ΑΛΓΕΒΡΑ και ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

Α΄ Τάξης Γενικού Λυκείου

mathematica.gr

Πιθανότητες
Οι πραγματικοί αριθμοί
Εξισώσεις
Ανισώσεις
Πρόοδοι
Βασικές έννοιες των συναρτήσεων

1η έκδοση
Αύγουστος 2014

Μία παρέα διαδικτυακών μαθηματικών φίλων, μελών του http://www.mathematica.gr, μοιράστηκε την ευθύνη, να παρουσιάσει στην κοινότητα τις λύσεις των Μαθηματικών, της τράπεζας Θεμάτων Ά Λυκείου που συζητήθηκαν στο σύνδεσμο

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=141&t=44438

Είναι σίγουρο ότι θα υπάρξουν αβλεψίες, ελπίζουμε όχι πολλές, τις οποίες φιλοδοξούμε να διορθώσουμε μετά τις ευγενικές σας υποδείξεις. Μοιραία ο τρόπος λύσης δεν είναι ομοιόμορφος, μια που οι λύτες είναι διαφορετικοί και ο καθένας έχει την δική του άποψη παρουσίασης. Σας παρουσιάζουμε τις λύσεις και περιμένουμε τις παρατηρήσεις σας.

Καλή μελέτη – Καλή επιτυχία !

Για τις λύσεις συνεργάστηκαν τα μέλη του
http://www.mathematica.gr

ΒΟΣΚΑΚΗΣ ΣΗΦΗΣ
ΓΑΒΡΙΛΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ
ΓΕΩΡΓΑΛΗΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ
ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΓΙΑΜΑΡΕΛΟΥ ΜΑΡΙΑ
ΓΚΡΙΜΠΑΒΙΩΤΗΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΙΩΑΝΝΟΥ ΔΗΜΗΤΡΗΣ
ΚΑΛΑΘΑΚΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ
ΚΑΝΑΒΗΣ ΧΡΗΣΤΟΣ
ΚΑΡΔΑΜΙΤΣΗΣ ΣΠΥΡΟΣ
ΚΑΤΣΙΠΗΣ ΝΙΚΟΣ
ΚΟΝΤΟΚΩΣΤΑΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ
ΚΟΥΤΣΚΟΥΔΗΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΛΑΖΑΡΙΔΗΣ ΧΡΗΣΤΟΣ
ΛΙΝΑΡΔΑΤΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ
ΜΑΥΡΟΦΡΥΔΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
ΝΙΚΟΛΟΠΟΥΛΟΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΝΤΑΒΑΣ ΧΡΗΣΤΟΣ
ΠΑΓΩΝΗΣ ΘΕΟΔΩΡΟΣ
ΠΑΝΤΟΥΛΑΣ ΠΕΡΙΚΛΗΣ
ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΠΑΠΑΣΤΑΘΟΠΟΥΛΟΣ ΘΑΝΑΣΗΣ
ΠΡΩΤΟΠΑΠΠΑΣ ΛΕΥΤΕΡΗΣ
ΡΙΖΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ
ΣΤΕΡΓΙΟΥ ΜΠΑΜΠΗΣ
ΣΤΟΓΙΑΣ ΣΩΤΗΡΗΣ
ΣΥΓΚΕΛΑΚΗΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ
ΤΗΛΕΓΡΑΦΟΣ ΚΩΣΤΑΣ
ΦΑΝΕΛΗ ΑΝΑΣΤΑΣΙΑ
ΧΑΣΑΠΗΣ ΣΩΤΗΡΗΣ

Συντονισμός	ΚΑΡΔΑΜΙΤΣΗΣ ΣΠΥΡΟΣ
Μορφοποίηση κειμένων	ΠΑΝΤΟΥΛΑΣ ΠΕΡΙΚΛΗΣ
Τελική μορφοποίηση	ΤΗΛΕΓΡΑΦΟΣ ΚΩΣΤΑΣ
Γραφιστική επιμέλεια εξωφύλλου	ΜΑΚΡΗ ΦΩΤΕΙΝΗ

Έκδοση 1^{η} (Αύγουστος 2014)

1. **GI_A_ALG_2_474**

Θεωρούμε την ακολουθία (α_ν) των θετικών περιττών αριθμών: $1,3,5,7,...$

α. Να αιτιολογήσετε γιατί η (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον εκατοστό όρο της. (Μονάδες 15)

β. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των *ν* πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Η ακολουθία $1,3,5,7,...$ είναι αριθμητική πρόοδος μια που κάθε επόμενος όρος προκύπτει από τον προηγούμενο προσθέτοντας το 2 με $\alpha_1 = 1$ και διαφορά $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 = 3 - 1 = 2$.

Ο νιοστός όρος της αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega.$$

Άρα, $\alpha_{100} = \alpha_1 + (100-1)\omega = 1 + 99 \cdot 2 = 199$.

β. Η αριθμητική πρόοδος (α_ν) έχει όρους του θετικούς περιττούς αριθμούς, το άθροισμα των ν πρώτων όρων της είναι:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right] \Leftrightarrow S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2 + (\nu-1)2\right] =$$

$$\frac{\nu}{2}(2 + 2\nu - 2) = \frac{\nu}{2}2\nu \Leftrightarrow S_\nu = \nu^2$$

2. **GI_A_ALG_2_477**

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 7)

β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f. (Μονάδες 9)

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α. Πρέπει $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A_f = \mathbb{R} - \{3\}$.

β. Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχει ρίζες τις $x = 2$ και $x = 3$, αφού:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$ και άρα $x = \dfrac{-(-5) \pm 1}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$.

Οπότε, $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$.

Επομένως, $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}=\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-3}=x-2$ για $x\neq 3$.

γ. Για να τέμνει η γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ πρέπει $y=0$, δηλαδή $f(x)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$. Άρα στο σημείο $A(2,0)$.

Για να τέμνει η γραφική παράσταση της f τον άξονα $y'y$ πρέπει $x=0$, δηλαδή $f(0)=0-2=-2$. Άρα στο σημείο $B(0,-2)$.

3. **GI_A_ALG_2_478**

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-\lambda x+(\lambda^2+\lambda-1)=0$ (1), με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές. (Μονάδες 12)

β. Να λύσετε την ανίσωση: $S^2-P-2\geq 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1).(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Για να έχει η (1) πραγματικές λύσεις πρέπει $\Delta\geq 0$.

Άρα, $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-\lambda)^2-4(\lambda^2+\lambda-1)=\lambda^2-4\lambda^2-4\lambda+4 \Leftrightarrow \Delta=-3\lambda^2-4\lambda+4$.

Το τριώνυμο $-3\lambda^2-4\lambda+4$ έχει ρίζες τις $\lambda=-2$ και $\lambda=\dfrac{2}{3}$. (Εντός των ριζών ετερόσημο του $\alpha=-3<0$)

Γιατί:

$$\Delta=64 \text{ και } \lambda=\frac{-(-4)\pm 8}{2(-3)}=\frac{4\pm 8}{-6}=\begin{cases}\lambda_1=-2\\[4pt] \lambda_2=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

Επομένως, $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow \lambda\in\left[-2,\dfrac{2}{3}\right]$.

β. Από τους τύπους **Vieta** έχουμε: $S=-\dfrac{\beta}{\alpha}=\lambda$ και $S=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\lambda^2+\lambda-1$.

Επομένως, $S^2-P-2\geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2-(\lambda^2+\lambda-1)-2\geq 0 \Leftrightarrow -\lambda+1-2\geq 0 \Leftrightarrow \lambda\leq -1$.

Όμως $\lambda\in\left[-2,\dfrac{2}{3}\right]$, οπότε $S^2-P-2\geq 0 \Leftrightarrow \lambda\in[-2,-1]$.

4. **GI_A_ALG_2_480**

Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει α καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7η σειρά έχει 36 καθίσματα και το πλήθος των καθισμάτων του σταδίου είναι 300.

α. Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 12)

β. Πόσα καθίσματα έχει κάθε σειρά; (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Το πλήθος καθισμάτων της κάθε σειράς διαφέρει από το πλήθος των καθισμάτων της προηγούμενης κατά τον σταθερό αριθμό α. Άρα είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = \alpha$ και πρώτο όρο α_1 το πλήθος καθισμάτων της πρώτης σειράς.

β. Η 7η σειρά έχει 36 καθίσματα, άρα στον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ για $\nu = 7$ έχουμε:

$$\alpha_7 = \alpha_1 + (7-1)\omega \Leftrightarrow 36 = \alpha_1 + 6\alpha \Leftrightarrow \alpha_1 = 36 - 6\alpha \quad (1)$$

Το άθροισμα των καθισμάτων των 10 σειρών είναι 360 άρα στον τύπο

$S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right]$ για $\nu = 10$ έχουμε:

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2\alpha_1 + 9\alpha) \Leftrightarrow 300 = 5(2\alpha_1 + 9\alpha) \Leftrightarrow 2\alpha_1 + 9\alpha = 60 \quad (2)$$

Τότε:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 36 - 6\alpha \\ 2\alpha_1 + 9\alpha = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 36 - 6\alpha \\ 2(36 - 6\alpha) + 9\alpha = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 36 - 6\alpha \\ 72 - 12\alpha + 9\alpha = 60 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 36 - 6\alpha \\ -3\alpha = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 36 - 6\alpha \\ \alpha = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 12 \\ \alpha = 4 \end{cases}$$

Ο αριθμός των καθισμάτων στις δέκα σειρές είναι:

$$12\ ,\ 16\ ,\ 20\ ,\ 24\ ,\ 28\ ,\ 32\ ,\ 36\ ,\ 40\ ,\ 44\ ,\ 48$$

5. **GI_A_ALG_2_481**

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 8)

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει: $x_1 + x_2 = x_1 x_2$. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α. Είναι

$$\Delta=(-2\lambda)^2-4\cdot1\cdot4(\lambda-1)=4\lambda^2-16\lambda+16=4(\lambda^2-4\lambda+4)=4(\lambda-2)^2$$

β. Επειδή για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ είναι $\Delta=4(\lambda-2)^2\ge0$ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς.

γ. Από τους τύπους **Vieta** έχουμε: $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}\\ x_1x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=2\lambda\\ x_1x_2=4\lambda-4\end{cases}$.

Οπότε,

$$x_1+x_2=x_1x_2\Leftrightarrow2\lambda=4\lambda-4\Leftrightarrow\lambda=2.$$

6. **GI_A_ALG_2_483**

α. Να λύσετε την εξίσωση $|2x-1|=3$. (Μονάδες 12)

β. Αν α,β με $\alpha<\beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+3=0$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. $|2x-1|=3\Leftrightarrow(2x-1=3\ \text{ή}\ 2x-1=-3)\Leftrightarrow(x=2\ \text{ή}\ x=-1)$

β. Από το (α) ερώτημα $\alpha<\beta$, άρα $\alpha=-1$ και $\beta=2$.

Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+3=0$ γίνεται $-x^2+2x+3=0$ και έχει διακρίνουσα:

$\Delta=2^2-4\cdot(-1)\cdot3=16$ και ρίζες $x_{1,2}=\dfrac{-2\pm4}{-2}=\begin{cases}x_1=-1\\ x_2=3\end{cases}$.

7. **GI_A_ALG_2_484**

α. Να λύσετε τις ανισώσεις $|2x-5|\le3$ και $2x^2-x-1\ge0$ (Μονάδες 16)

β. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος α). (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε, $|2x-5|\le3\Leftrightarrow-3\le2x-5\le3\Leftrightarrow$

$-3+5\le2x-5+5\le3+5\Leftrightarrow2\le2x\le8\Leftrightarrow1\le x\le4$

Για να λύσουμε την $2x^2-x-1\ge0$, λύνουμε την αντίστοιχη εξίσωση και φτιάχνουμε πίνακα προσήμου.

Η διακρίνουσα είναι $\Delta=9$ και οι ρίζες είναι $x_{1,2}=\dfrac{1\pm3}{4}=\begin{cases}x_1=1\\ x_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

x	$-\infty$ -1/2 1 $+\infty$
$2x^2-x-1$	+ 0 - 0 +

Από τον πίνακα προσήμου βρίσκουμε ότι οι λύσεις της ανίσωσης είναι:

$$\mathbf{x}\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$$

β. Οι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι τα $\mathbf{x}\in[1,4]$.

