ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO (Μέρος 3ο)

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to Z$ συνεχής με $\alpha<\beta$, $\alpha,\beta\in R$. Να δειχθεί ότι η f είναι σταθερή.

Λύση : Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή άρα θα υπάρχουν δύο αριθμοί $\kappa,\lambda\in[\alpha,\beta]$ με $\kappa<\lambda$ ώστε $f(\kappa)\neq f(\lambda)$. Επειδή η f είναι συνεχή στο $[\kappa,\lambda]$ από το Θ. ενδιάμεσης τιμής η f παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(\kappa)$, $f(\lambda)$ οι οποίοι είναι ακέραιοι λόγω του πεδίου τιμών.

Μεταξύ όμως δύο ακεραίων αριθμών υπάρχουν και ρητοί και άρρητοι άρα θα υπάρχει $x_0\in(\kappa,\lambda)$ ώστε $f(x_0)$ δεν είναι ακέραιος. Αυτό είναι άτοπο γιατί το σύνολο τιμών είναι ακέραιοι.

2. Έστω $f(x)$ πολυώνυμο νιοστού βαθμού. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=\varepsilon\varphi x$ έχει άπειρες λύσεις.

Έστω η συνάρτηση $u(x)=f(x)-\varepsilon\varphi x$ η οποία ορίζεται στα διαστήματα $\left(\kappa\pi-\frac{\pi}{2},\ \kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right),\kappa\in Z$.

Έστω $I_1=\left(\kappa_1\cdot\pi-\frac{\pi}{2},\ \kappa_1\cdot\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ ένα διάστημα.

Η $u(x)$ είναι συνεχής στο I_1 με $\lim\limits_{x\to\kappa_1\pi-\frac{\pi}{2}^+}u(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to\kappa_1\pi+\frac{\pi}{2}^-}u(x)=+\infty$.

Άρα υπάρχουν x_1 "κοντά" στο $\kappa_1\pi-\frac{\pi}{2}$ και x_2 "κοντά" στο $\kappa_1\pi+\frac{\pi}{2}$ ώστε $u(x_1)<0$ και $u(x_2)>0$. Η συνάρτηση g ορισμένη στο $[x_1,x_2]$ πληροί τις προϋποθέσεις του Θ. BOLZANO άρα υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)\subset I_1$ ώστε $u(\xi)=0\Rightarrow f(\xi)=\varepsilon\varphi\xi$. Επειδή όμως τα διαστήματα I είναι άπειρα για όλους τους ακεραίους κ, άπειρες θα είναι και οι ρίζες της $f(x)=\varepsilon\varphi x$.

ΤΟ ΘΕΜΑ ΠΟΥ ΞΕΧΩΡΙΖΕΙ :

1. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to R$ με $\alpha\le f(x)\le\beta$ τέτοια ώστε για κάθε $x,y\in R$ να ισχύει $|f(x)-f(y)|\le\kappa|x-y|$, με $\kappa\in(0,1)$.

(i) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

(ii) Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0\in[\alpha,\beta]$ ώστε $f(x_0)=x_0$

Λύση : Για $y=x_0$ έχουμε $|f(x)-f(x_0)|\le\kappa|x-x_0|\Leftrightarrow-\kappa|x-x_0|\le f(x)-f(x_0)\le\kappa|x-x_0|$.

Με όρια βρίσκουμε εύκολα ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ άρα προκύπτει ότι η f είναι συνεχής στο $x_0\in[\alpha,\beta]$ δηλαδή συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ έστω $g(x)=f(x)-x$ ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$ και συνεχής.

Επειδή $g(\alpha)\cdot g(\beta)=(f(\alpha)-\alpha)\cdot(f(\beta)-\beta)\le0$ (από την υπόθεση), από το Θ. BOLZANO θα υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ ώστε $g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=x_0$.

Η μοναδικότητα του x_0 θα εξασφαλιστεί από την μονοτονία της g.

$$\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{f(x_1)-x_1-f(x_2)+x_2}{x_1-x_2}=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}-1 \qquad (1)$$

Από τη δοθείσα είναι $\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|\le\kappa\Leftrightarrow-\kappa\le\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\kappa\Leftrightarrow-\kappa-1<\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}-1<\kappa-1$.

Επειδή όμως $\kappa<1\Rightarrow\kappa-1<0$ άρα $\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}<0$ δηλαδή η g είναι γνησίως φθίνουσα.

2. Έστω $f(x)=(x^2-3x+2)\cdot h(x)$ για κάθε $x\in R$ όπου h είναι συνεχής συνάρτηση στο R. Αν οι αριθμοί 1, 2 είναι δύο διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$, να αποδειχθεί ότι $h(1)\cdot h(2)\ge 0$.

Λύση : Έστω $h(1)\cdot h(2)<0$. Άρα η συνεχής h στο $[1,2]$ πληροί το Θ. BOLZANO οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστο $x_0\in(1,2)$ ώστε $h(x_0)=0$. Τότε όμως $f(x_0)=(x_0^2-3x_0+2)\cdot h(x_0)\Leftrightarrow f(x_0)=0$ άρα το $x_0\in(1,2)$ είναι ρίζα της f, άτοπο αφού η f έχει τις 1, 2 διαδοχικές ρίζες. Οπότε **δεν** ισχύει η $h(1)\cdot h(2)<0$ δηλαδή ισχύει $h(1)\cdot h(2)\ge 0$.

3. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to R$ συνεχής με $\alpha<\beta$ και α, β ακεραίους. Έστω η συνάρτηση $g(x)=f(x)-\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot(x-\alpha)$. Να δειχτεί ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $g(x_0)=g\left(x_0+\dfrac{1}{\kappa}\right)$ με $\kappa\in N^*$

Λύση : Παρατηρούμε ότι $g(\alpha)=f(\alpha)$ και $g(\beta)=f(\beta)-\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(\beta-\alpha)$ ...... (πράξεις) $=f(\alpha)$. Άρα $g(\alpha)=g(\beta)$.

Έστω $u(x)=g(x)-g\left(x+\dfrac{1}{\kappa}\right)$. Η u είναι συνεχής.

$$u(\alpha)=g(\alpha)-g\left(\alpha+\frac{1}{\kappa}\right)$$

$$u\left(\alpha+\frac{1}{\kappa}\right)=g\left(\alpha+\frac{1}{\kappa}\right)-g\left(\alpha+\frac{2}{\kappa}\right)$$

$$u\left(\alpha+\frac{2}{\kappa}\right)=g\left(\alpha+\frac{2}{\kappa}\right)-g\left(\alpha+\frac{3}{\kappa}\right)$$

. . . .

$$u\left(\alpha+\frac{\kappa(\beta-\alpha)-1}{\kappa}\right)=g\left(\alpha+\frac{\kappa(\beta-\alpha)-1}{\kappa}\right)-g(\beta)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη : $u(\alpha)+u\left(\alpha+\dfrac{1}{\kappa}\right)+u\left(\alpha+\dfrac{2}{\kappa}\right)+.....+u\left(\alpha+\dfrac{\kappa(\beta-\alpha)-1}{\kappa}\right)=g(\alpha)-g(\beta)=0$.

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι ή όλοι οι όροι του αθροίσματος είναι 0 ή κάποιοι από αυτούς θα είναι ετερόσημοι.

(i) Αν όλοι είναι μηδέν τότε ο ζητούμενος x_0 είναι κάποιος από τους $\alpha,\ \alpha+\dfrac{1}{\kappa},\ \alpha+\dfrac{2}{\kappa},.....$

(ii) Αν υπάρχουν ετερόσημες τιμές τότε με την υπόθεση ότι οι $u\left(\alpha+\dfrac{\lambda}{\kappa}\right)$, $u\left(\alpha+\dfrac{\mu}{\kappa}\right)$ είναι ετερόσημοι, στο διάστημα $\left[\alpha+\dfrac{\lambda}{\kappa},\ \alpha+\dfrac{\mu}{\kappa}\right]$ (με $\lambda<\mu<\kappa$) πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ. BOLZANO άρα θα υπάρχει $x_0\in\left(\alpha+\dfrac{\lambda}{\kappa},\ \alpha+\dfrac{\mu}{\kappa}\right)\subset(\alpha,\beta)$ ώστε $u(x_0)=0\Leftrightarrow g(x_0)=g\left(x_0+\dfrac{1}{\kappa}\right)$.

ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

1. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+.....+\dfrac{1}{x-\nu}=0$ έχει μια τουλάχιστο ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(1,2),\ (2,3),.....(\nu-1,\ \nu)$.

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4+(\kappa\lambda-5)x+1=0$ έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο $(0,1)$, εάν $\kappa+\lambda=1$.

3. Έστω $f:[-\alpha,\alpha]\to R$ συνεχής με $x^2+f^2(x)=\alpha^2$ για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$. Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\alpha,\alpha)$.

4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^3+\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)+\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2}x\right)$ παίρνει την τιμή -4 για κάποιο $x\in(-2,-1)$.

5. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^3-3x+1=0$ έχει δύο μόνο ρίζες στο διάστημα $(0,2)$.

6. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x\cdot \ell n\sqrt{x}+x^2\cdot \ell nx=2$ έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο $(1,e)$.

7. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $\alpha\le f(x)\le\beta$ και $\alpha\le g(x)\le\beta$.
Να δειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $x_0\in[\alpha,\beta]$ώ ώστε $(fog)(x_0)+(gof)(x_0)=2x_0$.

8. Έστω f, g συνεχείς στο R με $f(x)\le 0\le g(x)$ και έστω ότι υπάρχουν $\alpha,\beta\in R$ ώστε $f(\alpha)=\alpha$ και $g(\beta)=\beta$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\gamma\in R$ ώστε $f(\gamma)+g(\gamma)=\gamma$.

9. Έστω f, g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha,\beta)$ και $B(\beta,\alpha)$. Αν ισχύει για κάθε $x\in R$ $\alpha<g(x)<\beta$ να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις f και g έχουν ένα τουλάχιστο κοινό σημείο.

10. Έστω η συνάρτηση $f(x)=(x-3)\ell nx-x+2$. Να εξεταστεί αν ο αριθμός 0,946506500 είναι τιμή της συνάρτησης.