Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

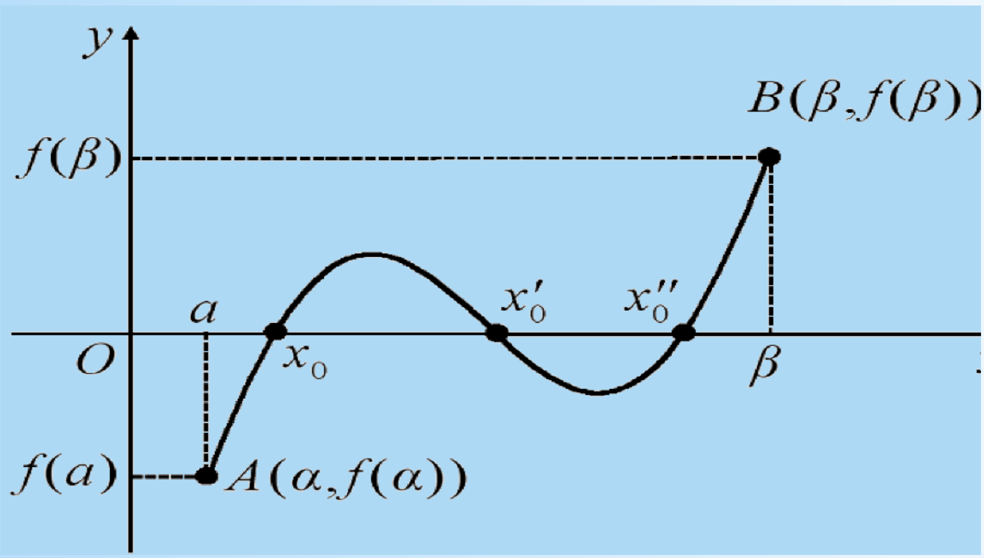
Μαθηματικά

Γ' Λυκείου

Θετικής
και Τεχνολογικής
κατεύθυνσης

Ν.Σ. Μαυρογιάννης

Σημειώσεις θεωρίας



Σχολικό Έτος 2012-2013

Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

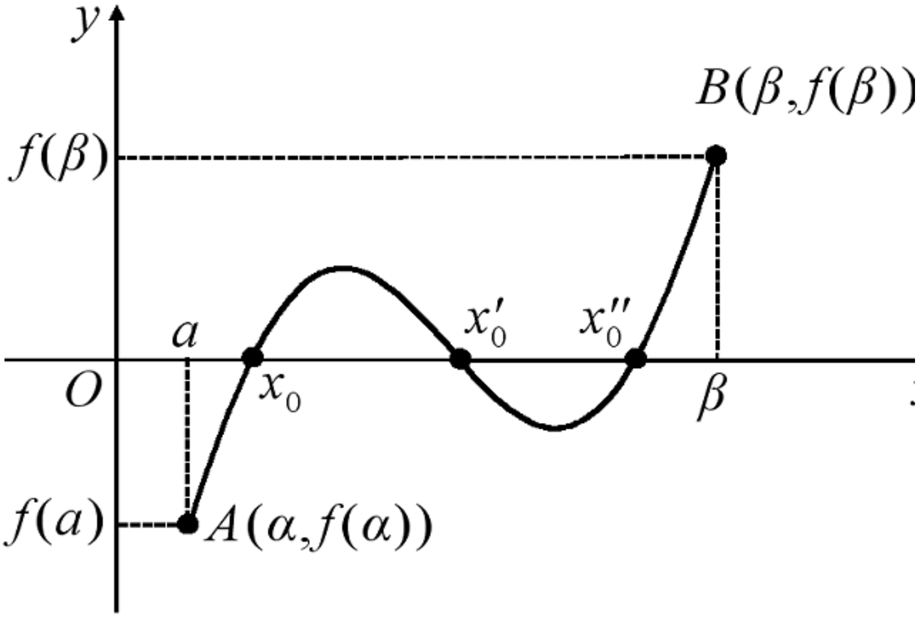
Μαθηματικά

Γ' Λυκείου

Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης

Ν.Σ. Μαυρογιάννης

Σημειώσεις θεωρίας



Σχολικό Έτος 2012-2013

Πειραματικο Λυκειο Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Ταξη Γ, Μαθηματικα Θετικης και Τεχνολογικης Κατευθυνσης, Σημειωσεις Θεωριας

Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

7 Απριλίου 2013
Στοιχειοθετήθηκαν με το LaTeX.

Οδηγίες

Οι σημειώσεις αυτές συντάχθηκαν για τις ανάγκες διδασκαλίας του μαθήματος «*Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης*» στο Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης. Απαρτίζονται από 4 μέρη:

Κεφάλαιο 1 Περιλαμβάνει υπενθυμίσεις τύπων από την ύλη των προηγουμένων ετών. Κάποιοι λόγω των συνεχών εκπτώσεων και μειώσεων της ύλης δεν περιλαμβάνονται πλέον στην διδακτέα ύλη. Έχουν συμπεριληφθεί εδώ γιατί είναι χρήσιμοι.

Κεφάλαιο 2 Περιέχει μια επιλογή ερωτήσεων αναφορικά με την ύλη της θεωρίας. Οι απαντήσεις προέρχονται αυτούσιες από το σχολικό βιβλίο.

Κεφάλαιο 3 Περιέχει μια σειρά από χρήσιμες μικρές θεωρητικές επεκτάσεις. Τυχόν χρήση τους στις εξετάσεις πρέπει να συνοδεύεται από απόδειξη.

Κεφάλαιο 4 Περιέχει μια σειρά ερωτήσεων τύπου Σωστό-Λάθος.

Οι μαθητές που θα χρησιμοποιήσουν αυτές τις σημειώσεις θα πρέπει να γνωρίζουν ότι η μελέτη τους δε μπορεί να υποκαταστήσει τη μελέτη του σχολικού βιβλίου που πρέπει να γίνει πολύ προσεκτικά.
Καλό διάβασμα και καλή επιτυχία.

31 Μαρτίου 2013
Ν.Σ. Μαυρογιάννης,
Μαθηματικός (MSc, PhD)

Περιεχόμενα

Οδηγίες **i**

1 Υπενθυμίσεις **1**
1.1 Ταυτότητες - Ανισότητες . . . 1
1.2 Δυνάμεις - Ρίζες - Λογάριθμοι . . . 2
1.3 Απόλυτες Τιμές . . . 3
1.4 Ορίζουσες και Γραμμικά Συστήματα . . . 4
1.5 Δευτεροβάθμιο Τριώνυμο . . . 5
1.6 Τριγωνομετρία . . . 6
1.7 Μερικές εξισώσεις . . . 7
1.8 Εμβαδά . . . 8
1.9 Συντεταγμένες . . . 9
1.10 Διανύσματα . . . 9
1.11 Ευθεία-Κύκλος . . . 10
1.12 Κωνικές Τομές . . . 14
1.13 Γραφικές Παραστάσεις Βασικών Συναρτήσεων . . . 15

2 Ερωτήσεις Θεωρίας **19**

3 Χρήσιμες Προτάσεις **41**

4 Ερωτήσεις Σωστό-Λάθος **47**
4.1 Μιγαδικοί Αριθμοί . . . 47
4.2 Όρια-Συνέχεια . . . 50
4.3 Διαφορικός Λογισμός . . . 55
4.4 Ολοκληρωτικός Λογισμός . . . 58

Κεφάλαιο 1

Υπενθυμίσεις

Όλοι οι αριθμοί αν δεν αναφέρεται κάτι άλλο θεωρούνται πραγματικοί. Ο ν είναι θετικός ακέραιος.

1.1 Ταυτότητες - Ανισότητες

1. $\left(\alpha \pm \beta\right)^2 = \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2$

2. $\left(\alpha \pm \beta\right)^3 = \alpha^3 \pm 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 \pm \beta^3$

3. $\alpha^3 \pm \beta^3 = \left(\alpha \pm \beta\right)\left(\alpha^2 \mp \alpha\beta + \beta^2\right)$

4. $\left(\alpha + \beta + \gamma\right)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$

5. $\alpha^\nu - \beta^\nu = \left(\alpha - \beta\right)\left(\alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2}\beta + \cdots + \alpha\beta^{\nu-2} + \beta^{\nu-1}\right)$

6. $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma =$
   $= \left(\alpha + \beta + \gamma\right)\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha\right) =$
   $= \frac{1}{2}\left(\alpha + \beta + \gamma\right)\left(\left(\alpha - \beta\right)^2 + \left(\beta - \gamma\right)^2 + \left(\gamma - \alpha\right)^2\right)$

7. $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = \beta = \gamma \\ \text{ή} \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{array}\right\}$

8. $\left(x - \alpha\right)^2 + \left(y - \beta\right)^2 + \left(z - \gamma\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \gamma \end{array}\right\}$

9. $\alpha^2 + \beta^2 \geq \pm 2\alpha\beta$

10. $\alpha^2 \pm \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$

11. $(1+\alpha)^\nu > 1+\nu\alpha, \quad -1<\alpha\neq 0,\ \nu\geq 2$

12. $\alpha^{2\nu+1} < \beta^{2\nu+1} \Leftrightarrow \alpha<\beta$

1.2 Δυνάμεις - Ρίζες - Λογάριθμοι

1. $x=\sqrt[\nu]{\alpha} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\alpha\geq 0\\ x\geq 0\\ x^\nu=\alpha\end{array}\right\}$

2. $\sqrt[\nu]{\alpha}^{\,\nu}=\alpha,\ \sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=|\alpha|$

3. Αν $\alpha,\beta\geq 0$ τότε $\sqrt[\nu]{\alpha\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\beta}$

4. Αν $\alpha\geq 0,\ \beta>0$ τότε $\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$,

5. Αν $\alpha\geq 0,\ \beta>0$ τότε

   (α′) $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}=\sqrt[\nu]{\alpha}^{\,\mu}$

   (β′) $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}=\sqrt[\nu\mu]{\alpha}$

   (γ′) $\sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\mu\lambda}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$

6. Αν $\alpha>0$ τότε $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}=\sqrt[\nu]{\alpha}^{\,\mu}$

7. Αν $\alpha>0$ τότε

   (α′) $\alpha^{x_1}\alpha^{x_2}=\alpha^{x_1+x_2}$

   (β′) $\frac{\alpha^{x_1}}{\alpha^{x_2}}=\alpha^{x_1-x_2}$

   (γ′) $\left(\alpha^{x_1}\right)^{x_2}=\alpha^{x_1x_2}$

8. Αν $\alpha,\ \beta>0$ τότε

   (α′) $(\alpha\beta)^x=\alpha^x\beta^x$

   (β′) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x=\frac{\alpha^x}{\beta^x}$

9. Αν $\alpha>0$, $\alpha\neq 1$ τότε $\alpha^{x_1}=\alpha^{x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2$

10. Αν $\alpha>1$ τότε $\alpha^{x_1}<\alpha^{x_2}\Leftrightarrow x_1<x_2$

11. Αν $\alpha<1$ τότε $\alpha^{x_1}<\alpha^{x_2}\Leftrightarrow x_1>x_2$

12. $\log_\alpha x=y\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\alpha>0,\ \alpha\neq 1\\ x>0\\ \alpha^y=x\end{array}\right\}$

13. $\log x = \log_{10} x$, $\ln x = \log_e x$
14. $\log_\alpha x = \frac{\ln x}{\ln \alpha}$
15. Αν $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ τότε $x_1 = x_2 \Leftrightarrow \log_\alpha x_1 = \log_\alpha x_2$
16. Αν $\alpha > 1$ τότε $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2$
17. Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_\alpha x_1 > \log_\alpha x_2$
18. $x_1 = x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 = \ln x_2$
19. $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 < \ln x_2$
20. (α′) $0 < x < 1 \Leftrightarrow \ln x < 0$
    (β′) $x > 1 \Leftrightarrow \ln x > 0$
    (γ′) $x = 1 \Leftrightarrow \ln x = 0$
21. Αν x_1, x_2, $x > 0$, $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ τότε
    (α′) $\log_\alpha (x_1 x_2) = \log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2$
    (β′) $\log_\alpha \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_\alpha x_1 - \log_\alpha x_2$
    (γ′) $\log_\alpha x^k = k \log_\alpha x$
22. Αν x_1, x_2, $x > 0$ τότε
    (α′) $\ln (x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$
    (β′) $\ln \frac{x_1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2$
    (γ′) $\ln x^k = k \ln x$

1.3 Απόλυτες Τιμές

1. $|\alpha| = \begin{cases} -\alpha & \text{αν} \quad \alpha < 0 \\ \alpha & \text{αν} \quad \alpha \geq 0 \end{cases}$
2. $|\alpha| = \alpha \Leftrightarrow \alpha \geq 0$
3. $|\alpha| = -\alpha \Leftrightarrow \alpha \leq 0$
4. $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \pm\alpha$
5. $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$

6. $|\alpha\beta| = |\alpha|\,|\beta|$

7. $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$

8. $|\alpha^\nu| = |\alpha|^\nu$

9. $|\alpha|^{2\nu} = \alpha^{2\nu}$

10. $||\alpha| - |\beta|| \le |\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta|$

11. $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow \alpha\beta \ge 0$

1.4 Ορίζουσες και Γραμμικά Συστήματα

1. $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$

2. Έστω το σύστημα
$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{array} \right\} (\Sigma)$$
όπου κάποιος από τους $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ είναι διάφορος του 0. Έστω
$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$
$$D_x = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$
$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$
Τότε:

(α′) Αν $D \ne 0$ το (Σ) έχει μία μόνο λύση (x, y) με
$$x = \frac{D_x}{D},\ y = \frac{D_y}{D}$$

(β′) Αν $D = 0$ και κάποιος από τους D_x, D_y είναι διάφορος του μηδενός το (Σ) είναι αδύνατο.

(γ′) Αν $D = D_x = D_y = 0$ τότε το (Σ) έχει άπειρες λύσεις (x, y).

1.5 Δευτεροβάθμιο Τριώνυμο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$, $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.

1. **Πρόσημο-Ρίζες**

(α΄) Αν $\Delta > 0$ τότε η f έχει δύο άνισες ρίζες $\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$. Όταν το x είναι εκτός των ριζών η $f(x)$ είναι ομόσημη του α ενώ όταν είναι μεταξύ των ριζών είναι ετερόσημη του α.

