σχέση (2) έχουμε $\ln\dfrac{f(\beta)}{f(\alpha)} = \ln\dfrac{f(\gamma)}{f(\beta)}$ (3)

Η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο R, με $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, οπότε υπάρχουν:

- $x_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(x_1) = \dfrac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} \overset{(1)}{=} \dfrac{\ln f(\beta) - \ln f(\alpha)}{\omega} = \dfrac{1}{\omega} \cdot \ln\dfrac{f(\beta)}{f(\alpha)}$ (4)

- $x_2 \in (\beta, \gamma)$ τέτοιο, ώστε $g'(x_2) = \dfrac{g(\gamma) - g(\beta)}{\gamma - \beta} \overset{(1)}{=} \dfrac{\ln f(\gamma) - \ln f(\beta)}{\omega} = \dfrac{1}{\omega} \cdot \ln\dfrac{f(\gamma)}{f(\beta)}$ (5)

Από τις σχέσεις (3), (4), (5) έχουμε:

$$g'(x_1) = g'(x_2) \Rightarrow \frac{f'(x_1)}{f(x_1)} = \frac{f'(x_2)}{f(x_2)} \Rightarrow f(x_2) \cdot f'(x_1) = f(x_1) \cdot f'(x_2)$$

II) Η συνάρτηση g' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left[x_1, x_2\right]$ με :

$$g''(x) = \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = \frac{f''(x)\cdot f(x) - \left(f'(x)\right)^2}{\left(f(x)\right)^2} \quad (6)$$

και $g'(x_1) = g'(x_2)$, επομένως η συνάρτηση g' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[x_1, x_2\right]$, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $g''(\xi) = 0$

Οπότε από τη σχέση (6) έχουμε:

$$\frac{f''(\xi)\cdot f(\xi) - \left(f'(\xi)\right)^2}{\left(f(\xi)\right)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$f''(\xi)\cdot f(\xi) - \left(f'(\xi)\right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$f''(\xi)\cdot f(\xi) = \left(f'(\xi)\right)^2$$

ΘΕΜΑ 22ο :

Έστω οι συναρτήσεις $f, g : R \to R$ με $g(0) = 2e$, οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση:

$$2f(x) + f(1-y) + g(x) - g(y) = 2e^x + e^y + 3 \text{ για κάθε } x, y \in R \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = 2e^x - e^{1-x} + 1 \quad \text{και} \quad g(x) = -2e^x + 2e^{1-x} + 2$$

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις f, g και $f-g$

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f , C_g των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα, έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.

δ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$4e^{x^2-2x} < 4e^{x-2} + 3e^{-x^2+2x+1} - 3e^{-x+3}$$

ΛΥΣΗ

α) Για $y = x$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$2f(x) + f(1-x) = 3e^x + 3 \quad (2)$$

Αν στη σχέση (2) θέσουμε όπου x το $1-x$ έχουμε:

$$2f(1-x) + f(x) = 3e^{1-x} + 3 \quad (3)$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (2) και (3)

$$\begin{cases} 2f(x) + f(1-x) = 3e^x + 3 \\ f(x) + 2f(1-x) = 3e^{1-x} + 3 \end{cases} \overset{\cdot(-2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -4f(x) - 2f(1-x) = -6e^x - 6 \\ f(x) + 2f(1-x) = 3e^{1-x} + 3 \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε:

$$-3f(x) = -6e^x + 3e^{1-x} - 3 \Rightarrow f(x) = 2e^x - e^{1-x} + 1 \quad (4)$$

Για $y=0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$2f(x)+f(1)+g(x)-g(0)=2e^{x}+4 \overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$4e^{x}-2e^{1-x}+2+f(1)+g(x)-g(0)=2e^{x}+4$$

Είναι:

$$f(1)=2e=g(0)$$

οπότε έχουμε:

$$g(x)=-2e^{x}+2e^{1-x}+2$$

β) Για κάθε $x\in R$ έχουμε:

- $f'(x)=2e^{x}-e^{1-x}(1-x)'=2e^{x}+e^{1-x}>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R
- $g'(x)=-2e^{x}+2e^{1-x}(1-x)'=-2e^{x}-2e^{1-x}<0$, οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο R

Επίσης για κάθε $x\in R$ είναι:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\left(2e^{x}-e^{1-x}+1\right)-\left(-2e^{x}+2e^{1-x}+2\right)=4e^{x}-3e^{1-x}-1 \text{ και}$$

$(f-g)'(x)=4e^{x}-3e^{1-x}(1-x)'=4e^{x}+3e^{1-x}>0$, οπότε η $f-g$ είναι γνησίως αύξουσα στο R

Επομένως οι συναρτήσεις f, g και $f-g$ δεν παρουσιάζουν ακρότατα.

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow 4e^{x}-3e^{1-x}-1=0$$

έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=f(x)-g(x)=4e^{x}-3e^{1-x}-1,\ x\in R$$

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο R, άρα και στο διάστημα $[0,1]$,
- $h(0)\cdot h(1)=(3-3e)(4e-4)=-12(e-1)^{2}<0$

Επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0,1]$, οπότε η εξίσωση $h(x)=0\Leftrightarrow f(x)=g(x)$ έχει μια πραγματική ρίζα $x_o\in(0,1)\subseteq R$ και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση $h=f-g$ είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα, έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.

δ) Είναι:

$$4e^{x^2-2x}<4e^{x-2}+3e^{-x^2+2x+1}-3e^{-x+3}\Leftrightarrow$$

$$4e^{x^2-2x}-3e^{-x^2+2x+1}<4e^{x-2}-3e^{-x+3}\Leftrightarrow$$

$$4e^{x^2-2x}-3e^{-x^2+2x+1}-1<4e^{x-2}-3e^{-x+3}-1\Leftrightarrow$$

$$h(x^2-2x)<h(x-2)\Leftrightarrow x^2-2x<x-2\Leftrightarrow$$

$$x^2-3x+2<0\Leftrightarrow x\in(1,2)$$

ΘΕΜΑ 23ο :

Έστω η συνάρτηση $f : R \to R$ με $f(x) = (\alpha+1)^x - \alpha^x$, $\alpha > 1$

α) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f , για τις διάφορες τιμές του $x \in R$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα στο διάστημα $[0, +\infty)$

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

δ) Να λύσετε το σύστημα $3^x - 2^y = 3^y - 2^x = 19$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\alpha+1 > \alpha > 1$$

Οπότε:

- Για $x > 0$ είναι $(\alpha+1)^x > \alpha^x \Rightarrow (\alpha+1)^x - \alpha^x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$

  Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

- Για $x < 0$ είναι $(\alpha+1)^x < \alpha^x \Rightarrow (\alpha+1)^x - \alpha^x < 0 \Rightarrow f(x) < 0$

  Άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$

- Για $x = 0$ είναι $f(0) = (\alpha+1)^0 - \alpha^0 = 1 - 1 = 0$

  Άρα $f(x) = 0$ για $x = 0$

β) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = (\alpha+1)^x \ln(\alpha+1) - \alpha^x \ln\alpha$$

και

$$f''(x) = (\alpha+1)^x \ln^2(\alpha+1) - \alpha^x \ln^2\alpha$$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)^x > \alpha^x \quad (1)$$

Επειδή $\alpha > 1$ είναι:

$$\ln(\alpha+1) > \ln\alpha > 0 \qquad (2)$$

και

$$\ln^2(\alpha+1) > \ln^2\alpha > 0 \qquad (3)$$

οπότε:

- με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των ανισοτήτων (1) και (2) βρίσκουμε ότι:

  $$(\alpha+1)^x \ln(\alpha+1) > \alpha^x \ln\alpha \Rightarrow (\alpha+1)^x \ln(\alpha+1) - \alpha^x \ln\alpha > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

- με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των ανισοτήτων (1) και (3) βρίσκουμε ότι:

  $$(\alpha+1)^x \ln^2(\alpha+1) > \alpha^x \ln^2\alpha \Rightarrow (\alpha+1)^x \ln^2(\alpha+1) - \alpha^x \ln^2\alpha > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$$

Δεδομένου ότι συνάρτηση f είναι και συνεχής στο $x_o = 0$, συμπεραίνουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο $[0, +\infty)$

γ) Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Για $x \in (-\infty, 0)$ είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[(\alpha+1)^x - \alpha^x\right] = 0 - 0 = 0$$

οπότε η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

Για $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[(\alpha+1)^x - \alpha^x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\alpha^x \cdot \left[\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^x - 1\right]\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[(\alpha+1)^x \ln(\alpha+1) - \alpha^x \ln\alpha\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\alpha^x\left[\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^x \ln(\alpha+1) - \ln\alpha\right]\right) = +\infty$$

διότι

$$\lim_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty \ , \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^x \ln(\alpha+1)\right) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\alpha\right) = \ln\alpha$$

Άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$

δ) 1ος τρόπος:

Αν ένας τουλάχιστον από τους x, y είναι αρνητικός, τότε ο αριθμός $3^x - 2^y$ δεν είναι ακέραιος.
Επομένως, αναζητούμε μη αρνητικές λύσεις του συστήματος.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 3^x - 2^x$, που προκύπτει από την παραπάνω συνάρτηση για $\alpha = 2$
Είναι:

$$x > y \Rightarrow \begin{Bmatrix} 3^x > 3^y \\ 2^x > 2^y \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 3^x > 3^y \\ -2^y > -2^x \end{Bmatrix} \Rightarrow 3^x - 2^y > 3^y - 2^x$$

Ομοίως

$$x < y \Rightarrow 3^x - 2^y < 3^y - 2^x$$

Επομένως, το σύστημα δεν έχει λύσεις (x, y) με $x \neq y$

Για $x = y$ είναι:

$$3^x - 2^x = 19 \Leftrightarrow f(x) = f(3) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} x = 3$$

οπότε το σύστημα έχει τη μοναδική λύση $(x, y) = (3, 3)$

2ος τρόπος:

Από τις δοσμένες σχέσεις παίρνουμε:

$$3^x - 2^y = 3^y - 2^x \Leftrightarrow 3^x + 2^x = 3^y + 2^y \Leftrightarrow g(x) = g(y) \quad (4)$$

όπου $g(x) = 3^x + 2^x$, $x \in R$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g'(x) = 3^x \ln 3 + 2^x \ln 2 > 0$$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο R, οπότε είναι και $1-1$

Επομένως από τη σχέση (4) έχουμε $x=y$

Για $x=y$ το σύστημα γίνεται $3^x-2^x=19 \Leftrightarrow f(x)=f(3)$ (5), όπου $f(x)=3^x-2^x$

Στο διάστημα $(-\infty,0)$ όμως η συνάρτηση είναι αρνητική, οπότε δεν έχουμε αρνητική ρίζα.

Επίσης είναι $f(0)=0\neq 19$, οπότε ούτε το 0 είναι ρίζα.

Στο διάστημα $(0,+\infty)$, με βάση το ερώτημα (β) για $\alpha=2$ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η σχέση (5) δίνει τη μοναδική λύση $x=3$

Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x,y)=(3,3)$

ΘΕΜΑ 24ο :

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $(0,1]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- **$f(1)=0$ και**
- **$2\sqrt{1-x}\cdot f'(x)=1+\dfrac{2\sqrt{1-x}}{x}$, για κάθε $x\in(0,1)$**

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln x-\sqrt{1-x}$, $x\in(0,1]$

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε:

i) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}

ii) το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot f^{-1}(x)\right)$

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής $M(x_o, f(x_o))$ με $x_o\in(0,1)$

δ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f και f^{-1} αντιστοίχως στο ίδιο σύστημα αξόνων.

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(0,1]$ και για κάθε $x\in(0,1)$, έχουμε:

$$2\sqrt{1-x}\cdot f'(x)=1+\frac{2\sqrt{1-x}}{x}\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\left(\ln x-\sqrt{1-x}\right)'$$

Άρα για κάθε $x\in(0,1)$ είναι:

$$f(x)=\ln x-\sqrt{1-x}+c$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o=1$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$

Επειδή $f(1)=0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\left(\ln x-\sqrt{1-x}+c\right)=0 \Rightarrow c=0$$

Επομένως:

$$f(x)=\begin{cases} \ln x-\sqrt{1-x} &, \quad 0<x<1 \\ 0 &, \quad x=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x)=\ln x-\sqrt{1-x}\ ,\ x\in(0\ ,\ 1]$$

β) Για τη συνάρτηση f έχουμε:

- είναι συνεχής στο διάστημα $(0,1]$ και
- $f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}>0$, για κάθε $x\in(0,1)$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1]$, οπότε είναι και «1−1». Άρα η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

i) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} είναι $A_{f^{-1}}=f\left((0,1]\right)$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ θα είναι:

$$f\left((0,1]\right)=\left(\lim_{x\to 0^+}f(x)\ ,\ f(1)\right]=(-\infty,\ 0],\ \text{γιατί:}$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x-\sqrt{1-x}\right)=-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\sqrt{1-x}\right)=-1$
- $f(1)=0$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} είναι: $A_{f^{-1}}=(-\infty,0]$

ii) Είναι:

$$A_{f^{-1}}=(-\infty,0] \quad \text{και} \quad f^{-1}\left((-\infty,0]\right)=A_f=(0,\ 1]$$

Επομένως για κάθε $x\in(-\infty,0]$ ισχύει:

$$0<f^{-1}(x)\le 1 \Leftrightarrow 0<x^2f^{-1}(x)\le x^2$$

και

$$\lim_{x\to 0}0=\lim_{x\to 0}x^2=0$$

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής, συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^2f^{-1}(x)\right]=0$

γ) Για κάθε $x\in(0,\ 1)$ έχουμε:

$$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}} \quad \text{και}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}}$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{2}{x^3}+\frac{3}{8(1-x)^2\sqrt{1-x}}>0$$

Άρα η συνάρτηση f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ και επειδή είναι και συνεχής στο $(0, 1)$, το σύνολο τιμών της συνάρτησης f'' είναι:

$$f''\big((0,1)\big)=\Big(\lim_{x\to 0^+} f''(x)\,,\ \lim_{x\to 1^-} f''(x)\Big)=(-\infty\,,+\infty)\ ,\ \text{γιατί:}$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f''(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}}\right)=-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}}=\dfrac{1}{4}$

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f''(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}}\right)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}}\right)=+\infty$ και

$$\lim_{x\to 1^-}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-1$$

Η συνάρτηση f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ επομένως είναι και «$1-1$» και επειδή το $0\in f''\big((0\,,1)\big)$ θα υπάρχει ένα ακριβώς $x_o\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_o)=0$

Επειδή η συνάρτηση f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ θα ισχύει:

- για $0<x<x_o \Rightarrow f''(x)<f''(x_o)\Rightarrow f''(x)<0$ και
- για $x_o<x<1\Rightarrow f''(x_o)<f''(x)\Rightarrow f''(x)>0$

Άρα το σημείο $M(x_o\,, f(x_o))$ με $x_o\in(0,1)$ είναι το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f

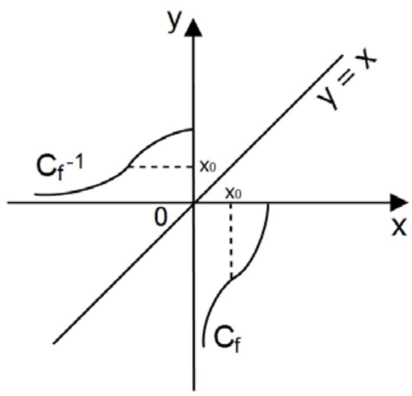
δ) Έχουμε:

$$A_f=(0\,,1] \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$$

άρα η ευθεία $(\varepsilon_1): x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f

Συμπληρώνουμε τον πίνακα μεταβολών της συνάρτησης f και σχεδιάζουμε την C_f

x	0	x_0	1
$f'(x)$	$+$	$+$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	Σ.Κ.	$\nearrow$



ΘΕΜΑ 25ο :

Έστω η συνάρτηση $f:[2,+\infty)\to R$ με $f(2)=0$, η οποία είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$ και κυρτή στο $(2,+\infty)$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(2,+\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(2x-9)f(x+6)=(7x-32)f(x)$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(4,5)$

Αν επιπλέον ισχύει $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)+\sqrt{x+6}}{x-3}=\dfrac{1}{6}$

γ) i) Να βρείτε τις τιμές των $f(3)$ και $f'(3)$

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(2,+\infty)$, οπότε είναι παραγωγίσιμη με f' γνησίως αύξουσα στο $(2,+\infty)$, άρα η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(2,+\infty)$ και $g'(x)=\dfrac{f'(x)(x-2)-f(x)}{(x-2)^2}$ (1)

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[2,x]$ και παραγωγίσιμη στο $(2,x)$, οπότε ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(2,x)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{f(x)}{x-2}$$

Είναι:

$$2<\xi<x \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(\xi)<f'(x)\Rightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x-2}<f'(x)\overset{x>2}{\Rightarrow} f'(x)(x-2)-f(x)>0 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $g'(x)>0$ για κάθε $x\in(2,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $(2,+\infty)$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=(2x-9)f(x+6)-(7x-32)f(x),\ x\in[4,5]$$

Η h συνεχής στο $[4,5]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Είναι:

- $h(4)=-f(10)+4f(4)=-8g(10)+8g(4)=8\big(g(4)-g(10)\big)$

Για $4<10\overset{g\nearrow}{\Rightarrow}g(4)<g(10)\Rightarrow g(4)-g(10)<0$, άρα $h(4)<0$

- $h(5)=f(11)-3f(5)=9g(11)-g(5)=9\big(g(11)-g(5)\big)$

Για $5<11\overset{g\nearrow}{\Rightarrow}g(5)<g(11)\Rightarrow g(11)-g(5)>0$, άρα $h(5)>0$

Συνεπώς $h(4)\cdot h(5)<0$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, άρα η εξίσωση:

$$h(x)=0 \Leftrightarrow (2x-9)f(x+6)=(7x-32)f(x)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(4,5)$

γ) i) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\varphi(x)=\frac{f(x)+\sqrt{x+6}}{x-3}\text{, για } x \text{ κοντά στο } x_o=3$$

Είναι:

$$\lim_{x\to3}\varphi(x)=\frac{1}{6}$$

Για x κοντά στο $x_o=3$ έχουμε:

$$f(x)=\varphi(x)(x-3)-\sqrt{x+6}$$

Είναι:

$$\lim_{x\to3}\left(\varphi(x)(x-3)-\sqrt{x+6}\right)=\frac{1}{6}\cdot0-\sqrt{9}=-3$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to3}f(x)=-3$$

Όμως η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 3, οπότε $f(3)=-3$

Για x κοντά στο $x_o=3$ έχουμε:

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)\varphi(x)-\sqrt{x+6}+3}{x-3}=\lim_{x\to3}\left(\varphi(x)-\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to3}\left(\varphi(x)-\frac{x+6-9}{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}\right)=\lim_{x\to3}\left(\varphi(x)-\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to3}\left(\varphi(x)-\frac{1}{\sqrt{x+6}+3}\right)=\lim_{x\to3}\left(\varphi(x)-\frac{1}{\sqrt{x+6}+3}\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=0$$

Άρα $f'(3)=0$

ii) Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(2,+\infty)$, άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(2,+\infty)$, οπότε έχουμε:

- Για $2<x<3 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(3)\Rightarrow f'(x)<0$
- Για $x>3 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(3)\Rightarrow f'(x)>0$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$
	τοπ. μεγ.		ελάχ.		

