

Διαγώνισμα στις συναρτήσεις

(Κεφάλαιο: 1^ο, Μέρος Β: Ανάλυση, Παράγραφοι 1.1 έως 1.3)

Τάξη: Γ' Λυκείου, Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση

Σχολικό έτος: 2012-2013

Χρονική διάρκεια: 2 δ.ω.

Αριθμός θεμάτων: 4

Σύνολο μονάδων: 100

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θέμα Α

A.1) Πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow R$ λέγεται συνάρτηση 1-1 ;
(Μονάδες 8)

A.2) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ;
(Μονάδες 7)

A.3) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με Σ, αν η πρόταση είναι Σωστή, και με Λ αν η πρόταση είναι Λάθος.
(Μονάδες $5 \times 2 = 10$)

1. Μια συνάρτηση f που είναι «1-1» σε ένα διάστημα Δ είναι πάντα γνησίως μονότονη στο Δ .
2. Δύο συναρτήσεις f, g είναι ίσες μόνο αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και τον ίδιο τύπο.
3. Αν μία συνάρτηση είναι «1-1» τότε δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

4. Αν για μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $-2012 \leq f(x) \leq 2012$ για κάθε $x \in A$ τότε η f έχει μέγιστη τιμή το 2012 και ελάχιστη τιμή το -2012.
5. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f, f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$ των αξόνων $x'x$ και $y'y$.

Θέμα Β

Έστω η συνάρτηση $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι γνησίως φθίνουσα και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$. Αν για την συνάρτηση f είναι $f(x) = \ln x - g(x)$ για κάθε $x > 0$:

B.1) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \infty)$.

(Μονάδες 10)

B.2) Να λύσετε την ανίσωση $2 \ln x < 2 + g(x^2)$ στο $(0, \infty)$.

(Μονάδες 15)

Θέμα Γ

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x-y) = f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Γ.1) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ ή $f(0) = 1$.

(Μονάδες 7)

Γ.2) Αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων να βρείτε την συνάρτηση f .

(Μονάδες 8)

Γ.3) Αν $f(0) \neq 0$ τότε:

Γ.3.1) Να αποδείξετε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Γ.3.2) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .
(Μονάδες 5)

Θέμα Δ

Δ.1) Να βρείτε περιττή συνάρτηση f για την οποία ισχύει $|x| f(x) \geq x^{2\nu+1}$,
για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\nu \in \mathbb{N}$.
(Μονάδες 7)

Δ.2) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $xg(x) + g(-x) = x$ να βρείτε την συνάρτηση g .
(Μονάδες 8)

Δ.3) Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $g \circ f$.
(Μονάδες 5)

Δ.4) Να μελετήσετε την μονοτονία της $g \circ f$ στα διαστήματα $(0,1)$ και
 $(1,\infty)$.
(Μονάδες 5)

Καλή Επιτυχία