(β΄) Αν $\Delta = 0$ τότε η f έχει μία διπλή ρίζα $\rho = \frac{-\beta}{2\alpha}$. Όταν το x είναι διάφορο της διπλής ρίζας η $f(x)$ είναι ομόσημη του α

(γ΄) Αν $\Delta < 0$ η f δεν έχει ρίζες και είναι ομόσημη του α για όλες τις πραγματικές τιμές του x

2. **Μέγιστα-Ελάχιστα**

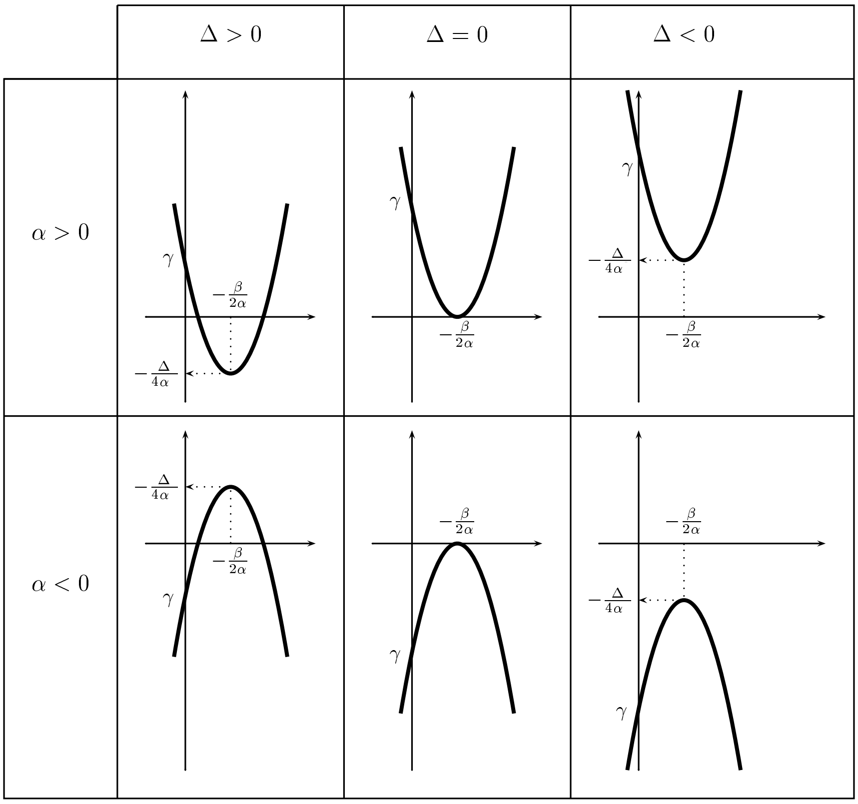
(α΄) Αν $\alpha > 0$ η f έχει ελάχιστη τιμή την $-\frac{\Delta}{4\alpha}$ για $x = \frac{-\beta}{2\alpha}$.

(β΄) Αν $\alpha < 0$ η f έχει μέγιστη τιμή την $-\frac{\Delta}{4\alpha}$ για $x = \frac{-\beta}{2\alpha}$.

3. **Σχέσεις του Vieta**

(α΄) Αν είναι $\Delta \geq 0$ τότε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της f είναι $S = \rho_1 + \rho_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$, $P = \rho_1 \rho_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$

(β΄) Αν δύο αριθμοί έχουν άθροισμα S και γινόμενο P τότε είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - Sx + P = 0$.



1.6 Τριγωνομετρία

1.

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\eta\mu$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\sigma\upsilon\nu$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\varepsilon\varphi$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$*$
$\sigma\varphi$	$*$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

2. $\boxed{\eta\mu x^2 + \sigma\upsilon\nu x^2 = 1}$

3. $\boxed{\varepsilon\phi x \cdot \sigma\varphi x = 1}$ $\boxed{\varepsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}$ $\boxed{\sigma\phi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}$

4. $\boxed{\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1+\varepsilon\phi^2 x}}$ $\boxed{\eta\mu x^2 = \frac{\varepsilon\phi^2 x}{1+\varepsilon\phi^2 x}}$

5. $\boxed{\sigma\upsilon\nu\left(-x\right) = \sigma\upsilon\nu x}$ $\boxed{\eta\mu\left(-x\right) = -\eta\mu x}$

$\boxed{\varepsilon\varphi\left(-x\right)=-\varepsilon\varphi x}$ $\boxed{\sigma\varphi\left(-x\right)=-\sigma\varphi x}$

6. $\boxed{\sigma\upsilon\nu\left(\pi-x\right)=-\sigma\upsilon\nu x}$ $\boxed{\eta\mu\left(\pi-x\right)=\eta\mu x}$
   $\boxed{\varepsilon\varphi\left(\pi-x\right)=-\varepsilon\varphi x}$ $\boxed{\sigma\varphi\left(\pi-x\right)=-\sigma\varphi x}$

7. $\boxed{\sigma\upsilon\nu\left(\pi+x\right)=-\sigma\upsilon\nu x}$ $\boxed{\eta\mu\left(\pi+x\right)=-\eta\mu x}$
   $\boxed{\varepsilon\varphi\left(\pi+x\right)=\varepsilon\varphi x}$ $\boxed{\sigma\varphi\left(\pi+x\right)=\sigma\varphi x}$

8. $\boxed{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\eta\mu x}$ $\boxed{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sigma\upsilon\nu x}$
   $\boxed{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sigma\varphi x}$ $\boxed{\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\varepsilon\varphi x}$

9. $\boxed{\sigma\upsilon\nu\left(\alpha\pm\beta\right)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\mp\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}$
   $\boxed{\eta\mu\left(\alpha\pm\beta\right)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\pm\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha}$
   $\boxed{\varepsilon\varphi\left(\alpha\pm\beta\right)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha\pm\varepsilon\varphi\beta}{1\mp\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}}$

10. $\boxed{\eta\mu 2\alpha=2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}$
    $\boxed{\sigma\upsilon\nu 2\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1=1-2\eta\mu^2\alpha}$

11. $\boxed{\varepsilon\varphi 2\alpha=\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}}$ $\boxed{\eta\mu 2\alpha=\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}}$ $\boxed{\sigma\upsilon\nu 2\alpha=\frac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}}$

12. $\boxed{\sigma\upsilon\nu^2\alpha=\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}}$ $\boxed{\eta\mu^2\alpha=\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}}$

13. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν
    $\boxed{\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A}$ (Νόμος των συνημιτόνων)
    $\boxed{\frac{\alpha}{\eta\mu A}=2R}$ (Νόμος των ημιτόνων, R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου)

1.7 Μερικές εξισώσεις

1. $x^\nu=\alpha$

	ν άρτιος	ν περιττός
$\alpha\geq 0$	$x=\pm\sqrt[\nu]{\alpha}$	$x=\sqrt[\nu]{\alpha}$
$\alpha<0$	αδύνατη	$x=-\sqrt[\nu]{-\alpha}$

2. $\left|x\right|=\alpha$

$\alpha \geq 0$	$\alpha < 0$
$x = \pm\alpha$	αδύνατη

3. $\eta\mu x = \alpha$

$\lvert\alpha\rvert \leq 1,\ \alpha = \eta\mu\theta$	$\lvert\alpha\rvert > 1$
$x = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},\ x = \pi - \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	αδύνατη

4. $\sigma\upsilon\nu x = \alpha$

$\lvert\alpha\rvert \leq 1,\ \alpha = \sigma\upsilon\nu\theta$	$\lvert\alpha\rvert > 1$
$x = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},\ x = -\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	αδύνατη

5. $\varepsilon\varphi x = \alpha, \alpha = \varepsilon\varphi\theta$

$$\boxed{x = \theta + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

6. $\alpha^x = \beta, \quad \alpha > 0$

$\alpha > 0$	$\alpha \leq 0$
$x = \frac{\ln\beta}{\ln\alpha}$	αδύνατη

7. $\ln x = \alpha$

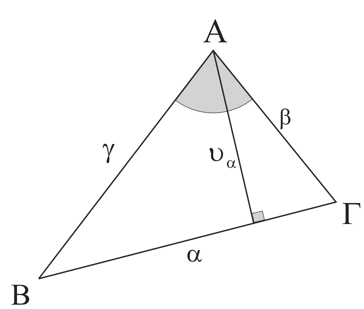
$$\boxed{x = e^{\alpha}}$$

1.8 Εμβαδά

1. Το εμβαδόν E τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A = \sqrt{\tau\left(\tau-\alpha\right)\left(\tau-\beta\right)\left(\tau-\gamma\right)} = \frac{1}{2}\left|D\right|$$

όπου $D = \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)$ και $\tau = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$.



Αν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο πλευράς α τότε $E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$.

2. Το εμβαδόν παραλληλογράμμου είναι βάση×ύψος του τετραγώνου πλευράς α είναι α^2 και του ρόμβου με διαγωνίους δ_1, δ_2 είναι $\frac{\delta_1\delta_2}{2}$. Το εμβαδόν τραπεζίου με βάσεις B, β και ύψος υ είναι $\frac{B+\beta}{2}\upsilon$.

3. Το εμβαδόν κύκλου ακτίνας ρ είναι $\pi\rho^2$ (το μήκος του είναι $2\pi\rho$). Για το εμβαδόν τομέα και το μήκος τόξου γωνίας φ έχουμε:

	μήκος τόξου	εμβαδόν τομέα
γωνία φ σε ακτίνια	$\rho\varphi$	$\frac{\rho^2\varphi}{2}$
γωνία φ σε μοίρες	$\frac{\pi\rho\varphi}{180}$	$\frac{\pi\rho^2\varphi}{360}$

1.9 Συντεταγμένες

Έστω τα σημεία $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$, $\Gamma(x_3, y_3)$.

1. Η απόσταση των A, B είναι

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

2. Το μέσο του τμήματος AB είναι το $\mathrm{M}\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

3. Ο συντελεστής διευθύνσεως του $\overrightarrow{AB}$ καθώς και της ευθείας AB (εφ'οσον $x_1 \neq x_2$) είναι $\lambda = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

4. Έστω $D = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$

   (α΄) Τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά αν και μόνο αν $D = 0$.

   (β΄) Αν $D \neq 0$ τότε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $\frac{1}{2}|D|$.

1.10 Διανύσματα

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε:

1. Το άθροισμα-διαφορά τους είναι

$$\vec{\alpha} \pm \vec{\beta} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$$

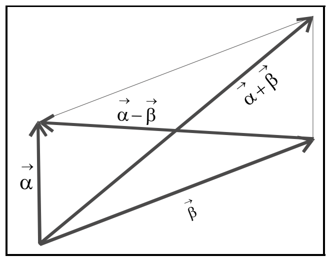
2. Ο γραμμικός συνδυασμός τους $\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ είναι

$$\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}=(\kappa x_1+\lambda x_2,\kappa y_1+\lambda y_2)$$

3. Το εσωτερικό γινόμενο τους είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)$

4. Το μέτρο του $\vec{\alpha}$ είναι $|\vec{\alpha}|=\sqrt{\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

5. Ισχύει $||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}||\leq|\vec{\alpha}\pm\vec{\beta}|\leq|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$



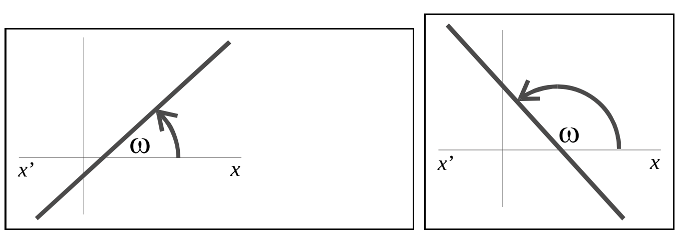
6. $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=|\vec{\alpha}|+\left|\vec{\beta}\right|\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\left|\vec{\beta}\right|\Leftrightarrow\vec{\alpha}\nearrow\nearrow\vec{\beta}$

7. $\vec{\alpha}//\vec{\beta}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$(εφ' όσον ορίζονται οι συντελεστές διευθύνσεως) $\lambda_{\vec{\alpha}}=\lambda_{\vec{\beta}}$

8. $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0\Leftrightarrow$(εφ'οσον ορίζονται οι συντελεστές διευθύνσεως) $\lambda_{\vec{\alpha}}\lambda_{\vec{\beta}}=-1$

1.11 Ευθεία-Κύκλος

1. Η γενική εξίσωση ευθείας είναι η $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ με $|\mathrm{A}|+|\mathrm{B}|\neq0$. Αν $\mathrm{B}\neq0$ η ευθεία έχει συντελεστή διευθύνσεως $\lambda=-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\varepsilon\varphi\omega$ όπου ω είναι η γωνία που σχηματίζει ο άξονας $x'x$ με την ευθεία.



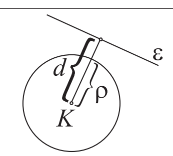
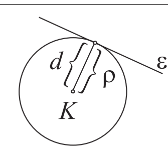
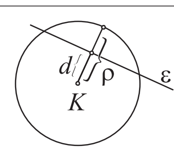
2. Η απόσταση του σημείου $M(x_0, y_0)$ από την ευθεία $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$ είναι $d = \frac{|\mathrm{A}x_0 + \mathrm{B}y_0 + \Gamma|}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}}$.

3. Μια ευθεία με συντελεστή διευθύνσεως α έχει εξίσωση της μορφής $y = \alpha x + \beta$. Οι $y = \alpha_1 x + \beta_1$, $y = \alpha_2 x + \beta_2$ τέμνονται αν και μόνο αν $\alpha_1 \neq \alpha_2$ και είναι κάθετες αν $\alpha_1 \alpha_2 = -1$. Αν $\alpha_1 = \alpha_2 = \lambda$ οι ευθείες έχουν την ίδια διεύθυνση και απόσταση $\frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ και αν επιπλέον $\beta_1 = \beta_2$ τότε συμπίπτουν.