Επομένως:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[2,3]$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(2,3)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2,3]$
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[3,+\infty)$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(3,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3,+\infty)$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_o=3$ με ελάχιστη τιμή $f(3)=-3$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1=2$ με τιμή $f(2)=0$

iii) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(4, f(4))$ είναι:

$$y-f(4)=f'(4)(x-4)\Leftrightarrow y=f'(4)(x-4)+f(4)$$

Η f κυρτή στο $[2,+\infty)$ άρα

$$f(x)\ge y\Leftrightarrow f(x)\ge f'(4)(x-4)+f(4)$$

Έχουμε $f'(4)>0$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f'(4)(x-4)+f(4)\right)=+\infty$

οπότε και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=[2,3]$, οπότε $f(\Delta_1)=[-3, 0]$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=[3,+\infty)$, οπότε $f(\Delta_2)=[-3,+\infty]$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:

$$f(\Delta)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=[-3, +\infty)$$

> Αν $f(x)\ge g(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, τότε θα είναι $f(x)\ge g(x)>0$, οπότε $0<\dfrac{1}{f(x)}\le\dfrac{1}{g(x)}$
>
> Είναι:
>
> - $\lim\limits_{x\to+\infty}0=0$
> - $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{g(x)}=0$
>
> Από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε:
>
> $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0$ και επειδή $\dfrac{1}{f(x)}>0$
>
> συμπεραίνουμε ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

ΘΕΜΑ 26ο :

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x)\ne 0$ **για κάθε** $x\in R$
- $\left(3x^2f^2(x)-1\right)f'(x)+xf''(x)=0$, **για κάθε** $x\ne 0$
- $f(1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **και** $f'(1)=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in R$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+f(3x)=f(2x)+f(5x)$

δ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ **ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι**

$$f^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<f(\alpha)f(\beta)\quad \text{για } 1<\alpha<\beta$$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$,άρα η f διατηρεί πρόσημο στο R και επειδή $f(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}>0$, συμπεραίνουμε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$

Για $x\neq 0$ έχουμε:

$$\left(3x^2f^2(x)-1\right)f'(x)+xf''(x)=0\Leftrightarrow$$

$$3x^2f^2(x)f'(x)-f'(x)+xf''(x)=0\Leftrightarrow$$

$$3x^2f^2(x)f'(x)=f'(x)-xf''(x)\Leftrightarrow$$

$$3f^2(x)f'(x)=\frac{f'(x)-xf''(x)}{x^2}\Leftrightarrow$$

$$\left(f^3(x)\right)'=\left(-\frac{f'(x)}{x}\right)'$$

Για $x<0$ έχουμε:

$$f^3(x)=-\frac{f'(x)}{x}+c_1\Leftrightarrow f'(x)=-xf^3(x)+c_1x$$

Για $x>0$ έχουμε:

$$f^3(x)=-\frac{f'(x)}{x}+c_2\Leftrightarrow f'(x)=-xf^3(x)+c_2x$$

Είναι:

$$\lim_{x\to 0^-}f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(-xf^3(x)+c_1x\right)=0 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(-xf^3(x)+c_2x\right)=0$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=0$$

Επειδή η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $x_o=0$ ισχύει $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0$

Άρα:

$$f'(x)=\begin{cases}-xf^3(x)+c_1x & , \quad x<0\\ 0 & , \quad x=0\\ -xf^3(x)+c_2x & , \quad x>0\end{cases}$$

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ και ισχύει:

$$f''(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} \qquad (1)$$

Για $x<0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-xf^3(x)+c_1x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left(-f^3(x)+c_1\right)=-f^3(0)+c_1$$

Για $x > 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-xf^3(x)+c_2x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(-f^3(x)+c_2\right)=-f^3(0)+c_2$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}\Leftrightarrow$$

$$-f^3(0)+c_1=-f^3(0)+c_2\Leftrightarrow c_1=c_2$$

Για $x=1$ έχουμε:

$$f'(1)=-f^3(1)+c_2\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{4}=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3+c_2\Rightarrow c_2=0,\ \text{οπότε και } c_1=0$$

Άρα:

$$f'(x)=\begin{cases}-xf^3(x) & ,\quad x<0\\ 0 & ,\quad x=0\\ -xf^3(x) & ,\quad x>0\end{cases}\ \Rightarrow\ f'(x)=-xf^3(x),\ x\in R$$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x)=-xf^3(x)\Leftrightarrow f^{-3}(x)f'(x)=-x\Leftrightarrow$$

$$f^{-3}(x)f'(x)=-x\Leftrightarrow -2f^{-3}(x)f'(x)=2x\Leftrightarrow$$

$$\left(f^{-2}(x)\right)'=(x^2)'\Leftrightarrow\frac{1}{f^2(x)}=x^2+c$$

Για $x=1$ έχουμε:

$$\frac{1}{f^2(1)}=1+c\Rightarrow 2=1+c\Rightarrow c=1$$

Άρα:

$$\frac{1}{f^2(x)}=x^2+1\Leftrightarrow f^2(x)=\frac{1}{x^2+1}\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\ ,\ x\in R$$

β) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x)=-xf^3(x)$$

Όμως $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$, οπότε:

- $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$
- $f'(x)>0\Leftrightarrow x<0$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	1	↘	

μέγιστο

Επομένως:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_o = 0$ με μέγιστη τιμή $f(0) = 1$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f''(x) = -f^3(x) - x \cdot 3f^2(x)f'(x) = -f^2(x)\left(f(x) + 3xf'(x)\right) =$$

$$= -f^2(x)\left(f(x) + 3x\left(-xf^3(x)\right)\right) = -f^3(x)\left(1 - 3x^2f^2(x)\right) =$$

$$= -f^3(x)\left(1 - 3x^2 \cdot \frac{1}{x^2+1}\right) = -f^3(x)\left(\frac{1-2x^2}{x^2+1}\right) = \frac{2x^2-1}{x^2+1} \cdot f^3(x)$$

Όμως $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$, οπότε:

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Το πρόσημο της $f''(x)$ καθώς η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cup$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\cap$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\cup$	
			Σ.Κ.		Σ.Κ.		

Επομένως:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, οπότε η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, οπότε η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$, οπότε η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$
- Η f'' μηδενίζεται στο $x_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ και εκατέρωθεν αυτού αλλάζει πρόσημο, άρα το σημείο $A\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f
- Η f'' μηδενίζεται στο $x_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ και εκατέρωθεν αυτού αλλάζει πρόσημο, άρα το σημείο $B\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f

γ) Προφανής λύση η $x = 0$

Για $x < 0$ έχουμε:

$$\begin{cases} x > 2x \\ 3x > 5x \end{cases} \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} \begin{cases} f(x) > f(2x) \\ f(3x) > f(5x) \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} f(x) + f(3x) > f(2x) + f(5x)$$

Για $x > 0$ έχουμε:

$$\begin{cases} x < 2x \\ 3x < 5x \end{cases} \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} \begin{cases} f(x) > f(2x) \\ f(3x) > f(5x) \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} f(x) + f(3x) > f(2x) + f(5x)$$

Άρα η $x = 0$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

δ) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-x f^3(x)}{f(x)} = -x f^2(x) = -\frac{x}{x^2+1}$$

Οπότε:

$$h'(x) = -\frac{(x^2+1) - x\cdot(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot f^2(x)\ , \quad x \in R$$

Όμως $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$, οπότε:

- $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$
- $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \quad ή \quad x > 1$

Το πρόσημο της $h'(x)$ καθώς η μονοτονία της συνάρτησης h φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		↗		↘		↗	

Επομένως:

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $(-\infty,-1]$ και $h'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,-1]$
- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[-1\,,1]$ και $h'(x)<0$ για κάθε $x\in(-1\,,1)$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1\,,1]$
- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[1\,,+\infty)$ και $h'(x)>0$ για κάθε $x\in(1\,,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1\,,+\infty)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x)=\ell nf(x)$, $x>1$,

Για κάθε $x\in(1\,,+\infty)$ είναι:

$$K'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}=h(x)$$

Η συνάρτηση K είναι:

- συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\alpha\,,\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}\,,\ \beta\right]$
- παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $\left(\alpha\,,\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\,,\ \beta\right)$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, οπότε θα υπάρχουν:

- ♦ $\xi_1\in\left(\alpha\,,\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $K'(\xi_1)=\dfrac{K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-K(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}=\dfrac{K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-K(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$

- ♦ $\xi_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\,,\ \beta\right)$ τέτοιο, ώστε $K'(\xi_2)=\dfrac{K(\beta)-K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{K(\beta)-K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$

Είναι:

$$1<\xi_1<\xi_2\overset{K'\uparrow}{\Rightarrow}K'(\xi_1)<K'(\xi_2)\Rightarrow\frac{K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-K(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}<\frac{K(\beta)-K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}\Rightarrow$$

$$K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-K(\alpha)<K(\beta)-K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Rightarrow 2K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<K(\alpha)+K(\beta)\Rightarrow$$

$$2\ell nf\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<\ell nf(\alpha)+\ell nf(\beta)\Rightarrow\ell nf^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<\ell n\big(f(\alpha)f(\beta)\big)\Rightarrow$$

$$f^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<f(\alpha)f(\beta)$$

ΘΕΜΑ 27ο :

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f'(1)=1-\alpha,\ \alpha>0$ **και**
- $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)+\alpha x-\alpha y-\frac{\alpha x}{y}$ **για κάθε** $x,y>0$ **(1)**

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ell nx-\alpha x$, $x>0$

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της $A(e,f(e))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του α για την οποία ισχύει $f(x)\le 1$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$

δ) Αν $g(x)=-\frac{1}{\alpha}f(e^{\alpha x})$, $x\in R$, $\alpha>0$, να βρείτε τη τιμή του α ώστε η ελάχιστη τιμή της g να γίνεται μέγιστη.

ΛΥΣΗ

α) Αν παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (1) ως προς y, θεωρώντας το x σταθερά, έχουμε:

$$\left(f\left(\frac{x}{y}\right)\right)'=\left(f(x)-f(y)+\alpha x-\alpha y-\frac{\alpha x}{y}\right)'\Leftrightarrow$$

$$f'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=0-f'(y)+0-\alpha+\frac{\alpha x}{y^2},\ y>0$$

Για $y=1$ έχουμε:

$$f'(x)(-x)=-f'(1)-\alpha+\alpha x\Leftrightarrow$$

$$-xf'(x)=-(1-\alpha)-\alpha+\alpha x\Leftrightarrow$$

$$xf'(x)=1-\alpha x\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\alpha\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=(\ell nx-\alpha x)'\Leftrightarrow$$

$$f(x)=\ell nx-\alpha x+c,\ x>0\quad(2)$$

Για $x=y=1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(1)=f(1)-f(1)+\alpha-\alpha-\alpha\Leftrightarrow$$

$$f(1)=-\alpha\quad(3)$$

Για $x=1$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f(1)=\ell n1-\alpha+c\overset{(3)}{\Leftrightarrow}$$

$$-\alpha=-\alpha+c\Leftrightarrow c=0$$

Επομένως:

$$f(x)=\ell nx-\alpha x,\ x>0$$

β) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$f'(x) = \left(\ell nx - \alpha x\right)' = \frac{1}{x} - \alpha$$

Οπότε:

$$f'(e) = \frac{1}{e} - \alpha$$

Άρα η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της $A\left(e, f(e)\right)$ είναι:

$$y - f(e) = f'(e)\left(x - e\right) \Leftrightarrow$$

$$y - \left(1 - \alpha e\right) = \left(\frac{1}{e} - \alpha\right)\left(x - e\right) \Leftrightarrow$$

$$y = \left(\frac{1}{e} - \alpha\right)x$$

η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$, αφού επαληθεύεται για $x = 0$ και $y = 0$

γ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \alpha = \frac{1 - \alpha x}{x}$$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\alpha}$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha x > 0 \Leftrightarrow \alpha x < 1 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} x < \frac{1}{\alpha}$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$-\ell n\alpha - 1$	$\searrow$	
			μέγιστο		

Η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_o = \frac{1}{\alpha}$ με μέγιστη τιμή $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \ell n\frac{1}{\alpha} - \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = -\ell n\alpha - 1$, επομένως έχουμε:

$$f(x) \le -\ell n\alpha - 1 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Για να ισχύει $f(x) \le 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ πρέπει και αρκεί

$$-\ell n\alpha - 1 \le 1 \Leftrightarrow \ell n\alpha \ge -2 \Leftrightarrow \ell n\alpha \ge \ell n e^{-2} \Leftrightarrow \alpha \ge \frac{1}{e^2}$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του α ώστε να ισχύει $f(x) \le 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $\alpha = \frac{1}{e^2}$

δ) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g(x) = -\frac{1}{\alpha} f(e^{\alpha x}) = -\frac{1}{\alpha}\cdot(\ell n e^{\alpha x} - \alpha e^{\alpha x}) = -\frac{1}{\alpha}\cdot(\alpha x - \alpha e^{\alpha x}) = e^{\alpha x} - x$$

$$g'(x) = (e^{\alpha x} - x)' = \alpha e^{\alpha x} - 1$$

Είναι:

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha e^{\alpha x} = 1 \Leftrightarrow e^{\alpha x} = \dfrac{1}{\alpha} \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \ell n e^{\alpha x} = \ell n \dfrac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha x = -\ell n\alpha \Leftrightarrow x = -\dfrac{\ell n\alpha}{\alpha}$

- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \alpha e^{\alpha x} > 1 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} e^{\alpha x} > \dfrac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \ell n e^{\alpha x} > \ell n \dfrac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha x > -\ell n\alpha \Leftrightarrow x > -\dfrac{\ell n\alpha}{\alpha}$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		$-\dfrac{\ell n\alpha}{\alpha}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$\dfrac{1+\ell n\alpha}{\alpha}$	$\nearrow$	

ελάχιστο

Η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o = -\dfrac{\ell n\alpha}{\alpha}$ με ελάχιστη τιμή

$$g\left(-\frac{\ell n\alpha}{\alpha}\right) = e^{\alpha\left(-\frac{\ell n\alpha}{\alpha}\right)} - \left(-\frac{\ell n\alpha}{\alpha}\right) = e^{-\ell n\alpha} + \frac{\ell n\alpha}{\alpha} = \frac{1}{e^{\ell n\alpha}} + \frac{\ell n\alpha}{\alpha} = \frac{1+\ell n\alpha}{\alpha}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(\alpha) = \frac{1+\ell n\alpha}{\alpha}, \ \alpha > 0$$

Για κάθε $\alpha \in (0, +\infty)$ είναι:

$$h'(\alpha) = \frac{(1+\ell n\alpha)'\cdot\alpha - 1\cdot(1+\ell n\alpha)}{\alpha^2} =$$

$$= \frac{1-1-\ell n\alpha}{\alpha^2} = -\frac{\ell n\alpha}{\alpha^2}$$

Είναι:

- $h'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\ell n\alpha}{\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow \ell n\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$

- $h'(\alpha) > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\ell n\alpha}{\alpha^2} > 0 \Leftrightarrow \ell n\alpha < 0 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} 0 < \alpha < 1$

Το πρόσημο της $h'(\alpha)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης h φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		1		$+\infty$
$h'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$h(\alpha)$		↗		↘	

μέγιστο

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η συνάρτηση h παίρνει μέγιστη τιμή όταν $\alpha = 1$, οπότε η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g γίνεται μέγιστη όταν $\alpha = 1$

ΘΕΜΑ 28^{o} :

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{f(x)}{x} \quad \text{για κάθε } x \in R^*$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$ και ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = \frac{1}{2}x + 1$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο κοινό της σημείο με τον άξονα $y'y$

γ) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R

δ) Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο R

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in R^*$ είναι:

$$f'(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = e^x \Leftrightarrow$$

$$\left(xf(x)\right)' = (e^x)' \Leftrightarrow xf(x) = \begin{cases} e^x + c_1 \ , & x < 0 \\ e^x + c_2 \ , & x > 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, άρα είναι συνεχής και στο $x_o = 0$, οπότε:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(xf(x)\right) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(e^x + c_1\right) \Leftrightarrow 0 \cdot f(0) = 1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -1$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(xf(x)\right) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(e^x + c_2\right) \Leftrightarrow 0 \cdot f(0) = 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = -1$

Άρα για κάθε $x \in R^*$ έχουμε:

$$xf(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o = 0$, άρα:

$$f(0) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^0}{x - 0} = \frac{d(e^x)}{dx}\bigg|_{x=0} = 1 \qquad (1)$$

Επομένως:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

β) Για κάθε x κοντά στο $x_o = 0$ είναι:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\dfrac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x - 1}{x}\right) \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και στο $x_o = 0$ με $f'(0) = \frac{1}{2}$

Το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$ είναι το $A\left(0, f(0)\right)$, δηλαδή σημείο $A\left(0, 1\right)$

Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο A έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon):\ y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$$

γ) Για κάθε $x \in R^*$ είναι:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)' = \frac{e^x x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2},$$

όπου $g(x) = xe^x - e^x + 1,\ x \in R$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g'(x) = \left(xe^x - e^x + 1\right)' = e^x + xe^x - e^x = xe^x$$

Είναι:

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow xe^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow xe^x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$
		ελάχιστο	

Η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o = 0$ με ελάχιστη τιμή $g(0) = 0 \cdot e^0 - e^0 + 1 = 0$

Έχουμε:

- Για $x < 0 \overset{g \searrow}{\Rightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0$
- Για $x > 0 \overset{g \nearrow}{\Rightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0$

Οπότε είναι:

$$g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in R^*$$

Επειδή $f'(0) = \dfrac{1}{2}$ συμπεραίνουμε ότι:

$$f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in R$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R

δ) Για κάθε $x \in R^*$ είναι:

$$f''(x) = \left(\frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}\right)' = \frac{(xe^x - e^x + 1)' \cdot x^2 - (xe^x - e^x + 1)\cdot (x^2)'}{x^4} =$$

$$= \frac{(e^x + xe^x - e^x)\cdot x^2 - (xe^x - e^x + 1)\cdot 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{x^3e^x - 2x^2e^x + 2xe^x - 2x}{x^4} = \frac{x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - 2}{x^3} = \frac{h(x)}{x^3},$$

όπου $h(x) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - 2$, $x \in R$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$h'(x) = \left(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - 2\right)' =$$
$$= 2xe^x + x^2e^x - 2e^x - 2xe^x + 2e^x = x^2e^x$$

Άρα $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in R^*$ και η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $x_o = 0$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο R

Όμως $h(0) = 0 \cdot e^0 - 2 \cdot 0 \cdot e^0 + 2e^0 - 2 = 0$ και η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο R, οπότε έχουμε:

- Για $x < 0 \overset{h \nearrow}{\Rightarrow} h(x) < h(0) \Leftrightarrow h(x) < 0$
- Για $x > 0 \overset{h \nearrow}{\Rightarrow} h(x) > h(0) \Leftrightarrow h(x) > 0$

Επομένως

- Αν $x<0$ τότε $f''(x)>0$, αφού $h(x)<0$ και $x^3<0$
- Αν $x>0$ τότε $f''(x)>0$, αφού $h(x)>0$ και $x^3>0$

Άρα

$$f''(x)>0 \text{ για κάθε } x\in R^*$$

Είναι:

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-e^x+e^x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}=f'(0)$$

Οπότε η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $x_o=0$

Αφού $f''(x)>0$ για κάθε $x\in R^*$ και η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $x_o=0$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο R

ΘΕΜΑ 29ο :

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha\ell nx+x+\alpha$ και $g(x)=\dfrac{x\ell nx}{x+\alpha}$, όπου $\alpha>0$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα ρ

β) Να αποδείξετε ότι $g(x)\ge -\dfrac{\rho}{\alpha}$ για κάθε $x>0$

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g έχει ένα μόνο σημείο καμπής.

