ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO (Μέρος 2ο)

8. (Μας δίνεται το πεδίο τιμών από το οποίο προκύπτει η συνθήκη του BOLZANO)
Έστω $f:[-\alpha,\alpha]\to[-\alpha,\alpha]$ συνεχής.
Να δειχτεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $x_0\in[-\alpha,\alpha]$ ώστε $f(x_0)=x_0$.
Λύση : Έστω $h(x)=f(x)-x$ ορισμένη στο $[-\alpha,\alpha]$. Η $h(x)$ είναι συνεχής.
Ισχύουν : $h(-\alpha)=f(-\alpha)+\alpha \qquad (1)$
$h(\alpha)=f(\alpha)-\alpha \qquad (2)$
Επειδή το πεδίο τιμών της f είναι το $[-\alpha,\alpha]$ άρα για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$.
Ισχύει : $-\alpha\le f(x)\le\alpha$ οπότε $\begin{cases}-\alpha\le f(\alpha)\le\alpha\\ -\alpha\le f(-\alpha)\le\alpha\end{cases}$
Από αυτές και τις (1), (2) φαίνεται ότι $h(-\alpha)\ge 0$ και $h(\alpha)\le 0$. Οπότε $h(-\alpha)\cdot h(\alpha)\le 0$.
(α) Εάν $h(-\alpha)\cdot h(\alpha)<0$, από Θ. BOLZANO υπάρχει $x_0\in(-\alpha,\alpha)$ $h(x_0)=0$.
(β) Εάν $h(-\alpha)\cdot h(\alpha)=0\Rightarrow h(-\alpha)=0$ ή $h(\alpha)=0$, τότε το ρόλο του x_0 παίζουν τα $-\alpha$ ή α. Τελικά λοιπόν υπάρχει ένα τουλάχιστο $x_0\in[-\alpha,\alpha]$ ώστε $h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)-x_0=0\Leftrightarrow f(x_0)=x_0$.

9. (Δεν μας δίνεται η f και η συνθήκη $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ "δεν φαίνεται" εύκολα).
Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)+f(\beta)=0$. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x_0)=0$ έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο $[\alpha,\beta]$.
Λύση : Από την $f(\alpha)+f(\beta)=0$ προκύπτουν :
(α) $f(\alpha)=f(\beta)=0$, τότε οι α, β είναι ρίζες της $f(x)=0$.
(β) $f(\alpha)\cdot f(\beta)\ne 0$. Τότε $f(\alpha)+f(\beta)=0\Leftrightarrow f(\alpha)\left[f(\alpha)+f(\beta)\right]=0\Leftrightarrow f^2(\alpha)+f(\alpha)\cdot f(\beta)=0$.
Επειδή $f^2(\alpha)>0$ θα πρέπει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο (α,β). Γενικά **(**από (α), (β)**)** φαίνεται ότι η ρίζα θα ανήκει στο $[\alpha,\beta]$.

10. (Κάνουμε πράξεις στη ζητούμενη σχέση). Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)+f(\beta)=\alpha+\beta$.
Να δειχτεί ότι υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ ώστε $\dfrac{f(x_0)-\beta}{x_0-\alpha}=\dfrac{f(x_0)-\alpha}{x_0-\beta}$.
Λύση : (Εκτελούμε τις πράξεις : $-\beta x_0-\beta f(x_0)+\beta^2=-\alpha f(x_0)-\alpha x_0+\alpha^2$).
Θεωρούμε τη συνάρτηση : $g(x)=\alpha f(x)+\alpha x-\beta f(x)-\beta x+\beta^2-\alpha^2$ ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$.
Είναι συνεχής και ισχύουν :
$g(\alpha)=\alpha f(\alpha)+\alpha^2-\beta f(\alpha)-\alpha\beta+\beta^2-\alpha^2=\alpha f(\alpha)-\beta f(\alpha)-\alpha\beta+\beta^2 \qquad (1)$
$g(\beta)=\alpha f(\beta)+\alpha\beta-\beta f(\beta)-\beta^2+\beta^2-\alpha^2=\alpha f(\beta)-\beta f(\beta)+\alpha\beta-\alpha^2 \qquad (2)$
προσθέτω $(1)+(2)$ $\quad g(\alpha)+g(\beta)=\alpha\left[f(\alpha)+f(\beta)\right]-\beta\left[f(\alpha)+f(\beta)\right]+\beta^2-\alpha^2\Leftrightarrow$
$g(\alpha)+g(\beta)=\alpha(\alpha+\beta)-\beta(\alpha+\beta)+\beta^2-\alpha^2=\alpha^2+\alpha\beta-\alpha\beta-\beta^2+\beta^2-\alpha^2=0$
άρα $g(\alpha)+g(\beta)=0\Leftrightarrow g(\beta)=-g(\alpha)$.
Τότε $g(\alpha)\cdot g(\beta)=g(\alpha)\cdot(-g(\alpha))=-g^2(\alpha)\le 0$, άρα υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ ώστε
$g(x_0)=0\Leftrightarrow\alpha f(x_0)+\alpha x_0-\beta f(x_0)-\beta x_0+\beta^2-\alpha^2=0$ από την οποία εύκολα προκύπτει η αρχική.