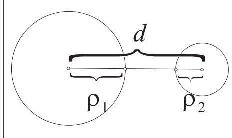
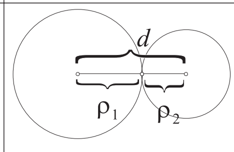
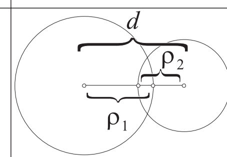
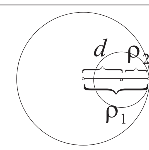
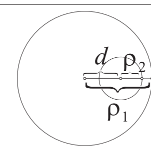
4. Ο κύκλος με κέντρο το $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$. Αν το K συμπίπτει με την αρχή των αξόνων τότε η κύκλος γράφεται $x^2 + y^2 = \rho^2$ και η εφαπτομένη του σε τυχόν σημείο του $P(x_1, y_1)$ είναι $x_1 x + y_1 y = \rho^2$.

5. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$ είναι εξίσωση κύκλου αν και μόνο αν $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma > 0$. Το κέντρο του είναι το $K\left(-\frac{\mathrm{A}}{2}, -\frac{\mathrm{B}}{2}\right)$ και η ακτίνα του είναι $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$.

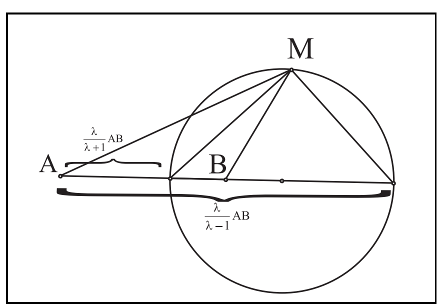
6. Έστω ένας κύκλος με κέντρο K και ακτίνα ρ και d η απόσταση του K από μία ευθεία ε.

Αν	Τότε	Σχήμα
$d > \rho$	Ευθεία και κύκλος δεν έχουν κοινά σημεία	
$d = \rho$	Ευθεία και κύκλος έχουν ένα κοινό σημείο (εφάπτονται)	
$d < \rho$	Ευθεία και κύκλος έχουν δύο κοινά σημεία	

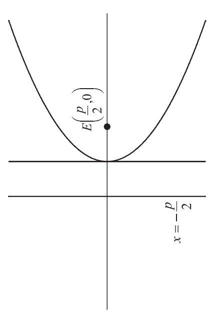
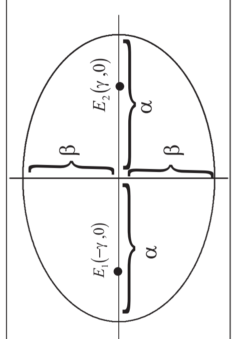
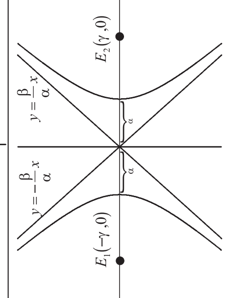
7. Θεωρούμε δύο κύκλους με κέντρα K_1, K_2 και ακτίνες $\rho_1 > \rho_2$. Έστω d η απόσταση των κέντρων τους (διάκεντρος).

Αν	Τότε	Σχήμα
$d > \rho_1 + \rho_2$	Οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία	
$d = \rho_1 + \rho_2$	Οι κύκλοι έχουν ένα κοινό σημείο (εφάπτονται εξωτερικά)	
$\rho_1 - \rho_2 < d < \rho_1 + \rho_2$	Οι κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία	
$d = \rho_1 - \rho_2$	Οι κύκλοι έχουν ένα κοινό σημείο (εφάπτονται εσωτερικά)	
$d < \rho_1 - \rho_2$	Οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία	

8. Το σύνολο των σημείων M που ο λόγος τω αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία A, B είναι σταθερός και ίσος με $\lambda \neq 1$ είναι κύκλος (*Κύκλος του Απολλωνίου*) με διάμετρο που έχει άκρα τα σημεία τα οποία διαιρούν το τμήμα AB εσωτερικά και εξωτερικά σε λόγο λ.

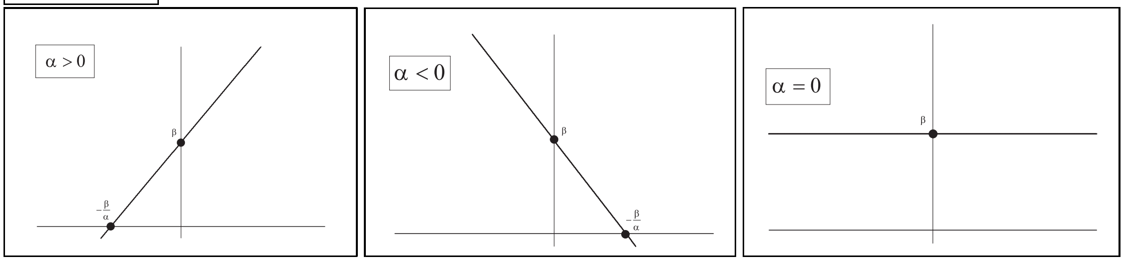


1.12 Κωνικές Τομές

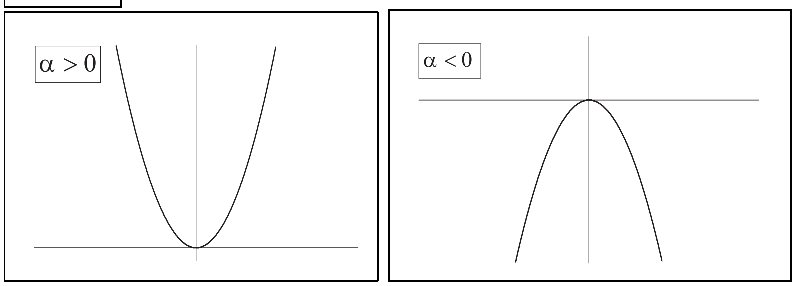
Κωνική	Τι είναι	Εξίσωση σε Κανονική Μορφή	Σχήμα	Άλλα Στοιχεία
Παραβολή	Το σύνολο όλων των σημείων που ισαπέχουν από δοθείσα ευθεία (διευθετούσα) και δοθέν σημείο (εστία)	Εστία $E\left(\frac{p}{2},0\right)$ Διευθετούσα $x=-\frac{p}{2}$ $y^2=2px$		
Έλλειψη	Το σύνολο όλων των σημείων που το άθροισμα των αποστάσεων από δοθέντα σημεία (εστίες) είναι σταθερό.	Εστίες $E_{1,2}(\mp\gamma,0)$ Σταθερό Άθροισμα 2α $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$ $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$		Εκκεντρότητα: $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}<1$
Υπερβολή	Το σύνολο όλων των σημείων που η διαφορά των αποστάσεων από δοθέντα σημεία (εστίες) είναι σταθερό.	Εστίες $E_{1,2}(\mp\gamma,0)$ Σταθερή Διαφορά 2α $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2$ $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$		Εκκεντρότητα: $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}>1$ Ασύμπτωτες: $y=\pm\frac{\beta}{\alpha}x$

1.13 Γραφικές Παραστάσεις Βασικών Συναρτήσεων

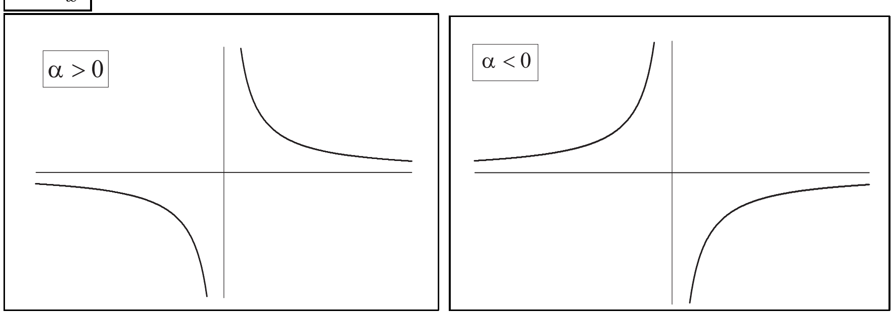
1. $\boxed{y = \alpha x + \beta}$



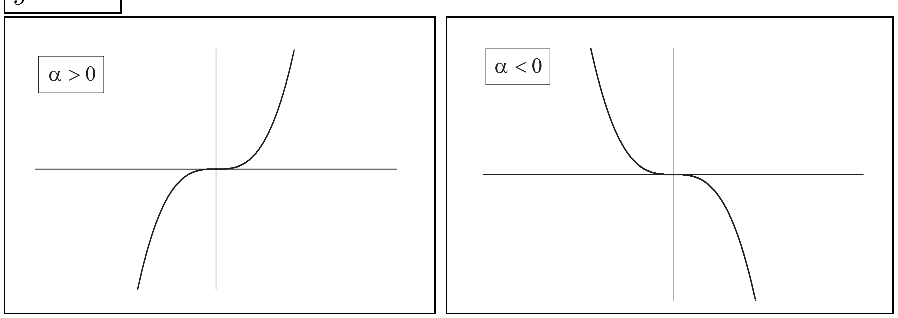
2. $\boxed{y = \alpha x^2}$



3. $\boxed{y = \frac{\alpha}{x}}$

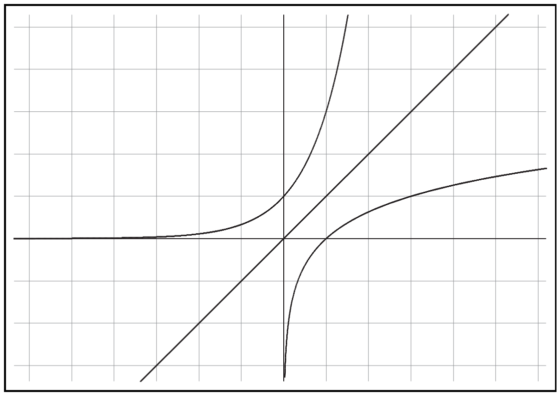


4. $\boxed{y = \alpha x^3}$

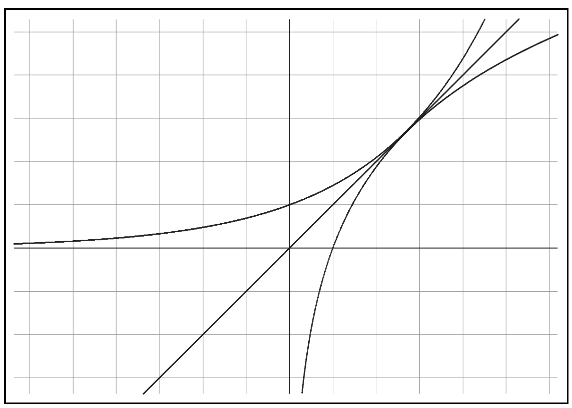


5. $\boxed{y = \alpha^x, \qquad y = \log_\alpha x}$[1]

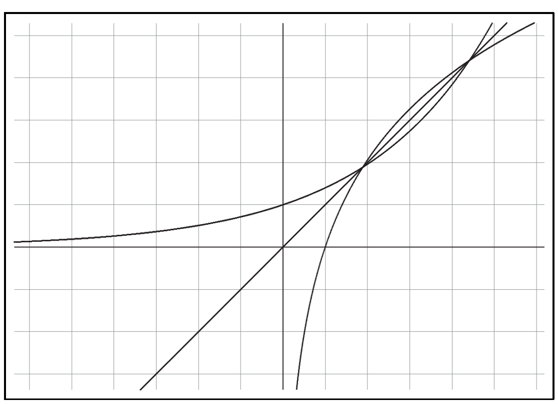
(α′) $\alpha > e^{\frac{1}{e}}$



(β′) $\alpha = e^{\frac{1}{e}}$

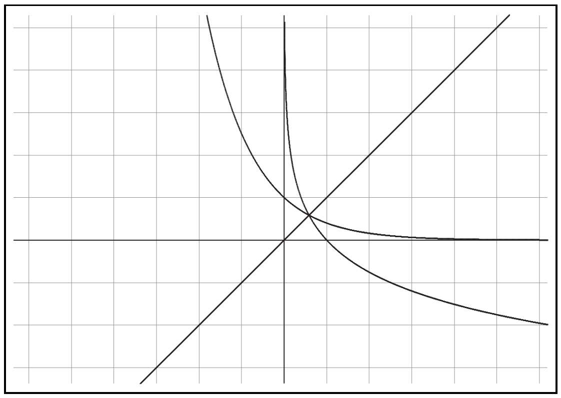


(γ′) $1 < \alpha < e^{\frac{1}{e}}$

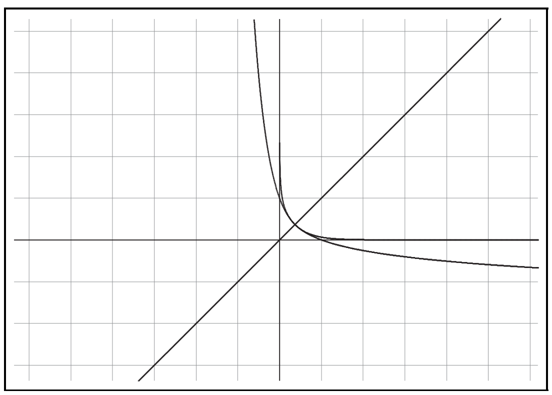


[1]Για λεπτομέρειες: Μπάμπης Τουμάσης, *Πόσο καλά έχουμε κατανοήσει την εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση;*, ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β′, 1994 τ.3, 52-55