8. **GI_A_ALG_2_485**

Δίνεται η εξίσωση $\boldsymbol{\lambda\cdot x=x+\lambda^2-1}$, με παράμετρο $\boldsymbol{\lambda\in\mathbb{R}}$.

α. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$(\boldsymbol{\lambda-1)x=(\lambda-1)(\lambda+1),\lambda\in\mathbb{R}}$. (Μονάδες 8)

β. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε. (Μονάδες 8)

γ. Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε,

$$\begin{aligned}&\lambda\cdot x=x+\lambda^2-1\Leftrightarrow\\&\lambda\cdot x-x=\lambda^2-1\Leftrightarrow\\&(\lambda-1)x=(\lambda-1)(\lambda+1),\lambda\in\mathbb{R}:(1)\end{aligned}$$

β. Για να έχει η εξίσωση (1) ακριβώς μία λύση πρέπει και αρκεί:

$$\lambda-1\neq0\Leftrightarrow\lambda\neq1$$

Για την μοναδική λύση, έχουμε: $\frac{(\lambda-1)x}{\lambda-1}=\frac{(\lambda-1)(\lambda+1)}{\lambda-1}\Leftrightarrow x=\lambda+1$.

γ. Για να είναι η εξίσωση (1) ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών

πρέπει και αρκεί: $\begin{cases}\lambda-1=0\\(\lambda-1)(\lambda+1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=1\\\lambda=1\text{ ή }\lambda=-1\end{cases}\Leftrightarrow\lambda=1$

9. **GI_A_ALG_2_486**

Αν $\boldsymbol{0<\alpha<1}$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι: $\boldsymbol{\alpha^3<\alpha}$. (Μονάδες 13)

β. Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\boldsymbol{0,\alpha^3,1,\alpha,\frac{1}{\alpha}}$ (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. Είναι $0<\alpha<1 \Rightarrow \alpha<1 \overset{\alpha>0}{\Rightarrow} \alpha\cdot\alpha<\alpha\cdot 1 \Rightarrow \alpha^2<\alpha$

Άρα: $\left\{\begin{array}{l}\alpha^2<\alpha\\ \text{και}\\ \alpha<1\end{array}\right. \underset{\theta\varepsilon\tau\iota\kappa\alpha}{\overset{\mu\varepsilon\lambda\eta}{\Rightarrow}} \alpha^2\cdot\alpha<\alpha\cdot 1 \Rightarrow \alpha^3<\alpha$

β. Είναι $0<\alpha$ άρα $0<\alpha^3$ και από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι $\alpha^3<\alpha$, επομένως $0<\alpha^3<\alpha$.

Από την υπόθεση ισχύει $\alpha<1$ και τα μέλη της ανισότητας είναι θετικά, άρα $\frac{1}{\alpha}>1$.

Συνεπώς: $0<\alpha^3<\alpha<1<\frac{1}{\alpha}$.

10. **GI_A_ALG_2_487**

α. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$(x-1)^2+(y+3)^2=x^2+y^2-2x+6y+10$. (Μονάδες 12)

β. Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2+y^2-2x+6y+10=0$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y έχουμε:

$$(x-1)^2+(y+3)^2=$$
$$x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2+y^2+2\cdot y\cdot 3+3^2=$$
$$x^2+y^2-2x+6y+10$$

β. Είναι,

$$x^2+y^2-2x+6y+10=0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$
$$(x-1)^2+(y+3)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$x-1=0 \text{ και } y+3=0 \Leftrightarrow$$
$$x=1 \text{ και } y=-3$$

11. **GI_A_ALG_2_488**

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\frac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A. (Μονάδες 5)

β. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-5x+3$. (Μονάδες 10)

γ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει: $f(x)=\frac{2x-3}{x+1}$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Για να έχει νόημα πραγματικού αριθμού το κλάσμα $\frac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$ πρέπει και αρκεί: $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 1 \Leftrightarrow x\neq \pm 1$.

Επομένως το σύνολο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = R - \{-1,1\}$.

β. Το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 3$ έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4\cdot 2\cdot 3 = 1 > 0$, οπότε έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

Είναι $x_1 = \dfrac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\cdot 2} = \dfrac{5-1}{4} = 1$ και $x_2 = \dfrac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\cdot 2} = \dfrac{5+1}{4} = \dfrac{3}{2}$

Άρα $2x^2 - 5x + 3 = \alpha(x - x_1)(x - x_2) = 2(x-1)\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$.

γ. Για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1} = \frac{2(x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2\left(x - \frac{3}{2}\right)}{x+1} = \frac{2x-3}{x+1}$$

12. GI_A_ALG_2_489

α. Να λύσετε την ανίσωση $|x-5| < 2$. (Μονάδες 8)

β. Να λύσετε την ανίσωση $|2-3x| > 5$. (Μονάδες 8)

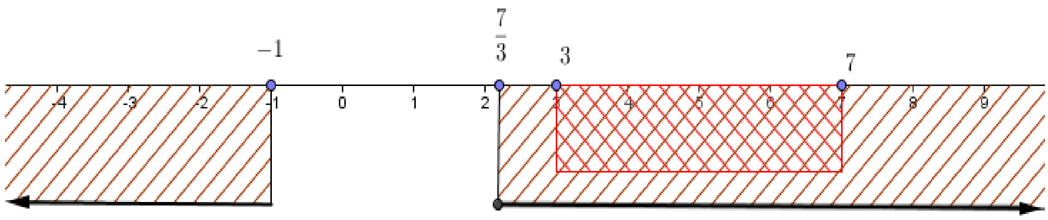
γ. Να παραστήσετε τις λύσεις των δύο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε,
$|x-5| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-5 < 2 \Leftrightarrow -2+5 < x-5+5 < 2+5 \Leftrightarrow 3 < x < 7$.

β. Είναι, $|2-3x| > 5 \Leftrightarrow 2-3x > 5$ ή $2-3x < -5 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > \dfrac{7}{3}$.

γ. Η παράσταση των λύσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών έχει ως φαίνεται παρακάτω:



Όπως φαίνεται από τον άξονα το σύνολο των κοινών λύσεων είναι το διάστημα $(3,7)$.

13. GI_A_ALG_2_490

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$.

α. Να βρείτε τις ρίζες του. (Μονάδες 10)
β. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες: $2x^2 - 3x + 1 < 0$ (Μονάδες 5)
γ. Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης: $2x^2 - 3x + 1 < 0$ (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 > 0$, οπότε το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.

Είναι $x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$ και $x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{3+1}{4} = 1$.

β. $2x^2 - 3x + 1 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

γ. Είναι $\sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4} \Rightarrow 1 < \sqrt{3} < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ άρα $\frac{\sqrt{3}}{2} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Έχουμε ότι: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Είναι $\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4} \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, άρα $\frac{1}{\sqrt{2}} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Οπότε οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ανήκουν στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ των λύσεων που βρήκαμε στο (β) και συνεπώς είναι λύσεις της ανίσωσης $2x^2 - 3x + 1 < 0$.

14. **GI_A_ALG_2_491**

Δίνονται οι ανισώσεις: $3x - 1 < x + 9$ και $2 - \frac{x}{2} \le x + \frac{1}{2}$

α. Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 15)
β. Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Για την πρώτη ανίσωση έχουμε
$3x - 1 < x + 9 \Leftrightarrow 3x - x < 9 + 1 \Leftrightarrow 2x < 10 \Leftrightarrow x < 5$, ενώ για τη δεύτερη
$2 - \frac{x}{2} \le x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot 2 - 2 \cdot \frac{x}{2} \le 2 \cdot x + 2 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4 - x \le 2x + 1 \Leftrightarrow$
$4 - 1 \le 2x + x \Leftrightarrow 3 \le 3x \Leftrightarrow x \ge 1$.

β. Οι κοινές τους λύσεις είναι $1 \le x < 5$ ή $x \in [1, 5)$.

γ.

15. **GI_A_ALG_2_492**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2x-15,\ x\in\mathbb{R}$.

α. Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-1)+f(0)+f(1)$. (Μονάδες 10)

β. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α. $f(-1)+f(0)+f(1)=$

$$\left[(-1)^2+2(-1)-15\right]+\left[0^2+2\cdot 0-15\right]+\left[1^2+2\cdot 1-15\right]=$$

$$\left[1+2(-1)-15\right]+(-15)+\left[1+2\cdot 1-15\right]=$$

$$(1-2-15)-15+(1+2-15)=-16-15-12=-43$$

β. Για να βρούμε το κοινό σημείο της γραφικής της παράστασης της f με τον άξονα $y'y$ θέτουμε όπου $x=0$ και παίρνουμε:

$$f(0)=0^2+2\cdot 0-15=-15$$

Επομένως το κοινό σημείο είναι το $(0,-15)$

Για να βρούμε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ θέτουμε όπου $y=f(x)=0$ δηλαδή: $x^2+2x-15=0 \Leftrightarrow x=-5$ ή $x=3$,

αφού $\Delta=2^2-4\cdot 1\cdot(-15)=64$ και οι ρίζες είναι:

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{64}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm 8}{2}=\begin{cases}\dfrac{-2+8}{2}=3\\[2mm] \dfrac{-2-8}{2}=-5\end{cases},$$

Επομένως τα κοινά σημεία είναι τα $(3,0)$ και $(-5,0)$.

16. **GI_A_ALG_2_493**

α. Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|=\sqrt{3}$. (Μονάδες 10)

β. Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε,

$|x-2|=\sqrt{3} \Leftrightarrow x-2=\sqrt{3}$ ή $x-2=-\sqrt{3} \Leftrightarrow x=2+\sqrt{3}$ ή $x=2-\sqrt{3}$.

β. Για να βρούμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση ενώ ξέρουμε τις ρίζες της, χρησιμοποιούμε τον τύπο $x^2 - Sx + P = 0$ όπου $S = x_1 + x_2 = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4$ και $P = x_1 \cdot x_2 = \left(2 - \sqrt{3}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right) = 2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 3 = 1$

Άρα $x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$.

17. **GI_A_ALG_2_495**

Σε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με θετικό λόγο λ, ισχύει: $\alpha_3 = 1$ και $\alpha_5 = 4$

α. Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της. (Μονάδες 13)

β. Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι: $\alpha_\nu = 2^{\nu-3}$. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. Είναι,

$$\begin{cases}\alpha_3 = 1\\ \alpha_5 = 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1\lambda^2 = 1 & (1)\\ \alpha_1\lambda^4 = 4 & (2)\end{cases} \overset{\frac{(2)}{(1)}}{\Leftrightarrow} \begin{cases}\dfrac{\alpha_1\lambda^4}{\alpha_1\lambda^2} = 4\\ \alpha_1\lambda^2 = 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda^2 = 4\\ \alpha_1\lambda^2 = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda = 2 & (\lambda > 0)\\ \alpha_1 \cdot 2^2 = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda = 2\\ \alpha_1 = \dfrac{1}{4}\end{cases}$$

β. $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} = \frac{1}{4}\cdot 2^{\nu-1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2^\nu}{2} = \frac{2^\nu}{8} = \frac{2^\nu}{2^3} = 2^{\nu-3}$

Άρα $\alpha_\nu = 2^{\nu-3}$

18. **GI_A_ALG_2_496**

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 8)

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει: $(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 + 5 = 0$. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α. $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2\lambda)^2 - 4\cdot 4(\lambda - 1) = 4\lambda^2 - 16\lambda + 16$

β. Βλέπουμε ότι $\Delta = 4\left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right) = 4(\lambda - 1)^2 \geq 0$

Επομένως η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ. Από τους τύπους **Vieta** παίρνουμε:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -2\lambda \text{ και } x_1x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = 4(\lambda - 1)$$

Επομένως $(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 + 5 = 0 \Leftrightarrow (-2\lambda)^2 + 4(\lambda - 1) + 5 = 0$

$\Leftrightarrow 4\lambda^2 + 4\lambda - 4 + 5 = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (2\lambda + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$

19. **GI_A_ALG_2_497**

Ένα τηλεοπτικό παιχνίδι παίζεται με ζεύγη αντιπάλων των δυο φύλων. Στο παιχνίδι συμμετέχουν **3** άντρες: ο Δημήτρης (Δ), ο Κώστας (Κ), ο Μιχάλης (Μ) και **2** γυναίκες: η Ειρήνη (Ε) και η Ζωή (Ζ). Επιλέγονται στην τύχη ένας άντρας και μια γυναίκα για να διαγωνιστούν και καταγράφονται τα ονόματά τους.

α. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος.

β. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων

Α : Να διαγωνίστηκαν ο Κώστας ή ο Μιχάλης .

Β : Να διαγωνίστηκε η Ζωή.

Γ: Να μη διαγωνίστηκε ούτε ο Κώστας ούτε ο Δημήτρης.

ΛΥΣΗ

α. Θα βρούμε το δειγματικό χώρο **Ω** με πίνακα διπλής εισόδου :

Γ \ Α	Δ	Κ	Μ
Ε	ΕΔ	ΕΚ	ΕΜ
Ζ	ΖΔ	ΖΚ	ΖΜ

Επομένως: $\Omega = \{E\Delta, EK, EM, Z\Delta, ZK, ZM\}$ και $N(\Omega) = 6$

β. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

- Κ: διαγωνίστηκε ο Κώστας, με $K = \{EK, ZK\}$ και $N(K) = 2$
- Μ: διαγωνίστηκε ο Μιχάλης, με $M = \{EM, ZM\}$ και $N(M) = 2$
- Δ: διαγωνίστηκε ο Δημήτρης, με $\Delta = \{E\Delta, Z\Delta\}$ και $N(\Delta) = 2$
- Β : διαγωνίστηκε η Ζωή, με $B = \{Z\Delta, ZK, ZM\}$ και $N(B) = 3$

Τότε:

✓ $K \cup M = \{EK, ZK, EM, ZM\}$ με $N(K \cup M) = 4$, και

✓ $K \cup \Delta = \{EK, ZK, E\Delta, Z\Delta\}$ με $N(K \cup \Delta) = 4$

Άρα:

✓ $P(A)=P(K\cup M)=\frac{N(K\cup M)}{N(\Omega)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$,

✓ $P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

✓ $P(\Gamma)=P(K\cup\Delta)'=1-P(K\cup\Delta)=1-\frac{N(K\cup\Delta)}{N(\Omega)}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ και

20. **GI_A_ALG_2_498**

α. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x+1|}{3}-\frac{|x+1|+4}{5}=\frac{2}{3}$. (Μονάδες 9)

β. Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2+2x+3\le 0$. (Μονάδες 9)

γ. Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. Είναι:

$$\frac{|x+1|}{3}-\frac{|x+1|+4}{5}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow$$
$$15\cdot\frac{|x+1|}{3}-15\cdot\frac{|x+1|+4}{5}=15\cdot\frac{2}{3}\Leftrightarrow$$
$$5|x+1|-3\left(|x+1|+4\right)=5\cdot 2\Leftrightarrow$$
$$5|x+1|-3|x+1|-12-10\Leftrightarrow$$
$$|x+1|=11\Leftrightarrow$$
$$x+1=11 \quad \text{ή} \quad x+1=-11\Leftrightarrow$$
$$x=10 \quad \text{ή} \quad x=-12$$

β. Το τριώνυμο $-x^2+2x+3$ έχει $\Delta=16,\ x_1=-1,\ x_2=3,\ \alpha=-1<0$, επομένως η ανίσωση αληθεύει αν $x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$

χ	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-\chi^2+2\chi+3$		−	0	+	0	−	

γ. Παρατηρούμε ότι $10\in[3,+\infty)$ και $-12\in(-\infty,-1]$ δηλαδή και οι δυο λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος

21. **GI_A_ALG_2_499**

Από τους μαθητές ενός Λυκείου, το 25% συμμετέχει στη θεατρική ομάδα, το 30% συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου και το 15% των μαθητών συμμετέχει και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Αν ονομάσουμε τα ενδεχόμενα:

Α: «ο μαθητής να συμμετέχει στη θεατρική ομάδα» και

Β: «ο μαθητής να συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου»,

α. να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

i. $A \cup B$

ii. $A \cap B$

iii. $B - A$

iv. A' (Μονάδες 12)

β. να υπολογίσετε τις πιθανότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων

i. ο μαθητής που επιλέχθηκε να συμμετέχει μόνο στην ομάδα ποδοσφαίρου

ii. ο μαθητής που επιλέχθηκε να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α.

i. Ο μαθητής να συμμετέχει στην θεατρική ομάδα ή την ποδοσφαιρική ομάδα.

ii. Ο μαθητής να συμμετέχει στην θεατρική ομάδα και στην ποδοσφαιρική ομάδα.

iii. Ο μαθητής να συμμετέχει στην ποδοσφαιρική ομάδα αλλά όχι στην θεατρική ομάδα.

iv. Ο μαθητής να μην συμμετέχει στην θεατρική ομάδα.

β. Από την υπόθεση της άσκησης γνωρίζουμε ότι:

$$P(A) = 25\%, P(B) = 30\%, P(A \cap B) = 15\%.$$

i. Αναζητούμε ην πιθανότητα του ενδεχομένου $B - A$.

Είναι $P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = 30\% - 15\% = 15\%$

ii. Αναζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $(A \cup B)'$

Είναι $P\left((A \cup B)'\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \left(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\right) =$

$= 1 - 0,25 - 0,30 + 0,15 = 0,60 \text{ ή } 60\%$

22. **GI_A_ALG_2_503**

α. Να λύσετε την ανίσωση: $\left|x - \frac{1}{2}\right| < 4$ (Μονάδες 9)

β. Να λύσετε την ανίσωση: $|x + 5| \geq 3$. (Μονάδες 9)

γ. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις γράψετε με τη μορφή διαστήματος. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

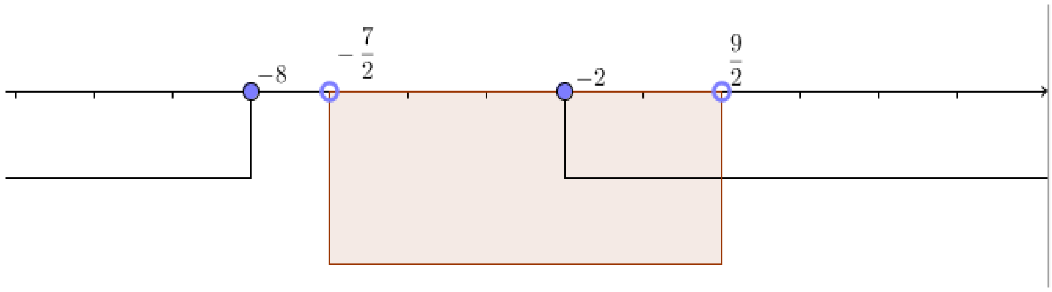
α. Η ανίσωση ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| < 4 \Leftrightarrow -4 < x - \frac{1}{2} < 4 \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < x < \frac{9}{2}$$

β. Η ανίσωση ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

$$|x + 5| \geq 3 \Leftrightarrow (x + 5 \geq 3 \text{ ή } x + 5 \leq -3) \Leftrightarrow (x \geq -2 \text{ ή } x \leq -8)$$

γ. Παριστάνουμε τα διαστήματα των προηγούμενων ερωτημάτων στον άξονα των πραγματικών αριθμών.



και στη συνέχεια γράφουμε τις κοινές λύσεις με τη μορφή διαστήματος, δηλαδή προκύπτει $\mathbf{x} \in \left[-2, \frac{9}{2}\right)$.

23. **GI_A_ALG_2_504**

α. Αν $\boldsymbol{\alpha < 0}$, να αποδειχθεί ότι: $\boldsymbol{\alpha + \frac{1}{\alpha} \le -2}$. (Μονάδες 15)

β. Αν $\boldsymbol{\alpha < 0}$, να αποδειχθεί ότι: $\boldsymbol{|\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \ge 2}$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. $\boldsymbol{\alpha + \frac{1}{\alpha} \le -2 \overset{\alpha<0}{\Leftrightarrow} \alpha^2 + 1 \ge -2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2 \ge 0}$, το οποίο ισχύει για κάθε πάντα $\boldsymbol{\alpha < 0}$.

β. Αν $\boldsymbol{\alpha < 0}$ τότε $\boldsymbol{|\alpha| = -\alpha}$, συνεπώς:

$\boldsymbol{|\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \ge 2 \overset{\alpha<0}{\Leftrightarrow} -\alpha - \frac{1}{\alpha} \ge 2 \Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} \le -2}$ που ισχύει λόγω του πρώτου ερωτήματος.

24. **GI_A_ALG_2_505**

α. Να λύσετε την εξίσωση: $\mathbf{|2x-4| = 3|x-1|}$. (Μονάδες 9)

β. Να λύσετε την ανίσωση: $\mathbf{|3x-5| > 1}$. (Μονάδες 9)

γ. Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. Η εξίσωση ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

$\mathbf{|2x-4| = 3|x-1| \Leftrightarrow |2x-4| = |3(x-1)| \Leftrightarrow (2x-4 = 3(x-1) \text{ ή } 2x-4 = -3(x-1)) \Leftrightarrow}$

$\mathbf{(2x-4 = 3x-3 \text{ ή } 2x-4 = -3x+3) \Leftrightarrow \left(x = -1 \text{ ή } x = \frac{7}{5}\right)}$

β. Η ανίσωση ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

$$|3x-5|>1 \Leftrightarrow (3x-5>1 \text{ ή } 3x-5<-1) \Leftrightarrow \left(x>2 \text{ ή } x<\frac{4}{3}\right) \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)\cup(2,+\infty)$$

γ. Είναι προφανές ότι: $-1\in\left(-\infty,\frac{4}{3}\right) \Rightarrow -1\in\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)\cup(2,+\infty)$

Επειδή $\frac{4}{3}=\frac{20}{15}<\frac{21}{15}=\frac{7}{5}<\frac{10}{5}=2$, η λύση $x=\frac{7}{5}$ της εξίσωσης του ερωτήματος α) δεν περιέχεται στο σύνολο των λύσεων της ανίσωσης του ερωτήματος β).

Τελικά, μόνο η λύση $x=-1$ είναι και λύση της ανίσωσης του (β) ερωτήματος..

25. **GI_A_ALG_2_506**

Αν $2\le x\le 3$ και $1\le y\le 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς

από τις παρακάτω παραστάσεις:

α. $x+y$ (Μονάδες 5)

β. $2x-3y$ (Μονάδες 10)

γ. $\frac{y}{x}$ (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. $\left.\begin{array}{l}2\le x\le 3\\1\le y\le 2\end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} 3\le x+y\le 5$

β. $\left.\begin{array}{l}2\le x\le 3\\1\le y\le 2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2\cdot 2\le 2x\le 2\cdot 3\\1(-3)\ge -3y\ge 2(-3)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}4\le 2x\le 6\\-6\le -3y\le -3\end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} -2\le 2x-3y\le 3$

γ. $\left.\begin{array}{l}2\le x\le 3\\1\le y\le 2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}1\le y\le 2\\\frac{1}{3}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{2}\end{array}\right\} \overset{\times}{\Rightarrow} \frac{1}{3}\le\frac{y}{x}\le 1$

26. **GI_A_ALG_2_507**

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2-9)x=\lambda^2-3\lambda$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$ (1)

α. Επιλέγοντας τρείς διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ, να γράψετε τρεις εξισώσεις. (Μονάδες 6)

β. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση. (Μονάδες 9)

γ. Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4 (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Διαδοχικά για $\lambda=0,1,2$ έχουμε:

$$-9x=0$$
$$-8x=-2$$
$$-5x=-2$$

β. Η (1) έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν,

$$\lambda^2-9\neq 0 \Leftrightarrow (\lambda-3)(\lambda+3)\neq 0 \Leftrightarrow (\lambda-3\neq 0 \text{ και } \lambda+3\neq 0) \Leftrightarrow (\lambda\neq -3 \text{ και } \lambda\neq 3)$$

γ. Η μοναδική λύση της (1), ισούται με 4, αν και μόνο αν,
$(\lambda\neq -3 \text{ και } \lambda\neq 3)$ και

$$(\lambda^2-9)4=\lambda^2-3\lambda \Leftrightarrow 4\lambda^2-36=\lambda^2-3\lambda \Leftrightarrow 3\lambda^2+3\lambda-36=0 \Leftrightarrow$$
$$\lambda^2+\lambda-12=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{-1\pm 7}{2} \overset{\lambda\neq\pm 3}{\Leftrightarrow} \lambda=-4$$