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\alpha\left(x\ell nx-\lambda\right)=\lambda x$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in R$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$f'(x)=\frac{\alpha}{x}+1>0$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και επειδή είναι και συνεχής, το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(A)=\left(\lim_{x\to 0^+}f(x)\ ,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)\right)$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\alpha\ell nx+x+\alpha\right)=-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}(\alpha\ell nx)\overset{\alpha>0}{=}-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+\alpha\right)=\alpha$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\alpha\ell nx+x+\alpha\right)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha\ell nx)\overset{\alpha>0}{=}+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\alpha)=+\infty$

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι $f(A)=(-\infty,+\infty)=R$

Το $0\in f(A)=R$ επομένως θα υπάρχει $\rho\in A=(0,+\infty)$ και μάλιστα μοναδικό, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho)=0$

β) Είναι:

$$A_g = (0, +\infty), \text{ αφού } x + \alpha > 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$g'(x) = \left(\frac{x\ell nx}{x+\alpha}\right)' = \frac{(\ell nx+1)(x+\alpha) - x\ell nx}{(x+\alpha)^2} = \frac{\alpha\ell nx + x + \alpha}{(x+\alpha)^2} = \frac{f(x)}{(x+\alpha)^2} \quad (1)$$

Από το (α) ερώτημα γνωρίζουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\rho \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho) = 0$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε:

- Για $0 < x < \rho \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x) < f(\rho) \Rightarrow f(x) < 0$
- Για $x > \rho \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x) > f(\rho) \Rightarrow f(x) > 0$

Από τη σχέση (1) και επειδή $(x+\alpha)^2 > 0$ για κάθε $x \in A_g$, έχουμε:

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \rho$
- $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0 < x < \rho$
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow x > \rho$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		ρ		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$\frac{\rho\ell n\rho}{\rho+\alpha}$	$\nearrow$	

ελάχιστο

Η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o = \rho$ με ελάχιστη τιμή $g(\rho) = \dfrac{\rho\ell n\rho}{\rho+\alpha}$

Άρα για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$g(x) \geq g(\rho) \Rightarrow g(x) \geq \frac{\rho\ell n\rho}{\rho+\alpha} \quad (2)$$

Όμως ρ ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$, οπότε ισχύει $\alpha\ell n\rho + \rho + \alpha = 0 \Leftrightarrow \ell n\rho = -\dfrac{\rho+\alpha}{\alpha}$ (3)

Η σχέση (2) με βάση τη σχέση (3) γράφεται:

$$g(x) \geq \frac{\rho\cdot\left(-\dfrac{\rho+\alpha}{\alpha}\right)}{\rho+\alpha} \Rightarrow g(x) \geq -\frac{\rho}{\alpha}, \; x \in (0, +\infty)$$

γ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$g''(x) = \left(\frac{\alpha\ell nx + x + \alpha}{(x+\alpha)^2}\right)' = \frac{\left(\frac{\alpha}{x}+1\right)(x+\alpha)^2 - 2(x+\alpha)(\alpha\ell nx + x + \alpha)}{(x+\alpha)^4} =$$

$$= \frac{(x+\alpha)^2 - 2x(\alpha\ell nx + x + \alpha)}{x(x+\alpha)^3} = \frac{\alpha^2 - x^2 - 2x\alpha\ell nx}{x(x+\alpha)^3} = \frac{h(x)}{x(x+\alpha)^3} \qquad (4)$$

όπου $h(x) = \alpha^2 - x^2 - 2x\alpha\ell nx$, $x > 0$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$h'(x) = -2x - 2\alpha\ell nx - 2\alpha = -2(\alpha\ell nx + x + \alpha) = -2f(x)$$

Είναι:

- $h'(x) = 0 \Leftrightarrow -2f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \rho$
- $h'(x) > 0 \Leftrightarrow -2f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) < 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0 < x < \rho$

Το πρόσημο της $h'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης h φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		ρ		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\alpha^2 \nearrow$	$h(\rho)$	$\searrow$	
			μέγιστο		

Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\alpha^2 - x^2 - 2\alpha x\ell nx\right) = \alpha^2$$

Αφού

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ell nx) \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ell nx}{\frac{1}{x}} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0 \qquad (5)$$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (0, \rho]$, επομένως:

$$h(\Delta_1) = \left(\lim_{x\to 0^+} h(x), h(\rho)\right] = \left(\alpha^2, h(\rho)\right]$$

Άρα για κάθε $x \in \Delta_1 = (0, \rho]$ είναι:

$$h(\rho) \geq h(x) > \alpha^2 > 0 \qquad (6)$$

Επίσης είναι:

$$\lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\alpha^2 - x^2 - 2\alpha x\ell nx\right) = -\infty$$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [\rho, +\infty)$, επομένως:

$$h(\Delta_2) = \left(\lim_{x\to +\infty} h(x), h(\rho)\right] = \left(-\infty, h(\rho)\right]$$

Το $0 \in h(\Delta_2)$ επομένως θα υπάρχει $x_o \in \Delta_2 = [\rho\,, +\infty)$ και μάλιστα μοναδικό, αφού η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [\rho\,, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $h(x_o) = 0$

Έχουμε:

- Για $\rho < x < x_o \overset{h\searrow}{\Rightarrow} h(x) > h(x_o) \Rightarrow h(x) > 0 \qquad (7)$
- Για $x > x_o \overset{h\searrow}{\Rightarrow} h(x) < h(x_o) \Rightarrow h(x) < 0 \qquad (8)$

Από τις σχέσεις (6) και (7) για κάθε $x \in (0\,, x_o)$ έχουμε:

$$h(x) > 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} g''(x) > 0\ , \quad \text{αφού } x(x+\alpha)^3 > 0 \text{ για κάθε } x \in A_g = (0\,, +\infty)$$

Από τη σχέση (8) για κάθε $x \in (x_o\,, +\infty)$ έχουμε:

$$h(x) < 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} g''(x) < 0\ , \quad \text{αφού } x(x+\alpha)^3 > 0 \text{ για κάθε } x \in A_g = (0\,, +\infty)$$

Αφού $x(x+\alpha)^3 > 0$ για κάθε $x \in A_g = (0\,, +\infty)$

Το πρόσημο της $g''(x)$ καθώς η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		x_o		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\cup$	$g(x_o)$	$\cap$	
			Σ.Κ.		

Επομένως η συνάρτηση g έχει ένα μόνο σημείο καμπής το $M(x_o, g(x_o))$

δ) Έχουμε:

$$\alpha(x\ell nx - \lambda) = \lambda x \Leftrightarrow \alpha x \ell nx = \lambda(\alpha + x) \Leftrightarrow \frac{x\ell nx}{\alpha + x} = \frac{\lambda}{\alpha} \Leftrightarrow g(x) = \frac{\lambda}{\alpha} \qquad (9)$$

Οι ρίζες της εξίσωσης (9) είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g και της ευθείας $y = \frac{\lambda}{\alpha}$, η οποία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

Από (β) ερώτημα έχουμε:

x	0		ρ		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{\rho}{\alpha}$	$\nearrow$	$+\infty$
			ελάχιστο		

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x\ell nx}{x+\alpha} \overset{(5)}{=} \frac{0}{0+\alpha} = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x\ell nx}{x+\alpha} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x\ell nx}{x\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ell nx}{1+\frac{\alpha}{x}} = +\infty$
- $g(x) = 0 \Leftrightarrow x\ell nx = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\frac{\lambda}{\alpha}<-\frac{\rho}{\alpha}\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}\lambda<-\rho$, τότε η εξίσωση (9) είναι αδύνατη.
- Αν $\frac{\lambda}{\alpha}=-\frac{\rho}{\alpha}\Leftrightarrow\lambda=-\rho$, τότε η εξίσωση (9) έχει μια μόνο ρίζα $\rho_1=\rho$
- Αν $-\frac{\rho}{\alpha}<\frac{\lambda}{\alpha}<0\Leftrightarrow-\rho<\lambda<0$, τότε η εξίσωση (9) έχει δύο ρίζες $\rho_1\in(0,\rho)$ και $\rho_2\in(\rho,1)$
- Αν $\frac{\lambda}{\alpha}=0\Leftrightarrow\lambda=0$, τότε η εξίσωση (9) έχει μια μόνο ρίζα $\rho_1=1$
- Αν $\frac{\lambda}{\alpha}>0\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}\lambda>0$, τότε η εξίσωση (9) έχει μια μόνο ρίζα $\rho_1>1$

ΘΕΜΑ 30ο :

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $\mathbf{f(0)=1}$
- $\mathbf{f(x)>0}$ **για κάθε** $\mathbf{x\in R}$
- $\mathbf{f'(x)=\dfrac{(1+e^x)f(x)}{1+f(x)}}$ **για κάθε** $\mathbf{x\in R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x,\ x\in R$

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=xf\left(\frac{1}{x}\right),\ x\in R^*$

γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha+2\beta}{3}<\ln\left(\frac{e^\alpha+2e^\beta}{3}\right)$ για κάθε $\alpha,\beta\in R$ με $\alpha<\beta$

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την παραβολή $y=x^2+1$ και την ευθεία $x=1$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f'(x)=\frac{\left(1+e^x\right)\cdot f(x)}{1+f(x)}\Leftrightarrow f'(x)\big(1+f(x)\big)=\left(1+e^x\right)f(x)\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{f'(x)f(x)}{f(x)}=1+e^x\Leftrightarrow\big(\ln f(x)+f(x)\big)'=\left(x+e^x\right)'\Leftrightarrow$$

$$\ln f(x)+f(x)=x+e^x+c,\quad c\in R$$

Για $x=0$ έχουμε :

$$\ln f(0)+f(0)=0+e^0+c\Leftrightarrow\ln1+1=1+c\Leftrightarrow c=0$$

Άρα

$$\ln f(x) + f(x) = x + e^x \Leftrightarrow \ln f(x) + f(x) = x \cdot 1 + e^x \Leftrightarrow$$

$$\ln f(x) + f(x) = x \ln e + e^x \Leftrightarrow \ln f(x) + f(x) = \ln e^x + e^x \Leftrightarrow$$

$$f(x) + \ln f(x) = e^x + \ln e^x \,,\; x \in R \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση h με $h(t) = t + \ln t$, $t > 0$, που είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $h'(t) = 1 + \dfrac{1}{t} > 0$, άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε είναι και «$1-1$»

Η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$h\big(f(x)\big) = h(e^x) \overset{h:1\text{-}1}{\Leftrightarrow} f(x) = e^x \,,\; x \in R$$

β) Είναι:

$$g(x) = x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = x e^{\frac{1}{x}} \,,\; x \in R^*$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x e^{\frac{1}{x}}\right) \overset{0\cdot(+\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{1}{x}=u}{=} \lim_{u\to+\infty} \frac{e^u}{u} \underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{u\to+\infty} \frac{e^u}{1} = +\infty$$

Άρα η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g

Επίσης $\displaystyle \lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} \overset{\frac{1}{x}=u}{=} \lim_{u\to 0} e^u = 1 = \lambda$ και

$$\lim_{x\to\pm\infty}\big[g(x) - x\big] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x e^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{1}{x}=u}{=} \lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{e^u - e^0}{u - 0} = \left.\frac{de^u}{du}\right|_{u=0} = e^0 = 1 = \beta$$

Άρα η ευθεία $y = x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $-\infty$ και στο $+\infty$

γ) Είναι:

$$\alpha < \frac{\alpha + 2\beta}{3} < \beta \Leftrightarrow 3\alpha < \alpha + 2\beta < 3\beta \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha < \alpha + 2\beta \\ \alpha + 2\beta < 3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha < 2\beta \\ \alpha < \beta \end{cases} \Leftrightarrow \alpha < \beta \text{ που ισχύει.}$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και στο $[\alpha,\beta]$ με $f'(x) = e^x$, οπότε ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\alpha, \dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right]$ και $\left[\dfrac{\alpha+2\beta}{3}, \beta\right]$, επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον:

- $\xi_1 \in \left(\alpha, \dfrac{\alpha+2\beta}{3} \right)$ τέτοιο, ώστε $f'\left(\xi_1\right) = \dfrac{f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\dfrac{\alpha+2\beta}{3} - \alpha} = \dfrac{f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\dfrac{2(\beta-\alpha)}{3}}$

- $\xi_2 \in \left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}, \beta \right)$ τέτοιο, ώστε $f'\left(\xi_2\right) = \dfrac{f\left(\beta\right) - f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\beta - \dfrac{\alpha+2\beta}{3}} = \dfrac{f\left(\beta\right) - f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\dfrac{\beta-\alpha}{3}}$

Για κάθε $x \in R$ έχουμε $f''(x) = e^x > 0$, άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'\left(\xi_1\right) < f'\left(\xi_2\right) \Rightarrow \frac{f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\dfrac{2(\beta-\alpha)}{3}} < \frac{f\left(\beta\right) - f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\dfrac{\beta-\alpha}{3}} \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f(\alpha) < 2\left[f\left(\beta\right) - f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) \right] \Rightarrow 3f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) < f(\alpha) + 2f(\beta) \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) < \frac{f(\alpha)+2f(\beta)}{3} \Rightarrow e^{\frac{\alpha+2\beta}{3}} < \frac{e^{\alpha} + 2e^{\beta}}{3} \Rightarrow \frac{\alpha+2\beta}{3} < \ln\left(\frac{e^{\alpha}+2e^{\beta}}{3}\right)$$

δ) Σχηματίζουμε τη διαφορά $\Delta(x) = e^x - x^2 - 1,\ x \in R$

Η συνάρτηση Δ είναι παραγωγίσιμη στο R με $\Delta'(x) = e^x - 2x,\ x \in R$

Επίσης $\Delta''(x) = e^x - 2,\ x \in R$

Παρατηρούμε ότι $\Delta''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

επομένως ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	ln2	$+\infty$
$\Delta''(x)$	−	0	+
$\Delta'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$
		Ελάχιστο	

$$\Delta'\left(\ln 2\right) = e^{\ln 2} - 2\ln 2 = 2 - 2\ln 2 = 2\left(1 - \ln 2\right) > 0 \text{ (εφόσον } e > 2 \overset{\ln x \uparrow}{\Rightarrow} \ln e > \ln 2 \Rightarrow 1 > \ln 2)$$

Άρα $\Delta'(x) \geq \Delta'\left(\ln 2\right) > 0 \Rightarrow \Delta'(x) > 0,\ x \in R$, οπότε η συνάρτηση Δ είναι γνησίως αύξουσα στο R. Είναι $\Delta(0) = e^0 - 0^2 - 1 = 0$. Άρα η $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\Delta(x) = 0$ και ισχύει:

$$\Delta\left(\left[0,1\right]\right) = \left[\Delta(0), \Delta(1)\right] = \left[0, e-2\right] \text{, άρα } \Delta(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \left[0,1\right]$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από τον τύπο:

$$E = \int_0^1 \left|\Delta(x)\right| dx \overset{\Delta(x)\geq 0}{=} \int_0^1 \left(e^x - x^2 - 1\right) dx = \left[e^x - \frac{x^3}{3} - x\right]_0^1 =$$

$$= e - \frac{1}{3} - 1 - \left(e^0 - 0\right) = e - \frac{1}{3} - 2 = e - \frac{7}{3} \quad \text{τ.μ.}$$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2014

ΘΕΜΑ 31ο :

Έστω $f:[0,1]\to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

- $f'(0)=f'(1)=0$
- $f(0)=0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^2+x$

α) Αν οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g στα σημεία της με τετμημένες $x_1=0$ και $x_2=1$ τέμνονται στο σημείο με τετμημένη $x_3=\frac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι:

i) $g(1)=0$

ii) Υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $g'(\xi)+2\xi=1$

β) Να αποδείξετε ότι:

i) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (1-x)f'(x)dx$

ii) Υπάρχει $x_o\in[0,1]$, ώστε $f'(x_o)=2\int_0^1 f(x)dx$

ΛΥΣΗ

α) i) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $g'(x)=f'(x)-2x+1$, οπότε

$$g'(0)=f'(0)+1=1 \quad \text{και} \quad g'(1)=f'(1)-1=-1$$

Επίσης:

$$g(0)=f(0)=0 \quad \text{και} \quad g(1)=f(1) \quad (1)$$

οπότε οι εφαπτόμενες της C_g στα σημεία $A(0,g(0))$ και $B(1,g(1))$ έχουν αντίστοιχα εξισώσεις:

$$\varepsilon_A:\ y-g(0)=g'(0)(x-0)\Rightarrow y=x \quad \text{και}$$

$$\varepsilon_B:\ y-g(1)=g'(1)(x-1)\Rightarrow y-f(1)=-1(x-1)\Rightarrow y=-x+1+f(1)$$

Το σημείο $M\left(\frac{1}{2}, y_o\right)$ είναι το σημείο τομής των εφαπτόμενων ε_A και ε_B, οπότε έχουμε:

$$y_o = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad y_o = -\frac{1}{2} + 1 + f(1)$$

Επομένως έχουμε:

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + 1 + f(1) \Rightarrow f(1) = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} g(1) = 0$$

ii) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f'(x) = g'(x) + 2x - 1$

Είναι $f(0) = 0$ και $f(1) = 0$, οπότε $f(0) = f(1)$, δηλαδή ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle.

Επομένως θα υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$

Επιπλέον

$$f'(\xi) = 0 \Rightarrow g'(\xi) + 2\xi - 1 = 0 \Rightarrow g'(\xi) + 2\xi = 1 \quad (2)$$

β) i) Είναι:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x-1)' f(x)\,dx = \big[(x-1)f(x)\big]_0^1 - \int_0^1 (x-1) f'(x)\,dx \overset{f(0)=0}{=} \int_0^1 (1-x) f'(x)\,dx \quad (6)$$

ii) Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο διάστημα [0, 1] ως παραγωγίσιμη, άρα παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή. Αν m, M είναι αντίστοιχα η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της στο $[0,1]$, τότε έχουμε:

$$m \le f'(x) \le M$$

Επειδή $1 - x \ge 0$ έχουμε:

$$(1-x)m \le (1-x)f'(x) \le (1-x)M \Rightarrow$$

$$m\int_0^1 (1-x)\,dx \le \int_0^1 (1-x)f'(x)\,dx \le M\int_0^1 (1-x)\,dx$$

Είναι:

$$\int_0^1 (1-x)\,dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

οπότε έχουμε:

$$\frac{1}{2}m \le \int_0^1 (1-x)f'(x)\,dx \le \frac{1}{2}M \overset{(6)}{\Rightarrow} m \le 2\int_0^1 f(x)\,dx \le M$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $2\int_0^1 f(x)dx$ ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f', άρα υπάρχει $x_o \in [0, 1]$ τέτοιο, ώστε $f'(x_o) = 2\int_0^1 f(x)\,dx$

ΘΕΜΑ 32ο :

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:(-\infty,1)\to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x)=\int_0^x e^{f(x-t)}dt$ για κάθε $x\in(-\infty\,,1)$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=-\ln(1-x)$, $x<1$

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό E(t) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, την εφαπτομένη της C_f στην αρχή των αξόνων και την ευθεία με εξίσωση $x=t$, όπου $0<t<1$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1^-}E(t)$

δ) Να αποδείξετε ότι: $2\int_\alpha^{\alpha-2} f(t)dt<\int_\alpha^{\alpha-4} f(t)dt$, όπου $\alpha<1$

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $x-t=u$, οπότε $du=-dt$. Όταν $t=0$ το $u=x$ και όταν $t=x$ το $u=0$

Άρα έχουμε:

$$f(x)=\int_0^x e^{f(x-t)}dt=\int_x^0 e^{f(u)}(-du)=\int_0^x e^{f(t)}dt$$

Η συνάρτηση $e^{f(t)}$ είναι συνεχής στο $(-\infty,1)$, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων το $0\in(-\infty,1)$, οπότε η συνάρτηση $\int_0^x e^{f(t)}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)$ οπότε και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)$

Για κάθε $x\in(-\infty,1)$ είναι:

$$f'(x)=e^{f(x)}\Leftrightarrow f'(x)e^{-f(x)}=1\Leftrightarrow -f'(x)e^{-f(x)}=-1\Leftrightarrow \left(e^{-f(x)}\right)'=(-x)'$$

Άρα έχουμε:

$$e^{-f(x)}=-x+c\ ,\quad x\in(-\infty,1)$$

Για $x=0$ έχουμε $f(0)=\int_0^0 e^{f(t)}dt=0$, οπότε $e^{-f(0)}=0+c\Rightarrow c=1$

Επομένως για κάθε $x\in(-\infty,1)$ είναι:

$$e^{-f(x)}=-x+1\Leftrightarrow -f(x)=\ln(1-x)\Leftrightarrow f(x)=-\ln(1-x)\ ,\ x\in(-\infty,1)$$

β) Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(-\ln(1-x)\right)\overset{u=1-x}{=}\lim\limits_{u\to0^+}\left(-\ln u\right)=+\infty$,

  άρα η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\ln(1-x)}{x}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\frac{1}{1-x}(1-x)'}{1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1-x}=0=\lambda$ και

  $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\ln(1-x)\right]=-\infty$

  Επομένως η C_f δεν έχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη.