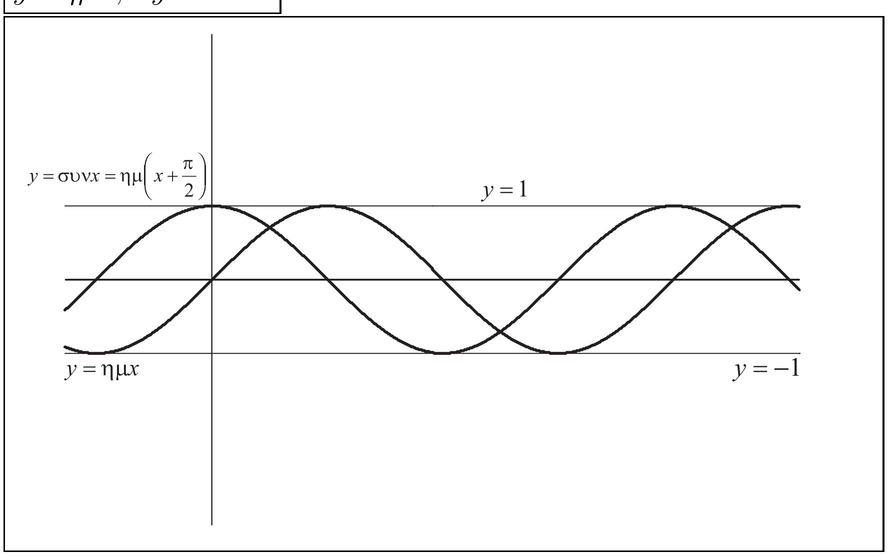
(δ′) $e^{-e} < \alpha < 1$



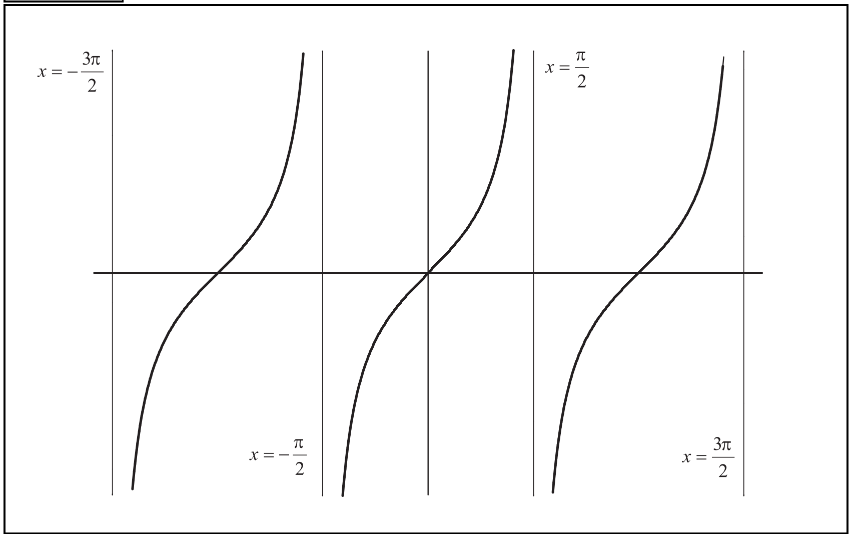
(ε′) $\alpha = e^{-e}$,



6. $\boxed{y = \eta\mu x, \quad y = \sigma\upsilon\nu x}$



7. $\boxed{y = \varepsilon\varphi x}$



Κεφάλαιο 2

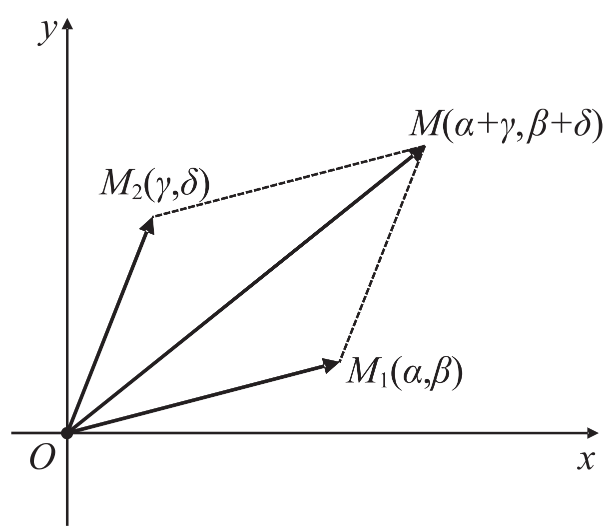
Ερωτήσεις Θεωρίας

Ερωτηση 1. *Πότε δύο μιγαδικοί αριθμοί $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι ίσοι;*

Απαντηση Ισχύει $\alpha+\beta i=\gamma+\delta i \Leftrightarrow \alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$

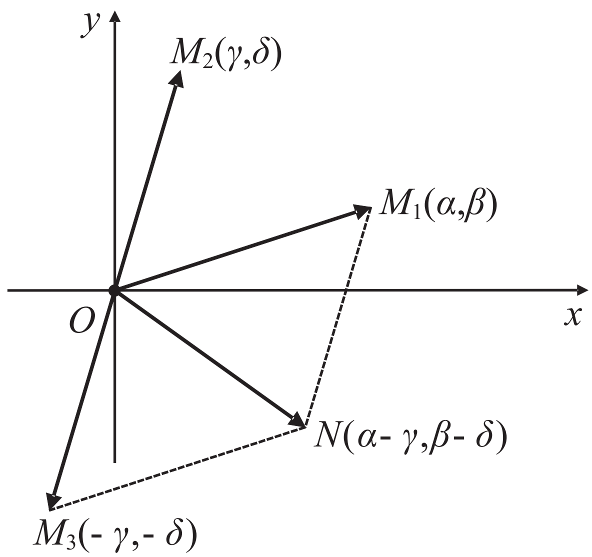
Ερωτηση 2. *Να αποδείξετε ότι η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.*

Απαντηση Αν $M_1(\alpha,\beta)$ και $M_2(\gamma,\delta)$ είναι οι εικόνες των $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε το άθροισμα $(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$ παριστάνεται με το σημείο $M(\alpha+\gamma,\beta+\delta)$. Επομένως, $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$.



Ερωτηση 3. *Να αποδείξετε ότι η διανυσματική ακτίνα διαφοράς των μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.*

Απαντηση Η διαφορά
$(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$ παριστάνεται με το σημείο $N(\alpha-\gamma,\ \beta-\delta)$.
Επομένως, $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}$.



Ερωτηση 4. *Να αποδείξετε ότι* $(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i$.

Απαντηση Έχουμε: $(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=\alpha(\gamma+\delta i)+\beta i(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+(\beta i)(\delta i)==\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+\beta\delta i^2=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i-\beta\delta=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i$

Ερωτηση 5. *Τι ονομάζεται συζυγής του* $\alpha+\beta i$ *;*

Απαντηση Ο αριθμός $\alpha-\beta i$ που συμβολίζεται με $\overline{\alpha+\beta i}$.

Ερωτηση 6. *Να εκφράσετε το πηλίκο* $\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$, *όπου* $\gamma+\delta i\neq 0$, *στη μορφή* $\kappa+\lambda i$.

Απαντηση Πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με το συζυγή του παρονομαστή και έχουμε:

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$$

Δηλαδή

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$$

Ερωτηση 7. *Ποιες είναι οι δυνατές δυνάμεις του i ;*

Απαντηση Έχουμε:

$$i^0 = 1, \qquad i^1 = i, \qquad i^2 = -1, \qquad i^3 = i^2 i = -i$$

και γενικά αν $\nu = 4\rho + \upsilon$, όπου ρ το πηλίκο και υ το υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης του ν με το 4, τότε:

$$i^\nu = i^{4\rho+\upsilon} = i^{4\rho} i^\upsilon = (i^4)^\rho i^\upsilon = 1^\rho i^\upsilon = i^\upsilon = \begin{cases} 1 & , \ \alpha\nu \quad \upsilon = 0 \\ i & , \ \alpha\nu \quad \upsilon = 1 \\ -1 & , \ \alpha\nu \quad \upsilon = 2 \\ -i & , \ \alpha\nu \quad \upsilon = 3 \end{cases}$$

Ερωτηση 8. *Να αποδείξετε ότι* $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

Απαντηση $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i)} = \overline{(\alpha + \gamma) + (\beta + \delta) i} = (\alpha + \gamma) - (\beta + \delta) i = (\alpha - \beta i) + (\gamma - \delta i) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

Ερωτηση 9. *Να λύσετε την εξίσωση* $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ *, με* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$*,* $\alpha \neq 0$ *και* $\Delta < 0$

Απαντηση Εργαζόμαστε όπως στην αντίστοιχη περίπτωση στο $\mathbb{R}$ και τη μετασχηματίζουμε, με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων, στη μορφή:

$$\left(z + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2}$$

όπου $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ η διακρίνουσα της εξίσωσης. Επειδή $\frac{\Delta}{4\alpha^2} = \frac{(-1)(-\Delta)}{4\alpha^2} = \frac{i^2(\sqrt{-\Delta})^2}{(2\alpha)^2} = \left(\frac{\iota\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$, η εξίσωση γράφεται: $\left(z + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$. Άρα οι λύσεις της είναι: $z1, 2 = \frac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$, οι οποίες είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.

Ερωτηση 10. *Τι ονομάζεται μέτρο του μιγαδικού* $z = x + yi$ *;*

Απαντηση Ορίζουμε ως μέτρο του z την απόσταση του M από την αρχή O , δηλαδή τον αριθμό $|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Ερωτηση 11. *Να αποδείξετε ότι* $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Έχουμε: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \Leftrightarrow (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2}) = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2 \Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2$

ΕΡΩΤΗΣΗ 12. *Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζεται πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A και τι τιμή της f στο $x \in A$;*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Μια διαδικασία (κανόνα) με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 13. *Τι ονομάζεται σύνολο τιμών μίας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$;*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Το σύνολο $f(A) = \{y|y = f(x)$ για κάποιο $x \in A\}$ που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 14. *Τι ονομάζεται γραφική παράσταση μίας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$;*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Το σύνολο C_f των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 15. *Πότε δύο συναρτήσεις λέγονται ίσες;*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 16. *Αν f, g, είναι δύο συναρτήσεις να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, fg και $\frac{f}{g}$.*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Ορίζουμε το άθροισμα $f+g$, διαφορά $f-g$, γινόμενο fg και πηλίκο $\frac{f}{g}$ των f, g τις συναρτήσεις με τύπους αντιστοίχως τους

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \;,\; (f-g)(x) = f(x) - g(x) \;,\; (fg)(x) = f(x)g(x) \;,$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Το πεδίο ορισμού των $f+g$, $f-g$ και fg είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο

$$\{x|x \in A \text{ και } x \in B, \text{ με } g(x) \neq 0\}$$

Ερωτηση 17. *Αν f, g, είναι δύο συναρτήσεις να ορίσετε τη σύνθεση $g \circ f$ της f με την g.*

Απαντηση Είναι η συνάρτηση με τύπο

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

και πεδίο ορισμού το σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο

$$A_1 = \{x \in A|f(x) \in B\}$$

Ερωτηση 18. *Έστω f μία συνάρτηση και Δ ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της. Πότε η f ονομάζεται γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, αύξουσα, φθίνουσα στο Δ;*

Απαντηση Η f λέγεται

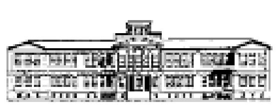
- γνησίως αύξουσα στο Δ όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$
- γνησίως φθίνουσα στο Δ, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$
- αύξουσα στο Δ, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$
- φθίνουσα στο Δ, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$

Ερωτηση 19. *Πότε η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο ή ελάχιστο στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;*

Απαντηση Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$
- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

Ερωτηση 20. *Τι είναι τα ολικά ακρότατα μίας συνάρτησης f;*



ΑΠΑΝΤΗΣΗ Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο της f (εφόσον υπάρχουν) λέγονται (ολικά) ακρότατα της f.

ΕΡΩΤΗΣΗ 21. *Πότε μία συνάρτηση λέγεται 1-1;*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση $1-1$, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$\text{αν } x_1 \neq x_2, \text{τότε } f(x_1) \neq f(x_2)$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 22. *Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha \neq 0$ είναι συνάρτηση $1-1$.*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Αν υποθέσουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$, τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha x_1 + \beta = \alpha x_2 + \beta \Rightarrow \alpha x_1 = \alpha x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 23. *Πως ορίζεται η αντίστροφη μίας 1-1 συνάρτησης;*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Έστω μια $1-1$ συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$ και επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $g : f(A) \to \mathbb{R}$ με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Η g λέγεται αντίστροφη συνάρτηση της f και συμβολίζεται με f^{-1} .

ΕΡΩΤΗΣΗ 24. *Να αποδείξετε ότι για κάθε πολυώνυμο*

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

και κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των ορίων έχουμε:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = \lim_{x \to x_0} (\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0)$$

$$= \lim_{x \to x_0} (\alpha_\nu x^\nu) + \lim_{x \to x_0} (\alpha_{\nu-1} x^{\nu-1}) + \cdots + \lim_{x \to x_0} \alpha_0$$

$$= \alpha_\nu \lim_{x \to x_0} x^\nu + \alpha_{\nu-1} \lim_{x \to x_0} x^{\nu-1} + \cdots + \lim_{x \to x_0} \alpha_0$$

$$= \alpha_\nu x_0^\nu + \alpha_{\nu-1} x_0^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0 = P(x_0)$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 25. *Να αποδείξετε ότι για κάθε ρητή συνάρτηση* $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *και κάθε* $x_0 \in \mathbb{R}$ *με* $Q(x_0) \neq 0$ *ισχύει* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$. Τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 26. *Πότε μία συνάρτηση* f *θα είναι συνεχής σε ένα σημείο* x_0 *του πεδίου ορισμού της;*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Όταν ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

ΕΡΩΤΗΣΗ 27. *Πότε μία συνάρτηση* f *δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο* x_0 *του πεδίου ορισμού της;*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Όταν:
α) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή
β) Υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0.

ΕΡΩΤΗΣΗ 28. *Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση* f *είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα* (α,β)*;*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β)

ΕΡΩΤΗΣΗ 29. *Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση* f *είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα* $[\alpha,\beta]$*;*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- Όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον
- $\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$

ΕΡΩΤΗΣΗ 30. *Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$
Δηλαδή: Υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β).

Ερωτηση 31. *Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών*

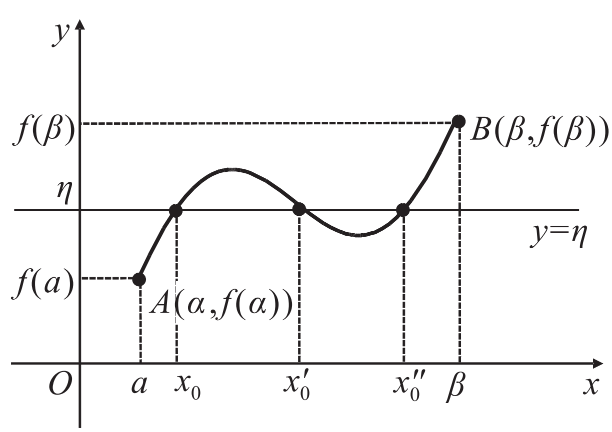
Απαντηση *Διατύπωση:* Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$ *Απόδειξη:* Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta) < 0$, αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$.