27.	**GI_A_ALG_2_508** **α.** Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων $1,2,3,\ldots,\nu$. (Μονάδες 12) **β.** Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Πρόκειται για αριθμητική πρόοδο με γενικό όρο α_ν, πρώτο όρο $\alpha_1=1$ και διαφορά $\omega=1$. Το άθροισμα βρίσκεται από τον τύπο:

$$1+2+\ldots+\nu=S_\nu=\frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1+(\nu-1)\omega\right]=\frac{\nu}{2}[2+\nu-1]=\frac{\nu}{2}(\nu+1).$$

β. Έστω ότι πρέπει να πάρουμε ν το πλήθος πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους. Ο ν είναι λύση της εξίσωσης $S_\nu=45$ **(1)**

Η (1) ορίζεται στο $\mathbb{N}^*$ Έχουμε:

$$(1)\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}(\nu+1)=45 \Leftrightarrow \nu(\nu+1)=90 \Leftrightarrow \nu^2+\nu-90=0 \Leftrightarrow \nu=\frac{-1\pm\sqrt{361}}{2} \overset{\nu\in\mathbb{N}^*}{\Leftrightarrow} \nu=9$$

28.	**GI_A_ALG_2_509** **α.** Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}-\{0\}$, να αποδειχθεί ότι: $\left\lvert\frac{\alpha}{\beta}\right\rvert+\left\lvert\frac{\beta}{\alpha}\right\rvert\geq 2 \quad (1)$. (Μονάδες 15) **β.** Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Για $\alpha,\beta\in\mathbb{R}-\{0\}$

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\geq 2\Leftrightarrow\frac{|\alpha|}{|\beta|}+\frac{|\beta|}{|\alpha|}\geq 2\Leftrightarrow\frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{|\alpha||\beta|}\geq 2\Leftrightarrow|\alpha|^2+|\beta|^2\geq 2|\alpha||\beta|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow|\alpha|^2+|\beta|^2-2|\alpha||\beta|\geq 0\Leftrightarrow\left(|\alpha|-|\beta|\right)^2\geq 0$$

το παραπάνω ισχύει πάντα.

β. Η ισότητα στην (1) ισχύει αν και μόνο αν:

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|=2\Leftrightarrow\frac{|\alpha|}{|\beta|}+\frac{|\beta|}{|\alpha|}=2\Leftrightarrow\frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{|\alpha||\beta|}=2\Leftrightarrow|\alpha|^2+|\beta|^2=2|\alpha||\beta|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow|\alpha|^2+|\beta|^2-2|\alpha||\beta|=0\Leftrightarrow\left(|\alpha|-|\beta|\right)^2=0\Leftrightarrow|\alpha|=|\beta|\Leftrightarrow\alpha=\pm\beta$$

29. **GI_A_ALG_2_510**

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f}$, με: $f(x)=\begin{cases}2x-5, & x\leq 3\\ x^2, & 3<x<10\end{cases}$

α. Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\mathbf{f}$ σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 8)

β. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1), f(3)$ και $f(5)$.(Μονάδες 8)

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=25$. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

Το πεδίο ορισμού ισούται με την ένωση των διαστημάτων που ορίζουν οι κλάδοι της συνάρτησης, έτσι έχουμε: $(-\infty,3]\cup(3,10)=(-\infty,10)$. Άρα $A=(-\infty,10)$.

α. Με κατάλληλη επιλογή κάθε κλάδου:

$$f(-1)=2(-1)-5=-2-5=-7$$

$$f(3)=2\cdot 3-5=6-5=1$$

$$f(5)=5^2=25$$

β. $f(x)=25\Leftrightarrow\begin{cases}2x-5=25, x\leq 3\\ x^2=25, 3<x<10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=15, x\leq 3\\ x=5 \text{ ή } x=-5, 3<x<10\end{cases}\Leftrightarrow x=5$

30. **GI_A_ALG_2_936**

Δίνεται η παράσταση: $A=\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}\right)$

α. Για ποιες τιμές του $\mathbf{x}$ ορίζεται η παράσταση $\mathbf{A}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $\mathbf{A}$ είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του $\mathbf{x}$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Η παράσταση ορίζεται αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} x-4\geq 0 \\ x+1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 4 \\ x\geq -1 \end{cases} \overset{4>-1}{\Rightarrow} x\geq 4,$$

άρα ορίζεται για εκείνα τα x τα οποία βρίσκονται στο διάστημα $[4,+\infty)$.

β. Για $x\in[4,+\infty)$ έχουμε:

$$A=\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}\right)=\left(\sqrt{x-4}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2=x-4-x-1=-5$$

31. GI_A_ALG_2_938

α. Να δείξετε ότι: $3<\sqrt[3]{30}<4$. (Μονάδες 12)

β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6-\sqrt[3]{30}$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε: $3<\sqrt[3]{30}<4 \Leftrightarrow 3^3<\sqrt[3]{30}^3<4^3 \Leftrightarrow 27<30<64$ το οποίο ισχύει.

β. Από το πρώτο ερώτημα έχουμε:

$$3<\sqrt[3]{30}<4 \Leftrightarrow -4<-\sqrt[3]{30}<-3 \Leftrightarrow 6-4<6-\sqrt[3]{30}<6-3 \Leftrightarrow 2<6-\sqrt[3]{30}<3$$

ενώ $3<\sqrt[3]{30}<4$, άρα $2<6-\sqrt[3]{30}<3<\sqrt[3]{30}<4 \Rightarrow 6-\sqrt[3]{30}<\sqrt[3]{30}$

32. GI_A_ALG_2_944

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$.

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β. Για $x=5$, να αποδείξετε ότι: $A^2+A-6=0$ (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. Η παράσταση A ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία ισχύει:

$$x-4\geq 0 \text{ και } 6-x\geq 0$$

ή ισοδύναμα, για

$$x\geq 4 \text{ και } x\leq 6.$$

Άρα, για $x\in[4,6]$.

β. Για $x=5$, έχουμε $A=\sqrt{5-4}+\sqrt{6-5}=1+1=2$ και τότε:

$$A^2+A-6=2^2+2-6=0$$

33. **GI_A_ALG_2_947**

Δίνεται η παράσταση: $\mathbf{A}=\sqrt{\mathbf{x}^2+\mathbf{4}}-\sqrt{\mathbf{x}-\mathbf{4}}$.

α. Για ποιες τιμές του $\mathbf{x}$ ορίζεται η παράσταση $\mathbf{A}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του $\mathbf{x}$ σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 12)

β. Αν $\mathbf{x}=\mathbf{4}$, να αποδείξετε ότι: $\mathbf{A}^2-\mathbf{A}=\mathbf{2}\left(\mathbf{10}-\sqrt{\mathbf{5}}\right)$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Η παράσταση $\mathbf{A}$ ορίζεται για εκείνα τα $\mathbf{x}$ για τα οποία ισχύει

$$\mathbf{x}^2+\mathbf{4}\geq\mathbf{0} \text{ και } \mathbf{x}-\mathbf{4}\geq\mathbf{0}$$

ή ισοδύναμα

$$\text{για } \mathbf{x}\in\left[\mathbf{4},+\infty\right).$$

β. Αν $\mathbf{x}=\mathbf{4}$, τότε $\mathbf{A}=\sqrt{\mathbf{x}^2+\mathbf{4}}-\sqrt{\mathbf{x}-\mathbf{4}}=\sqrt{\mathbf{20}}=\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{5}}$

Τότε: $\mathbf{A}^2-\mathbf{A}=\left(\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{5}}\right)^2-\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{5}}=\mathbf{20}-\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{5}}=\mathbf{2}\left(\mathbf{10}-\sqrt{\mathbf{5}}\right)$

34. **GI_A_ALG_2_950**

Δίνεται η παράσταση: $\mathbf{A}=\sqrt{\mathbf{1}-\mathbf{x}}-\sqrt[4]{\mathbf{x}^4}$

α. Για ποιες τιμές του $\mathbf{x}$ ορίζεται η παράσταση $\mathbf{A}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του $\mathbf{x}$ σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β. Αν $\mathbf{x}=-\mathbf{3}$, να αποδείξετε ότι: $\mathbf{A}^3+\mathbf{A}^2+\mathbf{A}+\mathbf{1}=\mathbf{0}$ (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. Η παράσταση $\mathbf{A}$ ορίζεται για εκείνα τα $\mathbf{x}$ για τα οποία ισχύει

$$\mathbf{1}-\mathbf{x}\geq\mathbf{0} \text{ και } \mathbf{x}^4\geq\mathbf{0}$$

ή ισοδύναμα

$$\mathbf{x}\leq\mathbf{1} \text{ και } \mathbf{x}\in\mathbb{R}$$

Άρα, $\mathbf{x}\in\left(-\infty,\mathbf{1}\right]$.

β. Για $\mathbf{x}=-\mathbf{3}$ έχουμε:

$$\mathbf{A}=\sqrt{\mathbf{1}-\left(-\mathbf{3}\right)}-\sqrt[4]{\left(-\mathbf{3}\right)^4}=\sqrt{\mathbf{4}}-\left|-\mathbf{3}\right|=\mathbf{2}-\mathbf{3}=-\mathbf{1}$$

Οπότε:

$$\mathbf{A}^3+\mathbf{A}^2+\mathbf{A}+\mathbf{1}=\left(-\mathbf{1}\right)^3+\left(-\mathbf{1}\right)^2+\left(-\mathbf{1}\right)+\mathbf{1}=-\mathbf{1}+\mathbf{1}-\mathbf{1}+\mathbf{1}=\mathbf{0}$$

35. **GI_A_ALG_2_952**

Δίνεται η παράσταση: $\mathbf{B}=\sqrt[5]{(\mathbf{x}-\mathbf{2})^{5}}$

α. Για ποιες τιμές του $\mathbf{x}$ ορίζεται η παράσταση $\mathbf{B}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του $\mathbf{x}$ υπό μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β. Για $\mathbf{x}=\mathbf{4}$, να αποδείξετε ότι $\mathbf{B}^{2}+\mathbf{6B}=\mathbf{B}^{4}$ (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. Η παράσταση $\mathbf{B}$ ορίζεται για εκείνα τα $\mathbf{x}$ για τα οποία ισχύει $(\mathbf{x}-\mathbf{2})^{5}\geq \mathbf{0}$.

Έχουμε λοιπόν: $(\mathbf{x}-\mathbf{2})^{5}\geq \mathbf{0}\Leftrightarrow \mathbf{x}-\mathbf{2}\geq \mathbf{0}\Leftrightarrow \mathbf{x}\geq \mathbf{2}$

β. Για $\mathbf{x}=\mathbf{4}$ έχουμε:

$$\mathbf{B}=\sqrt[5]{(4-2)^{5}}=\sqrt[5]{2^{5}}=2$$

Οπότε:

$$\mathbf{B}^{2}+\mathbf{6B}=2^{2}+6\cdot 2=4+12=16=2^{4}=\mathbf{B}^{4}$$

36. **GI_A_ALG_2_955**

Δίνονται οι αριθμοί: $\mathbf{A}=\left(\sqrt{2}\right)^{6}$ και $\mathbf{B}=\left(\sqrt[3]{2}\right)^{6}$.

α. Να δείξετε ότι: $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{4}$. (Μονάδες 13)

β. Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς:
$\sqrt{2}\;,\;1\;,\;\sqrt[3]{2}$. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε:

$$\mathbf{A}=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{6}=2^{\frac{6}{2}}=2^{3}=8 \text{ και } \mathbf{B}=\left(\sqrt[3]{2}\right)^{6}=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{6}=2^{\frac{6}{3}}=2^{2}=4$$

Άρα, $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{8}-\mathbf{4}=\mathbf{4}$

β. Από το ερώτημα α) έχουμε $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{4}>\mathbf{0}$

Άρα,

$$\left(\sqrt{2}\right)^{6}-\left(\sqrt[3]{2}\right)^{6}>0\Rightarrow\left(\sqrt{2}\right)^{6}>\left(\sqrt[3]{2}\right)^{6}\overset{\sqrt{2}>0}{\underset{\sqrt[3]{2}>0}{\Rightarrow}}\sqrt{2}>\sqrt[3]{2}$$

Επίσης, $\mathbf{1}<\mathbf{2}\Rightarrow\sqrt[3]{1}<\sqrt[3]{2}\Rightarrow 1<\sqrt[3]{2}$.