γ) Για κάθε $x \in (-\infty\,,1)$ έχουμε :

$$f'(x) = \left[-\ln(1-x)\right]' = -\frac{1}{1-x}(1-x)' = \frac{1}{1-x} \qquad \text{και}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = -\frac{1}{(1-x)^2}(1-x)' = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(-\infty,1)$, οπότε η C_f βρίσκεται «πάνω» από την εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο της $O(0,0)$

Επειδή $f'(0)=1$ και $f(0) = -\ln(1-0) = 0$, η εφαπτομένη ε έχει εξίσωση :

$$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y = x$$

Άρα $f(x) \geq y \Rightarrow f(x) \geq x$ για κάθε $x \in (-\infty,1)$

Επομένως το εμβαδό E(t) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, την εφαπτομένη της C_f στην αρχή των αξόνων και την ευθεία με εξίσωση $x = t$, όπου $0 < t < 1$, είναι:

$$E(t) = \int_0^t \left[-\ln(1-x) - x\right]dx = -\int_0^t \ln(1-x)dx - \int_0^t x\,dx =$$

$$= -\int_0^t (x)'\ln(1-x)dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^t = -\left[x\ln(1-x)\right]_0^t + \int_0^t x\frac{1}{1-x}(1-x)'dx - \frac{t^2}{2} =$$

$$= -t\ln(1-t) + \int_0^t \frac{-x}{1-x}dx - \frac{t^2}{2} = -t\ln(1-t) + \int_0^t \frac{1-x-1}{1-x}dx - \frac{t^2}{2} =$$

$$= -t\ln(1-t) + \int_0^t \left(1 - \frac{1}{1-x}\right)dx - \frac{t^2}{2} = -t\ln(1-t) + \int_0^t 1dx + \int_0^t \frac{-1}{1-x}dx - \frac{t^2}{2} =$$

$$= -t\ln(1-t) + 1\cdot(t-0) + \int_0^t \frac{1}{1-x}(1-x)'dx - \frac{t^2}{2} =$$

$$= -t\ln(1-t) + t + \left[\ln|1-x|\right]_0^t - \frac{t^2}{2} = -t\ln(1-t) + t + \ln(1-t) - \frac{t^2}{2} =$$

$$= (1-t)\ln(1-t) + t - \frac{t^2}{2} = (1-t)\ln(1-t) - \frac{(1-t)^2}{2} + \frac{1}{2}, \quad t \in (0\,,1)$$

Έχουμε :

$$\lim_{t\to1^-} E(t) = \lim_{t\to1^-}\left[(1-t)\ln(1-t) - \frac{(1-t)^2}{2} + \frac{1}{2}\right] \overset{u=1-t}{=} \lim_{u\to0^+}\left[u\ln u - \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2},$$

γιατί $\displaystyle \lim_{u\to0^+}(u\ln u) \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim_{u\to0^+}\left(\frac{\ln u}{\frac{1}{u}}\right) \underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{u\to0^+}\left(\frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}}\right) = \lim_{u\to0^+}\left(-\frac{u^2}{u}\right) = \lim_{u\to0^+}(-u) = 0$

δ) Η δοθείσα ανίσωση ισοδύναμα γράφεται :

$$2\int_{\alpha}^{\alpha-2} f(t)dt < \int_{\alpha}^{\alpha-2} f(t)dt + \int_{\alpha-2}^{\alpha-4} f(t)dt \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\alpha-2} f(t)dt < \int_{\alpha-2}^{\alpha-4} f(t)dt \ , \ \alpha < 1$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση :

$$\Phi(x) = \int_{x}^{x-2} f(t)dt = \int_{x}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x-2} f(t)dt = -\int_{0}^{x} f(t)dt + \int_{0}^{x-2} f(t)dt \ , \ x < 1$$

που είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\infty,1\right)$, με

$$\Phi'(x) = -f(x) + f(x-2) = f(x-2) - f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \left(-\infty , 1\right)$$

Για κάθε $x \in (-\infty , 1)$ είναι $f'(x) = \dfrac{1}{1-x} > 0$, επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty , 1)$, οπότε ισχύει:

$$x - 2 < x < 1 \Rightarrow f(x-2) < f(x) \Rightarrow f(x-2) - f(x) < 0 \Rightarrow$$

$$\Phi'(x) < 0 \ , \text{ για κάθε } x \in (-\infty , 1)$$

Άρα η συνάρτηση Φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty , 1)$

Επομένως έχουμε:

$$\alpha - 2 < \alpha < 1 \Rightarrow \Phi(\alpha-2) > \Phi(\alpha) \ , \text{ για κάθε } \alpha \in \left(-\infty,1\right),$$

δηλαδή

$$\int_{\alpha}^{\alpha-2} f(t)dt < \int_{\alpha-2}^{\alpha-4} f(t)dt$$

ΘΕΜΑ 33ο :

Έστω συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$, για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)\eta\mu(x-1)}{\sqrt{x}-1} = 4$ και οι συναρτήσεις $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ και $h(x) = \int_0^1 f(x+t)dt$, $x, t \in R$.

Αν $E(\Omega_1) = \dfrac{4}{3}$, $E(\Omega_2) = \dfrac{10}{3}$ είναι τα εμβαδά των χωρίων Ω_1 και Ω_2 που περικλείονται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$, $x = 1$ και $x = 1$, $x = 2$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) > 0$ **για κάθε** $x \in R$

β) $g(2) = \dfrac{14}{3}$

γ) Υπάρχει μοναδικό $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $g(\xi) = 3$

δ) Υπάρχουν $\theta_1, \theta_2 \in (1,2)$ τέτοια, ώστε $\dfrac{f(\theta_1)+f(\theta_2)}{f(\theta_1)\cdot f(\theta_2)} = \dfrac{3}{5}$

ε) Ισχύει $h(x) = g(x+1) - g(x)$, $x \in R$

στ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho+1) - f(\rho) = 2$

ΛΥΣΗ

α) Έστω $\varphi(x)=\dfrac{f(x)\eta\mu(x-1)}{\sqrt{x}-1}$ για x κοντά στο 1, οπότε $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)=4$

Για x κοντά στο 1 έχουμε:

$$f(x)=\frac{\varphi(x)(\sqrt{x}-1)}{\eta\mu(x-1)}\Leftrightarrow f(x)=\frac{\varphi(x)(x-1)}{\eta\mu(x-1)(\sqrt{x}+1)}\Leftrightarrow f(x)=\varphi(x)\cdot\frac{1}{\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

Είναι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\overset{x-1=u}{=}\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$$

οπότε

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left[\varphi(x)\cdot\frac{1}{\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right]=4\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=2$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o=1$ ισχύει $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και για κάθε $x\in R$ είναι $f(x)\neq 0$, οπότε η συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο στο R. Επειδή $f(1)=2>0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$.

β) Είναι:

$$E(\Omega_1)=\int_0^1 f(x)dx=\frac{4}{3}\qquad \text{και}\qquad E(\Omega_2)=\int_1^2 f(x)dx=\frac{10}{3}$$

οπότε $g(2)=\displaystyle\int_0^2 f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^2 f(t)dx=\frac{4}{3}+\frac{10}{3}=\frac{14}{3}$

γ) Είναι:

$$g(1)=\int_0^1 f(t)dt=\frac{4}{3}\qquad \text{και}\qquad g(2)=\int_0^2 f(t)dt=\frac{14}{3}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, οπότε η συνάρτηση $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R με $g'(x)=f(x)>0$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο R.

Έχουμε:

- η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[1,2]$
- $g(1)\neq g(2)$
- $3\in(g(1),g(2))=\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{14}{3}\right)$

Επομένως από Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών θα υπάρχει $\xi\in(1,2)$ και μάλιστα μοναδικό, αφού η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα τέτοιο, ώστε $g(\xi)=3$

δ) Η g είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και σε καθένα από τα διαστήματα $[1,\xi]$ και $[\xi,2]$, οπότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ, επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον:

- $\theta_1 \in (1, \xi)$ τέτοιο, ώστε $g'(\theta_1) = \dfrac{g(\xi)-g(1)}{\xi-1} \Rightarrow f(\theta_1) = \dfrac{3-\frac{4}{3}}{\xi-1} \Rightarrow \xi - 1 = \dfrac{\frac{5}{3}}{f(\theta_1)}$ (1) και
- $\theta_2 \in (\xi, 2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\theta_2) = \dfrac{g(2)-g(\xi)}{2-\xi} \Rightarrow f(\theta_2) = \dfrac{\frac{14}{3}-3}{2-\xi} \Rightarrow 2 - \xi = \dfrac{\frac{5}{3}}{f(\theta_2)}$ (2)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$1 = \frac{\frac{5}{3}}{f(\theta_1)} + \frac{\frac{5}{3}}{f(\theta_2)} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{1}{f(\theta_1)} + \frac{1}{f(\theta_2)} \Rightarrow \frac{f(\theta_1)+f(\theta_2)}{f(\theta_1)f(\theta_2)} = \frac{3}{5}$$

ε) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$h(x) = \int_0^1 f(x+t)dt \overset{x+t=u}{\underset{dt=du}{=}} \int_x^{x+1} f(u)du = \int_x^0 f(u)du + \int_0^{x+1} f(u)du =$$

$$= \int_0^{x+1} f(u)du - \int_0^x f(u)du = g(x+1) - g(x)$$

στ) Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με

$$h'(x) = \big(g(x+1)-g(x)\big)' = g'(x+1)(x+1)' - g'(x) = g'(x+1) - g'(x) = f(x+1) - f(x)$$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $h'(\rho) = \dfrac{h(1)-h(0)}{1-0} \Rightarrow f(\rho+1) - f(\rho) = h(1) - h(0)$

Όμως $h(1) = g(2) - g(1) = \dfrac{14}{3} - \dfrac{4}{3} = \dfrac{10}{3}$ και $h(0) = g(1) - g(0) = \dfrac{4}{3} - 0 = \dfrac{4}{3}$

Οπότε $f(\rho+1) - f(\rho) = \dfrac{10}{3} - \dfrac{4}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$

ΘΕΜΑ 34ο :

Έστω $f: R \to R$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- **$f'(x) + 1 = 2x\big(f(x)+x\big)$ για κάθε $x \in R$**
- **$f(0) = 1$**

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x^2} - x$, $x \in R$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

γ) Να αποδείξετε ότι $e^{x^2-1} \geq 2x - 1$ για κάθε $x \in R$

δ) Να λύσετε στο διάστημα $(0, +\infty)$ την εξίσωση $e^{x^4 - x^2} = \dfrac{1}{x}$

ε) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \displaystyle\int_{2-x}^{x} f(t)dt$, $x \in R$

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

ii) Να αποδείξετε ότι $4 \cdot \displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(2x)dx < \int_0^2 f(x)dx$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f'(x)+1=2x\big(f(x)+x\big) \Rightarrow f'(x)-2xf(x)=-1+2x^2 \overset{\cdot e^{-x^2}}{\Rightarrow}$$
$$f'(x)e^{-x^2}+e^{-x^2}(-2x)f(x)=-e^{-x^2}+2x^2e^{-x^2} \Rightarrow$$
$$f'(x)e^{-x^2}+e^{-x^2}(-2x)f(x)=(-x)'e^{-x^2}+(-x)e^{-x^2}(-2x) \Rightarrow$$
$$f'(x)e^{-x^2}+e^{-x^2}(-x^2)'f(x)=(-x)'e^{-x^2}+(-x)e^{-x^2}(-x^2)' \Rightarrow$$
$$\left(f(x)e^{-x^2}\right)'=\left(-xe^{-x^2}\right)' \Rightarrow f(x)e^{-x^2}=-xe^{-x^2}+c$$

και $f(0)=1$, οπότε $c=1$

Επομένως $f(x)e^{-x^2}=-xe^{-x^2}+1$, οπότε $f(x)=e^{x^2}-x$, $x \in R$

β) Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με

$$f'(x)=2xe^{x^2}-1 \quad \text{και} \quad f''(x)=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}=2(2x^2+1)e^{x^2}$$

Για κάθε $x \in R$ ισχύει:

$$f''(x)=2(2x^2+1)e^{x^2}>0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο R

γ) Είναι:

$$f(1)=e-1 \quad \text{και} \quad f'(1)=2e-1$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_o=1$ είναι:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1) \Rightarrow y-(e-1)=(2e-1)(x-1) \Rightarrow y=(2e-1)x-e$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι κυρτή στο R, η εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_o=1$ βρίσκεται από την C_f και κάτω.

Άρα για κάθε $x \in R$ ισχύει:

$$f(x) \ge (2e-1)x-e \Rightarrow e^{x^2}-x \ge 2ex-x-e \Rightarrow$$
$$e^{x^2} \ge (2x-1)e \Rightarrow \frac{e^{x^2}}{e} \ge 2x-1 \Rightarrow e^{x^2-1} \ge 2x-1$$

δ) Στο διάστημα $(0,+\infty)$ έχουμε:

$$e^{x^4-x^2}=\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{e^{x^4}}{e^{x^2}}=\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{e^{x^4}}{e^{x^2}}=\frac{x}{x^2} \Leftrightarrow x^2e^{x^4}=xe^{x^2} \Leftrightarrow$$

$$2x^2e^{x^4}=2xe^{x^2} \Leftrightarrow 2x^2e^{x^4}-1=2xe^{x^2}-1 \Leftrightarrow f'(x^2)=f'(x) \quad (1)$$

Η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα άρα και «1 – 1», οπότε από τη σχέση (1) έχουμε:

$$x^2=x \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=1$$

ε) i) Η συνάρτηση g γράφεται $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^{2-x} f(t)\,dt$ και είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, ως διαφορά συναρτήσεων που είναι δυο φορές παραγωγίσιμες, με:

$$g'(x)=\left(\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^{2-x} f(t)\,dt\right)'=f(x)-f(2-x)\cdot(-1)=f(x)+f(2-x)$$

Η συνάρτηση g' είναι παραγωγίσιμη (σύνθεση και άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$g''(x)=f'(x)-f'(2-x)$$

Δεδομένου ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο R έχουμε:

- $g''(x)>0 \Leftrightarrow f'(x)>f'(2-x) \Leftrightarrow x>2-x \Leftrightarrow x>1$
- $g''(x)<0 \Leftrightarrow f'(x)<f'(2-x) \Leftrightarrow x<2-x \Leftrightarrow x<1$
- $g''(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή στο διάστημα $[1,+\infty)$, κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και παρουσιάζει καμπή στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$. Το σημείο καμπής της γραφικής της παράστασης της συνάρτησης g είναι το $M\big(1, g(1)\big)$, δηλαδή το $M\big(1, 0\big)$, αφού $g(1)=\int_1^1 f(t)\,dt=0$

ii) Στο ολοκλήρωμα του πρώτου μέλους της σχέσης που θέλουμε να αποδείξουμε, αν θέσουμε $2x=u$ τότε, έχουμε:

$$2dx=du\,,\quad u_1=\frac{1}{2}\quad \text{και}\quad u_2=\frac{3}{2}$$

οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(u)\,du<\int_0^2 f(x)\,dx \Leftrightarrow 2g\left(\frac{3}{2}\right)<g(2)$$

Δεδομένου ότι $g(1)=0$ η αποδεικτέα σχέση μπορεί να λάβει τη μορφή

$$g\left(\frac{1+2}{2}\right)<\frac{1}{2}\big(g(1)+g(2)\big)$$

Η συνάρτηση g σε καθένα από τα διαστήματα $\left[1, \frac{3}{2}\right]$, $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, οπότε υπάρχουν:

- $\xi_1\in\left(1, \frac{3}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi_1)=\dfrac{g\left(\frac{3}{2}\right)-g(1)}{\frac{1}{2}} \overset{g(1)=0}{\Rightarrow} g'(\xi_1)=2g\left(\frac{3}{2}\right)$, (2)
- $\xi_2\in\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi_2)=\dfrac{g(2)-g\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{2}} \Rightarrow g'(\xi_2)=2g(2)-2g\left(\frac{3}{2}\right)$, (3)

Η συνάρτηση g΄ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,2]$ και $\xi_1<\xi_2$, οπότε $g'(\xi_1)<g'(\xi_2)$
Επομένως έχουμε:

$$g'(\xi_1)<g'(\xi_2)\underset{(3)}{\overset{(2)}{\Rightarrow}}2g\left(\frac{3}{2}\right)<2g(2)-2g\left(\frac{3}{2}\right)\Rightarrow 2g\left(\frac{3}{2}\right)<g(2)$$

που είναι το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 35ο :

Δίνονται:

- **Η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)>0$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και**
- **Η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{3x}{2}-\dfrac{\ln x}{x}-3\ ,\ \ x>0$**

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση g

Αν επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις:

- $\displaystyle\int_{e^x f(x)}^{(1+e^x)f'(x)} e^{-x}g(t)dt+(e^{-x}+1)f'(x)=f(x)$ **, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και**
- $f(0)=2$

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

γ) Αν $f(x)=e^x+1$, τότε:

i) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^2+1}{f(x)}dx$

ii) Να βρείτε το $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(\varepsilon\varphi x)-f(\eta\mu x)}{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}$

iii) Αν μια συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[0\,,1]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[0\,,1]$, ώστε

$$\int_0^1 h(x)f(\sqrt{x})dx=h(\xi)\int_0^1 f(\sqrt{x})dx$$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0\,,+\infty)$ με:

$$g'(x)=-\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{2}-\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{-1+3x^2+2\ln x-2}{2x^2}=\frac{3x^2+2\ln x-3}{2x^2}$$

Το πρόσημο της συνάρτησης g′ εξαρτάται μόνο από το πρόσημο του αριθμητή.

Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση

$$G(x)=3x^2+2\ln x-3\ ,\ \ x>0$$

Η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο $(0\,,+\infty)$ με

$$G'(x)=6x+\frac{2}{x}>0$$

Άρα η συνάρτηση G είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Εξάλλου $G(1)=0$, οπότε

- για $x>1$ έχουμε $G(x)>G(1)\Rightarrow G(x)>0$, οπότε $g'(x)>0$ και
- για $0<x<1$ έχουμε $G(x)<G(1)\Rightarrow G(x)<0$, οπότε $g'(x)<0$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	
			Ελάχιστο		

Επομένως η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0\,,\,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1\,,\,+\infty)$

Επίσης η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$ το $g(1)=-1$

β) Είναι:

$$\int_{e^x f(x)}^{(1+e^x)f'(x)} e^{-x}g(t)dt+(e^{-x}+1)f'(x)=f(x)\Rightarrow$$

$$e^{-x}\int_{e^x f(x)}^{(1+e^x)f'(x)} g(t)dt+e^{-x}(1+e^x)f'(x)=f(x)\Rightarrow$$

$$\int_{e^x f(x)}^{(1+e^x)f'(x)} g(t)dt+(e^x+1)f'(x)=e^x f(x)\Rightarrow$$

$$\int_{e^x f(x)}^{(1+e^x)f'(x)} g(t)dt+(e^x+1)f'(x)-e^x f(x)=0\Rightarrow$$

$$\int_{e^x f(x)}^{(1+e^x)f'(x)} g(t)dt+\left[\,t\,\right]_{e^x f(x)}^{(e^x+1)f'(x)}=0\Rightarrow\int_{e^x f(x)}^{(1+e^x)f'(x)}[g(t)+1]dt=0$$

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_o\in R$ τέτοιο, ώστε

$$e^{x_o}f(x_o)\neq(1+e^{x_o})f'(x_o)$$

τότε στο διάστημα που σχηματίζουν οι αριθμοί $e^{x_o}f(x_o)$ και $(1+e^{x_o})f'(x_o)$, η συνάρτηση $g(t)+1$, όπως προκύπτει από το ερώτημα (α), λαμβάνει θετικές τιμές για κάθε $t\neq1$, οπότε

$$\int_{e^{x_o}f(x_o)}^{(1+e^{x_o})f'(x_o)}[g(t)+1]dt\neq0$$

που είναι άτοπο.