ΕΡΩΤΗΣΗ 32. *Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m. Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει $m \leq f(x) \leq M$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 33. *Ποιο είναι το σύνολο τιμών μιας συνεχούς, όχι σταθερής, συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$;*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Το κλειστό διάστημα $[m,M]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

ΕΡΩΤΗΣΗ 34. *Ποιο είναι το σύνολο τιμών μίας γνησίως αύξουσας (αντιστοίχως φθίνουσας) και συνεχούς συνάρτησης ορισμένης σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β);*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Το διάστημα (Α, Β) (αντιστοίχως (B,A)) όπου $\mathrm{A} = \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B = \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 35. *Πως ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A;*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A, την ευθεία

$$\varepsilon\colon\ y - f(x_0) = \lambda(x - x_0)$$

που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

ΕΡΩΤΗΣΗ 36. *Πότε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο $x_\mathbf{0}$ και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή: $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 37. *Τι ονομάζεται κλίση της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ ή κλίση της f στο x_0;*

Απαντηση Η κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης ε στο $A(x_0, f(x_0))$.

Ερωτηση 38. *Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ΄ ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.*

Απαντηση Για $x \neq x_0$ έχουμε

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.
Επομένως, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Ερωτηση 39. *Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = |x|$ αν και συνεχής στο $x_0 = 0$, δεν είναι παραγωγίσιμη σ΄ αυτό.*

Απαντηση Έστω η συνάρτηση $f(x) = |x|$. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ΄ αυτό, αφού $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$, ενώ $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-x}{x} = -1$.

Ερωτηση 40. *Πότε λέμε για μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A λέμε ότι:*

1. *Η f είναι παραγωγίσιμη στο A;*
2. *Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της;*
3. *Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;*

Απαντηση

1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

2. Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

3. Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει $\lim\limits_{x \to \alpha^+} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x \to \beta^-} \frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} \in \mathbb{R}$.

Ερωτηση 41. *Τι ονομάζεται παράγωγος μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού A;*

Απαντηση Έστω A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f' : A_1 \to \mathbb{R}, \qquad x \ \to \ f'(x),$$

η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f ή απλά παράγωγος της f .

Ερωτηση 42. *Να αποδείξετε ότι η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 0$.*

Απαντηση Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{c-c}{x-x_0} = 0$. Επομένως $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$, δηλαδή $(c)' = 0$.

Ερωτηση 43. *Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1$.*

Απαντηση Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1$. Επομένως $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} 1 = 1$, δηλαδή $(x)' = 1$.

Ερωτηση 44. *Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^\nu$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$.*

Απαντηση Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^\nu - x_0^\nu}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \cdots + x_0^{\nu-1})}{x-x_0} = x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \cdots + x_0^{\nu-1}$$

οπότε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0}(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \cdots + x_0^{\nu-1}) = x_0^{\nu-1} + x_0^{\nu-1} + \cdots + x_0^{\nu-1} = \nu x_0^{\nu-1}$$

δηλαδή $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$.

Ερωτηση 45. *Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση* $f(x) = \sqrt{x}$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $(0, +\infty)$ *και ισχύει* $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. *Ακόμη να αποδείξετε ότι αν και συνεχής στο 0 δεν είναι παραγωγίσιμη σ΄ αυτό.*

Απαντηση Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)}{(x - x_0)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)}$$

$$= \frac{x - x_0}{(x - x_0)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

οπότε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Τέλος $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ και επομένως η συνάρτηση δεν παραγωγίζεται στο 0.

Ερωτηση 46. *Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση* $f(x) = \eta\mu x$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $\mathbb{R}$ *και ισχύει* $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$.

Απαντηση Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $h \neq 0$ ισχύει

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\eta\mu(x+h) - \eta\mu x}{h} = \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu h + \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu h - \eta\mu x}{h}$$

$$= \eta\mu x \cdot \frac{(\sigma\upsilon\nu h - 1)}{h} + \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h}$$

Επειδή $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\eta\mu h}{h} = 1$ και $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} = 0$, έχουμε $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \eta\mu x \cdot 0 + \sigma\upsilon\nu x \cdot 1 = \sigma\upsilon\nu x$. Δηλαδή, $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$.

Ερωτηση 47. *Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση* $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $\mathbb{R}$ *και ισχύει* $f'(x) = -\eta\mu x$.

Απαντηση Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $h \neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sigma\upsilon\nu(x+h) - \sigma\upsilon\nu x}{h} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu h - \eta\mu x \cdot \eta\mu h - \sigma\upsilon\nu x}{h}$$

$$= \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} - \eta\mu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h}$$

οπότε $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \left(\sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h}\right) - \lim\limits_{h \to 0} \left(\eta\mu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h}\right) = \sigma\upsilon\nu x \cdot 0 - \eta\mu x \cdot 1 = -\eta\mu x$. Δηλαδή, $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$.

Ερωτηση 48. *Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$*

Απαντηση Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} == \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)+g'(x_0)$$

δηλαδή $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Ερωτηση 49. *Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$.*

Απαντηση Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ έχουμε: $(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = \frac{(1)'x^\nu - 1(x^\nu)'}{(x^\nu)^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}$

Ερωτηση 50. *Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \,|\, \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.*

Απαντηση Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ έχουμε:

$$(\varepsilon\phi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Ερωτηση 51. *Να αποδείξετε ότι συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.*

Απαντηση Αν $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως, $y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha\ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$.

Ερωτηση 52. *Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \ln\alpha$.*

Απαντηση Αν$y = \alpha^x = e^{x \ln \alpha}$ και θέσουμε $u = x \ln \alpha$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως $y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln \alpha} \cdot \ln \alpha = \alpha^x \ln \alpha$

Ερωτηση 53. *Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση* $f(x) = \ln |x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $\mathbb{R}^*$ *και ισχύει* $(\ln |x|\,)' = \frac{1}{x}$.

Απαντηση Πράγματι. η αν $x > 0$, τότε $(\ln |x|\,)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, ενώ η αν $x < 0$, τότε $\ln |x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$. Επομένως, $y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$

και άρα $(\ln |x|\,)' = \frac{1}{x}$.

Ερωτηση 54. *Τι ονομάζεται ρυθμός μεταβολής του* $y = f(x)$ *ως προς* x *;*

Απαντηση Ρυθμός μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 είναι η παράγωγος $f'(x_0)$.

Ερωτηση 55. *Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle και να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του.*

Απαντηση Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$
Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.

Ερωτηση 56. *Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής διαφορικού λογισμού και να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του.*

Απαντηση Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.
Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας ΑΒ.

Ερωτηση 57. *Να αποδείξετε ότι αν f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και*

- *η f είναι συνεχής στο Δ και*
- *$f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,*

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Απαντηση Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

  $$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad (1)$$

  Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Ερωτηση 58. *Να αποδείξετε ότι αν δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ και*

- *οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και*
- *$f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,*

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$

Απαντηση Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$. Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$.

Ερωτηση 59. *Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι*

- *Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.*
- *Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.*

Απαντηση Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$. Έστω $x_1 x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ οπότε έχουμε $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.
Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως.

Ερωτηση 60. *Πως ορίζεται η θέση τοπικού μεγίστου και τοπικού ελαχίστου μίας συνάρτησης f;*

Απαντηση Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο (αντιστοίχως: τοπικό ελάχιστο), όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \le f(x_0)$ (αντιστοίχως $f(x) \ge f(x_0)$) για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο (αντιστοίχως τοπικό ελάχιστο), της f .

Ερωτηση 61. *Να αποδείξετε το θεώρημα του Fermat: Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ΄ ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.*

Απαντηση Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ΄ αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta \text{ και } f(x) \le f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \ (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Επομένως,

- αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \qquad (2)$$

- αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

ΕΡΩΤΗΣΗ 62. *Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ΄ ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι:*

1. *Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.*
2. *Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0] \ (1)$$

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in [x_0, \beta) \ (2)$$

Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta)$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

2. Έστω ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$
Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β). Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

    - Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
    - Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
    - Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

    Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).
    Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 63. *Πότε μία συνάρτηση f θα λέγεται κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σε ένα διάστημα Δ ;*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Αν είναι συνεχής στο Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ και η f' είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως: γνησίως φθίνουσα) στο εσωτερικό του Δ.

ΕΡΩΤΗΣΗ 64. *Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ΄ ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f;*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f αν ισχύει:

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β), ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 65. *Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f;*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

Ερωτηση 66. *Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$);*

Απαντηση Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$))

Ερωτηση 67. *Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$);*

Απαντηση Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)] = 0$, (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(\lambda x + \beta)] = 0$)

Ερωτηση 68. *Αν ευθεία $y = \lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$ ποιες σχέσεις μας δίνουν τα λ, β;*

Απαντηση
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - \lambda x] = \beta$ αντιστοίχως
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - \lambda x] = \beta$

Ερωτηση 69. *Να διατυπώσετε τους κανόνες του de l' Hospital.*

Απαντηση
$\boxed{\text{Μορφή } \frac{0}{0}}$ Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
$\boxed{\text{Μορφή } \frac{+\infty}{+\infty}}$ Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ερωτηση 70. *Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζεται παράγουσα της f στο Δ ;*

Απαντηση Ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Ερωτηση 71. *Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε*

- *όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και*

- *κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$*

Απαντηση

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ αφού $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.
- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε $G'(x) = F'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$. Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x) = F(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$.

Ερωτηση 72. *Τι ονομάζεται αόριστο ολοκλήρωμα της f στο Δ;*

Απαντηση Ονομάζεται το σύνολο όλων των παραγουσών της συνάρτησης f στο διάστημα Δ και συμβολίζεται $\int f(x)dx$.

Ερωτηση 73. *Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ΄ ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και G μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι: $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$*

Απαντηση Η συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$G(x) = F(x) + c \ \ (1)$$

Από την (1), για $x = \alpha$, έχουμε

$$G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_\alpha^\alpha f(t)dt + c = c$$

οπότε $c = G(\alpha)$. Επομένως, $G(x) = F(x) + G(\alpha)$, οπότε, για $x = \beta$, έχουμε $G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(t)dt + G(\alpha)$ και άρα

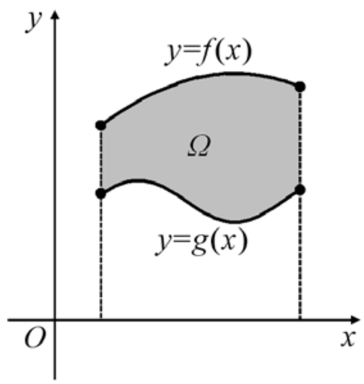
$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

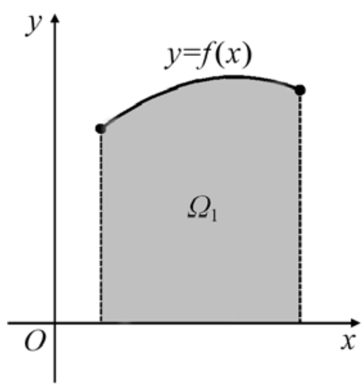
Ερωτηση 74. *Έστω δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$. Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν $E(\Omega)$ του Ω ισχύει $E(\Omega) = \int_\alpha^\beta (f(x) - g(x))dx$.*

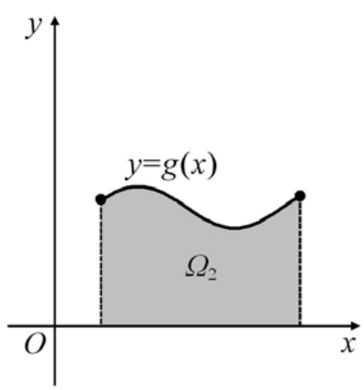
Απαντηση Παρατηρούμε ότι

$$\mathrm{E}(\Omega) = \mathrm{E}(\Omega_1) - \mathrm{E}(\Omega_2) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx$$

Επομένως: $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx$



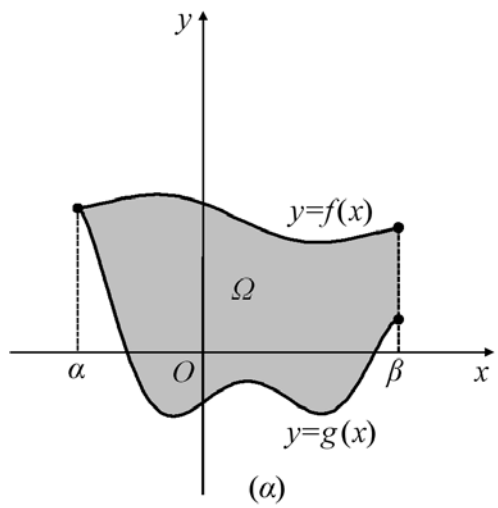




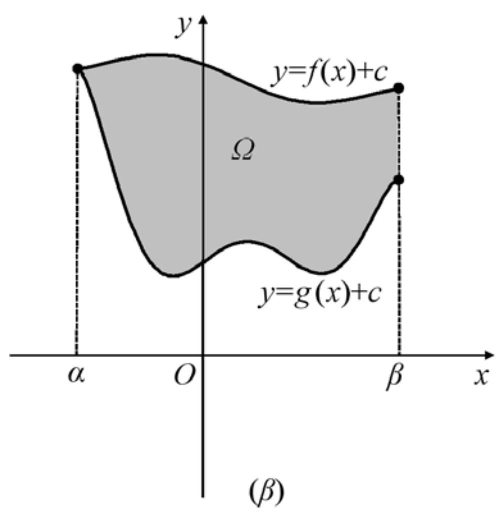
Ερωτηση 75. *Έστω δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις*

γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$. Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν $E(\Omega)$ του Ω ισχύει $E(\Omega) = \int_\alpha^\beta (f(x) - g(x))dx$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Πράγματι, επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει αριθμός $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x) + c \geq g(x) + c \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω (Σχ. α) έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω′ (Σχ. β). Επομένως, έχουμε: $\mathrm{E}(\Omega) = \mathrm{E}(\Omega') = \int_\alpha^\beta [(f(x) + c) - (g(x) + c)]dx = \int_\alpha^\beta (f(x) - g(x))dx$. Άρα $E(\Omega) = \int_\alpha^\beta (f(x) - g(x))dx$.