Οπότε, $1<\sqrt[3]{2}<\sqrt{2}$

37. **GI_A_ALG_2_991**

Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1|<2$

α. να δείξετε ότι $x\in(-3,1)$. (Μονάδες 12)

β. να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K=\dfrac{|x+3|+|x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε,

$|x+1|<2 \Leftrightarrow -2<x+1<2 \Leftrightarrow -2-1<x+1-1<2-1 \Leftrightarrow -3<x<1$,

δηλαδή $x\in(-3,1)$.

β. Από το πρώτο ερώτημα έχουμε $x\in(-3,1)$. Οπότε:

$$x\in(-3,1) \Rightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3>0 \\ x-1<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x+3|=x+3 \\ |x-1|=-x+1 \end{cases}$$

Συνεπώς $K=\dfrac{|x+3|+|x-1|}{4}=\dfrac{x+3-x+1}{4}=1$, δηλαδή ο K είναι σταθερός και ανεξάρτητος του x.

38. **GI_A_ALG_2_996**

Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|+|y-3|$, με x,y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1<x<4$ και $2<y<3$.

Να αποδείξετε ότι:

α. $A=x-y+2$. (Μονάδες 12)

β. $0<A<4$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Είναι, $\begin{cases} 1<x<4 \\ 2<y<3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ y-3<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-1|=x-1 \\ |y-3|=-y+3 \end{cases}$

Οπότε:

$$A=|x-1|+|y-3|=x-1-y+3=x-y+2$$

β. Έχουμε,

$$\begin{cases} 1<x<4 \\ 2<y<3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1<x<4 \\ -2>-y>-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1<x<4 \\ -3<-y<-2 \end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} -2<x-y<2 \Rightarrow$$

$0<x-y+2<4 \Rightarrow 0<A<4$

39. **GI_A_ALG_2_999**

α. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2-5x+6. (Μονάδες 12)

β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης. (Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει: $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=1$. Άρα, το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm1}{2}=\frac{5\pm1}{2}=\begin{cases}x_1=2\\x_2=3\end{cases}$$

Οπότε, $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$.

β.

i. Η συνάρτηση f ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία ισχύει:

$$x^2-5x+6\neq0$$

Ισοδύναμα, λόγω και του πρώτου ερωτήματος, για $x\neq2$ και $x\neq3$.

Άρα $A=\mathbb{R}-\{2,3\}$.

ii. Για κάθε $x\in A$, έχουμε $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}=\dfrac{x-2}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{1}{x-3}$.

40. **GI_A_ALG_2_1003**

Ένα κουτί περιέχει άσπρες, μαύρες, κόκκινες και πράσινες μπάλες. Οι άσπρες είναι 5, οι μαύρες είναι 9, ενώ οι κόκκινες και οι πράσινες μαζί είναι 16. Επιλέγουμε μια μπάλα στην τύχη. Δίνονται τα παρακάτω ενδεχόμενα:

Α: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΑΣΠΡΗ

Κ: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΚΟΚΚΙΝΗ

Π: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΠΡΑΣΙΝΗ

α. Χρησιμοποιώντας τα Α, Κ και Π να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων τα ενδεχόμενα:

i. Η μπάλα που επιλέγουμε δεν είναι άσπρη,

ii. Η μπάλα που επιλέγουμε είναι κόκκινη ή πράσινη. (Μονάδες 13)

β. Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης καθενός από τα δύο ενδεχόμενα του ερωτήματος (α). (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α.

i. A': Η μπάλα που επιλέγουμε δεν είναι άσπρη

ii. $K \cup \Pi$: Η μπάλα που επιλέγουμε είναι κόκκινη ή πράσινη

β. $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{N(A)}{N(\Omega)} = 1 - \frac{5}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$ και

$$P(K \cup \Pi) = \frac{N(K \cup \Pi)}{N(\Omega)} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}.$$

41. **GI_A_ALG_2_1005**

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{1+x}{x-1}$ και $B = \frac{2}{x^2 - x}$ όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι για να ορίζονται ταυτόχρονα οι παραστάσεις A, B πρέπει: $x \neq 1$ και $x \neq 0$. (Μονάδες 12)

β. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $A = B$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Η παράσταση A ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.
Η παράσταση B ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία
$x^2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x \neq 1$.

Άρα, για να ορίζονται ταυτόχρονα οι παραστάσεις A και B πρέπει:

$$x \neq 0 \text{ και } x \neq 1$$

β. Για $x \neq 0$ και $x \neq 1$ έχουμε:

$$A = B \Leftrightarrow \frac{1+x}{x-1} = \frac{2}{x^2 - x} \Leftrightarrow \frac{1+x}{x-1} = \frac{2}{x(x-1)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1+x}{1} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow x(1+x) = 2 \Leftrightarrow x + x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

Είναι $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -2$. Άρα, $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 > 0$.

Επομένως η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες τις

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Επομένως οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι οι $x = 1$ **ή** $x = -2$ και αφού είναι $x \neq 1$, άρα δεκτή λύση είναι η $x = -2$.

42. **GI_A_ALG_2_1007**

α. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $-2x^2+10x=12.\ (1)$. (Μονάδες 15)

β. Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Είναι

$$\begin{aligned}&-2x^2+10x=12 \Leftrightarrow\\ &0=2x^2-10x+12 \Leftrightarrow\\ &2\left(x^2-5x+6\right)=0 \Leftrightarrow\\ &x^2-5x+6=0\end{aligned}$$

Είναι $\alpha=1,\beta=-5,\gamma=6$. Άρα $\Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=1>0$.

Επομένως η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες τις

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\begin{cases}x_1=3\\ x_2=2\end{cases}.$$

β. Για $x\neq2$ έχουμε:

$$\frac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0 \Leftrightarrow 2x^2-10x+12=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$$

η οποία από το ερώτημα (α) έχει ρίζες τις $x_1=3$ ή $x_2=2$ από όπου δεχόμαστε μόνο την $x=3$, αφού θεωρήσαμε $x\neq2$.

43. **GI_A_ALG_2_1009**

Δίνεται η παράσταση: $A=|3x-6|+2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι

i. για κάθε $x\geq2, A=3x-4$

ii. για κάθε $x<2, A=8-3x$. (Μονάδες 12)

β. Αν για τον x ισχύει ότι $x\geq2$ να αποδείξετε ότι: $\dfrac{9x^2-16}{|3x-6|+2}=3x-4$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α.

i. Για κάθε $x\geq2 \Leftrightarrow 3x\geq6 \Leftrightarrow 3x-6\geq0$. Επομένως $|3x-6|=3x-6$ οπότε η παράσταση A γίνεται:

$$A=|3x-6|+2=3x-6+2=3x-4$$

ii. Για κάθε $x<2 \Leftrightarrow 3x<6 \Leftrightarrow 3x-6<0$. Επομένως $|3x-6|=-(3x-6)=-3x+6$ οπότε η παράσταση A γίνεται:

$$A=|3x-6|+2=-3x+6+2=-3x+8$$

β. Για κάθε $x\geq 2 \Leftrightarrow 3x\geq 6 \Leftrightarrow 3x-6\geq 0$. Επομένως $|3x-6|=3x-6$ και άρα είναι

$$\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2}=\frac{(3x)^2-4^2}{|3x-6|+2}=\frac{\cancel{(3x-4)}(3x+4)}{\cancel{3x-4}}=3x+4.$$

44. **GI_A_ALG_2_1015**

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με όρους $\alpha_2=0, \alpha_4=4$.

α. Να αποδείξετε ότι $\omega=2$ και $\alpha_1=-2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της. (Μονάδες 10)

β. Να αποδείξετε ότι ο $\nu-$**οστός** όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_\nu=2\nu-4, \nu\in\mathbb{N}^*$ και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α. Είναι

$$\begin{cases}\alpha_2=0\\ \alpha_4=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1+(2-1)\omega=0\\ \alpha_1+(4-1)\omega=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1+\omega=0\\ \alpha_1+3\omega=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1+\omega=0\\ \alpha_1+\omega+2\omega=4\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1+\omega=0\\ 0+2\omega=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1+2=0\\ \omega=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=-2\\ \omega=2\end{cases}$$

β. Είναι $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega=-2+2(\nu-1)=-2+2\nu-2=2\nu-4, \nu\in\mathbb{N}^*$

Για να βρούμε ποιος όρος της αριθμητικής προόδου ισούται με 98 αρκεί να βρούμε το ν ώστε $\alpha_\nu=98$.

Έχουμε $\alpha_\nu=98 \Leftrightarrow 2\nu-4=98 \Leftrightarrow \nu=51$. Άρα ο ζητούμενος όρος είναι ο α_{51}.

45. **GI_A_ALG_2_1024**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,\ 6)$, $B(-1,\ 4)$, να βρείτε τις τιμές των α, β. (Μονάδες 13)

β. Αν $\alpha=1$ και $\beta=5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. Αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{f}$ διέρχεται από τα σημεία $\mathbf{A(1,\ 6),\ B(-1,\ 4)}$, οι συντεταγμένες τους θα την επαληθεύουν, δηλαδή:

$$\mathbf{6=\alpha+\beta}\ (1) \text{ και } \mathbf{4=-\alpha+\beta}\ (2)$$

Από (1) και (2) προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε:

$$\mathbf{6+4=-\alpha+\alpha+\beta+\beta \Leftrightarrow 10=2\beta \Leftrightarrow \beta=5}$$

Για $\mathbf{\beta=5}$ η (1) δίνει $\mathbf{6=\alpha+5 \Leftrightarrow \alpha=1}$

β. Για $\mathbf{\alpha=1}$ και $\mathbf{\beta=5}$ ο τύπος της συνάρτησης γίνεται: $\mathbf{f(x)=x+5}$

- ✓ Για τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\mathbf{f}$ με τον άξονα $\mathbf{x'x}$ λύνουμε την εξίσωση $\mathbf{f(x)=0 \Leftrightarrow x+5=0 \Leftrightarrow x=-5}$. Συνεπώς το ζητούμενο σημείο είναι το $\mathbf{A(-5,0)}$.
- ✓ Για τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\mathbf{f}$ με τον άξονα $\mathbf{y'y}$ βάζουμε $\mathbf{x=0}$ στην $\mathbf{y=f(x)}$. Έτσι έχουμε $\mathbf{y=f(0)=0+5=5}$ και το ζητούμενο σημείο είναι το $\mathbf{B(0,5)}$.

46. **GI_A_ALG_2_1032**

α. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό $\mathbf{x}$ ώστε οι αριθμοί: $\mathbf{x,\ 2x+1,\ 5x+4}$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 13)

β. Να βρείτε το λόγο $\mathbf{\lambda}$ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i. $\mathbf{x=1}$

ii. $\mathbf{x=-1}$. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. Αφού οι αριθμοί: $\mathbf{x,\ 2x+1,\ 5x+4}$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει:

$$\mathbf{(2x+1)^2=x(5x+4) \Leftrightarrow}$$
$$\mathbf{4x^2+4x+1=5x^2+4x \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow}$$
$$\mathbf{x=\pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-1}$$

β.

i. Για $\mathbf{x=1}$ έχουμε τους όρους $\mathbf{1,\ 3,9}$ οπότε έχουμε λόγο $\mathbf{\lambda=\frac{3}{1}=3}$.

ii. Για $\mathbf{x=-1}$ έχουμε τους όρους $\mathbf{-1,\ -1,-1}$ οπότε έχουμε λόγο $\mathbf{\lambda=\frac{-1}{-1}=1}$.

47. **GI_A_ALG_2_1039**

α. Να λύσετε την ανίσωση $\mathbf{|x-1|\geq 5}$. (Μονάδες 8)

β. Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3. (Μονάδες 9)

γ. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β). (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

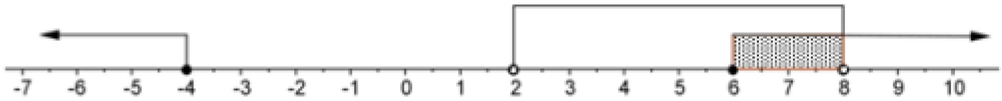
α. Έχουμε:

$$|x-1|\geq 5 \Leftrightarrow (x-1\geq 5 \text{ ή } x-1\leq -5) \Leftrightarrow x\geq 6 \text{ ή } x\leq -4 \quad (1)$$

β. Για τα x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3 ισχύει:

$$d(x,5)<3 \Leftrightarrow |x-5|<3 \Leftrightarrow -3<x-5<3 \Leftrightarrow -3+5<x<3+5 \Leftrightarrow 2<x<8 \quad (2)$$

γ. Από τη συναλήθευση των (1) και (2) έχουμε ότι: $6\leq x<8$.