Άρα για κάθε $x\in R$ ισχύει:

$$e^x f(x)=(e^x+1)f'(x)\Rightarrow e^x f(x)-(e^x+1)f'(x)=0\Rightarrow$$

$$\frac{(e^x+1)f'(x)-e^x f(x)}{(e^x+1)^2}=0\Rightarrow\left(\frac{f(x)}{e^x+1}\right)'=0\Rightarrow f(x)=c(e^x+1)$$

και με δεδομένο ότι $f(0)=2$, βρίσκουμε ότι $c=1$

Επομένως έχουμε:

$$f(x)=e^x+1\;,\;x\in R$$

γ) i) Έχουμε:

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{x^2+1}{f(x)}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^2+1}{e^x+1}dx$$

Αν θέσουμε $x=-u$ τότε, έχουμε $dx=-du$, $u_1=1$, $u_2=-1$ και

$$I=-\int_{1}^{-1}\frac{x^2+1}{e^{-x}+1}dx=\int_{-1}^{1}\frac{(x^2+1)e^x}{e^x+1}dx$$

οπότε

$$2I=\int_{-1}^{1}\frac{(x^2+1)(e^x+1)}{e^x+1}dx=\int_{-1}^{1}(x^2+1)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{1}=\frac{8}{3}$$

Άρα

$$I=\frac{4}{3}$$

ii) Είναι:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(\varepsilon\varphi x)-f(\eta\mu x)}{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\varepsilon\varphi x}-e^{\eta\mu x}}{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{e^{\eta\mu x}(e^{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}-1)}{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}=1$$

διότι:

$$\lim_{x\to0}e^{\eta\mu x}=1 \text{ και } \lim_{x\to0}\frac{e^{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}-1}{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to0}\frac{e^{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}(\varepsilon\varphi x-\eta\mu x)'}{(\varepsilon\varphi x-\eta\mu x)'}=1$$

iii) Η συνάρτηση h, ως συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ λαμβάνει μέγιστη τιμή M και ελάχιστη τιμή m. Επίσης $f(\sqrt{x})>0$, οπότε έχουμε:

$$m\le h(x)\le M\Rightarrow m f(\sqrt{x})\le h(x)f(\sqrt{x})\le Mf(\sqrt{x})\Rightarrow$$

$$m\int_0^1 f(\sqrt{x})dx\le\int_0^1 h(x)f(\sqrt{x})dx\le M\int_0^1 f(\sqrt{x})dx$$

Επομένως, ο αριθμός

$$\frac{\int_0^1 h(x)f(\sqrt{x})dx}{\int_0^1 f(\sqrt{x})dx}$$

ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης h.

Άρα υπάρχει $\xi\in[0,1]$ τέτοιο, ώστε

$$h(\xi)=\frac{\int_0^1 h(x)f(\sqrt{x})dx}{\int_0^1 f(\sqrt{x})dx}\Rightarrow$$

$$\int_0^1 h(x)f(\sqrt{x})dx=h(\xi)\int_0^1 f(\sqrt{x})dx$$

που είναι το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 36ο :

Έστω η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ και η συνάρτηση $g(x)=|f(x)|$ Αν $E(t)=t\ln t-t+1$, $t>0$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=t$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $f(t)=\ln t$, $t>0$

β) Αν η ευθεία $y=\alpha$, με $\alpha>0$, τέμνει τη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g στα σημεία A και B, να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της C_g στα σημεία A και B είναι κάθετες.

γ) Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ln t\le t-1$ που ισχύει για κάθε $t>0$, να αποδείξετε ότι:

i) $\ln t\ge \dfrac{t-1}{t}$ **για κάθε** $t>0$

ii) $\displaystyle\lim_{x\to1^+}\int_x^{x^2}\frac{1}{f(t)}dt=\ln 2$ **και**

iii) $\displaystyle\lim_{x\to1}\int_x^{x^2}\frac{f(t)}{t-1}dt=0$

ΛΥΣΗ

α) Για $t>1$ είναι $E(t)=\int_1^t|f(x)|\,dx$, δηλαδή $\int_1^t|f(x)|\,dx=t\ln t-t+1$

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=|f(x)|$, τότε η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$\int_1^t g(x)dx=t\ln t-t+1$$

και αν παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της, έχουμε:

$$\left(\int_1^t g(x)dx\right)'=(t\ln t-t+1)'\Rightarrow g(t)=\ln t,\quad t>1$$

Επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής ως απόλυτη τιμή συνεχούς συνάρτησης θα ισχύει:

$$g(1)=\lim_{x\to1^+}g(x)\Rightarrow g(1)=0\Rightarrow|f(1)|=0\Leftrightarrow f(1)=0$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε έχουμε:

- Για $t<1$ είναι $f(t)<f(1)\Rightarrow f(t)<0$
- Για $t>1$ είναι $f(t)>f(1)\Rightarrow f(t)>0$

Επομένως για $t>1$ είναι:

$$g(t)=|f(t)|=\ln t\Rightarrow f(t)=\ln t$$

Επειδή $f(1)=0$ έχουμε τελικά:

$$f(t)=\ln t,\ t\ge1$$

Αν $0<t<1$ είναι:

$$\int_t^1 |f(x)|\,dx = t\ln t - t + 1 \Leftrightarrow -\int_1^t g(x)dx = t\ln t - t + 1$$

Παραγωγίζοντας προκύπτει ότι:

$$-g(t) = \ln t \Leftrightarrow -|f(t)| = \ln t \overset{f(t)<0}{\Leftrightarrow} f(t) = \ln t$$

Επομένως είναι:

$$f(t) = \ln t\,,\ t>0$$

β) Θα βρούμε τα κοινά σημεία της ευθείας $y=\alpha$ και της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης $g(x)=|f(x)|$

Έχουμε:

$$g(x)=\alpha \Leftrightarrow |\ln x| = \alpha \Leftrightarrow (\ln x = \alpha \ \text{ή}\ \ln x = -\alpha) \Leftrightarrow (x_1 = e^{\alpha}\ \text{ή}\ x_2 = e^{-\alpha})\,,\ x_2<1<x_1$$

Επομένως για τους συντελεστές διεύθυνσης των εφαπτομένων της γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης $g(x)=|f(x)|$ στα σημεία Α και Β, έχουμε:

$$\lambda_A\cdot\lambda_B = g'(x_2)\cdot g'(x_1) = \left(-\frac{1}{x_2}\right)\cdot\left(\frac{1}{x_1}\right) = -e^{\alpha}\cdot e^{-\alpha} = -1$$

Επομένως οι εφαπτόμενες της C_g στα σημεία Α και Β είναι κάθετες.

γ) i) Αν στην ανισότητα $\ln t \le t-1,\ t>0$ (1), θέσουμε όπου t το $\frac{1}{t}$ έχουμε:

$$\ln t \ge 1-\frac{1}{t} \Leftrightarrow \ln t \ge \frac{t-1}{t}\ ,\ t>0 \qquad (2)$$

ii) Συνδυάζοντας τις ανισότητες (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{t-1}{t} \le \ln t \le t-1\ ,\ t>0$$

Για $t>1$ είναι:

$$\frac{1}{t-1} \le \frac{1}{\ln t} \le \frac{t}{t-1}$$

και για $x>1$ προκύπτει ότι:

$$\int_x^{x^2}\frac{1}{t-1}dt \le \int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt \le \int_x^{x^2}\frac{t}{t-1}dt \Leftrightarrow$$

$$\int_x^{x^2}\frac{1}{t-1}dt \le \int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt \le \int_x^{x^2}\frac{t-1+1}{t-1}dt \Leftrightarrow$$

$$\int_x^{x^2}\frac{1}{t-1}dt \le \int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt \le \int_x^{x^2}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)dt \Leftrightarrow$$

$$\Big[\ln(t-1)\Big]_x^{x^2} \le \int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt \le \Big[t+\ln(t-1)\Big]_x^{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Big[\ln(t-1)\Big]_x^{x^2} \le \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt \le \Big[t+\ln(t-1)\Big]_x^{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\ln(x^2-1)-\ln(x-1) \le \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt \le x^2-x+\ln(x^2-1)-\ln(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\ln\frac{x^2-1}{x-1} \le \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt \le x^2-x+\ln\frac{x^2-1}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\ln(x+1) \le \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt \le x^2-x+\ln(x+1)$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 1^+}\big(\ln(x+1)\big)=\ln 2$
- $\lim\limits_{x\to 1^+}\big(x^2-x+\ln(x+1)\big)=\ln 2$

Οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to 1^+}\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{f(t)}\,dt=\ln 2$

iii) 1ος τρόπος:

Ισχύει:

$$\frac{t-1}{t} \le \ln t \le t-1\ ,\ \ t>0$$

- Για $t>1$ είναι:

$$\frac{1}{t} \le \frac{\ln t}{t-1} \le 1$$

και για $x>1$ προκύπτει ότι:

$$\int_x^{x^2}\frac{1}{t}\,dt \le \int_x^{x^2}\frac{\ln t}{t-1}\,dt \le \int_x^{x^2} 1\,dt \Leftrightarrow$$

$$\Big[\ln t\Big]_x^{x^2} \le \int_x^{x^2}\frac{\ln t}{t-1}\,dt \le 1\cdot(x^2-x) \Leftrightarrow$$

$$\ln x^2-\ln x \le \int_x^{x^2}\frac{\ln t}{t-1}\,dt \le x^2-x \Leftrightarrow$$

$$\ln x \le \int_x^{x^2}\frac{\ln t}{t-1}\,dt \le x^2-x$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 1^+}(\ln x) = \ln 1 = 0$
- $\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2 - x) = 0$

Οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to 1^+}\int_x^{x^2}\frac{\ln t}{t-1}dt = 0$ (3)

- Για $0 < t < 1$ είναι:

$$\frac{1}{t} \geq \frac{\ln t}{t-1} \geq 1$$

και για $0 < x < 1$ προκύπτει ότι:

$$\int_{x^2}^{x}\frac{1}{t}dt \geq \int_{x^2}^{x}\frac{\ln t}{t-1}dt \geq \int_{x^2}^{x}1\,dt \Leftrightarrow$$

$$\left[\ln t\right]_{x^2}^{x} \geq \int_{x^2}^{x}\frac{\ln t}{t-1}dt \geq 1\cdot(x-x^2) \Leftrightarrow$$

$$\ln x - \ln x^2 \geq \int_{x^2}^{x}\frac{\ln t}{t-1}dt \geq x - x^2 \Leftrightarrow$$

$$-\ln x \geq \int_{x^2}^{x}\frac{\ln t}{t-1}dt \geq x - x^2$$

$$\ln x \leq \int_{x}^{x^2}\frac{\ln t}{t-1}dt \leq x^2 - x$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 1^-}(\ln x) = \ln 1 = 0$
- $\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2 - x) = 0$

Οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to 1^-}\int_x^{x^2}\frac{\ln t}{t-1}dt = 0$ (4)

Από (3) και (4) έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\int_x^{x^2}\frac{\ln t}{t-1}dt = 0$

$2^{ος}$ τρόπος:

Έχουμε:

$$L = \lim_{x\to 1}\int_x^{x^2}\frac{f(t)}{t-1}dt = \lim_{x\to 1}\int_x^{x^2}\frac{\ln t}{t-1}dt$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(t)=\begin{cases}\dfrac{\ln t}{t-1}, & 0<t\neq 1\\ 1 , & t=1\end{cases}$$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$

Επίσης είναι:

$$\lim_{x\to 1}h(t)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln t}{t-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln t-\ln 1}{t-1}=\left.\frac{d(\ln t)}{dt}\right|_{t=1}=1=h(1)$$

Άρα η συνάρτηση h είναι συνεχής και στο $t_o=1$

Επομένως η συνάρτηση h είναι συνεχής, οπότε έχει αρχική.

Έστω H μια αρχική συνάρτηση της h στο διάστημα $(0,+\infty)$, τότε έχουμε:

$$L=\lim_{x\to 1}\int_x^{x^2}\frac{f(t)}{t-1}dt=\lim_{x\to 1}\int_x^{x^2}\frac{\ln t}{t-1}dt=\lim_{x\to 1}\left(H(x^2)-H(x)\right)=H(1)-H(1)=0,$$

διότι η συνάρτηση H είναι συνεχής, ως παραγωγίσιμη.

ΘΕΜΑ 37ο :

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:R\to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$\mathbf{f(x^2+y)+f(f(x)-y)=2f(f(x))+2y^2 \text{ για κάθε } x, y\in R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f^2(x)=x^4$, $x\in R$ και $f(x)+f(-x)=2x^2$, $x\in R$

β) $f(x)=x^2$, $x\in R$

γ) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{e^x+1}dx=\frac{1}{3}$

ΛΥΣΗ

α) 1ος τρόπος

Για κάθε $x, y\in R$ είναι:

$$f(x^2+y)+f(f(x)-y)=2f(f(x))+2y^2 \qquad (1)$$

Αν στη σχέση (1) θέσουμε $y=-x^2$ έχουμε:

$$f(0)+f(f(x)+x^2)=2f(f(x))+2x^4 \qquad (2)$$

Αν στη σχέση (1) θέσουμε $y=f(x)$ έχουμε:

$$f(x^2+f(x))+f(0)=2f(f(x))+2f^2(x) \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι:

$$2f(f(x))+2x^4=2f(f(x))+2f^2(x)\Leftrightarrow$$

$$f^2(x)=x^4 \qquad (4)$$

Για $x=0$ από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f^2(0)=0 \Rightarrow f(0)=0$$

Αν στη σχέση (1) θέσουμε $x=0$ έχουμε:

$$f(0+y)+f(f(0)-y)=2f(f(0))+2y^2 \Leftrightarrow$$

$$f(y)+f(-y)=2y^2$$

Επομένως ισχύει:

$$f(x)+f(-x)=2x^2, \quad x\in R \qquad (5)$$

2ος τρόπος

Για $x=y=0$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$f(0)+f(f(0))=2f(f(0)) \Rightarrow f(f(0))=f(0) \qquad (6)$$

Για $x=0$ και $y=f(0)$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$f(f(0))+f(f(0)-f(0))=2f(f(0))+2f^2(0) \Rightarrow$$

$$f(0)=f(f(0))+2f^2(0) \overset{(6)}{\Rightarrow} 2f^2(0)=0 \Rightarrow f(0)=0$$

Για $x=0$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$f(y)+f(f(0)-y)=2f(f(0))+2y^2 \overset{f(0)=0}{\Rightarrow}$$

$$f(y)+f(-y)=2y^2, \quad y\in R$$

Επομένως ισχύει:

$$f(x)+f(-x)=2x^2, \quad x\in R$$

Για $y=-x^2$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$f(x^2-x^2)+f(f(x)+x^2)=2f(f(x))+2x^4$$

$$f(0)+f(f(x)+x^2)=2f(f(x))+2x^4 \overset{f(0)=0}{\Rightarrow}$$

$$f(f(x)+x^2)=2f(f(x))+2x^4 \qquad (7)$$

Για $y=f(x)$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$f(x^2+f(x))+f(f(x)-f(x))=2f(f(x))+2f^2(x) \Rightarrow$$

$$f(x^2+f(x))+f(0)=2f(f(x))+2f^2(x) \overset{f(0)=0}{\Rightarrow}$$

$$f(f(x)+x^2)=2f(f(x))+2f^2(x) \qquad (8)$$

Από τις σχέσεις (7) και (8) προκύπτει ότι:

$$2f^2(x)=2x^4 \Rightarrow f^2(x)=x^4$$

β) 1ος τρόπος

Έστω $x_o\in R$, τότε από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f^2(x_o)=x_o^4 \Leftrightarrow f(x_o)=x_o^2 \quad ή \quad f(x_o)=-x_o^2 \qquad (9)$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x_o\in R^*$ τέτοιο, ώστε $f(x_o)=-x_o^2$

Από τη σχέση (5) έχουμε:

$$f(x_o)+f(-x_o)=2x_o^2 \Rightarrow -x_o^2+f(-x_o)=2x_o^2 \Rightarrow f(-x_o)=3x_o^2$$

Αν υψώσουμε στο τετράγωνο και τα δύο μέλη της τελευταίας σχέσης έχουμε:

$$\left[f(-x_o)\right]^2=9x_o^4 \Rightarrow x_o^4=9x_o^4 \Rightarrow 1=9 \text{, που είναι άτοπο.}$$

Άρα από τη σχέση (9) προκύπτει ότι για κάθε $x \neq 0$ είναι $f(x)=x^2$

Όμως $f(0)=0$, οπότε $f(x)=x^2$, για κάθε $x \in R$

Η συνάρτηση αυτή είναι δεκτή, διότι επαληθεύει τη δοσμένη συνθήκη.

2ος τρόπος

Αν στη σχέση (4) θέσουμε όπου x το $-x$ έχουμε:

$$f^2(-x)=(-x)^4 \Rightarrow f^2(-x)=x^4, \quad x \in R$$

Άρα για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f^2(x)=f^2(-x)=x^4 \Rightarrow$$

$$\big(f(x)+f(-x)\big)\cdot\big(f(x)-f(-x)\big)=0 \overset{(5)}{\Rightarrow}$$

$$2x^2\big(f(x)-f(-x)\big)=0, \quad x \in R$$

Επομένως για κάθε $x \in R^*$ είναι:

$$f(x)-f(-x)=0 \Rightarrow f(x)=f(-x) \qquad (10)$$

Από τις σχέσεις (5) και (10) προκύπτει ότι:

$$2f(x)=2x^2 \Rightarrow f(x)=x^2, \quad x \in R^* \quad (11)$$

Από τη σχέση (11) και δεδομένου ότι $f(0)=0$ έχουμε τελικά:

$$f(x)=x^2, \quad x \in R$$

γ) Έστω $I=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{e^x+1}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}dx$. Αν θέσουμε $x=-u$, τότε $dx=(-u)'du=-du$

Για $x=-1$ είναι $u=1$ και για $x=1$ είναι $u=-1$, οπότε έχουμε:

$$I=\int_{1}^{-1}\frac{(-u)^2}{e^{-u}+1}(-du)=-\int_{1}^{-1}\frac{u^2}{e^{-u}+1}du=\int_{-1}^{1}\frac{u^2}{e^{-u}+1}du=\int_{-1}^{1}\frac{u^2e^u}{1+e^u}du=\int_{-1}^{1}\frac{x^2e^x}{1+e^x}dx=J$$

Είναι:

- ♦ $I=J$ και
- ♦ $I+J=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+e^x}dx+\int_{-1}^{1}\frac{x^2e^x}{1+e^x}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^2+x^2e^x}{1+e^x}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^2(1+e^x)}{1+e^x}dx=\int_{-1}^{1}x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}$

Επομένως έχουμε:

$$2I=\frac{2}{3}, \text{ οπότε } I=\frac{1}{3}$$

ΘΕΜΑ 38ο :

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x+y)=e^{-y}\cdot f(x)+e^{-x}\cdot f(y)$, **για κάθε** $x,y\in\mathbb{R}$ **(1)**
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ **(2)**

Θεωρούμε επίσης και την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $g'(x^3+1)=-x^3e^{-x^3-1}$, **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ **(3) και**
- $g(0)=f(0)$ **(4)**

Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=-f(x)+e^{-x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) $f(x)=xe^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$

γ) $f=g$

δ) $ex\cdot f(x+1)<f(x+1)\displaystyle\int_1^{x+1}\frac{1}{f(t)}dt<x$, **για κάθε** $x\in(0,+\infty)$

ε) Η εξίσωση

$$x\int_1^x\frac{F(t+1)}{t}dt=x\int_1^\alpha\frac{F(t+1)}{t}dt+F(x+1)(x-\alpha)\ ,\ x>0,$$

όπου $F(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{1}{f(t)}dt$, $x\in(0,+\infty)$ **και** $\alpha>0$, **έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα.**

ΛΥΣΗ

α) Έστω $x_o\in\mathbb{R}$. Για x κοντά στο x_0 θεωρούμε το λόγο μεταβολών $\lambda(x)=\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$