(α)



(β)

Κεφάλαιο 3

Χρήσιμες Προτάσεις

Σημειωση

Αν καποια απο τις επομενες προτασεις χρησιμοποιηθει στις εξετασεις χρειαζεται αποδειξη. Εξαιρεση αποτελουν οι (1),(3),(13), (21)

Προταση 1. *Ένας μιγαδικός είναι πραγματικός αν και μόνο αν είναι ίσος με τον συζυγή του.*

Αποδειξη: Αν $z = \alpha + \beta i,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τότε $z - \bar{z} = 2\beta i$ και επομένως

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \beta = 0 \Leftrightarrow z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$$

Προταση 2. *Αν μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα (σ_1, σ_2) έχει την ιδιότητα $\lim\limits_{x \to \sigma_1} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x \to \sigma_2} f(x) = +\infty$ τότε το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$.*

Αποδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός y είναι τιμή της f. Αφού $\lim\limits_{x \to \sigma_1} f(x) = -\infty$ η f θα παίρνει και τιμές μικρότερες του y δηλαδή θα υπάρχει $x_1 \in (\sigma_1, \sigma_2)$ ώστε $f(x_1) < y$. Αφού $\lim\limits_{x \to \sigma_2} f(x) = +\infty$ η f θα παίρνει και τιμές μεγαλύτερες του y δηλαδή θα υπάρχει $x_2 \in (\sigma_1, \sigma_2)$ ώστε $y < f(x_2)$. Προφανώς $x_1 \neq x_2$ και από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει x στο διάστημα με άκρα τα x_1, x_2τέτοιο ώστε $f(x) = y$. Επομένως ο y είναι τιμή της f.

Προταση 3. *Για κάθε $x > 0$ είναι*

$$\ln x \leq x - 1$$

και το «=» ισχύει μόνο για $x = 1$.

Αποδειξη: Εφαρμογή του σχολικού βιβλίου.

Πρόταση 4. *Για κάθε x είναι*

$$e^x \geq x + 1$$

και το «=» ισχύει μόνο για $x = 0$.

Απόδειξη: Για όλους τους θετικούς αριθμούς x ισχύει

$$\ln x \leq x - 1$$

και το «=» ισχύει μόνο για $x = 1$. Επομένως και για τον θετικό e^x ισχύει $\ln e^x \leq e^x - 1$ και το το «=» ισχύει μόνο για $e^x = 1$ δηλαδή $x = 0$. Επομένως $x \leq e^x - 1$ και το «=» ισχύει μόνο για $x = 0$. Άρα $e^x \geq x + 1$ και το «=» ισχύει μόνο για $x = 0$.

Πρόταση 5. *Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο διάστημα Δ και ισχύει $|g(x)| < m$ για όλα τα $x \in \Delta$ και $\lim\limits_{x \to \sigma} f(x) = 0$ τότε $\lim\limits_{x \to \sigma} f(x) g(x) = 0$.*

Απόδειξη: Είναι:

$$|f(x) g(x)| = |f(x)| |g(x)| \leq |f(x)| m$$

Άρα για όλα τα x ισχύει

$$|f(x) g(x)| \leq |f(x)| m$$

και επομένως

$$-|f(x)| m \leq f(x) g(x) \leq |f(x)| m$$

Αλλά αφού $\lim\limits_{x \to \sigma} f(x) = 0$ είναι και $\lim\limits_{x \to \sigma} |f(x)| = 0$ επομένως

$$\lim_{x \to \sigma} m |f(x)| = \lim_{x \to \sigma} (-m |f(x)|) = 0 \tag{3.1}$$

Από την (1) και το κριτήριο της παρεμβολής συνάγουμε ότι

$$\lim_{x \to \sigma} f(x) g(x) = 0$$

Πρόταση 6. *Η συνάρτηση $|x|$ έχει για $x \neq 0$ παράγωγο $\frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x}$ ενώ στο 0 δεν παραγωγίζεται.*

Απόδειξη: Το ότι δεν παραγωγίζεται στο 0 είναι γνωστό. Επίσης για $x > 0$ είναι $(|x|)' = (x)' = 1 = \frac{x}{x} = \frac{|x|}{x}$. Ακόμη για $x < 0$ είναι $(|x|)' = (-x)' = -1 = \frac{x}{-x} = \frac{x}{|x|}$. Άρα για $x \neq 0$ είναι $(|x|)' = \frac{x}{|x|}$ και προφανώς ισχύει $\frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x}$ διότι $x^2 = |x|^2$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7. *Αν $f:[\alpha,\beta]\to R$ συνεχής και $f(\alpha)f(\beta)\le 0$ τότε η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha,\beta]$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αφού ισχύει $f(\alpha)f(\beta)\le 0$ ή θα είναι $f(\alpha)f(\beta)<0$ είτε $f(\alpha)f(\beta)=0$.

- Αν $f(\alpha)f(\beta)<0$ τότε από το θεώρημα του Bolzano η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α,β) και επομένως στο $[\alpha,\beta]$.
- Αν $f(\alpha)f(\beta)=0$ τότε ή $f(\alpha)=0$ είτε $f(\beta)=0$. Άρα η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\{\alpha,\beta\}$ και επομένως στο $[\alpha,\beta]$ Σε κάθε περίπτωση η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha,\beta]$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8. *Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων της f και της αντίστροφής της f^{-1}, εφ' όσον υπάρχουν, ανήκουν στην ευθεία $y=x$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $M(\alpha,\beta)$ ένα σημείο που ανήκει και στην $\mathcal{C}_f$ και $\mathcal{C}_{f^{-1}}$. Θα ισχύει $f(\alpha)=\beta$ και $f(\beta)=\alpha$. Θα δείξουμε ότι το M ανήκει και στην $y=x$ δηλαδή ότι $\alpha=\beta$.

Αν είναι $\alpha\ne\beta$ τότε ή θα είναι $\alpha<\beta$ είτε $\beta<\alpha$. Στην πρώτη περίπτωση θα έχουμε $f(\alpha)<f(\beta)$ δηλαδή $\beta<\alpha$ (άτοπο). Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε ότι $f(\beta)<f(\alpha)$ δηλαδή $\alpha<\beta$ (άτοπο). Άρα αποκλείεται να είναι $\alpha\ne\beta$ και απομένει ότι $\alpha=\beta$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 9. *Έστω $f:[-\alpha,\alpha]\to\mathbb{R}$ συνεχής.*

1. *Αν η f είναι άρτια τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)\,dx=2\int_0^{\alpha}f(x)\,dx$*
2. *Αν η f είναι περιττή τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)\,dx=0$*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Είναι
$\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)\,dx=\int_{-\alpha}^{0}f(x)\,dx+\int_0^{\alpha}f(x)\,dx=_{u=-x}-\int_{\alpha}^{0}f(-u)\,du+\int_0^{\alpha}f(x)\,dx=$
$\int_0^{\alpha}f(-x)\,dx+\int_0^{\alpha}f(x)\,dx$
Όταν η f είναι άρτια τότε τότε $f(-x)=f(x)$ και $\int_0^{\alpha}f(-x)\,dx+\int_0^{\alpha}f(x)\,dx=$
$\int_0^{\alpha}f(x)\,dx+\int_0^{\alpha}f(x)\,dx=2\int_0^{\alpha}f(x)\,dx$.
Όταν η f είναι περιττή τότε $f(-x)=-f(x)$ και $\int_0^{\alpha}f(-x)\,dx+\int_0^{\alpha}f(x)\,dx=$
$-\int_0^{\alpha}f(x)\,dx+\int_0^{\alpha}f(x)\,dx=0$

ΠΡΟΤΑΣΗ 10. *Η συνάρτηση $x\ln x-x$ είναι μία παράγουσα της $\ln x$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Προφανώς ισχύει $(x\ln x-x)'=(x\ln x)'-(x)'=(x)'\ln x+x(\ln x)'-(x)'=\ln x+x\frac{1}{x}-1=\ln x$

ΠΡΟΤΑΣΗ 11. $(\varepsilon\varphi x)'=1+\varepsilon\varphi^2 x$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Είναι $(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ και από γνωστή σχέση της τριγωνομετρίας είναι $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 1 + \varepsilon\varphi^2 x$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 12. *Με $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $|z|^2 = z^2$ αν και μόνο αν $z \in \mathbb{R}$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $z = \alpha + \beta i$. Είναι $|z|^2 = z^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta i)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i \Leftrightarrow (\alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$ και $2\alpha\beta = 0) \Leftrightarrow (2\beta^2 = 0$ και $\alpha\beta = 0) \Leftrightarrow \beta = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

ΠΡΟΤΑΣΗ 13. *Έστω ότι ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο σ. Ισχύουν τα επόμενα:*

- $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sigma} g(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to\sigma} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = -\infty$

ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ: Πρόκειται για άμεση συνέπεια του ορισμού του ορίου. Ισχύει κατ΄ αναλογία με τις ιδιότητες των πεπερασμένων ορίων [1]

ΠΡΟΤΑΣΗ 14. *Αν για τις συναρτήσεις f, g που είναι ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq g(x)$ για όλα τα x και $f \neq g$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx > \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Για την συνάρτηση $h = f - g$ ισχύει $h(x) \geq 0$ για όλα τα x και $h \neq 0$. Επομένως $\int_\alpha^\beta h(x)\,dx > 0$ από την οποία έχουμε $\int_\alpha^\beta (f(x) - g(x))\,dx > 0$ άρα και $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \int_\alpha^\beta g(x)\,dx > 0$ από την οποία προκύπτει ότι $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx > \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 15. *Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ τότε μεταξύ δύο οποιωνδήποτε διαφορετικών ριζών της f βρίσκεται μία τουλάχιστον ρίζα της παραγώγου της f'.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $\rho_1 < \rho_2$ δύο ρίζες της f στο Δ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και ισχύει $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$. Ικανοποιούνται επομένως οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle άρα θα υπάρχει ξ με $\rho_1 < \xi < \rho_2$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 16. *Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και $f(x_1) < f(x_2)$ τότε είναι $x_1 < x_2$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Για τους x_1, x_2 υπάρχουν τα ενδεχόμενα: $x_1 = x_2$, $x_1 > x_2$ και $x_1 < x_2$. Το πρώτο μας οδηγεί στο άτοπο συμπέρασμα $f(x_1) = f(x_2)$. Το δεύτερο, σε συνδυασμό με το ότι η f είναι γνησίως αύξουσα μας οδηγεί στο επίσης άτοπο συμπέρασμα $f(x_1) > f(x_2)$. Άρα αναγκαστικά θα ισχύει $x_1 < x_2$.

[1] Βλ. σχολικό βιβλίο αρχή της σελίδας 184

Προταση 17. *Μία γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει το πολύ μία ρίζα.*

Αποδειξη: Έστω f μία γνησίως μονότονη συνάρτηση. Τότε η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα και σε κάθε περίπτωση είναι 1-1. Αν ρ_1, ρ_2 είναι ρίζες της f τότε $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$ και από την σχέση $f(\rho_1) = f(\rho_2)$ συνάγουμε ότι $\rho_1 = \rho_2$. Επομένως η f έχει το πολύ μία ρίζα.

Προταση 18. *Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.*

Αποδειξη: Έστω $y_1, y_2 \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$ τέτοια ώστε $y_1 < y_2$. Θα δείξουμε ότι $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$ έτοια ώστε $f(x_1) = y_1$ και $f(x_2) = y_2$ θα είναι δε $f^{-1}(y_1) = x_1$ και $f^{-1}(y_2) = x_2$. Ξέρουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$ και θέλουμε $x_1 < x_2$. Η απόδειξη συμπληρώνεται επιχειρηματολογώντας όπως ακριβώς στην πρόταση (16.).

Προταση 19. *Αν $|z| = \rho \neq 0$ τότε $\bar{z} = \frac{\rho^2}{z}$.*

Αποδειξη: Αφού $|z| \neq 0$ είναι και $z \neq 0$. Έχουμε τώρα: $|z| = \rho \Rightarrow |z|^2 = \rho^2 \Rightarrow z \cdot \bar{z} = \rho^2 \Rightarrow \bar{z} = \frac{\rho^2}{z}$.

Προταση 20. *Αν $z \in \mathbb{C}$ με $z \notin \mathbb{R}$ τότε*

$$z^3 = 1 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

Αποδειξη: $z^3 = 1 \Leftrightarrow z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow z^3 - 1^3 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1) = 0 \Leftrightarrow_{z \notin \mathbb{R}} z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow_{(\text{ΕΠΙΛΥΟΥΜΕ})} z = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$

Προταση 21. *Οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f' = f$ είναι ακριβώς εκείνες της μορφής $f(x) = ce^x$ όπου $c \in \mathbb{R}$ σταθερά.*

Αποδειξη: Εφαρμογή του σχολικού βιβλίου.

Προταση 22. *Αν $\lim\limits_{x \to \sigma} |f(x)| = 0$ τότε $\lim\limits_{x \to \sigma} f(x) = 0$.*

Αποδειξη: Από την ανισότητα $-|A| \leq A \leq |A|$ έχουμε ότι για κάθε x ισχύει

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

Είναι $\lim\limits_{x \to \sigma} |f(x)| = \lim\limits_{x \to \sigma} (-|f(x)|) = 0$ και από το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε ότι $\lim\limits_{x \to \sigma} f(x) = 0$.

Προταση 23. *Αν για μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του $\in \Delta$ τότε η f είναι αύξουσα στο Δ*

Αποδειξη: Είναι όμοια με την ανάλογη απόδειξη του σχολικού βιβλίου για την περίπτωση όπου η παράγωγος είναι θετική. Το μόνο που αλλάζει είναι η τελευταία γραμμή:
«Επειδή $f'(\xi) \geq 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ οπότε $f(x_1) \leq f(x_2)$»

Προταση 24. *Μία γνησίως μονότονη συνάρτηση f ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα Δ δεν έχει ακρότατα.*

Αποδειξη: Ας υποθέσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (η περίπτωση όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα αντιμετωπίζεται αναλόγως). Αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο $x_0 \in \Delta$. Για κάθε $\delta > 0$ το σύνολο $\Delta \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ περιέχει ένα τουλάχιστον $x_1 < x_0$ και ένα τουλάχιστον $x_2 > x_0$. Λόγω της μονοτονίας θα είναι $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα δεν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για όλα τα $x \in \Delta \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$ είτε για όλα τα $x \in \Delta \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει $f(x) \geq f(x_0)$. Άρα κανένα x_0 δε μπορεί να είναι θέση τοπικού ακροτάτου.

