ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO
(ΜΕΡΟΣ 1^{o})

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. Να αποδειχθεί ότι εφαρμόζεται το θεώρημα BOLZANO στη συνάρτηση :

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+2x+1 & -2\le x\le 0 \\ x^2-3x+1 & 0<x\le 1 \end{cases}$$

Λύση : Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[-2,0)\cup(0,1]$ σαν πολυωνυμική.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$, η f είναι συνεχής και στο $x_0=0$.

Άρα είναι συνεχής στο $[-2,1]$.

Ισχύει $f(-2)=9$ και $f(1)=-1$ άρα $f(-2)\cdot f(1)<0$ άρα υπάρχει $x_0\in(-2,1)$ ώστε

$f(x_0)=0$. Για την εύρεση του x_0 η μεν $3{x_0}^2+2x_0+1=0$ είναι αδύνατη, η δε ${x_0}^2-3x_0+1=0$ δίνει λύσεις $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ από τις οποίες δεκτή είναι η $x_0=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ γιατί ανήκει στο $(0,1)$.

2. Να δειχτεί ότι η εξίσωση $\dfrac{x^5+1}{x-1}+\dfrac{x^3+1}{x-2}=0$ έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο $(1,2)$.

Λύση : Η συνάρτηση $f(x)=(x^5+1)(x-2)+(x^3+1)(x-1)$ ορισμένη στο $[1,2]$ είναι συνεχής, με

$f(1)\cdot f(2)=-2\cdot 9=-18<0$ άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστο $x_0\in(1,2)$ ώστε

$f(x_0)=0 \Leftrightarrow (x_0^5+1)(x_0-2)+(x_0^3+1)(x_0-1)=0 \qquad (1)$

Επειδή $x_0\in(1,2)$ άρα $(x_0-1)(x_0-2)\neq 0$. Διαιρούμε την (1) με $(x_0-2)(x_0-1)$.

Τότε δίνει $\dfrac{x_0^5+1}{x_0-1}+\dfrac{x_0^3+1}{x_0-2}=0$ δηλαδή το x_0 είναι λύση της αρχικής εξίσωσης.

3. Να δειχτεί ότι η εξίσωση $3\sigma\upsilon\nu x-x-2=0$ έχει δύο τουλάχιστο ρίζες στο $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Λύση : Έστω $f(x)=3\sigma\upsilon\nu x-x-2 \mid \left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ και $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Η f είναι συνεχής και $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot f(0)=\left(\dfrac{\pi-4}{2}\right)\cdot 1<0$ ενώ $f(0)\cdot f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1\cdot\left(\dfrac{-\pi-4}{2}\right)<0$.

Άρα υπάρχει μια τουλάχιστο ρίζα στο $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ και μια τουλάχιστο ρίζα στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ δηλαδή υπάρχουν δύο τουλάχιστο ρίζες στο $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. Ύπαρξη ακριβούς πλήθους ριζών, λόγω βαθμού πολυωνύμου.

Έστω $f:R\to R$ συνεχής με $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta$ με $\alpha+\beta<-1$, $\quad\beta>0$. Να δειχτεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις ακριβώς ρίζες στο R.

Λύση : Η f είναι συνεχής στο R. Ισχύουν : $f(0)=\beta>0$, $\ f(1)=1+\alpha+\beta<0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$.

Από το πρώτο όριο, υπάρχει $x_1>1$ ώστε $f(x_1)>0$ και από το δεύτερο όριο υπάρχει $x_2<0$ ώστε $f(x_2)<0$.

$$-\infty \qquad x_2 \qquad 0 \qquad 1 \qquad x_1 \qquad +\infty$$

Στα διαστήματα $[x_2,0]$, $[0,1]$, $[1,x_1]$ η f πληροί τις προϋποθέσεις του BOLZANO άρα υπάρχουν τρεις τουλάχιστο ρίζες, μια σε κάθε ένα από τα διαστήματα. Επειδή όμως η f είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού, έχει το πολύ τρεις πραγματικές ρίζες. Τελικά οι ρίζες είναι ακριβώς τρεις.