Θέτουμε $h=x-x_o$, δηλαδή $x=x_o+h$, όπου $h\neq 0$, διότι $x\neq x_o$

Έτσι έχουμε:

$$\lambda(x)=\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}\overset{(1)}{=}\frac{e^{-h}\cdot f(x_o)+e^{-x_o}\cdot f(h)-f(x_o)}{h}$$

$$=\frac{f(x_o)\cdot\left(e^{-h}-1\right)+e^{-x_o}\cdot f(h)}{h}=f(x_o)\cdot\frac{e^{-h}-1}{h}+e^{-x_o}\cdot\frac{f(h)}{h}$$

Είναι:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}\overset{(2)}{=}1\quad\text{και}\quad\lim_{h\to 0}\frac{e^{-h}-1}{h}\overset{-h=t}{=}-\lim_{t\to 0}\frac{e^t-e^0}{t}=-\left.\frac{d(e^t)}{dt}\right|_{t=0}=-1\quad(5)$$

Άρα:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{h\to 0}\left(f(x_o)\cdot\frac{e^{-h}-1}{h}+e^{-x_o}\cdot\frac{f(h)}{h}\right)\underset{(5)}{\overset{(2)}{=}}$$

$$=f(x_o)\cdot(-1)+e^{-x_o}\cdot 1=-f(x_o)+e^{-x_o}\in\mathbb{R}$$

Δηλαδή, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο τυχαίο $x_o\in\mathbb{R}$ με $f'(x_o)=-f(x_o)+e^{-x_o}$

Επομένως η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=-f(x)+e^{-x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f'(x) = -f(x) + e^{-x} \Leftrightarrow f'(x) + f(x) = e^{-x} \overset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow}$$
$$e^x \cdot \left(f'(x) + f(x)\right) = 1 \Leftrightarrow \left(e^x \cdot f(x)\right)' = (x)'$$

Άρα

$$e^x \cdot f(x) = x + c \ , \ c \in R$$

Για $x = 0$ έχουμε:

$$e^0 \cdot f(0) = c \Rightarrow c = 0 ,$$

διότι από τη σχέση (1) για $x = y = 0$ έχουμε ότι $f(0) = 0$

Επομένως:

$$e^x \cdot f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x \cdot e^{-x} , \ x \in R$$

γ) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g'(x^3 + 1) = -x^3 e^{-x^3 - 1}$$

Θέτουμε $x^3 + 1 = t$, $t \in R$ και έχουμε:

$$g'(t) = (1 - t)e^{-t} \text{ , για κάθε } t \in R$$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = (1 - x)e^{-x}$$

Οπότε

$$f'(x) = g'(x), \text{ για κάθε } x \in R$$

Άρα για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f(x) = g(x) + c \ , \ c \in R$$

Από υπόθεση είναι $f(0) = g(0) = 0$, οπότε $c = 0$

Δηλαδή είναι:

$$f(x) = g(x) \text{ , για κάθε } x \in R$$

Επομένως

$$f = g$$

δ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f(x+1) = (x+1) \cdot e^{-(x+1)} > 0 \ ,$$

οπότε:

$$ex \cdot f(x+1) < f(x+1) \cdot \int_1^{x+1} \frac{1}{f(t)} dt < x \Leftrightarrow ex < \int_1^{x+1} \frac{1}{f(t)} dt < \frac{x}{f(x+1)} \qquad (6)$$

1ος τρόπος: (με Θ.Μ.Τ.)

Η σχέση (6) ισοδύναμα γράφεται:

$$ex < F(x+1) - F(1) < \frac{x}{f(x+1)} \ ,$$

όπου

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{f(t)} dt \ , \ x \in (0, +\infty)$$

είναι μια αρχική της συνεχούς συνάρτησης $\dfrac{1}{f(t)}$ στο διάστημα $(0, +\infty)$

- Για κάθε $x>0$, η συνάρτηση F ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[1\,,\,x+1]$. Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1\,,\,x+1)$ τέτοιο, ώστε:

$$F'(\xi)=\frac{F(x+1)-F(1)}{x}\ ,\quad \text{δηλαδή}\quad F'(\xi)=\frac{F(x+1)}{x}\quad (7)$$

Είναι:

$$F'(x)=\left(\int_1^x\frac{1}{f(t)}dt\right)'=\frac{1}{f(x)}\ ,\quad x>0$$

και

$$F''(x)=\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\left(\frac{e^x}{x}\right)'=\frac{e^x(x-1)}{x^2}\ ,\quad x>0$$

Έχουμε:

- ♦ Η συνάρτηση F' είναι συνεχής στο $[1\,,+\infty)$
- ♦ $F''(x)>0$ για κάθε $x\in(1\,,+\infty)$

Επομένως η συνάρτηση F' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

- Έχουμε:

$$1<\xi<x+1\overset{F'\uparrow(1,+\infty)}{\Rightarrow}F'(1)<F'(\xi)<F'(x+1)\overset{(7)}{\Rightarrow}e<\frac{F(x+1)}{x}<\frac{1}{f(x+1)}\overset{x>0}{\Rightarrow}$$

$$ex<F(x+1)<\frac{x}{f(x+1)}\Rightarrow ex<\int_1^{x+1}\frac{1}{f(t)}dt<\frac{x}{f(x+1)}$$

και λόγω της (6) προκύπτει ότι:

$$ex\cdot f(x+1)<f(x+1)\cdot\int_1^{x+1}\frac{1}{f(t)}dt<x\ ,\ \text{για κάθε}\ x\in(0,+\infty)$$

Σημείωση: Η σχέση (6) μπορεί να αποδειχθεί επίσης:

- Με τη βοήθεια των ακροτάτων της συνεχούς συνάρτησης $\frac{1}{f(t)}$ στο διάστημα $[1\,,\,x+1]$, $x>0$ και στη συνέχεια ολοκληρώνοντας … **(2ος τρόπος) , ή**
- Με τη μέθοδο της μονοτονίας για κάθε ανισότητα χωριστά … **(3ος τρόπος)**.

ε) Έστω

$$\Phi(x)=\int_1^x\frac{F(t+1)}{t}dt\ ,\quad x\in(0,+\infty)$$

μια αρχική της συνεχούς συνάρτησης $\frac{F(t+1)}{t}$ στο διάστημα $(0,+\infty)$,

όπου

$$F(x)=\int_1^x\frac{1}{f(t)}dt\ ,\quad x\in(0,+\infty)$$

Η εξίσωση

$$x\int_1^x \frac{F(t+1)}{t}dt = x\int_1^{\alpha} \frac{F(t+1)}{t}dt + F(x+1)(x-\alpha)\ ,\ \ x>0$$

γράφεται ισοδύναμα

$$\Phi(x)-\Phi(\alpha)-\Phi'(x)(x-\alpha)=0\ ,\quad x>0 \qquad (8)$$

Θεωρούμε συνάρτηση

$$K(x)=\Phi(x)-\Phi(\alpha)-\Phi'(x)(x-\alpha)\ ,\quad x>0,$$

Για κάθε $x>0$ είναι:

$$K'(x)=-\Phi''(x)(x-\alpha)$$

Όμως $\Phi''(x)=\dfrac{\dfrac{x}{f(x+1)}-F(x+1)}{x^2}>0$, για κάθε $x>0$, λόγω του ερωτήματος (γ), οπότε:

- ♦ $K'(x)=0 \Leftrightarrow x-\alpha=0 \Leftrightarrow x=\alpha$
- ♦ $K'(x)<0 \Leftrightarrow x-\alpha>0 \Leftrightarrow x>\alpha$

Το πρόσημο της $K'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης K φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		α	$+\infty$
$K'(x)$		$+$	0	$-$
$K(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$
			μέγιστο	

Έχουμε:

- Για $0<x<\alpha \overset{K\nearrow}{\Rightarrow} K(x)<K(\alpha) \Rightarrow K(x)<0$
- Για $x>\alpha \overset{K\searrow}{\Rightarrow} K(x)<K(\alpha) \Rightarrow K(x)<0$

Άρα

- ○ $K(x)<0$ για κάθε $x\in(0,\alpha)\cup(\alpha,+\infty)$ και
- ○ $K(x)=0$ μόνο για $x=\alpha$

Επομένως η εξίσωση (8), οπότε και η αρχική εξίσωση έχει ακριβώς μια ρίζα το α.

(2^{ος} τρόπος) Υπόδειξη:

Προφανής ρίζα της εξίσωσης (8) είναι το α

Για $0<x\neq\alpha$ με Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση Φ προκύπτει ότι $\Phi(x)<\Phi(\alpha)+\Phi'(x)(x-\alpha)$. Άρα ...

ΘΕΜΑ 39ο :

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(0)=0$, για την οποία ισχύουν:

- **$f(x)+x\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (1)**
- **$f(x-y)=\dfrac{f(x)+x}{f(y)+y}-x+y$, για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$ (2)**

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν:

i) $f'(x)=f(x)+x-1$

ii) $f(x)=e^x-x$

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του α, ώστε να ισχύει:

$$f(x) \geq \alpha x \text{ για κάθε } x \in R, \text{ όπου } \alpha > -1$$

γ) Αν $z = f(x) + x + i\left(f(\ln x) + e^2 - x\right)$ και $x > 0$, να αποδείξετε ότι $|z| \geq e\sqrt{1+e^2}$

δ) i) Αν $H(x) = \int_0^x \left(t f(t) + t^2\right) dt$, $x \in R$ να αποδείξετε ότι $H(x) = xe^x - e^x + 1$ για κάθε $x \in R$

ii) Να βρείτε συνάρτηση G, η οποία να είναι συνεχής στο R, παραγωγίσιμη στο R^* και για την οποία ισχύει:

$$G'(x) + \frac{2G(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} + 1 \text{ για κάθε } x \in R^*$$

Είναι η συνάρτηση G παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$;

ΛΥΣΗ

α) i) Για $x = y = 0$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f(0-0) = \frac{f(0)+0}{f(0)+0} - 0 + 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} f(0) = 1 \quad (3)$$

Αν παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (2) ως προς y, θεωρώντας το x σταθερά, έχουμε:

$$f'(x-y)\cdot(0-1) = \frac{-\left(f(x)+x\right)\cdot\left(f'(y)+1\right)}{\left(f(y)+y\right)^2} - 0 + 1 \Rightarrow$$

$$f'(x-y) = \frac{\left(f(x)+x\right)\cdot\left(f'(y)+1\right)}{\left(f(y)+y\right)^2} - 1$$

Για $y = 0$ από την τελευταία σχέση έχουμε:

$$f'(x) = \frac{\left(f(x)+x\right)\cdot\left(f'(0)+1\right)}{\left(f(0)+0\right)^2} - 1 \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$f'(x) = \frac{\left(f(x)+x\right)\cdot\left(0+1\right)}{\left(1+0\right)^2} - 1 \Rightarrow$$

$$f'(x) = f(x) + x - 1, \text{ για κάθε } x \in R$$

ii) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = f(x) + x - 1 \Leftrightarrow f'(x) + 1 = f(x) + x \Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)+x\right)' = f(x) + x \Leftrightarrow f(x) + x = ce^x \quad (4)$$

Για $x = 0$ από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f(0) + 0 = ce^0 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} c = 1$$

Για $c = 1$ από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f(x) + x = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^x - x, \text{ για κάθε } x \in R$$

β) Για $\alpha > -1$ και για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f(x) \ge \alpha x \Leftrightarrow e^x - x \ge \alpha x \Leftrightarrow e^x - x - \alpha x \ge 0 \Leftrightarrow g(x) \ge 0 \quad (5),$$

όπου $g(x) = e^x - x - \alpha x$, $x \in R$ και $\alpha > -1$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g'(x) = e^x - 1 - \alpha \text{ , όπου } \alpha > -1$$

Έχουμε:

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 - \alpha = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 + \alpha \Leftrightarrow x = \ln(1+\alpha)$
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 - \alpha > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 + \alpha \Leftrightarrow x > \ln(1+\alpha)$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$\ln(1+\alpha)$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$
		ελάχιστο	

Η συνάρτηση g παίρνει ελάχιστη τιμή:

$$g(\ln(1+\alpha)) = e^{\ln(1+\alpha)} - \ln(1+\alpha) - \alpha\ln(1+\alpha) =$$

$$= (1+\alpha) - (1+\alpha)\ln(1+\alpha) = (1+\alpha)\left(1 - \ln(1+\alpha)\right)$$

Άρα για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g(x) \ge (1+\alpha)\left(1 - \ln(1+\alpha)\right)$$

Για να είναι $g(x) \ge 0$ για κάθε $x \in R$, αρκεί να ισχύει:

$$(1+\alpha)\left(1 - \ln(1+\alpha)\right) \ge 0 \text{ , όπου } \alpha > -1$$

Έχουμε:

$$(1+\alpha)\left(1 - \ln(1+\alpha)\right) \ge 0 \overset{1+\alpha>0}{\Leftrightarrow} 1 - \ln(1+\alpha) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln(1+\alpha) \le 1 \Leftrightarrow \ln(1+\alpha) \le \ln e \Leftrightarrow 1 + \alpha \le e \Leftrightarrow \alpha \le e - 1$$

Άρα η μέγιστη τιμή του α είναι $\alpha = e - 1$

γ) Είναι:

$$z = f(x) + x + i\left(f(\ln x) + e^2 - x\right) \Rightarrow$$

$$z = e^x - x + x + i\left(e^{\ln x} - \ln x + e^2 - x\right) \Rightarrow$$

$$z = e^x + i\left(e^2 - \ln x\right), \quad x > 0$$

Άρα

$$|z| = \sqrt{e^{2x} + \left(e^2 - \ln x\right)^2}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = \sqrt{e^{2x} + \left(e^2 - \ln x\right)^2}, \quad x > 0$$

Για $x>0$ έχουμε:

$$\varphi'(x)=\frac{2e^{2x}+2\left(e^2-\ln x\right)\left(-\frac{1}{x}\right)}{2\sqrt{e^{2x}+\left(e^2-\ln x\right)^2}}=\frac{xe^{2x}+\ln x-e^2}{x\sqrt{e^{2x}+\left(e^2-\ln x\right)^2}}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=xe^{2x}+\ln x-e^2,\ \ x>0$$

Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$h'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}+\frac{1}{x}>0$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$

Είναι:

$$h(1)=1\cdot e^2+\ln 1-e^2=0$$

Οπότε έχουμε:

- για $0<x<1 \Rightarrow h(x)<h(1)\Rightarrow h(x)<0$ και
- για $x>1\Rightarrow h(x)>h(1)\Rightarrow h(x)>0$

Επειδή:

$$\varphi'(x)=\frac{h(x)}{x\sqrt{e^{2x}+\left(e^2-\ln x\right)^2}}$$

έχουμε:

- $\varphi'(x)=0\Leftrightarrow h(x)=0\Leftrightarrow x=1$
- $\varphi'(x)>0\Leftrightarrow h(x)>0\Leftrightarrow x>1$

Το πρόσημο της $\varphi'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης φ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$		$\searrow$	$e\sqrt{1+e^2}$	$\nearrow$	

ελάχιστο

Η συνάρτηση φ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$ το $\varphi(1)=\sqrt{e^2+e^4}=e\sqrt{1+e^2}$

Άρα για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$\varphi(x)\geq\varphi(1)\overset{\varphi(x)=|z|}{\Rightarrow}|z|\geq e\sqrt{1+e^2}$$

δ) i) Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$H(x)=\int_0^x\left(tf(t)+t^2\right)dt=\int_0^x\left(t(e^t-t)+t^2\right)dt=\int_0^x te^t dt=$$

$$= \int_0^x t\,(e^t)'\,dt = \left[t\,e^t\right]_0^x - \int_0^x (t)'\,e^t\,dt = x\,e^x - 0\cdot e^o - \int_0^x e^t\,dt =$$

$$= x\,e^x - \left[e^t\right]_0^x = x\,e^x - (e^x - e^o) = x\,e^x - e^x + 1$$

ii) Για κάθε $x \in R^*$ είναι:

$$G'(x) + \frac{2\,G(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} + 1 \Leftrightarrow$$

$$x^2 G'(x) + 2xG(x) = x\,f(x) + x^2 \qquad (6)$$

Η συνάρτηση H είναι παραγωγίσιμη στο R, ως αρχική της συνεχούς στο R συνάρτησης $t\,f(t) + t^2$ με:

$$H'(x) = x\,f(x) + x^2 \qquad (7)$$

Από τις σχέσεις (6) και (7) έχουμε:

$$x^2 G'(x) + 2xG(x) = H'(x) \Leftrightarrow$$

$$\left(x^2 G(x)\right)' = H'(x)\ ,\quad x \in R^*$$

♦ Για κάθε $x \in (-\infty\,, 0)$ είναι:

$$x^2 G(x) = H(x) + c_1 \Leftrightarrow x^2 G(x) = x\,e^x - e^x + 1 + c_1 \qquad (8)$$

♦ Για κάθε $x \in (0\,, +\infty)$ είναι:

$$x^2 G(x) = H(x) + c_2 \Leftrightarrow x^2 G(x) = x\,e^x - e^x + 1 + c_2 \qquad (9)$$

Επειδή η συνάρτηση G είναι συνεχής στο $x_o = 0$ θα ισχύει:

$$\lim_{x\to 0^-} G(x) = \lim_{x\to 0^+} G(x) = G(0)$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^-} G(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x\,e^x - e^x + 1 + c_1) \Rightarrow 0\cdot G(0) = 0 - 1 + 1 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x\,e^x - e^x + 1 + c_2) \Rightarrow 0\cdot G(0) = 0 - 1 + 1 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$

Άρα για κάθε $x \in R^*$ είναι:

$$x^2 G(x) = x\,e^x - e^x + 1 \Rightarrow G(x) = \frac{x\,e^x - e^x + 1}{x^2}\ ,\quad x \neq 0$$

Επομένως για κάθε $x \in R$ είναι:

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{x\,e^x - e^x + 1}{x^2} & ,\quad x \neq 0 \\ G(0) & ,\quad x = 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση G είναι συνεχής στο $x_o = 0$, οπότε:

$$G(0) = \lim_{x\to 0} G(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x\,e^x - e^x + 1}{x^2} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + x\,e^x - e^x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,e^x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

Άρα:

$$G(x)=\begin{cases}\dfrac{x e^x - e^x + 1}{x^2} &, \ x \neq 0\\[2mm] \dfrac{1}{2} &, \ x = 0\end{cases}$$

Για $x \neq 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{G(x)-G(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x e^x - e^x + 1}{x^2}-\dfrac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x e^x - 2e^x + 2 - x^2}{2x^3}\underset{\text{D.L.H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x + 2x e^x - 2e^x - 2x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x e^x - 2x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x(e^x-1)}{6x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{e^x-1}{x}\right)=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3},$$

γιατί $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^0}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^0}{x-0}=\dfrac{d(e^x)}{dx}\Big|_{x=0}=1$

Άρα η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ με $G'(0)=\dfrac{1}{3}$

ΘΕΜΑ 40ο :

Έστω δύο πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha<\beta$, μία συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)>0$ για κάθε $x \in R$ και η συνάρτηση $g:R\to R$ με τύπο $g(x)=\displaystyle\int_{\alpha(x^2+1)}^{\beta(x^2+1)} f\left(\frac{t}{x^2+1}\right)dt - xe^{x^2+1}$

Αν ισχύει:

$$\left(\int_\alpha^\beta f(x)dx\right)^x \geq x+1, \ \text{για κάθε } x \in R,$$

τότε:

α) i) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx = e$

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μοναδική θετική ρίζα x_o, για την οποία ισχύει:

$$\frac{2x_o^3+6x_o}{3} > e^{x_o^2} - 1$$

β) Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση

$$h(x)=\int_1^{x^2+1} f\left(\frac{t}{x^2+1}\right)dt$$

παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στη θέση $x_o=1$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f^2(x)dx \geq f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}$$

ΛΥΣΗ

α) i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi : R \to R$, $\varphi(x) = \left(\int_\alpha^\beta f(x)dx\right)^x - x - 1$

Παρατηρούμε ότι $\varphi(x) \geq \varphi(0)$, για κάθε $x \in R$, οπότε η συνάρτηση φ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x_1 = 0$ του πεδίου ορισμού της.