Κεφάλαιο 4

Ερωτήσεις Σωστό-Λάθος

Όταν στα επόμενα υπάρχει η ερώτηση αν ένας ισχυρισμός αληθεύει εννοείται ότι ζητείται να απαντηθεί αν αληθεύει για όλες τις δυνατές περιπτώσεις. Έτσι στην ερώτηση αν είναι σωστό ή λάθος ότι: «Αν $f(1) = 1$ τότε $f(x) > 0$ για όλα τα x» θα απαντήσουμε ότι είναι λάθος γιατί υπάρχουν συναρτήσεις που δεν επαληθεύουν τον ισχυρισμό (λ.χ. $f(x) = 4 - x$) παρά το γεγονός ότι υπάρχουν συναρτήσεις που τον επαληθεύουν (λ.χ. $f(x) = x^2 + 1$)

4.1 Μιγαδικοί Αριθμοί

1. Αν δύο μιγαδικοί έχουν το ίδιο πραγματικό και το ίδιο φανταστικό μέρος τότε είναι ίσοι.

2. Αν το γινόμενο δύο μιγαδικών αριθμών είναι μηδέν τότε κάποιος είναι μηδέν.

3. Αν το άθροισμα των τετραγώνων δύο μιγαδικών είναι μηδέν τότε οι μιγαδικοί είναι ίσοι με μηδέν.

4. Αν ένας μιγαδικός δεν είναι πραγματικός τότε είναι φανταστικός.

5. Ένας πραγματικός αριθμός δεν είναι μιγαδικός.

6. Ένας πραγματικός αριθμός δεν είναι φανταστικός.

7. Ένας μιγαδικός ή θα είναι πραγματικός είτε φανταστικός.

8. Δε μπορεί ένας μιγαδικός αριθμός να είναι και πραγματικός και φανταστικός.

9. Αν $z \in \mathbb{C}$ και μ, ν είναι φυσικοί τότε $z^{4\mu+\nu} = z^{\nu}$.

10. Κάθε μιγαδικός έχει αντίθετο.

11. Κάθε μιγαδικός έχει αντίστροφο.

12. Αν οι z_1, z_2 είναι συζυγείς τότε ο $z_1 + z_2$ είναι πραγματικός και ο $z_1 - z_2$ είναι φανταστικός.

13. Αν ο $z_1 + z_2$ είναι πραγματικός και ο $z_1 - z_2$ είναι φανταστικός τότε οι z_1, z_2 είναι συζυγείς.

14. Αν δύο μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι τότε οι συζυγείς τους είναι ίσοι.

15. Αν δύο μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι τότε τα μέτρα τους είναι ίσα.

16. Αν δύο μιγαδικοί είναι αντίθετοι τότε και οι συζυγείς τους είναι αντίθετοι.

17. Αν δύο μιγαδικοί είναι αντίθετοι τότε έχουν ίσα μέτρα.

18. Αν $\bar{z}_1 = \bar{z}_2$ τότε $z_1 = z_2$.

19. Αν $|z_1| = |z_2|$ τότε $z_1 = z_2$.

20. Αν $|z_1| = |z_2|$ τότε $z_1 = \bar{z}_2$.

21. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

22. $|z^n| = |z|^n$ (n θετικός ακέραιος)

23. $|z^n| = z^{2n}$ (n θετικός ακέραιος)

24. Οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων.

25. Αν η εικόνα ενός μιγαδικού αριθμού ανήκει στον μοναδιαίο κύκλο τότε οι εικόνες του αντίστροφου και του συζυγούς του συμπίπτουν.

26. Αν οι εικόνες δύο μιγαδικών ανήκουν στον μοναδιαίο κύκλο τότε η εικόνα του γινομένου τους ανήκει επίσης στον μοναδιαίο κύκλο.

27. Αν δύο μιγαδικοί έχουν μέτρο 1 τότε το άθροισμα τους έχει μέτρο 2.

28. $|z| = |\bar{z}|$

29. $\left|\frac{1}{z}\right| |z| = 1$

30. Η απόσταση των εικόνων των z_1, z_2 είναι $||z_1| - |z_2||$.

31. $|z^2| \geq |z|$

32. Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$ έχει αρνητική διακρίνουσα τότε έχει φανταστικές ρίζες.

33. Αν ο n είναι ακέραιος τότε $i^n \in \{-1, -i, i, 1\}$.

34. Αν μ, ν είναι θετικοί ακέραιοι και $i^\mu = i^\nu$ τότε $\mu = \nu$.

35. Ο i και ο αντίστροφος του είναι αριθμοί αντίθετοι.

36. Αν το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$ είναι αριθμοί πραγματικοί τότε οι ρίζες είναι πραγαμτικές.

37. Αν $z^3 = 1$ τότε $z = 1$.

38. $\mathrm{Re}\,(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}\,(z_1) + \mathrm{Re}\,(z_2)$

39. $\mathrm{Re}\,(2z) = 2\mathrm{Re}\,(z)$

40. $\mathrm{Re}\,(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Re}\,(z_1) \cdot \mathrm{Re}\,(z_2)$

41. $\mathrm{Re}\,(z) \in \mathbb{R}$

42. $\mathrm{Im}\,(z) \notin \mathbb{R}$

43. Αν η $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$ έχει ρίζα τον z τότε έχει ρίζα και τον $\bar{z}$.

44. Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει $|z - z_1| = |z - z_2|$ $(z_1 \neq z_2$ σταθεροί$)$ είναι ευθεία.

45. Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει $|\bar{z} - z_0| = \rho$ $(\rho > 0$ σταθερός$)$ είναι κύκλος.

46. Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει $|z - z_1| = |z - z_2|$ $(z_1, z_2$ σταθεροί$)$ είναι ευθεία.

47. Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z για τους οποίους είναι $\mathrm{Re}\,(z) = a$ όπου $a > 0$ σταθερός είναι ευθεία.

48. Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z για τους οποίους είναι $\mathrm{Re}\,(z) > 0$ είναι ευθεία.

49. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

50. $|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2|$

51. $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$

52. $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2\,|z_2|^2$

53. $|z_1 z_2|^2 = z_1^2 z_2^2$

54. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

55. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

56. $|z_1 + z_2|^2 = z_1^2 + z_2^2 + 2z_1 z_2$

4.2 Όρια-Συνέχεια

57. Αν $f : A \to \mathbb{R}$ τότε $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

58. Αν $f : A \to \mathbb{R}$ τότε $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

59. Αν $f : A \to \mathbb{R}$ τότε $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

60. Αν $f : A \to \mathbb{R}$ τότε $f(x_1^2) = f(x_2^2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

61. Κάθε σημείο $M(\alpha, \beta)$ της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης έχει την ιδιότητα $f(\alpha) = \beta$

62. Αν η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον $x'x$ τότε η γραφική παράσταση της $-f$ βρίσκεται κάτω από τον $x'x$.

63. Η γραφική παράσταση της $|f|$ βρίσκεται πάνω από τον $x'x$.

64. Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g δεν έχουν κοινά σημεία τότε η εξίσωση $f(x) = g(x)$ είναι αδύνατη.

65. Αν η εξίσωση $f(x)\,g(x) = 0$ είναι αδύνατη τότε οι γραφικές παραστάσεις των f και g δεν έχουν κοινά σημεία.

66. Αν η εξίσωση $f^2(x) + g^2(x) = 0$ είναι αδύνατη οι συναρτήσεις f και g δεν έχουν κοινή ρίζα.

67. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες τότε έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.

68. Αν δύο συναρτήσεις έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού τότε είναι ίσες.

69. Αν δύο συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(x+1) = g(x+1)$ για κάθε x τότε είναι ίσες.

70. Αν δύο συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(x^2) = g(x^2)$ για κάθε x τότε είναι ίσες.

71. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν κοινό πεδίο ορισμού A και $f(x)+g(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in A$.

72. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν κοινό πεδίο ορισμού A και $f^2(x)+g^2(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in A$.

73. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν κοινό πεδίο ορισμού A και $f(x)\,g(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in A$.

74. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν κοινό πεδίο ορισμού A και $f(x)\,g(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ τότε για κάθε $x \in A$ είναι $f(x) = 0$ ή $g(x) = 0$.

75. Αν δύο συναρτήσεις είναι ίσες τότε έχουν το ίδιο σύνολο τιμών.

76. Αν δύο συναρτήσεις έχουν ίδιο πεδίο ορισμού τότε θα έχουν ίδιο σύνολο τιμών.

77. Αν δύο συναρτήσεις έχουν ίδιο σύνολο τιμών τότε θα έχουν ίδιο πεδίο ορισμού.

78. Αν δύο συναρτήσεις έχουν ίδια γραφική παράσταση τότε είναι ίσες.

79. Αν δύο συναρτήσεις έχουν ίδιο πεδίο ορισμού και ίδιο σύνολο τιμών τότε είναι ίσες.

80. Το άθροισμά δύο γνησίως αυξουσών συναρτήσεων είναι συνάρτηση γνησίως αύξουσα.

81. Το γινόμενο δύο γνησίως αυξουσών συναρτήσεων είναι συνάρτηση γνησίως αύξουσα.

82. Το άθροισμα δύο γνησίως μονοτόνων συναρτήσεων είναι γνησίως μονότονη.

83. Αν δύο συναρτήσεις είναι ίσες και η μία είναι 1-1 τότε και η άλλη είναι 1-1.

84. Αν μία συνάρτηση είναι 1-1 τότε είναι και γνησίως μονότονη.

85. Αμ για μία συνάρτηση f ισχύει $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ τότε είναι 1-1.

86. Δεν υπάρχει συνάρτηση που να είναι γνησίως αύξουσα και γνησίως φθίνουσα.

87. Δεν υπάρχει συνάρτηση που να είναι αύξουσα και φθίνουσα.

88. Αν μία συνάρτηση είναι 1-1 και μονότονη τότε είναι γνησίως μονότονη.

89. Αν μία συνάρτηση f είναι 1-1 τότε και η $|f|$ είναι 1-1.

90. Αν μία συνάρτηση f είναι 1-1 τότε και η $-f$ είναι 1-1.

91. $f \uparrow,$ και $g \downarrow \Rightarrow f - g \uparrow$

92. $f \uparrow,$ και $g \downarrow \Rightarrow f \circ g \uparrow$

93. Αν η f είναι αντιστρέψιμη τότε η f είναι 1-1.

94. Αν η f είναι αντιστρέψιμη τότε η f είναι γνησίως μονότονη.

95. Αν η f είναι γνησίως μονότονη τότε είναι αντιστρέψιμη.

96. Το άθροισμα δύο αντιστρεφίμων συναρτήσεων είναι συνάρτηση αντιστρέψιμη.

97. Το γινόμενο δύο αντιστρεφίμων συναρτήσεων είναι συνάρτηση αντιστρέψιμη.

98. Η σύνθεση δύο αντιστρεφίμων συναρτήσεων είναι συνάρτηση αντιστρέψιμη.

99. Αν δύο συναρτήσεις είναι γνησίως μονότονες τότε και η σύνθεση τους είναι γνησίως μονότονη.

100. Αν η f είναι αντιστρέψιμη και για μία συνάρτηση $g : f(D_f) \to \mathbb{R}$ ισχύει $(g \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in D_f$ τότε $g = f^{-1}$.

101. Αν οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το A έχουν μέγιστη τιμή τότε και το άθροισμα τους $f + g$ έχει μέγιστη τιμή.

102. Αν οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το A έχουν την ίδια μέγιστη τιμή τότε και το άθροισμα τους $f + g$ έχει μέγιστη τιμή.

103. Αν οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το A έχουν την ίδια μέγιστη τιμή στο x_0 τότε και το άθροισμα τους $f + g$ έχει μέγιστη τιμή στο x_0.

104. Αν μία συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα τότε το $f(\beta)$ είναι η μέγιστη τιμή της.

105. Αν μία συνάρτηση $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα τότε μέγιστη τιμή.

106. Αν μία συνάρτηση έχει σύνολο τιμών ένα κλειστό διάστημα τότε έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

107. Αν η g έχει μέγιστη τιμή τότε και η $g \circ f$ έχει μέγιστη τιμή.

108. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα.

109. Το άθροισμα δύο αρτίων συναρτήσεων είναι συνάρτηση άρτια.

110. Το άθροισμα δύο περιοδικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι συνάρτηση περιοδική.

111. Το γινόμενο δύο άρτιων συναρτήσεων είναι συνάρτηση άρτια.

112. Το άθροισμα δύο περιττών συναρτήσεων είναι συνάρτηση περιττή.

113. Το γινόμενο δύο περιττών συναρτήσεων είναι συνάρτηση περιττή.

114. Η σύνθεση δύο αρτίων συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση.

115. Η σύνθεση δύο περιττών συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση.

116. Αν μία συνάρτηση έχει θετικό όριο στο σ τότε κοντά στο σ παίρνει θετικές τιμές.

117. Αν $\lim\limits_{x\to\sigma} f^2(x) = \ell^2$ τότε $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = \ell$ ή $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = -\ell$.

118. Αν $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = \ell$ τότε $\lim\limits_{y\to\sigma} f(y) = \ell$

119. Αν $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = \ell$ τότε $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x+1) = \ell + 1$.

120. Αν $f(x) > g(x)$ κοντά στο σ τότε $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) > \lim\limits_{x\to\sigma} g(x)$.

121. Αν $f(x) \geq g(x)$ κοντά στο σ τότε $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) \geq \lim\limits_{x\to\sigma} g(x)$.

122. Αν $f(x) > g(x)$ τότε $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) \geq \lim\limits_{x\to\sigma} g(x)$.

123. Αν το η f ορίζεται στο x_0 και το όριο της f στο x_0 υπάρχει τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

124. Αν $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = +\infty$ τότε δεν υπάρχει A ώστε $f(x) \leq A$ για όλα τα x.

