

1ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΡΟΔΟΥ - ΒΕΝΕΤΟΚΛΕΙΟ
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Α΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
ΠΕΜΠΤΗ 24 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2013

ΘΕΜΑ Α

A1. Για οποιουδήποτε μιγαδικούς z_1, z_2 , να αποδείξετε ότι

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Μονάδες 10

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Για οποιουδήποτε μιγαδικούς z, w ισχύει $|z+w i| = \sqrt{z^2 + w^2}$.

β. Για οποιουδήποτε μιγαδικούς z, w ισχύει $|z+w| \geq ||z|-|w||$.

γ. Για κάθε μιγαδικό z ισχύει $|\bar{z}|-|z|=0$.

δ. Αν z μιγαδικός τότε ισχύει πάντα $z=0 \Leftrightarrow (\operatorname{Re}(z)=0 \text{ και } \operatorname{Im}(z)=0)$.

ε. Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς δύο μιγαδικών, είναι ίση με τη διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

Μονάδες 5x3=15

ΘΕΜΑ Β

Έστω z, w, u τρεις μιγαδικοί διαφορετικοί ανά δύο και $A(z), B(w), \Gamma(u)$ οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο αντίστοιχα. Αν ισχύουν :

$$3|z|+2+(|w|-5)i=|z|+8-\left(\frac{4+5i}{5-4i}\right)^{2013}, |z-u|=7, |w-u|=4 \text{ και } \operatorname{Re}(z\bar{w})=8 \text{ τότε:}$$

B1. Να αποδείξετε ότι $|z|=3, |w|=4$ και $|z-w|=3$.

B2. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

B3. Να αποδείξετε ότι $|iz+(3-4i)w| \leq 23$.

Μονάδες 9 + 8 + 8 = 25

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w για τους οποίους ισχύουν:

- Η εικόνα του μιγαδικού z κινείται στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2$.
- $w^2=3+\sqrt{7}i$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $|z|=|w|=2$.

Γ2. Να αποδείξετε $\left(z + \frac{4}{w}\right) \cdot \left(\bar{z} + \frac{4}{\bar{w}}\right) \leq 16$.

Γ3. Να αποδείξετε ότι $|z-3w+4|=|w-3z+zw|$.

Γ4. Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $u = \frac{(z-w)^3}{z^3+w^3}$ είναι φανταστικός.

Μονάδες 6 + 7 + 7 + 5 = 25

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w για τους οποίους ισχύουν:

$$|z-2|+|z+2|=4 \text{ και } |iw+3-2i|^2+|\bar{w}-2+3i|^2=2.$$

Δ1. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z .

Δ2. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w .

Δ3. Να υπολογίσετε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|w|$.

Δ4. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη δυνατή απόσταση των εικόνων των z, w .

Μονάδες 6 + 7 + 6 + 6 = 25

Σας ευχόμαστε επιτυχία...

ΘΕΜΑ Ε

Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w για τους οποίους ισχύουν:

$$z^2 + 8z + 20 = 0, (1) \quad \text{και} \quad |w|^2 \leq 6 \operatorname{Re}(\bar{w}) - 5.$$

Ε1. Να λυθεί η εξίσωση (1).

Ε2. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w .

Ε3. Να υπολογίσετε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|w|$.

Ε4. Αν z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε που βρίσκονται οι εικόνες των παραπάνω μιγαδικών w για τις οποίες ισχύει $|w - z_1| = |w - z_2|$.

Μονάδες 6 + 7 + 6 + 6 = 25