Επίσης η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη ως πράξη μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$\varphi'(x) = \left(\int_\alpha^\beta f(x)dx\right)^x \ln\left(\int_\alpha^\beta f(x)dx\right) - 1$$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, οπότε έχουμε:

$$\varphi'(0) = 0 \Rightarrow \left(\int_\alpha^\beta f(x)dx\right)^0 \ln\left(\int_\alpha^\beta f(x)dx\right) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\ln\left(\int_\alpha^\beta f(x)dx\right) = 1 \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx = e \quad (1)$$

ii) Θέτουμε $\dfrac{t}{x^2+1} = u \Rightarrow t = (x^2+1)u \Rightarrow dt = (x^2+1)du$

Για $t = \alpha(x^2+1) \Rightarrow u = \alpha$, ενώ για $t = \beta(x^2+1) \Rightarrow u = \beta$, οπότε έχουμε:

$$g(x) = \int_\alpha^\beta f(u)(x^2+1)\,du - xe^{x^2+1} =$$

$$= (x^2+1)\int_\alpha^\beta f(u)\,du - xe^{x^2+1} \overset{(1)}{=}$$

$$= (x^2+1)\cdot e - xe^{x^2+1} \ , \quad x \in R$$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g'(x) = 2ex - \left((x)'e^{x^2+1} + xe^{x^2+1}(x^2+1)'\right) =$$

$$= 2ex - e^{x^2+1} - 2x^2e^{x^2+1} =$$

$$= -e\cdot\left((2x^2+1)e^{x^2} - 2x\right)$$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

- $x^2 + 1 \geq 2x$ με το «ίσον» να ισχύει μόνο για $x = 1$
- $x^2 \geq 0$ με το «ίσον» να ισχύει μόνο για $x = 0$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε $2x^2 + 1 \geq 2x \quad (2)$

Επίσης είναι:

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow e^{x^2} > e^0 \Rightarrow e^{x^2} > 1 \quad (3)$$

Για $x > 0$, αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$(2x^2+1)\cdot e^{x^2} \geq 2x\cdot 1 \Rightarrow$$

$$(2x^2+1)\cdot e^{x^2} - 2x \geq 0 \overset{\cdot(-e)<0}{\Rightarrow}$$

$$-e\cdot\left((2x^2+1)e^{x^2} - 2x\right) < 0 \Rightarrow$$

$$g'(x) < 0 \ , \quad x > 0$$

Για $x \le 0$ προφανώς ισχύει $g'(x) < 0$. Άρα $g'(x) < 0$ για κάθε $x \in R$

Επομένως η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο R

Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο R, άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$$g(R) = \left(\lim_{x\to+\infty} g(x)\ ,\ \lim_{x\to-\infty} g(x) \right)$$

Είναι:

- ♦ $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(ex^2 + e - xe^{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(e + \frac{e}{x^2} - \frac{e^{x^2+1}}{x}\right) = -\infty$, διότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2+1}}{x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{D.L.H}{=}} \lim_{x\to+\infty}\left(2xe^{x^2+1}\right) = +\infty$$

- ♦ $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(ex^2 + e - xe^{x^2+1}\right) = +\infty$

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτηση g είναι το $g(R) = R$

iii) Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο R και έχει σύνολο τιμών το R, άρα θα υπάρχει μοναδικό x_o τέτοιο, ώστε $g(x_o) = 0$

- Για $x < x_o \overset{g\searrow}{\Rightarrow} g(x) > g(x_o) \Rightarrow g(x) > 0$
- Για $x > x_o \overset{g\searrow}{\Rightarrow} g(x) < g(x_o) \Rightarrow g(x) < 0$

Το πρόσημο της συνάρτησης g φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		x_o		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Επειδή $g(0) = e > 0$, συμπεραίνουμε ότι $0 \in (-\infty\ ,\ x_o)$. Άρα $x_o > 0$

Για κάθε $x \in [0\ ,\ x_o]$ είναι $g(x) \ge 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x = x_o$, επομένως

$$\int_0^{x_o} g(x)\,dx > 0 \Rightarrow \int_0^{x_o}\left(ex^2 + e - xe^{x^2+1}\right)dx > 0 \Rightarrow$$

$$e\int_0^{x_o} x^2\,dx + \int_0^{x_o} e\,dx - \int_0^{x_o} xe^{x^2+1}\,dx > 0 \Rightarrow$$

$$e\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{x_o} + e(x_o - 0) - \frac{1}{2}\int_0^{x_o}\left(e^{x^2+1}\right)'dx > 0 \Rightarrow$$

$$e\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{x_o} + e(x_o - 0) - \frac{1}{2}\left[e^{x^2+1}\right]_0^{x_o} > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{ex_o^3}{3} + ex_o - \frac{1}{2}\left(e^{x_o^2+1} - e\right) > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x_o^3}{3} + x_o > \frac{1}{2}\left(e^{x_o^2} - 1\right) \Rightarrow \frac{2x_o^3 + 6x_o}{3} > e^{x_o^2} - 1$$

β) Θέτουμε $\frac{t}{x^2+1}=u \Rightarrow t=(x^2+1)u \Rightarrow dt=(x^2+1)du$

Για $t=1 \Rightarrow u=\frac{1}{x^2+1}$, ενώ για $t=x^2+1 \Rightarrow u=1$, οπότε έχουμε:

$$h(x)=(x^2+1)\int_{\frac{1}{x^2+1}}^{1} f(u)\,du = -(x^2+1)\int_{1}^{\frac{1}{x^2+1}} f(u)\,du \Rightarrow$$

Η συνάρτηση h έχει πεδίο ορισμού το R και παρουσιάζει ακρότατο στη θέση $x_o=1$, επίσης είναι παραγωγίσιμη στο R, με:

$$h'(x)=-2x\int_{1}^{\frac{1}{x^2+1}} f(u)\,du-(x^2+1)\cdot f\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' \Rightarrow$$

$$h'(x)=-2x\int_{1}^{\frac{1}{x^2+1}} f(u)\,du+\frac{2x}{x^2+1}\cdot f\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$$

Άρα είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$, με:

$$h'(1)=-2\int_{1}^{\frac{1}{2}} f(u)\,du+f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, οπότε έχουμε:

$$h'(1)=0 \Rightarrow -2\int_{1}^{\frac{1}{2}} f(u)\,du+f\left(\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow \int_{1}^{\frac{1}{2}} f(u)\,du=\frac{1}{2}\cdot f\left(\frac{1}{2}\right) \quad (4)$$

Είναι:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f^2(x)\,dx \ge f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2} \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \int_{\frac{1}{2}}^{1} f^2(x)\,dx \ge 2\int_{1}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx-1\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f^2(x)\,dx \ge -2\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx-\int_{\frac{1}{2}}^{1} 1\,dx \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1} f^2(x)\,dx+2\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1} 1\,dx \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(f^2(x)+2f(x)+1\right)dx \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(f(x)+1\right)^2 dx \ge 0$$

το οποίο είναι αληθές, διότι $\left(f(x)+1\right)^2 \ge 0$ για κάθε $x \in R$ και $\frac{1}{2}<1$

Επομένως ισχύει:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f^2(x)\,dx \ge f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ 41ο :

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z με $z \neq 1$ και $z \neq 2$, για τους οποίους ισχύει $|z-1|+|z-2|=1$ (1)

Επιπλέον θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ με $f(x)=\frac{x}{2}+\int_0^x |z-1|\, e^{\eta\mu t}dt$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z

β) Να βρείτε σημείο του γεωμετρικού τόπου των εικόνων των μιγαδικών z, αν $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$

γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{|z-1|^2}+\frac{1}{|z-2|^2}\geq 8$

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{1}{4}}^{|z-2|}\frac{1}{x+|z-2|}dx<\ln\frac{8}{5}$

ΛΥΣΗ

α) Αν τα σημεία M, A και B είναι αντίστοιχα οι εικόνες των μιγαδικών z, $1=1+0i$ και $2=2+0i$ τότε έχουμε:

$$|z-1|+|z-2|=1 \Leftrightarrow (MA)+(MB)=(AB)$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ , εκτός των άκρων του Α και Β , αφού από υπόθεση είναι $z\neq 1$ και $z\neq 2$

β) Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{1}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+|z-1|e^{\eta\mu x}\right)=\frac{1}{2}+|z-1|$$

Όμως:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$$

Άρα:

$$\frac{1}{2}+|z-1|=1 \Rightarrow |z-1|=\frac{1}{2}$$

Οπότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι και $|z-2|=\frac{1}{2}$

Επομένως το ζητούμενο σημείο είναι το μέσο του ΑΒ , δηλαδή το σημείο $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

γ) 1ος τρόπος:

Έστω $z=x\in R-\{1,2\}$

Στο (α) ερώτημα αποδείξαμε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, όπου Α(1, 0) και Β(2, 0) με εξαίρεση τα σημεία του Α και Β, αφού από υπόθεση είναι $z\neq 1$ και $z\neq 2$

Επομένως ισχύει:

$$1<x<2$$

Είναι:

$$\frac{1}{|z-1|^2}+\frac{1}{|z-2|^2}=\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-2)^2}=g(x),\ \text{με}\ 1<x<2$$

Για κάθε $x \in (1\,,\,2)$ έχουμε:

$$g'(x) = -\frac{2}{(x-1)^3} - \frac{2}{(x-2)^3} = \frac{-2\left((x-1)^3 + (x-2)^3\right)}{(x-1)^3(x-2)^3} =$$

$$= \frac{-2(x-1+x-2)\left((x-1)^2 - (x-1)(x-2) + (x-2)^2\right)}{(x-1)^3(x-2)^3} =$$

$$= \frac{-2(2x-3)\left((x-1)^2 - (x-1)(x-2) + (x-2)^2\right)}{(x-1)^3(x-2)^3}$$

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2(2x-3)\underbrace{\left((x-1)^2 - (x-1)(x-2) + (x-2)^2\right)}_{>0} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-2(2x-3)}{\underbrace{(x-1)^3}_{>0}\underbrace{(x-2)^3}_{<0}} > 0 \overset{1<x<2}{\Leftrightarrow} 2x-3>0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$

Επομένως ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων για τη συνάρτηση g είναι ο παρακάτω:

x	1		$\frac{3}{2}$		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

ελάχιστο

Η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = \frac{3}{2}$ το $g\left(\frac{3}{2}\right) = 8$

Άρα για κάθε $x \in (1\,,\,2)$ είναι $g(x) \ge g\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{|z-1|^2} + \frac{1}{|z-2|^2} \ge 8$

2^{ος} τρόπος:

Γνωρίζουμε ότι για $x\,,\,y \in R^*$ με $xy > 0 \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \ge 2$

Αν λοιπόν θέσουμε:

$$x = |z-1| > 0 \quad \text{και} \quad y = |z-2| > 0,$$

τότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:

$$x + y = 1$$

και έχουμε:

$$\frac{1}{|z-1|^2} + \frac{1}{|z-2|^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{(x+y)^2}{x^2} + \frac{(x+y)^2}{y^2} = \frac{x^2+y^2+2xy}{x^2} + \frac{x^2+y^2+2xy}{y^2} =$$

$$= 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\cdot\frac{y}{x} + \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 + 2\cdot\frac{x}{y} = 2 + \underbrace{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}_{\ge 2} + 2\cdot\underbrace{\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)}_{\ge 2} \ge 8$$

3ος τρόπος:

Η ισότητα $|z-1|+|z-2|=1$ σε συνδυασμό με τις $z\neq 1$ και $z\neq 2$ μας δίνει τη δυνατότητα να θέσουμε:

$$|z-1|=\eta\mu^2\theta \quad \text{και} \quad |z-2|=\sigma\upsilon\nu^2\theta \ , \quad \theta\neq\frac{\kappa\pi}{2} \ , \quad \kappa\in Z$$

και έχουμε:

$$\frac{1}{|z-1|^2}+\frac{1}{|z-2|^2}=\frac{1}{\eta\mu^4\theta}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^4\theta}=\frac{(\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta)^2}{\eta\mu^4\theta}+\frac{(\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta)^2}{\sigma\upsilon\nu^4\theta}=$$

$$=\frac{\eta\mu^4\theta+\sigma\upsilon\nu^4\theta+2\eta\mu^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu^4\theta}+\frac{\eta\mu^4\theta+\sigma\upsilon\nu^4\theta+2\eta\mu^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^4\theta}=$$

$$=1+\sigma\varphi^4\theta+2\sigma\varphi^2\theta+\varepsilon\varphi^4\theta+1+2\varepsilon\varphi^2\theta=$$

$$=2+\underbrace{\varepsilon\varphi^4\theta+\sigma\varphi^4\theta}_{\geq 2}+2\cdot\underbrace{\left(\varepsilon\varphi^2\theta+\sigma\varphi^2\theta\right)}_{\geq 2}\geq 8$$

δ) Θέτουμε $|z-2|=\alpha$, τότε $0<\alpha<1$ έχουμε:

$$\int_{\frac{1}{4}}^{|z-2|}\frac{1}{x+|z-2|}dx=\int_{\frac{1}{4}}^{\alpha}\frac{1}{x+\alpha}dx=\Big[\ln|x+\alpha|\Big]_{\frac{1}{4}}^{\alpha}=$$

$$=\ln(2\alpha)-\ln\left(\frac{1}{4}+\alpha\right)=h(\alpha)$$

Για κάθε $\alpha\in(0\,,1)$ έχουμε:

$$h'(\alpha)=\frac{2}{2\alpha}-\frac{1}{\alpha+\frac{1}{4}}=\frac{\alpha+\frac{1}{4}-\alpha}{\alpha\left(\alpha+\frac{1}{4}\right)}=\frac{\frac{1}{4}}{\alpha\left(\alpha+\frac{1}{4}\right)}>0$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0\,,1)$, οπότε

Για $0<\alpha<1\Rightarrow h(\alpha)<h(1)\Rightarrow h(\alpha)<\ln 2-\ln\frac{5}{4}\Rightarrow h(\alpha)<\ln\frac{8}{5}$

Επομένως:

$$\int_{\frac{1}{4}}^{|z-2|}\frac{1}{x+|z-2|}dx<\ln\frac{8}{5}$$

ΘΕΜΑ 42ο :

Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f:R\to R$, με $|f(\alpha)-f(\beta)|\leq\frac{1}{2}|\alpha-\beta|$ για κάθε $\alpha\,,\beta\in R$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=\int_0^x\big(f(t)-t\big)dt$ είναι κοίλη στο R

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^x f(t)\,dt\leq\frac{x^2}{2}$

δ) Να αποδείξετε ότι $F(x+1)-F(x)<F'(x)<F(x)-F(x-1)$ για $x\geq 1$

ε) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)\in R$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}F'(x)$

ΛΥΣΗ

α) Για $x_o \in R$ έχουμε:

$$\left|f(x)-f(x_o)\right| \le \frac{1}{2}\left|x-x_o\right| \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2}\left|x-x_o\right| \le f(x)-f(x_o) \le \frac{1}{2}\left|x-x_o\right| \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2}\left|x-x_o\right| + f(x_o) \le f(x) \le f(x_o) + \frac{1}{2}\left|x-x_o\right|$$

Είναι:

$$\lim_{x\to x_o}\left(-\frac{1}{2}\left|x-x_o\right| + f(x_o)\right) = f(x_o)$$

$$\lim_{x\to x_o}\left(\frac{1}{2}\left|x-x_o\right| + f(x_o)\right) = f(x_o)$$

Επομένως από Κριτήριο Παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο τυχαίο $x_o \in R$, άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R

β) Η συνάρτηση $h(t)=f(t)-t$ είναι συνεχής στο R, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Επομένως η συνάρτηση F ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη στο R, ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης h
Είναι:

$$F'(x) = f(x) - x \text{, για κάθε } x \in R$$

Για $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$\frac{F'(x_1)-F'(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{f(x_1)-x_1-f(x_2)+x_2}{x_1-x_2} =$$

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} - \frac{x_1-x_2}{x_1-x_2} = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} - 1$$

Όμως:

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right| \le \frac{1}{2}\left|x_1-x_2\right| \Leftrightarrow \left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right| \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \le \frac{1}{2}$$

Επομένως:

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{F'(x_1)-F'(x_2)}{x_1-x_2} < 0 \overset{x_1<x_2}{\Rightarrow} F'(x_1) > F'(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση F' είναι γνησίως φθίνουσα στο R, οπότε η συνάρτηση F είναι κοίλη στο R

γ) Η συνάρτηση f είναι περιττή στο R, άρα για κάθε $x \in R$ είναι:

$$-x \in R \quad \text{και} \quad f(-x) = -f(x)$$

Για $x = 0$ έχουμε:

$$f(0) = -f(0) \Rightarrow 2f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

Είναι:

$$F(0) = \int_0^0 \left(f(t)-t\right)dt = 0 \quad \text{και} \quad F'(0) = f(0) - 0 = 0$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_F στο σημείο της $\left(0\ ,\ F(0)\right)$ είναι:

$$y - F(0) = F'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = 0$$

Η συνάρτηση F είναι κοίλη στο R, άρα για κάθε $x \in R$ είναι:

$$F(x) \le y \ \Leftrightarrow\ F(x) \le 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x \left(f(t)-t\right)dt \le 0 \Leftrightarrow \int_0^x f(t)dt - \int_0^x t dt \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x f(t)dt \le \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x \ \Leftrightarrow\ \int_0^x f(t)dt \le \frac{x^2}{2}$$

δ) Η συνάρτηση F είναι:

- συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $\left[x-1,\ x\right]$, $\left[x\ ,\ x+1\right]$
- παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(x-1,\ x)$, $(x\ ,\ x+1)$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, οπότε θα υπάρχουν:

- ♦ $\xi_1 \in (x-1,\ x)$ τέτοιο, ώστε $F'(\xi_1) = \dfrac{F(x)-F(x-1)}{x-(x-1)} = F(x)-F(x-1)$
- ♦ $\xi_2 \in (x\ ,\ x+1)$ τέτοιο, ώστε $F'(\xi_2) = \dfrac{F(x+1)-F(x)}{(x+1)-x} = F(x+1)-F(x)$

Είναι:

$$x-1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x+1 \Rightarrow \xi_1 < x < \xi_2$$

Η συνάρτηση F' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[1,+\infty\right)$, οπότε έχουμε:

$$F'\left(\xi_1\right) > F'(x) > F'\left(\xi_2\right) \Rightarrow$$

$$F(x)-F(x-1) > F'(x) > F(x+1)-F(x)$$

$$F(x+1)-F(x) < F'(x) < F(x)-F(x-1)$$

ε) Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \ell, \quad \ell \in R$$

Οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x+1) \overset{u=x+1}{=} \lim_{u\to+\infty} F(u) = \ell \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x-1) \overset{u=x-1}{=} \lim_{x\to+\infty} F(u) = \ell$$

Άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\left(F(x+1)-F(x)\right) = \ell - \ell = 0 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(F(x)-F(x-1)\right) = \ell - \ell = 0$$

Επομένως από Κριτήριο Παρεμβολής αξιοποιώντας το ερώτημα (δ) είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} F'(x) = 0$

ΘΕΜΑ 43ο :

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$x + 1 \le f(x) \le e^x \text{ για κάθε } x \in R \quad (1)$$

και η συνάρτηση $F(x) = \int_{\ell n3}^{x} \left(\sqrt{1+e^t} \left(e^x \int_{\ell n3}^{x} f(t)dt \right) \right) dt$, $x \in R$ **με** $F(\ell n8) = 2 + \ell n\frac{3}{2}$

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της $O(0, f(0))$

β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \left(f(t) - xe^x\right)dt - x}{x^2}$

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + x - \int_0^x f(t)dt = \frac{2014}{2013}$ **έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, 1)$**

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \ell n3$, $x = \ell n8$

ΛΥΣΗ

α) Για $x = 0$ από τη σχέση (1) έχουμε $1 \le f(0) \le 1$, άρα $f(0) = 1$

Για $x \ne 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - 1}{x}$$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$x + 1 \le f(x) \le e^x \Leftrightarrow x \le f(x) - 1 \le e^x - 1 \quad (2)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

Αν $x > 0$ τότε από τη σχέση (2) έχουμε $1 \le \frac{f(x)-1}{x} \le \frac{e^x - 1}{x}$

Είναι:

- $\lim_{x\to 0^+} 1 = 1$
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \left.\frac{d(e^x)}{dx}\right|_{x=0} = 1$

Επομένως από Κριτήριο Παρεμβολής είναι και $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-1}{x} = 1$

Αν $x < 0$ τότε από τη σχέση (2) έχουμε $1 \ge \frac{f(x)-1}{x} \ge \frac{e^x - 1}{x}$

Είναι:

- $\lim_{x\to 0^-} 1 = 1$
- $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \left.\frac{d(e^x)}{dx}\right|_{x=0} = 1$

Επομένως από Κριτήριο Παρεμβολής είναι και $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-1}{x} = 1$

Είναι:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1}{x}=1$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$ με $f'(0)=1$

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της $O\left(0\,,\,f(0)\right)$ είναι:

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y-1=x\Rightarrow y=x+1$$

β) Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left(f(t)-xe^x\right)dt-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt-\int_0^x xe^x dt-x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt-xe^x(x-0)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt-x^2e^x-x}{x^2}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x f(t)dt-x^2e^x-x\right)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2xe^x-x^2e^x-1}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{f(x)-1}{x}-\frac{e^x\left(2+x\right)}{2}\right)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x+x-\int_0^x f(t)\,dt-\frac{2014}{2013}\,,\quad x\in\left[0\,,1\right]$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\left[0,1\right]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
Είναι:

- $g(0)=e^0+0-0-\frac{2014}{2013}=1-\frac{2014}{2013}<0$
- $g(1)=e+1-\int_0^1 f(t)\,dt-\frac{2014}{2013}$

Όμως $f(x)\le e^x$ άρα $\int_0^1 f(x)dx\le\int_0^1 e^x dx\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx\le e-1\Leftrightarrow e+1-\int_0^1 f(x)dx\ge 2$

Οπότε

$$g(1)\ge 2-\frac{2014}{2013}>0$$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, οπότε η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μία ρίζα στο $\left(0\,,1\right)$

Για κάθε $x\in\left[0,1\right]$ είναι $g'(x)=e^x+1-f(x)>0$, επομένως η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα οπότε η ρίζα αυτή είναι και μοναδική.