11. (Όταν το ένα άκρο του διαστήματος είναι ρίζα). Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{2\kappa}-2x+1=0$ με $\kappa>1$ έχει τουλάχιστο μια ρίζα στο $(0,1)$.

Λύση : Επειδή $f(1)=0$ το 1 είναι ρίζα της εξίσωσης.

Τότε $x^{2\kappa}-2x+1=x^{2\kappa}-x-x+1=x\left(x^{2\kappa-1}-1\right)-(x-1)=x(x-1)\left(x^{2\kappa-2}+x^{2\kappa-3}+...+x+1\right)-(x-1)=$

$=(x-1)\left(x^{2\kappa-1}+x^{2\kappa-2}+...+x^2+x-1\right)$ (1)

Θεωρούμε $\pi(x)=x^{2\kappa-1}+x^{2\kappa-2}+...+x-1$ συνεχή στο $[0,1]$ με $\pi(0)=-1$ και

$\pi(1)=\underbrace{1+.....+1}_{2\kappa-1}-1=2\kappa-2=2(\kappa-1)>0$ από την υπόθεση. Από το Θ. BOLZANO υπάρχει $x_0\in(0,1)$ ώστε

$\pi(x_0)=0$. Άρα η (1) έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο (0,1).

12. (Εύρεση πρόσημου της $f(x)$). Να βρεθεί το πρόσημο της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{2-x}-x$.

Λύση : Πρέπει $2-x\geq 0\to x\leq 2$. Βρίσκουμε τις ρίζες της εξίσωσης :

$\sqrt{2-x}-x=0\Leftrightarrow\sqrt{2-x}=x$ (πρέπει $x>0$) $2-x=x^2\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow x=-2$ ή $x=1$ ή $x=-2$ απορρίπτεται

Κάνουμε τον πίνακα τιμών :

Διάστημα	$(-\infty,1)$	$(1,2)$
Επιλ. Αριθμός	-7	$\frac{3}{2}$
$f(x_0)$	10	$\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{2}$
Πρόσημο	+	–

13. (Εύρεση πεδίου τιμών). Έστω $f:[0,10]\to R$ με $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$. Να βρεθεί το σύνολο των τιμών της f και να ορίσετε την f^{-1}.

Λύση : Η f είναι συνεχής στο $[0,10]$ και σύνθεση της $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$ και $\phi(x)=x^2$ (γνησίως αύξουσες στο $[0,10]$). Άρα $f(A)=[f(0),\ f(10)]=\left[0,\dfrac{100}{101}\right]$.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα (δείχνεται με τον λόγο μεταβολής ή με την παράγωγο) είναι 1–1, οπότε ορίζεται η $f^1:\left[0,\dfrac{100}{101}\right]\to R$. Για τον τύπο της f^1 λύνουμε $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}\Leftrightarrow ...\ x=\sqrt{\dfrac{y}{1-y}}$

οπότε $f^{-1}(y)=\sqrt{\dfrac{y}{1-y}}$

14. Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $\alpha<\beta$ και $x_1,x_2.....x_\nu\in[\alpha,\beta]$

Να δειχτεί ότι υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ ώστε $\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}\cdot f(\xi)=f(x_1)+2f(x_2)+.....+\nu\cdot f(x_\nu)$

Λύση : Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, άρα παρουσιάζει ελάχιστη m και μέγιστη τιμή M.

Δηλαδή : $m\leq f(x_1)\leq M$

$$2m \le 2f(x_2) \le 2M$$
$$3m \le 3f(x_3) \le 3M$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$v \cdot m \le v \cdot f(x_v) \le v \cdot M$$

Με πρόσθεση : $m \cdot \dfrac{v(v+1)}{2} \le f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots.. + v \cdot f(x_v) \le M \cdot \dfrac{v(v+1)}{2} \Leftrightarrow$

$$m \le 2 \cdot \frac{f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots.. + v \cdot f(x_v)}{v(v+1)} \le M .$$

Από το Θ. ενδιάμεσης τιμής θα υπάρχει ξ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ώστε

$$f(\xi) = 2 \cdot \frac{f(x_1) + \ldots.. + v \cdot f(x_v)}{v(v+1)} \Leftrightarrow \frac{v(v+1)}{2} \cdot f(\xi) = f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + \ldots.. + v \cdot f(x_v)$$