125. Αν το α είναι εσωτερικό σημείο του D_f και $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = \ell$ τότε και $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \ell$.

126. Αν το $D_f = (\alpha, \beta]$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) = \ell$ τότε και $\lim\limits_{x\to\beta} f(x) = \ell$.

127. Αν $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to\sigma} g(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to\sigma} (f(x) + g(x)) = +\infty$.

128. Αν $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to\sigma} g(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to\sigma} (f(x) - g(x)) = 0$.

129. Αν $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to\sigma} g(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to\sigma} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$.

130. Αν $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to\sigma} g(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to\sigma} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = 1$.

131. Αν $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to\sigma} g(x) = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to\sigma} (f(x) + g(x)) = +\infty$.

132. Αν $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to\sigma} g(x) = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to\sigma} (f(x) \cdot g(x)) = 0$.

133. Αν $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to\sigma} g(x) = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to\sigma} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = +\infty$.

134. Αν $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to\sigma} g(x) = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to\sigma}\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right) = 0$.

135. Αν $\sigma = \frac{\pi}{2}$ και $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = +\infty$ τότε και $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x)\,\eta\mu x = +\infty$.

136. Αν $\sigma = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = +\infty$ τότε και $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x)\,\eta\mu x = +\infty$.

137. Αν υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\sigma}(f(x)+g(x))$ και είναι πραγματικοί αριθμοί τότε υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to\sigma} g(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός.

138. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ τότε η f δεν ορίζεται στο x_0

139. Αν $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to\sigma}\frac{1}{f(x)} = 0$.

140. Αν $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to\sigma}\frac{1}{f(x)} = +\infty$.

141. Αν $f(x) > 0$ κοντά στο σ και $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to\sigma}\frac{1}{f(x)} = +\infty$.

142. Αν $\lim\limits_{x\to\sigma}\frac{1}{f(x)} = +\infty$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο σ και $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = 0$.

143. $\lim\limits_{x\to\sigma}\frac{\eta\mu x}{x} = 1$

144. Αν ισχύει $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ κοντά στο σ και τα όρια $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to\sigma} h(x)$ υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τότε και το όριο $\lim\limits_{x\to\sigma} g(x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

145. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 τότε ορίζεται στο x_0.

146. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 τότε δε μπορεί να είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

147. Αν το άθροισμα δύο συναρτήσεων είναι συνάρτηση συνεχής στο x_0 τότε κάθε μία από αυτές είναι συνεχής στο x_0.

148. Αν το άθροισμα δύο συναρτήσεων είναι συνάρτηση συνεχής στο x_0 τότε τουλάχιστον μία από αυτές είναι συνεχής στο x_0.

149. Αν το άθροισμα δύο συναρτήσεων είναι συνάρτηση συνεχής στο x_0 και μία από αυτές είναι συνεχής στο x_0 τότε και η άλλη θα είναι συνεχής στο x_0.

150. Αν το γινόμενο δύο συναρτήσεων είναι συνάρτηση συνεχής στο x_0 και μία από αυτές είναι συνεχής στο x_0 τότε και η άλλη θα είναι συνεχής στο x_0.

151. Αν το άθροισμα και η διαφορά δύο συναρτήσεων είναι συνάρτηση συνεχής στο x_0 και κάθε μία από αυτές είναι συνεχής στο x_0.

152. Αν η σύνθεση $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 τότε η f είναι συνεχής στο x_0 και η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$.

153. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε έχει μέγιστη τιμή.

154. Αν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε δεν έχει μέγιστη τιμή.

155. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και για κάθε $x_1 \in [\alpha, \beta]$ υπάρχει $x_2 \in [\alpha, \beta]$ ώστε $f(x_1) < f(x_2)$ τότε η f δεν είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

156. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) f(\beta) > 0$ τότε η f δεν έχει ρίζα στο $[\alpha, \beta]$.

157. Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα και δεν έχει ρίζες σε αυτό ή θα είναι παντού θετική ή παντού αρνητική.

158. Το σύνολο τιμών μίας συνεχούς συνάρτησης είναι διάστημα.

159. Το σύνολο τιμών μίας συνεχούς μη σταθερής συνάρτησης είναι διάστημα.

160. Το σύνολο τιμών μίας συνεχούς μη σταθερής συνάρτησης είναι διάστημα.

161. Το σύνολο τιμών μίας συνεχούς μη σταθερής συνάρτησης ορισμένης σε κλειστό διάστημα είναι κλειστό διάστημα.

162. Το σύνολο τιμών μίας συνεχούς μη σταθερής συνάρτησης ορισμένης σε ανοικτό διάστημα είναι ανοικτό διάστημα.

163. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f([\alpha, \beta]) = [f(\alpha), f(\beta)]$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

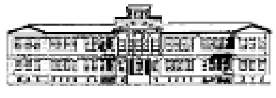
4.3 Διαφορικός Λογισμός

164. Αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο x_0 είναι και συνεχής στο x_0.

165. Αν τα όρια $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ είναι ίσα τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

166. Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

167. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.



168. Αν το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ είναι πραγματικός αριθμό τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

169. Αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε δεν είναι και συνεχής στο x_0.

170. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.

171. Αν οι f και g είναι ορισμένες στο Δ και παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \Delta$ τότε και η $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

172. Αν οι f και g είναι ορισμένες στο Δ και και η $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \Delta$ τότε οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0.

173. Αν οι f και g είναι ορισμένες στο Δ και και οι fg, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \Delta$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

174. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και σε στο $x_0 \in \Delta$ παρουσιάζει ακρότατο τότε $f'(x_0) = 0$.

175. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και σε στο $x_0 \in \Delta$ ισχύει $f'(x_0) = 0$ τότε η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0.

176. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha) = f(\beta)$ τότε υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

177. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ τότε υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

178. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\beta) - f(\alpha) = (\beta-\alpha) f'(\xi)$.

179. Αν δύο συναρτήσεις που είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα δεν είναι ίσες τότε και οι παράγωγοι τους δεν είναι ίσες

180. Αν οι παράγωγοι δύο συναρτήσεων είναι ίσες τότε και οι συναρτήσεις είναι ίσες.

181. Αν η παράγωγος μίας συνάρτησης είναι θετική τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα

182. Αν η παράγωγος μίας συνάρτησης σε ένα διάστημα είναι θετική τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό το διάστημα.

183. Αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα τότε η παράγωγος της είναι θετική.

184. Αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα τότε η παράγωγος της είναι μη αρνητική.

185. Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα, παραγωγίσιμη στα εσωτερικά του σημεία και η παράγωγος είναι θετική τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

186. Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα, παραγωγίσιμη στα εσωτερικά του σημεία και η παράγωγος είναι θετική παντού εκτός από ένα σημείο τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

187. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β), $\alpha < x_1 < x_0 < x_2 < \beta$ και $f'(x) < 0$, $f'(x_0) = 0$, $f'(x_2) > 0$ τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

188. Αν μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β), $\alpha < x_1 < x_0 < x_2 < \beta$ και $f''(x) < 0, f''(x_0) = 0$, $f''(x_2) > 0$ τότε η f παρουσιάζει καμπή στο x_0.

189. Αν μία συνάρτηση είναι κυρτή σε ένα διάστημα τότε έχει εφαπτομένη σε κάθε σημείο της.

190. Αν μία παραγωγίσιμη συνάρτηση έχει παράγωγο γνησίως φθίνουσα τότε είναι κοίλη.

191. Αν μία συνάρτηση έχει στο $+\infty$ πλάγια ασύμπτωτη τότε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ θα είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

192. Η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης δε μπορεί να τέμνει μία πλάγια ασύμπτωτή της.

193. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, κοντά στο σ ορίζονται οι $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ και $\lim\limits_{x \to \sigma} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ τότε $\lim\limits_{x \to \sigma} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

194. Αν μία συνάρτηση έχει πλάγια ασύμπτωτη θα είναι κυρτή ή κοίλη.

195. Αν η παράγωγος μίας συνάρτησης είναι μηδέν τότε η συνάρτηση είναι σταθερή.

196. Αν μία συνάρτηση είναι σταθερή τότε η παράγωγος της είναι μηδέν.

197. Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

198. Αν μία συνεχής συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ τότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

199. Αν το σύνολο τιμών μίας συνάρτησης είναι κλειστό διάστημα τότε δεν έχει πλάγιες αύμπτωτες.

4.4 Ολοκληρωτικός Λογισμός

200. Αν η f είναι συνεχής στο A τότε η συνάρτηση $\Phi(x) = \int_\alpha^x f(x)\,dt$ ορίζεται στο A.

201. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $a \in \Delta$ τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^x f(x)\,dt$ έχει ρίζα το a.

202. Αν για την συνεχή συνάρτηση f ισχύει $f(x) > 0$ για όλα τα x τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx > 0$.

203. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και συνεχείς στο στο $\mathbb{R}$ και οι α, β, p, q είναι πραγματικοί αριθμοί τότε ισχύει $\int_\alpha^\beta (pf(x) + qg(x))\,dx = p\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + q\int_\alpha^\beta g(x)\,dx$.

204. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την $\mathcal{C}_f$, τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι ίσο με $\int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx$.

205. Αν F είναι μία παράγουσα της συνεχούς f στο Δ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = F(\alpha) - F(\beta)$.

206. Αν F είναι μία παράγουσα της συνεχούς f στο Δ τότε $\int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx = |F(\beta)| - |F(\alpha)|$.

207. Αν F είναι μία παράγουσα της συνεχούς f στο Δ τότε $\int_\alpha^\beta cf(x)\,dx = c(F(\beta) - F(\alpha))$.

208. Αν η συνεχής f δεν είναι μηδενική συνάρτηση και $\int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx = 0$ τότε $\alpha = \beta$.

209. Η συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt$ έχει παράγωγο 0.

210. $\int_\alpha^\beta f'(t)\,dt = f(\beta) - f(\alpha)$

211. $\int_\alpha^\beta f'(t)\,g'(t)\,dt = f(\beta)\,g(\beta) - f(\alpha)\,g(\alpha)$

Απαντήσεις στις ερωτήσεις Σωστό-Λάθος

1 Σωστό.

2 Σωστό.

3 Λάθος

4 Λάθος

5 Λάθος

6 Σωστό.

7 Λάθος

8 Λάθος

9 Λάθος

10 Σωστό

11 Λάθος

12 Σωστό

13 Σωστό

14 Σωστό

15 Σωστό

16 Σωστό

17 Σωστό

18 Σωστό

19 Λάθος

20 Λάθος

21 Σωστό

22 Σωστό

23 Λάθος

24 Λάθος

25 Σωστό.

26 Σωστό.

27 Λάθος.

28 Σωστό

29 Σωστό

30 Λάθος

31 Λάθος

32 Λάθος

33 Σωστό

34 Λάθος

35 Σωστό

36 Λάθος

37 Λάθος

38 Σωστό

39 Σωστό

40 Λάθος

41 Σωστό

42 Λάθος

43 Σωστό.

44 Σωστό.

45 Σωστό

46 Λάθος

47 Σωστό

48 Λάθος

49 Σωστό

50 Λάθος

51 Σωστό

52 Σωστό

53 Λάθος

54 Σωστό

55 Σωστό

56 Λάθος

57 Σωστό

58 Λάθος

59 Λάθος

60 Λάθος

61 Σωστό

62 Σωστό

63 Σωστό

64 Σωστό

65 Λάθος

66 Σωστό

67 Σωστό

68 Λάθος

69 Σωστό

70 Λάθος

71 Λάθος

72 Σωστό

73 Λάθος

74 Σωστό

75 Σωστό

76 Λάθος

77 Λάθος

78 Σωστό

79 Λάθος

80 Σωστό

81 Λάθος

82 Λάθος

83 Σωστο

84 Λάθος

85 Σωστό

86 Σωστό
87 Λάθος
88 Σωστό
89 Λάθος
90 Σωστό
91 Σωστό
92 Λάθος
93 Σωστό
94 Λάθος
95 Σωστό
96 Λάθος
97 Λάθος
98 Σωστό
99 Σωστό
100 Σωστό
101 Λάθος
102 Λάθος
103 Σωστό
104 Σωστό
105 Λάθος
106 Σωστό
107 Λάθος
108 Λάθος
109 Σωστό
110 Λάθος
111 Σωστό
112 Σωστό
113 Λάθος
114 Σωστό
115 Λάθος
116 Σωστό
117 Λάθος
118 Σωστό
119 Λάθος
120 Λάθος
121 Σωστό
122 Σωστό
123 Λάθος
124 Σωστό
125 Λάθος
126 Σωστό
127 Σωστό
128 Λάθος
129 Σωστό
130 Λάθος
131 Σωστό
132 Λάθος
133 Λάθος
134 Σώστό
135 Σωστό
136 Λάθος
137 Σωστό
138 Λάθος
139 Σωστό
140 Λάθος
141 Σωστό
142 Σωστό
143 Λάθος
144 Λάθος
145 Σωστό
146 Σωστό.
147 Λάθος.
148 Λάθος.
149 Σωστό.
150 Λάθος.
151 Σωστό.
152 Λάθος
153 Σωστό
154 Λάθος
155 Σωστό
156 Λάθος
157 Σωστό
158 Λάθος
159 Λάθος
160 Λάθος
161 Σωστό
162 Λάθος
163 Λάθος
164 Σωστό
165 Λάθος
166 Λάθος
167 Λάθος
168 Σωστό
169 Λάθος
170 Σωστό
171 Σωστό
172 Λάθος
173 Λάθος
174 Λάθος
175 Λάθος
176 Σωστό
177 Λάθος
178 Λάθος
179 Λάθος
180 Λάθος
181 Λάθος
182 Σωστό
183 Λάθος
184 Σωστό
185 Σωστό
186 Σωστό
187 Λάθος
188 Λάθος
189 Σωστό
190 Σωστό
191 Σωστό
192 Λάθος
193 Λάθος
194 Λάθος
195 Λάθος
196 Σωστό
197 Λάθος
198 Σωστό
199 Σωστό
200 Λάθος
201 Σωστό
202 Λάθος
203 Σωστό
204 Σωστό.
205 Λάθος
206 Λάθος
207 Σωστό
208 Σωστό
209 Σωστό
210 Σωστό
211 Λάθος