48. **GI_A_ALG_2_1042**

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} 2x+4, x<0 \\ x-1, x\geq 0 \end{cases}$

α. Να δείξετε ότι $f(-1)=f(3)$ (Μονάδες 13)

β. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, ώστε: $f(x)=0$ (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. Είναι $f(3)=3-1=2$ και $f(-1)=2(-1)+4=2$. Οπότε είναι:

$$f(-1)=f(3)=2.$$

β. Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=0$. Είναι:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 2x+4=0, & x<0 \\ & \text{ή} \\ x-1=0, & x\geq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x=-2, & x<0 \\ & \text{ή} \\ x=1, & x\geq 0 \end{array}\right\}$$, δεκτές και οι δύο.

49. **GI_A_ALG_2_1050**

α. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί

$: x+2,\ (x+1)^2,\ 3x+2$ με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 13)

β. Να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου, όταν:

i) $x = 1$

ii) $x = -1$. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. Οι αριθμοί: $\alpha = x+2,\ \beta = (x+1)^2,\ \gamma = 3x+2$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2} \Leftrightarrow$$
$$(x+1)^2 = \frac{x+2+3x+2}{2} \Leftrightarrow$$
$$x^2 + 2\cdot x\cdot 1 + 1^2 = \frac{2(2x+2)}{2} \Leftrightarrow$$
$$x^2 + 2x + 1 = 2x + 2 \Leftrightarrow$$
$$x^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$x_1 = 1,\ \ x_2 = -1$$

β.

i) Για $x = 1$ έχουμε $\alpha = 3, \beta = 4, \gamma = 5$, οπότε $\omega = 4 - 3 = 1$.

ii) Για $x = -1$ έχουμε $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = -1$, οπότε $\omega = 0 - 1 = -1$.

50. **GI_A_ALG_2_1055**

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 1)x = (\lambda+1)(\lambda+2)\ \ (1)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = 1$ και για $\lambda = -1$. (Μονάδες 12)

β. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α.

✓ Για $\lambda = 1$ η εξίσωση (1) γίνεται, $(1^2 - 1)x = (1+1)(1+2) \Leftrightarrow 0x = 6$, η οποία είναι αδύνατη.

✓ Για $\lambda = -1$ η εξίσωση (1) γίνεται,

$$\left[(-1)^2 - 1\right]x = (-1+1)(-1+2) \Leftrightarrow (1-1)x = (-1+1)(-1+2) \Leftrightarrow 0x = 0$$

η οποία είναι ταυτότητα.

β. Η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $\lambda^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \neq 1$, από όπου προκύπτει ισοδύναμα ότι $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$. Συνεπώς για $\lambda \neq 1$ και

$\lambda \neq -1$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{\lambda^2-1} = \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{(\lambda-1)(\lambda+1)} = \frac{\lambda+2}{\lambda-1}$$

51. **GI_A_ALG_2_1057**

Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενή της.

α. Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς. (Μονάδες 9)

β. Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά; (Μονάδες 8)

γ. Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο; (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α. Από την υπόθεση προκύπτει ότι το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αποτελεί αριθμητική πρόοδο με

$$\alpha_1 = 120 \text{ και } \omega = 20$$

Έτσι ο ν-οστός όρος, δηλαδή το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς, είναι:

$$\begin{aligned}\alpha_\nu &= \alpha_1 + (\nu-1)\omega = \\ &= 120 + (\nu-1)20 = \\ &= 20\nu + 100\end{aligned}$$

β. Η τελευταία σειρά είναι η 10^{η} οπότε ο α_{10} εκφράζει το ζητούμενο πλήθος καθισμάτων:

$$\begin{aligned}\alpha_{10} &= 20 \cdot 10 + 100 = \\ &= 200 + 100 = 300\end{aligned}$$

γ. Το σύνολο των καθισμάτων του γυμναστήριου είναι το άθροισμα του πλήθους των καθισμάτων όλων των σειρών, δηλαδή το S_{10}.

$$S_{10} = \frac{\alpha_1 + \alpha_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{120+300}{2} \cdot 10 = 210 \cdot 10 = 2100$$

52. **GI_A_ALG_2_1062**

α. Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y-3| < 1$. (Μονάδες 12)

β. Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε

$$|y-3|<1 \Leftrightarrow -1<y-3<1 \Leftrightarrow -1+3<y-3+3<1+3 \Leftrightarrow \boxed{2<y<4}$$

β. Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι το γινόμενο των διαστάσεών του. Οπότε $E=xy$. Επειδή $1<x<3$ και $2<y<4$ και όλα τα μέλη είναι θετικά, πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις δύο σχέσεις έχουμε:

$$1\cdot 2<xy<3\cdot 4 \Leftrightarrow 2<E<12.$$

53. **GI_A_ALG_2_1064**

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1=19$ και $\alpha_{10}-\alpha_6=24$.

α. Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega=6$. (Μονάδες 9)

β. Να βρείτε τον α_{20}. (Μονάδες 8)

γ. Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α. Εφαρμόζουμε τον τύπο του νιοστού όρου $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$ διαδοχικά για $\nu=10$ και $\nu=6$.

- Για $\nu=10$ παίρνουμε: $\alpha_{10}=\alpha_1+(10-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_{10}=19+9\omega$
- Για $\nu=6$ παίρνουμε: $\alpha_6=\alpha_1+(6-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_6=19+5\omega$

Οπότε η σχέση $\alpha_{10}-\alpha_6=24$ γράφεται:

$$\alpha_{10}-\alpha_6=24 \Leftrightarrow (19+9\omega)-(19+5\omega)=24 \Leftrightarrow$$
$$19+9\omega-19-5\omega=24 \Leftrightarrow 4\omega=24 \Leftrightarrow \omega=6$$

β. Ο τύπος του νιοστού όρου για $\alpha_1=19$ και $\omega=6$ γίνεται:

$\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_\nu=19+(\nu-1)6$. Συνεπώς για $\nu=20$ έχουμε:

$\alpha_{20}=19+(20-1)6=19+19\cdot 6=19(1+6)=19\cdot 7 \Leftrightarrow \alpha_{20}=133$.

γ. Στον τύπο $S_\nu=\frac{\nu}{2}(2\alpha_1+(\nu-1)\omega)$ για $\nu=20$ έχουμε:

$$S_{20}=\frac{20}{2}[2\cdot 19+(20-1)6]=10(2\cdot 19+19\cdot 6)=10(8\cdot 19) \Leftrightarrow S_{20}=1520$$

54. **GI_A_ALG_2_1067**

Δίνεται η παράσταση: $\mathbf{K}=\dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}$

α. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-3x-2$. (Μονάδες 10)

β. Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση $\mathbf{K}$; (Μονάδες 7)

γ. Να απλοποιήσετε την παράσταση $\mathbf{K}$. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α. Η διακρίνουσα του τριωνύμου $2x^2-3x-2$ είναι:

$\Delta=(-3)^2-4\cdot2\cdot(-2)=9+16=25>0$ και συνεπώς το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{25}}{2\cdot2}=\frac{3\pm5}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{3+5}{4}=2\\ x_2=\dfrac{3-5}{4}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Τότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής:

$$2(x-x_1)(x-x_2)=2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x-2)(2x+1)$$

β. Η παράσταση $\mathbf{K}$ ορίζεται για εκείνα τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία ο παρονομαστής της παραμένει διάφορος του μηδενός. Οι ρίζες του παρονομαστή, είναι οι ρίζες του τριωνύμου του πρώτου ερωτήματος, δηλαδή οι $x_1=2$ και $x_2=-\frac{1}{2}$. Συνεπώς η παράσταση $\mathbf{K}$ ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2},2\right\}$.

γ. Η παράσταση θα απλοποιηθεί, παραγοντοποιώντας αριθμητή και παρονομαστή. Λόγω και του πρώτου ερωτήματος, έχουμε:

$$\mathbf{K}=\frac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}=\frac{(x-2)^2}{(x-2)(2x+1)}=\frac{x-2}{2x+1}$$

55. **GI_A_ALG_2_1070**

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ με $\beta\neq0$ και $\delta\neq\gamma$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \text{ και } \frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4}.$$

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=3\beta$ και $\delta=5\gamma$. (Μονάδες 10)

β. Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi=\dfrac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}$. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α. Από τις δοθείσες έχουμε: $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \Rightarrow \alpha+\beta=4\beta \Rightarrow \alpha=3\beta$ και $\frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4} \Rightarrow 4\gamma=\delta-\gamma \Rightarrow \delta=5\gamma$.

β. Έχουμε $\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}=\frac{\gamma(\alpha+\beta)}{\beta(\delta-\gamma)} \overset{(\alpha)}{\Rightarrow} \frac{\gamma(3\beta+\beta)}{\beta(5\gamma-\gamma)}=\frac{4\beta\gamma}{4\beta\gamma}=1$.

56. **GI_A_ALG_2_1074**

α. Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y-3|<1$. (Μονάδες 12)

β. Αν x,y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να αποδείξετε ότι $6<\Pi<14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε

$$|y-3|<1 \Leftrightarrow -1<y-3<1 \Leftrightarrow -1+3<y-3+3<1+3 \Leftrightarrow \boxed{2<y<4}$$

β. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις x,y είναι $\Pi=2x+2y=2(x+y)$. Από τις σχέσεις που δόθηκαν για τις διαστάσεις, έχουμε: $\begin{cases}1<x<3\\2<y<4\end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} 3<x+y<7 \Rightarrow 2\cdot 3<2(x+y)<2\cdot 7 \Rightarrow 6<\Pi<14$

57. **GI_A_ALG_2_1077**

α. Να λύσετε την ανίσωση: $|x-5|<4$. (Μονάδες 10)

β. Αν κάποιος αριθμός α επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση, να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{9}<\frac{1}{\alpha}<1$. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε:

$$\begin{aligned}&|x-5|<4 \Leftrightarrow\\ &-4<x-5<4 \Leftrightarrow\\ &-4+5<x-5+5<4+5 \Leftrightarrow\\ &1<x<9\end{aligned}$$

β. Αφού ο α επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση ισχύει: $1<\alpha<9$. Αφού τα μέλη είναι θετικά, αντιστρέφοντας και αλλάζοντας φορά στην ανίσωση παίρνουμε: $1<\alpha<9 \Rightarrow 1>\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{9} \Rightarrow \frac{1}{9}<\frac{1}{\alpha}<1$.

58. GI_A_ALG_2_1080

Έστω x,y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y}=-2$.

α. Να αποδείξετε ότι: $y=2x$. (Μονάδες 12)

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Αρχικά πρέπει και αρκεί $x-4y\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 4y$. Οπότε:

$$\begin{aligned}&\frac{4x+5y}{x-4y}=-2 \Rightarrow 4x+5y=-2(x-4y) \Rightarrow\\ &4x+5y=-2x+8y \Rightarrow 4x+2x=8y-5y \Rightarrow\\ &6x=3y \Rightarrow y=2x\end{aligned}$$

β. Χρησιμοποιώντας το πρώτο ερώτημα βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}&A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}\overset{y=2x}{=}\frac{2x^2+3(2x)^2+x\cdot 2x}{x\cdot 2x}=\\ &\frac{2x^2+12x^2+2x^2}{2x^2}=\frac{16x^2}{2x^2}=8\end{aligned}$$

59. GI_A_ALG_2_1082

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x+2}{x^2-x-6}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 15)

β. Να δείξετε ότι: $f(2)+f(4)=0$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\mathbf{f}$ αποτελείται από εκείνα τα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ για τα οποία το $\dfrac{\mathbf{x+2}}{\mathbf{x^2-x-6}}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδενός.

Βρίσκουμε για ποια $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ μηδενίζεται ο παρονομαστής.