δ) Επειδή $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\ell n3, \ell n8]$, το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \ell n3$ και $x = \ell n8$ είναι:

$$E = \int_{\ell n3}^{\ell n8} f(x)dx$$

Έχουμε:

$$F(\ell n8) = \int_{\ell n3}^{\ell n8} \sqrt{1+e^t}\left(e^{\ell n8}\int_{\ell n3}^{\ell n8} f(t)dt\right)dt =$$

$$= \int_{\ell n3}^{\ell n8} \sqrt{1+e^t}\,(8E)\,dt = 8E \cdot \int_{\ell n3}^{\ell n8} \sqrt{1+e^t}\,dt$$

Άρα είναι:

$$E = \frac{F(\ell n8)}{8\int_{\ell n3}^{\ell n8}\sqrt{1+e^t}dt} = \frac{2+\ell n\frac{3}{2}}{8\int_{\ell n3}^{\ell n8}\sqrt{1+e^t}dt}$$

Έστω:

$$I = \int_{\ell n3}^{\ell n8} \sqrt{1+e^t}dt$$

Θέτουμε:

$$u = \sqrt{1+e^t} \Rightarrow u^2 = 1+e^t$$

Οπότε:

$$2udu = e^t dt \Leftrightarrow dt = \frac{2u}{u^2-1}$$

Για $t = \ell n3$ είναι $u = \sqrt{1+e^{\ell n3}} = 2$ και για $t = \ell n8$ είναι $u = \sqrt{1+e^{\ell n8}} = 3$

Έχουμε:

$$I = \int_2^3 u\cdot\frac{2u}{u^2-1}du = \int_2^3 \frac{2u^2}{u^2-1}du = \int_2^3\left(2+\frac{2}{u^2-1}\right)du$$

Αναζητούμε πραγματικούς αριθμούς A, B έτσι, ώστε για κάθε $u \in (2,3)$ να ισχύει:

$$\frac{2}{u^2-1} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1} \Leftrightarrow A(u+1) + B(u-1) = 2 \Leftrightarrow$$

$$(A+B)u + A - B = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-B=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

Άρα:

$$I = \int_2^3 2du + \int_2^3 \frac{2}{u^2-1}du = 2\cdot(3-2) + \int_2^3\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)du =$$

$$= 2 + \int_2^3 \frac{1}{u-1}(u-1)'du - \int_2^3 \frac{1}{u+1}(u+1)'du =$$

$$=2+\int_2^3 \frac{1}{u-1}(u-1)'du-\int_2^3 \frac{1}{u+1}(u+1)'du=$$

$$=2+\left[\ell n|u-1|\right]_2^3-\left[\ell n|u+1|\right]_2^3=2+\ell n\frac{3}{2}$$

Οπότε:

$$E=\frac{2+\ell n\frac{3}{2}}{8\left(2+\ell n\frac{3}{2}\right)}\Rightarrow E=\frac{1}{8}$$

ΘΕΜΑ 44ο :

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- **$f(1)+f(-1)=0$ και**
- **$f'(x)=\sqrt{16+f^2(x)}$ για κάθε $x\in R$**

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\left(f'(x)+f(x)\right)e^{-x}$ είναι σταθερή στο R

β) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^{1} f(x)dx=0$

γ) Αν επιπλέον ισχύει $f(0)=0$, να αποδείξετε ότι $f(x)=2\left(e^x-e^{-x}\right)$, $x\in R$

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και την αντίστροφη συνάρτηση της f

ε) Να αποδείξετε ότι $\int_0^3 \ell n\frac{x+\sqrt{x^2+16}}{4}dx=3\ell n2-1$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και η συνάρτηση $\sqrt{16+f^2(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο R

Από υπόθεση είναι $f'(x)=\sqrt{16+f^2(x)}$ για κάθε $x\in R$, οπότε η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με:

$$f''(x)=\frac{2f(x)f'(x)}{2\sqrt{16+f^2(x)}}=\frac{f(x)f'(x)}{f'(x)}=f(x)$$

Άρα:

$$f''(x)=f(x) \text{ για κάθε } x\in R \quad (1)$$

Η συνάρτηση

$$g(x)=\left(f'(x)+f(x)\right)e^{-x},\quad x\in R$$

είναι παραγωγίσιμη στο R, ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγισίμων συναρτήσεων.

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g'(x) = \left(f''(x) + f'(x)\right)e^{-x} + \left(f'(x) + f(x)\right)e^{-x}(-x)' =$$

$$= e^{-x}\left(f''(x) + f'(x) - f'(x) - f(x)\right) = e^{-x}\left(f''(x) - f(x)\right) \overset{(1)}{=} 0$$

Άρα η συνάρτηση g είναι σταθερή στο R

β) Έχουμε:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \overset{(1)}{=} \int_{-1}^{1} f''(x)\,dx = \left[f'(x)\right]_{-1}^{1} = f'(1) - f'(-1) =$$

$$= \sqrt{16 + f^2(1)} - \sqrt{16 + f^2(-1)} = \frac{f^2(1) - f^2(-1)}{\sqrt{16 + f^2(1)} + \sqrt{16 + f^2(-1)}} =$$

$$= \frac{\left(f(1) - f(-1)\right)\left(f(1) + f(-1)\right)}{\sqrt{16 + f^2(1)} + \sqrt{16 + f^2(-1)}} = 0, \text{ αφού } f(1) + f(-1) = 0$$

γ) Η συνάρτηση g είναι σταθερή στο R, άρα για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g(x) = c \Leftrightarrow \left(f'(x) + f(x)\right)e^{-x} = c \Leftrightarrow f'(x) + f(x) = ce^{x} \quad (2)$$

Είναι:

$$f(0) = 0 \quad \text{και} \quad f'(0) = \sqrt{16 + f^2(0)} = \sqrt{16} = 4$$

Για $x = 0$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f'(0) + f(0) = ce^{0} \Leftrightarrow 4 + 0 = c \Leftrightarrow c = 4$$

Οπότε από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f'(x) + f(x) = 4e^{x}, \ x \in R \quad (3)$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (3) με e^{x}, οπότε έχουμε:

$$f'(x)e^{x} + f(x)e^{x} = 4e^{2x} \Leftrightarrow \left(f(x)e^{x}\right)' = \left(2e^{2x}\right)' \Leftrightarrow$$

$$f(x)e^{x} = 2e^{2x} + c_1 \Rightarrow f(x) = 2e^{x} + c_1e^{-x}, \ x \in R \quad (4)$$

Για $x = 0$ από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f(0) = 2e^{0} + c_1e^{0} \Leftrightarrow 0 = 2 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -2$$

Οπότε από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f(x) = 2e^{x} - 2e^{-x} \Leftrightarrow f(x) = 2\left(e^{x} - e^{-x}\right), \ x \in R$$

δ) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = 2\left(e^{x} + e^{-x}\right) > 0, \ x \in R$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R και επειδή είναι και συνεχής, το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(A) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x) \ , \ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[2(e^x - e^{-x})\right] = -\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} \overset{-x=t}{=} \lim\limits_{t\to+\infty} e^t = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[2(e^x - e^{-x})\right] = +\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} \overset{-x=t}{=} \lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι $f(A) = (-\infty, +\infty) = R$

Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R, θα είναι και "1–1", οπότε αντιστρέφεται.

Αν θέσουμε

$$f(x) = y \Leftrightarrow y = 2(e^x - e^{-x}) \Leftrightarrow y = 2e^x - \frac{2}{e^x} \Leftrightarrow$$

$$2(e^x)^2 - ye^x - 2 = 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} e^x = \frac{y+\sqrt{y^2+16}}{4} \Leftrightarrow$$

$$x = \ell n\left(\frac{y+\sqrt{y^2+16}}{4}\right), \quad y \in R$$

Άρα:

$$f^{-1}: R \to R \text{ με } f^{-1}(x) = \ell n\left(\frac{x+\sqrt{x^2+16}}{4}\right)$$

ε) Είναι:

$$I = \int_0^3 \ell n\frac{x+\sqrt{x^2+16}}{4}dx = \int_0^3 f^{-1}(x)dx$$

Θέτουμε:

$$u = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(u), \text{ οπότε } dx = f'(u)du$$

Για $x = 0$ είναι $u = f^{-1}(0) \Leftrightarrow u = \ell n\dfrac{0+\sqrt{16}}{4} = \ell n1 = 0$

Για $x = 3$ είναι $u = f^{-1}(3) \Leftrightarrow u = \ell n\dfrac{3+\sqrt{9+16}}{4} = \ell n2$

Είναι:

$$I = \int_0^{\ell n2} u f'(u)du = \left[uf(u)\right]_0^{\ell n2} - \int_0^{\ell n2} f(u)du =$$

$$= \ell n2 \cdot f(\ell n2) - \int_0^{\ell n2}\left(2e^u - 2e^{-u}\right)du =$$

$$= \ell n2 \cdot f(\ell n2) - \left[2e^u + 2e^{-u}\right]_0^{\ell n2} =$$

$$= \ell n2 \cdot f(\ell n2) - \left(2e^{\ell n2} + \frac{2}{e^{\ell n2}} - 4\right) =$$

$$= 3\ell n2 - (4+1-4) = 3\ell n2 - 1,$$

αφού:

$$f(\ell n2) = 2e^{\ell n2} + \frac{2}{e^{\ell n2}} = 2 + \frac{2}{2} = 3$$

ΘΕΜΑ 45ο :

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $4\int_0^x (f'(t))^2 dt = 2f'(x)f(x) - f^2(x) - e^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1)
- $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (2)
- $f(0) = e$ (3)

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2 και $\xi \in (0, e)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ για τα οποία ισχύει :

$$f'(\xi_1) + (e-1)f'(\xi_2) + f'(1) = f''(\xi) + f(e)$$

γ) Να υπολογίσετε το όριο: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x e^t f'(t)dt}{(x^2+1)f(x)}$

δ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\displaystyle\int_0^{x^2+1} f(t)dt + \frac{1}{e^{x^2+1}} \geq x^2 + 2$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$

Είναι $f(0) = e$, άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση:

- $\int_0^x (f'(t))^2 dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης $(f'(t))^2$
- $f'(x)f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων
- $f^2(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων

Επομένως οι συναρτήσεις και στα δύο μέλη της σχέσης (1) είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, οπότε παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης αυτής έχουμε:

$$4(f'(x))^2 = 2[f''(x)f(x) + f'(x)f'(x)] - 2f(x)f'(x) \Leftrightarrow$$

$$4(f'(x))^2 = 2f''(x)f(x) + 2(f'(x))^2 - 2f(x)f'(x) \Leftrightarrow$$

$$2(f'(x))^2 = 2f''(x)f(x) - 2f(x)f'(x) \Leftrightarrow$$

$$(f'(x))^2 = f''(x)f(x) - f(x)f'(x) \Leftrightarrow$$

$$f(x)f'(x) = f''(x)f(x) - (f'(x))^2 \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = c\,e^x, \; x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Για $x=0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$4\int_0^0 (f'(t))^2 dt = 2f'(0)f(0) - f^2(0) - e^2 \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$0 = 2f'(0)\cdot e - e^2 - e^2 \overset{(3)}{\Rightarrow} 2f'(0)\cdot e = 2e^2 \Rightarrow f'(0) = e \quad (5)$$

Για $x=0$ από τη σχέση (4) έχουμε:

$$\frac{f'(0)}{f(0)} = ce^0 \overset{(3),(5)}{\Rightarrow} \frac{e}{e} = c \Rightarrow c = 1$$

Επομένως, με αντικατάσταση του $c=1$, η σχέση (4) γράφεται:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow \left(\ell n f(x)\right)' = (e^x)' \Leftrightarrow \ell n f(x) = e^x + c_1, \quad x \in R \quad (6)$$

Για $x=0$ από τη σχέση (6) έχουμε:

$$\ell n f(0) = e^0 + c_1 \overset{(3)}{\Rightarrow} \ell n e = 1 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$$

Επομένως, με αντικατάσταση του $c_1 = 0$, η σχέση (6) γράφεται:

$$\ell n f(x) = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^{e^x}, \quad x \in R$$

β) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = \left(e^{e^x}\right)' = e^{e^x}(e^x)' = e^{e^x}e^x = e^{e^x + x}$$

Για τη συνάρτηση $f(x) = e^{e^x}$ στο διάστημα $[0,1]$ ισχύουν:

- Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$
- Η f είναι παραγώγισιμη στο $(0,1)$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[0,1]$, άρα θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1-0} \Leftrightarrow f'(\xi_1) = e^e - e$$

Για τη συνάρτηση $f(x) = e^{e^x}$ στο διάστημα $[1,e]$ ισχύουν:

- Η f είναι συνεχής στο $[1,e]$
- Η f είναι παραγώγισιμη στο $(1,e)$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[1,e]$, άρα θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (1,e)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_2) = \frac{f(e) - f(1)}{e-1} \Leftrightarrow f'(\xi_2) = \frac{e^{e^e} - e^e}{e-1}$$

Για τη συνάρτηση $f'(x) = e^{e^x + x}$ στο διάστημα $[0,1]$ ισχύουν:

- Η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$
- Η f' είναι παραγώγισιμη στο $(0,1)$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[0,1]$, άρα θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f''(\xi) = \frac{f'(1) - f'(0)}{1-0} \Leftrightarrow f''(\xi) = e^{e+1} - e$$

Είναι:

$$f'(\xi_1)+(e-1)f'(\xi_2)+f'(1)=f''(\xi)+f(e) \Leftrightarrow$$

$$e^e-e+(e-1)\frac{e^{e^e}-e^e}{e-1}+e^{e+1}=e^{e+1}-e+e^{e^e} \Leftrightarrow$$

$$e^e-e+e^{e^e}-e^e+e^{e+1}=e^{e+1}-e+e^{e^e} \Leftrightarrow 0=0\text{, αληθές}$$

Άρα αληθής είναι και η προς απόδειξη σχέση.

γ) Υπολογίζουμε καταρχάς το ολοκλήρωμα $\int_0^x e^t f'(t)dt$

Έχουμε:

$$\int_0^x e^t f'(t)dt=\int_0^x e^t\cdot e^{e^t+t}dt=\int_0^x e^t\cdot e^{e^t}\cdot e^t dt \qquad (7)$$

Θέτουμε:

$$u=e^t,\ \text{οπότε}\ du=e^t dt$$

Για $t=0$ είναι $u=e^0=1$

Για $t=x$ είναι $u=e^x$

Οπότε από τη σχέση (7) έχουμε:

$$\int_0^x e^t f'(t)dt=\int_0^x e^t\cdot e^{e^t}\cdot e^t dt=\int_1^{e^x} ue^u du=\int_1^{e^x} u(e^u)'du=\left[ue^u\right]_1^{e^x}-\int_1^{e^x}(u)'e^u du=$$

$$=\left[ue^u\right]_1^{e^x}-\int_1^{e^x}e^u du=\left[ue^u\right]_1^{e^x}-\left[e^u\right]_1^{e^x}=e^x e^{e^x}-1\cdot e^1-\left(e^{e^x}-e^1\right)=$$

$$=e^x e^{e^x}-e-e^{e^x}+e=e^{e^x}(e^x-1)$$

Υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^t f'(t)dt}{(x^2+1)f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{e^x}(e^x-1)}{(x^2+1)e^{e^x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x^2+1}\ \underset{D.L.H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\ \underset{D.L.H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$$

δ) Θα αποδείξουμε καταρχάς ότι για κάθε $x\in R$ ισχύει $e^x\ge x+1$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=e^x-x-1\ ,\ x\in R$$

Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$g'(x)=e^x-1$$

Έχουμε:

- $g'(x)=0\Leftrightarrow e^x-1=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow e^x=e^0\Leftrightarrow x=0$
- $g'(x)>0\Leftrightarrow e^x-1>0\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow e^x>e^0\Leftrightarrow x>0$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	
			Ελάχιστο		

Η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o = 0$ με ελάχιστη τιμή $g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$

Άρα για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1 \quad (8)$$

Αν στη σχέση (8) θέσουμε $x = e^t$ έχουμε:

$$e^{e^t} \geq e^t + 1 \overset{x^2+1>0}{\Rightarrow} \int_0^{x^2+1} e^{e^t} dt \geq \int_0^{x^2+1} (e^t + 1) dt \Rightarrow \int_0^{x^2+1} f(t)dt \geq \int_0^{x^2+1} e^t dt + \int_0^{x^2+1} 1dt \Rightarrow$$

$$\int_0^{x^2+1} f(t)dt \geq \left[e^t\right]_0^{x^2+1} + 1\cdot(x^2 + 1 - 0) \Rightarrow \int_0^{x^2+1} f(t)dt \geq e^{x^2+1} - e^0 + x^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\int_0^{x^2+1} f(t)dt \geq e^{x^2+1} - 1 + x^2 + 1 \Rightarrow \int_0^{x^2+1} f(t)dt \geq e^{x^2+1} + x^2 \ , \ x \in R \quad (9)$$

Για κάθε $x > 0$ ισχύει $x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad (10)$

Αν στη σχέση (10) θέσουμε όπου x το $e^{x^2+1} > 0$ έχουμε:

$$e^{x^2+1} + \frac{1}{e^{x^2+1}} \geq 2 \Rightarrow e^{x^2+1} \geq 2 - \frac{1}{e^{x^2+1}} \quad (11)$$

Από τις σχέσεις (9) και (11) έχουμε:

$$\int_0^{x^2+1} f(t)dt \geq e^{x^2+1} + x^2 \geq 2 - \frac{1}{e^{x^2+1}} + x^2 \Rightarrow$$

$$\int_0^{x^2+1} f(t)dt \geq 2 - \frac{1}{e^{x^2+1}} + x^2 \Rightarrow \int_0^{x^2+1} f(t)dt + \frac{1}{e^{x^2+1}} \geq x^2 + 2 \ , \ x \in R$$