5. (Ύπαρξη ακριβούς πλήθους ριζών λόγω μονοτονίας.)

Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^3+\lambda x-2=0$ με $\lambda>0$ έχει μόνο μια πραγματική ρίζα.

Λύση : Έστω $f(x)=x^3+\lambda x-2$ ορισμένη στο $[0,2]$ (εδώ δεν αναφέρεται το διάστημα, οπότε το βρίσκουμε εμείς κάνοντας δοκιμές).

Η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ και $f(0)\cdot f(2)=-2\cdot(2\lambda+6)<0$ άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστο $x_0\in(0,2)$ ώστε $f(x_0)=0$.

Επειδή όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR, άρα η ρίζα είναι μοναδική.

(Σημείωση : Για την μονοτονία ισχύει $\lambda=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=x_2^2+x_1\cdot x_2+x_1^2+\lambda>0$ (τριώνυμο με αρνητική Διακρίνουσα) άρα η $f\uparrow$. Αργότερα, με την παράγωγο η μονοτονία αντιμετωπίζεται ευκολότερα**)**.

6. (Η συνάρτηση και το διάστημα δεν δίνονται!)

Έστω $\kappa,\lambda,\mu\in R$ με $\kappa\neq0$ και $\mu^2+\mu\lambda+\kappa\mu<0$. Να δειχθεί ότι $\lambda^2>4\kappa\mu$.

Λύση : Έστω $f(x)=\kappa x^2+\lambda x+\mu \quad \kappa\neq0$ ορισμένη στο $[0,1]$.

Η f είναι συνεχής και $f(0)\cdot f(1)=\mu(\kappa+\lambda+\mu)=\kappa\mu+\lambda\mu+\mu^2<0$.

Άρα θα υπάρχει μια τουλάχιστο ρίζα x_0 της f στο $(0,1)$. Οπότε $\kappa x_0^2+\lambda x_0+\mu=0$.

Άρα $\Delta\geq0\Leftrightarrow\lambda^2-4\kappa\mu\geq0\Leftrightarrow\lambda^2\geq4\kappa\mu \qquad (1)$

Αν ήταν $\Delta=0$ τότε η $f(x)$ θα είχε διπλή ρίζα άρα $f(x)=\kappa\left(x+\dfrac{\lambda}{2\kappa}\right)^2$

Αλλά τότε $f(0)\cdot f(1)=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\lambda^2}{\kappa^2}(2\kappa+\lambda)^2\geq0$, άτοπο.

Άρα από την (1) ισχύει $\lambda^2>4\kappa\mu$.

7. (Μας δίνεται διάστημα το οποίο "δεν χρησιμοποιείται.")

Έστω f συνεχής στο $[1,2]$ με $f(1)=f(2)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\theta\in[1,2)$ ώστε $f(\theta)=f\left(\theta+\dfrac{1}{2}\right)$.

Λύση : Έστω $g:\left[1,\dfrac{3}{2}\right]\to R$ με $g(x)=f(x)-f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$.

Η g είναι συνεχής και $g(1)=f(1)-f\left(\dfrac{3}{2}\right), g\left(\dfrac{3}{2}\right)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)-f(2)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)-f(1)$.

Άρα $g(1)\cdot g\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\left[f\left(\dfrac{3}{2}\right)-f(1)\right]^2\leq0$.

(α) Αν $g(1)\cdot g\left(\dfrac{3}{2}\right)<0$ τότε από το Θ. BOLZANO υπάρχει $\theta\in\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$ ώστε $g(\theta)=0$.

(β) Αν $g(1)\cdot g\left(\dfrac{3}{2}\right)=0$ τότε $g(1)=0$ ή $g\left(\dfrac{3}{2}\right)=0$ άρα το θ είναι το 1 ή το $\dfrac{3}{2}$.

Από (α), (β) φαίνεται ότι υπάρχει $\theta\in\left[1,\dfrac{3}{2}\right]\subset[1,2)$ με $g(\theta)=0\Leftrightarrow f(\theta)=f\left(\theta+\dfrac{1}{\theta}\right)$.