Η εξίσωση $\mathbf{x^2-x-6=0}$ έχει $\mathbf{\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-6)=25>0}$ άρα έχουμε δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις:

$$\mathbf{x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm5}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{1+5}{2}=3\\[2mm] x_2=\dfrac{1-5}{2}=-2\end{cases}}.$$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της $\mathbf{f}$ είναι το $\mathbf{A}=\mathbb{R}-\{\mathbf{-2,3}\}$.

β. Για $\mathbf{x\neq-2,3}$ έχουμε ότι: $\mathbf{f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-x-6}=\dfrac{x+2}{(x-3)(x+2)}=\dfrac{1}{x-3}}$.

Οπότε: $\mathbf{f(2)+f(4)=\dfrac{1}{2-3}+\dfrac{1}{4-3}=-1+1=0}$.

60. **GI_A_ALG_2_1086**

Οι αριθμοί $\mathbf{A=1}$, $\mathbf{B=x+4}$, $\mathbf{\Gamma=x+8}$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου $(\mathbf{\alpha_\nu})$.

α. Να βρείτε την τιμή του $\mathbf{x}$. (Μονάδες 10)

β. Αν $\mathbf{x=1}$ και ο αριθμός $\mathbf{A}$ είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου $(\mathbf{\alpha_\nu})$,

i) να υπολογίσετε τη διαφορά $\mathbf{\omega}$. (Μονάδες 7)

ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α. Οι αριθμοί $\mathbf{A,B,\Gamma}$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και συνεπώς ο $\mathbf{B}$ είναι ο αριθμητικός μέσος των $\mathbf{A}$ και $\mathbf{\Gamma}$. Ισχύει λοιπόν:

$$\mathbf{B=\frac{A+\Gamma}{2}\Leftrightarrow 2B=A+\Gamma\Leftrightarrow}$$
$$\mathbf{2(x+4)=1+x+8\Leftrightarrow}$$
$$\mathbf{2x+8=x+9\Leftrightarrow x=1}$$

β. Για $\mathbf{x=1}$ οι τρεις αριθμοί είναι οι $\mathbf{A=1}$, $\mathbf{B=5}$ και $\mathbf{\Gamma=9}$.

i) Η διαφορά της προόδου είναι $\omega = B - A = 5 - 1 = 4$.

ii) Με $\alpha_1 = A = 1$ και $\omega = 4$, ο νιοστός όρος δίνεται από τον τύπο

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 1 + (\nu - 1)4 = 1 + 4\nu - 4 \Leftrightarrow \alpha_\nu = 4\nu - 3$. Οπότε για $\nu = 20$ έχουμε ότι: $\alpha_{20} = 4 \cdot 20 - 3 = 77$.

iii)

61. **GI_A_ALG_2_1088**

α. Αν οι αριθμοί $4 - x$, x, 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x. (Μονάδες 9)

β. Αν οι αριθμοί $4 - x$, x, 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x. (Μονάδες 9)

γ. Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4 - x$, x, 2 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. Οι αριθμοί $4 - x$, x, 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, και συνεπώς ο x είναι ο αριθμητικός μέσος των $4 - x$ και 2. Έχουμε λοιπόν:
$x = \dfrac{4 - x + 2}{2} \Leftrightarrow 2x = 6 - x \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$.

β. Οι αριθμοί $4 - x$, x, 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και συνεπώς ισχύει: $x^2 = (4 - x)2 \Leftrightarrow x^2 = -2x + 8 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$. Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36 > 0$ και συνεπώς έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2 + 6}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-2 - 6}{2} = -4 \end{cases}$$

γ. Λόγω των δύο πρώτων ερωτημάτων έχουμε ότι:

- Οι αριθμοί $4 - x$, x, 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου για $x = 2$, ενώ
- είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου για $x = 2$ και $x = -4$.

<u>Επαλήθευση</u>:

Για $x = 2$ οι τρεις αριθμοί είναι οι $2, 2, 2$ και αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με διαφορά $\omega = 0$ και γεωμετρικής με λόγο $\lambda = 1$.

62. **GI_A_ALG_2_1089**

Για κάθε πραγματικό αριθμό $\mathbf{x}$ με την ιδιότητα $5<x<10$,

α. Να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς απόλυτες τιμές. (Μονάδες 10)

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\frac{|x-5|}{x-5}+\frac{|x-10|}{x-10}$ (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α. Είναι $5<x<10$, άρα $5<x \Leftrightarrow x-5>0$ οπότε και $|x-5|=x-5$ και

$x<10 \Leftrightarrow x-10<0$ οπότε και $|x-10|=-x+10$.

β. $A=\frac{|x-5|}{x-5}+\frac{|x-10|}{x-10}$

Πρέπει $x-5\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 5$ και $x-10\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 10$ τα οποία ισχύουν.

Για $5<x<10$ έχουμε:

$$A=\frac{|x-5|}{x-5}+\frac{|x-10|}{x-10}=\frac{x-5}{x-5}+\frac{-x+10}{x-10}=\frac{x-5}{x-5}+\frac{-(x-10)}{x-10}=1-1=0.$$

63. **GI_A_ALG_2_1090**

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f}$, με τύπο $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 13)

β. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το σημείο $M\left(\alpha,\frac{1}{8}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{f}$. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. Πρέπει $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 1$ **και** $x\neq -1$.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\mathbf{f}$ είναι το $A_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$ ή αλλιώς το $A_f=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

β. Αφού το σημείο $\mathbf{M\left(\alpha,\frac{1}{8}\right)}$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{f}$ τότε $\mathbf{f(\alpha)=\frac{1}{8}}$ με $\mathbf{\alpha\neq 1}$ **και** $\mathbf{\alpha\neq -1}$.

$$\mathbf{f(\alpha)=\frac{1}{8}\Leftrightarrow\frac{1}{\alpha^2-1}=\frac{1}{8}\Leftrightarrow\alpha^2-1=8\Leftrightarrow\alpha^2-1=8\Leftrightarrow\alpha^2=9\Leftrightarrow\alpha=\pm 3}.$$

64. **GI_A_ALG_2_1091**

Δίνεται η παράσταση: $\mathbf{A=|x-1|-|x-2|}$.

α. Για $\mathbf{1<x<2}$, να δείξετε ότι: $\mathbf{A=2x-3}$ (Μονάδες 13)

β. Για $\mathbf{x<1}$, να δείξετε ότι η παράσταση $\mathbf{A}$ έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του $\mathbf{x}$), την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. Είναι $\mathbf{1<x<2}$, άρα $\mathbf{1<x\Leftrightarrow x-1>0}$ οπότε και $\mathbf{|x-1|=x-1}$ και $\mathbf{x<2\Leftrightarrow x-2<0}$ οπότε και $\mathbf{|x-2|=-x+2}$. Τότε:

$$\mathbf{A=|x-1|-|x-2|=x-1-(-x+2)=x-1+x-2=2x-3}.$$

β. Όταν είναι $\mathbf{x<1}$ τότε και $\mathbf{x<2}$.

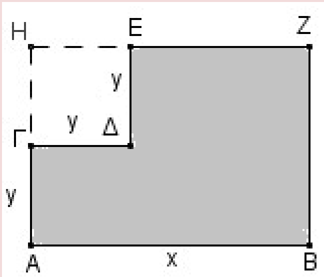
Τότε $\mathbf{x<1\Leftrightarrow x-1<0}$ και $\mathbf{|x-1|=-x+1}$ και

$\mathbf{x<2\Leftrightarrow x-2<0}$ και $\mathbf{|x-2|=-x+2}$

Τότε $\mathbf{A=|x-1|-|x-2|=-x+1-(-x+2)=-x+1+x-2=-1}$.

65. **GI_A_ALG_2_1092**

Από το ορθογώνιο $\mathbf{ΑΒΖΗ}$ αφαιρέθηκε το τετράγωνο $\mathbf{ΓΔΕΗ}$ πλευράς $\mathbf{y}$.



α. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος $\mathbf{ΕΖΒΑΓΔ}$ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\mathbf{Π=2x+4}$. (Μονάδες 10)

β. Αν ισχύει $\mathbf{5<x<8}$ και $\mathbf{1<y<2}$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α. Είναι $ZB = E\Delta + \Gamma A = y + y = 2y$ και $EZ = HZ - HE = x - y$.

Η περίμετρος του $EZBA\Gamma\Delta$ είναι ίση με

$$AB + BZ + ZE + E\Delta + \Delta\Gamma + \Gamma A = x + 2y + x - y + y + y + y = 2x + 4y$$

β. Έχουμε:

✓ $5 < x < 8 \overset{\text{επί } 2}{\Longrightarrow} 2\cdot 5 < 2\cdot x < 2\cdot 8 \Rightarrow 10 < 2\cdot x < 16 \quad (1)$

✓ $1 < y < 2 \overset{\text{επί } 4}{\Longrightarrow} 4\cdot 1 < 4\cdot y < 4\cdot 2 \Rightarrow 4 < 2\cdot y < 8 \quad (2)$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) παίρνουμε:

$$10 + 4 < 2x + 4y < 16 + 8 \Rightarrow 14 < \Pi < 24$$

66. **GI_A_ALG_2_1093**

Δίνονται οι αριθμοί: $A = \dfrac{1}{5+\sqrt{5}}$, $B = \dfrac{1}{5-\sqrt{5}}$

α. Να δείξετε ότι:

i) $A + B = \dfrac{1}{2}$ (Μονάδες 8)

ii) $A \cdot B = \dfrac{1}{20}$ (Μονάδες 8)

β. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε:

i) $$A + B = \frac{1}{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{5-\sqrt{5}} = \frac{1\cdot\left(5-\sqrt{5}\right) + 1\cdot\left(5+\sqrt{5}\right)}{\left(5+\sqrt{5}\right)\cdot\left(5-\sqrt{5}\right)} =$$

$$= \frac{5-\sqrt{5}+5+\sqrt{5}}{5^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{10}{25-5} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

ii) $$A\cdot B = \left(\frac{1}{5+\sqrt{5}}\right)\cdot\left(\frac{1}{5-\sqrt{5}}\right) = \frac{1\cdot 1}{\left(5+\sqrt{5}\right)\cdot\left(5-\sqrt{5}\right)} = \frac{1}{5^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{1}{25-5} = \frac{1}{20}$$

β. Η εξίσωση με ρίζες x_1 **και** x_2 είναι η $x^2 - Sx + P = 0$, όπου $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$ (τύποι **Vieta**).

Εδώ $\mathbf{S = A + B = \frac{1}{2}}$ και $\mathbf{P = A \cdot B = \frac{1}{20}}$.

Η εξίσωση είναι η $\mathbf{x^2 - \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{20} = 0 \Leftrightarrow 20x^2 - 10x + 1 = 0}$

67. **GI_A_ALG_2_1096**

Η απόσταση $\mathbf{y}$ (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη $\mathbf{A}$, μετά από $\mathbf{x}$ λεπτά, δίνεται από τη σχέση: $\mathbf{y = 35 + 0,8x}$.

α. Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη $\mathbf{A}$ μετά από $\mathbf{25}$ λεπτά; (Μονάδες 12)

β. Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει $\mathbf{75}$ χιλιόμετρα από την πόλη $\mathbf{A}$; (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Για $\mathbf{x = 25}$ είναι $\mathbf{y = 35 + 0,8 \cdot 25 = 35 + 20 = 55}$ χιλιόμετρα.

β. Για $\mathbf{y = 75}$ έχουμε:

$$\mathbf{75 = 35 + 0,8 \cdot x \Leftrightarrow 75 - 35 = 0,8 \cdot x \Leftrightarrow 40 = 0,8 \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{40}{0,8} = 50} \text{ λεπτά.}$$

68. **GI_A_ALG_2_1097**

Δίνεται το τριώνυμο $\mathbf{2x^2 + \lambda x - 5}$, όπου $\boldsymbol{\lambda \in \mathbb{R}}$.

α. Αν μια ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός $\mathbf{x_0 = 1}$, να προσδιορίσετε την τιμή του $\boldsymbol{\lambda}$. (Μονάδες 12)

β. Για $\boldsymbol{\lambda = 3}$, να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Για $\mathbf{x_0 = 1}$ η $\mathbf{2{x_0}^2 + \lambda x_0 - 5 = 0}$ μας δίνει:

$$\mathbf{2 \cdot 1^2 + \lambda \cdot 1 - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3}$$

β. Για $\boldsymbol{\lambda = 3}$ το τριώνυμο γίνεται $\mathbf{2x^2 + 3x - 5}$ με διακρίνουσα $\boldsymbol{\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 + 40 = 49}$ και ρίζες

$$\mathbf{x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 7}{4}}, \text{ δηλαδή:}$$

$$\mathbf{x_1 = \frac{-3 + 7}{4} = \frac{4}{4} = 1} \text{ και } \mathbf{x_2 = \frac{-3 - 7}{4} = \frac{-10}{4} = \frac{-5}{2}}.$$

Άρα $\mathbf{2x^2 + 3x - 5 = 2 \cdot (x - 1)\left(x - \left(-\frac{5}{2}\right)\right) = 2 \cdot (x - 1)\left(x + \frac{5}{2}\right) =}$

$$=(x-1)\left(2\cdot x+2\cdot\frac{5}{2}\right)=(x-1)(2\cdot x+5)$$

69. **GI_A_ALG_2_1100**

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2-5\beta x+2\beta^2=0$ (1), με παράμετρο $\beta>0$.

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1=2\beta$ **και** $x_2=\frac{\beta}{2}$ (Μονάδες 12)

β. Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Είναι $\alpha=1,\beta=-5\beta,\gamma=2\beta^2$.

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5\beta)^2-4\cdot2\cdot(2\beta^2)=25\beta^2-16\beta^2=9\beta^2>0$ γιατί $\beta>0$

Έχει δύο ρίζες άνισες $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-5\beta)\pm\sqrt{9\beta^2}}{2\cdot2}=\frac{5\beta\pm3\beta}{4}$, δηλαδή

$x_1=\frac{5\beta+3\beta}{4}=\frac{8\beta}{4}=2\beta$ και $x_2=\frac{5\beta-3\beta}{4}=\frac{2\beta}{4}=\frac{\beta}{2}$.

β. Οι αριθμοί α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν $\beta^2=\alpha\cdot\gamma$.

Για να είναι οι αριθμοί x_1, β, x_2 διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου πρέπει:

$\beta^2=x_1\cdot x_2\Leftrightarrow\beta^2=2\beta\cdot\frac{\beta}{2}\Leftrightarrow\beta^2=\beta^2$, το οποίο ισχύει.

70. **GI_A_ALG_2_1101**

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-2\beta x+(\beta^2-4)=0$ (1) με παράμετρο $\beta\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1=\beta-2$ **και** $x_2=\beta+2$ (Μονάδες 12)

β. Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Είναι $\alpha=1, \beta=-2\beta, \gamma=\beta^2-4$.

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2\beta)^2-4\cdot 1\cdot(\beta^2-4)=4\beta^2-4\beta^2+16=16>0 \text{ γιατί } \beta>0$$

Έχει δύο ρίζες άνισες $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-(-2\beta)\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\dfrac{2\beta\pm 4}{2}$, δηλαδή

$x_1=\dfrac{2\beta-4}{2}=\beta-2$ και $x_2=\dfrac{2\beta+4}{2}=\beta+2$.

β. Οι αριθμοί α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν $\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$.

Για να είναι οι αριθμοί x_1, β, x_2 διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου πρέπει:

$\beta=\dfrac{x_1+x_2}{2}\Leftrightarrow\beta=\dfrac{\beta-2+\beta+2}{2}\Leftrightarrow\beta=\dfrac{2\beta}{2}\Leftrightarrow\beta=\beta$, το οποίο ισχύει.

71. **GI_A_ALG_2_1102**

Δίνονται δύο ενδεχόμενα A,B ενός δειγματικού χώρου Ω και οι πιθανότητες

$$P(A)=\frac{3}{4},\ P(A-B)=\frac{5}{8} \text{ και } P(B)=\frac{1}{4}$$

α. Να υπολογίσετε την $P(A\cap B)$ (Μονάδες 9)

β.

i) Να παραστήσετε με διάγραμμα **Venn** και να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων το ενδεχόμενο: «**Α ή Β**» (Μονάδες 7)

ii) Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης του παραπάνω ενδεχομένου. (Μονάδες 9)

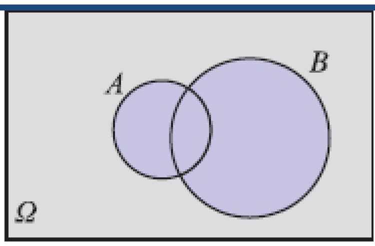
ΛΥΣΗ

α. Για δυο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\Leftrightarrow\frac{5}{8}=\frac{3}{4}-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{8}$$

β. Έχουμε:

i) Το ενδεχόμενο «**Α ή Β**» πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A,B ,συμβολίζεται με $A\cup B$ και με διάγραμμα **Venn** παριστάνεται όπως στο παρακάτω σχήμα.



ii) Από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων έχουμε ότι:

$$\mathbf{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\Leftrightarrow P(A\cup B)=\frac{7}{8}}.$$

72. **GI_A_ALG_2_1273**

Δίνονται δύο τμήματα με μήκη $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$, για τα οποία ισχύουν:

$$\mathbf{|x-3|\le 2} \text{ και } \mathbf{|y-6|\le 4}.$$

α. Να δείξετε ότι $\mathbf{1\le x\le 5}$ και $\mathbf{2\le y\le 10}$ (Μονάδες 12)

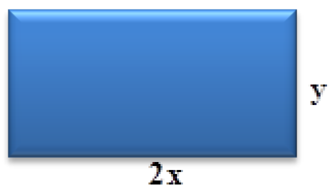
β. Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $\mathbf{2x}$ και $\mathbf{y}$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε:
$\mathbf{|x-3|\le 2\Leftrightarrow -2\le x-3\le 2\Leftrightarrow -2+3\le x-3+3\le 2+3\Leftrightarrow 1\le x\le 5}$.
Ακόμη
$\mathbf{|y-6|\le 4\Leftrightarrow -4\le y-6\le 4\Leftrightarrow -4+6\le y-6+6\le 4+6\Leftrightarrow 2\le y\le 10}$.

β. Η περίμετρος του ορθογωνίου με διαστάσεις $\mathbf{2x}$ και $\mathbf{y}$ είναι:

$$\mathbf{\Pi=2x+y+2x+y=4x+2y}$$



Πολλαπλασιάζοντας με $\mathbf{4}$ τη σχέση $\mathbf{1\le x\le 5}$ έχουμε $\mathbf{1\le x\le 5\Leftrightarrow 4\le 4x\le 20}$.

Πολλαπλασιάζοντας με $\mathbf{2}$ τη σχέση $\mathbf{2\le y\le 10}$ έχουμε $\mathbf{2\le y\le 10\Leftrightarrow 4\le 2y\le 20}$.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις τελευταίες έχουμε:

$$\mathbf{8\le 4x+2y\le 40}$$

Άρα η μικρότερη τιμή της περιμέτρου είναι $\mathbf{8}$ και πραγματοποιείται για τις μικρότερες τιμές των $\mathbf{x,y}$, δηλαδή όταν το $\mathbf{x=1}$ και το $\mathbf{y=2}$, ενώ η μεγαλύτερη είναι $\mathbf{40}$ και πραγματοποιείται για αντίστοιχα για τις μεγαλύτερες τιμές τους, δηλαδή πραγματοποιείται όταν $\mathbf{x=5}$ και $\mathbf{y=10}$.

73. **GI_A_ALG_2_1275**

Δίνεται το τριώνυμο $\mathbf{2x^2+5x-1}$

α. Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες $\mathbf{x_1}$ και $\mathbf{x_2}$ (Μονάδες 6)

β. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: $\mathbf{x_1+x_2}$, $\mathbf{x_1x_2}$ και $\mathbf{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}$

(Μονάδες 9)

γ. Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\mathbf{\frac{1}{x_1}}$ και $\mathbf{\frac{1}{x_2}}$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το τριώνυμο έχει διακρίνουσα θετική.
Έχουμε:

$$\mathbf{\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=5^2-4\cdot 2\cdot(-1)=33>0}$$

β. Από τους τύπους του **Vieta** έχουμε ότι: $\mathbf{S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{5}{2}}$ και

$\mathbf{P=x_1x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=-\frac{1}{2}}$

Για την παράσταση $\mathbf{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}$ έχουμε:

$$\mathbf{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2}{x_1x_2}+\frac{x_1}{x_1x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}}=5}$$

γ. Η εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες $\mathbf{\frac{1}{x_1}}$ και $\mathbf{\frac{1}{x_2}}$ θα έχει άθροισμα και γινόμενο ριζών τα εξής:

$\mathbf{S'=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=5}$ και $\mathbf{P'=\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1x_2}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2}$. Άρα η εξίσωση είναι η:

$$\mathbf{x^2-S'x+P'=0\Leftrightarrow x^2-5x-2=0}.$$

74. **GI_A_ALG_2_1276**

Δίνεται η παράσταση $K = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$.

α. Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x, ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 12)

β. Αν $-2<x<3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Για να έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση K πρέπει να ισχύουν:

- ✓ $x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -2$ και
- ✓ $x-3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3$ και
- ✓ $x^2+4x+4\geq 0 \Leftrightarrow (x+2)^2\geq 0$ που ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x και
- ✓ $x^2-6x+9\geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2\geq 0$ που ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x

Άρα το x μπορεί να πάρει όλες τις πραγματικές τιμές εκτός του -2 και του 3.

β. Η παράσταση K γράφεται ως εξής:

$$K = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3} = \frac{\sqrt{(x+2)^2}}{x+2} - \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} = \frac{|x+2|}{x+2} - \frac{|x-3|}{x-3}$$

Όμως:

$-2<x<3 \Leftrightarrow 0<x+2<5 \Leftrightarrow |x+2| = x+2$ και

$-2<x<3 \Leftrightarrow -5<x-3<0 \Leftrightarrow |x-3| = -(x-3)$

Οπότε η παράσταση K γίνεται:

$$K = \frac{|x+2|}{x+2} - \frac{|x-3|}{x-3} = \frac{x+2}{x+2} - \frac{-(x-3)}{x-3} = 1-(-1) = 2$$

75. **GI_A_ALG_2_1277**

Δίνονται οι ανισώσεις $-x^2+5x-6<0$ (1) και $x^2-16\leq 0$ (2).

α. Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2). (Μονάδες 12)

β. Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Το τριώνυμο $-x^2+5x+6$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 5^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-6) = 1$ και ρίζες τους αριθμούς $x_{1,2} = \dfrac{-5\pm 1}{-2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$.

Κατασκευάζοντας τον πίνακα προσήμων βρίσκουμε ότι οι λύσεις της ανίσωσης είναι

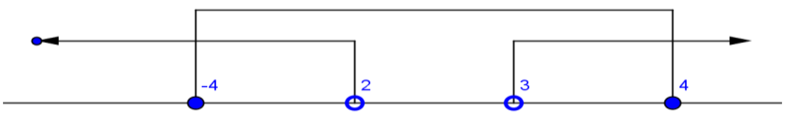
$$x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$$

x	$-\infty$	2		3		$+\infty$
$-x^2+5x-6$	-	0	+	0	-	

Για την ανίσωση (2) έχουμε:

$$x^2 - 16 \le 0 \Leftrightarrow x^2 \le 16 \Leftrightarrow |x| \le 4 \Leftrightarrow -4 \le x \le 4$$

β. Από το παρακάτω διάγραμμα



έχουμε ότι οι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι:

$$x \in [-4, 2) \cup (3, 4]$$

76. **GI_A_ALG_2_1278**

Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $d(x,-2) < 1$

Να δείξετε ότι:

α. $-3 < x < -1$ (Μονάδες 10)

β. $x^2 + 4x + 3 < 0$ (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε:

$$d(x,-2)<1 \Leftrightarrow |x+2|<1 \Leftrightarrow -1<x+2<1 \Leftrightarrow -1-2<x+2-2<1-2 \Leftrightarrow -3<x<-1$$

β. Για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $-3<x<-1$ κατασκευάζουμε πίνακα πρόσημου για το x^2+4x+3, έχουμε:

$\Delta=0$ και $x=-3$, $x=-1$ οπότε:

x	$-\infty$	-3		-1		$+\infty$
x^2+4x+3	+	0	-	0	+	

Έτσι για τα x για τα οποία ισχύει $-3<x<-1$, έχουμε $x^2+4x+3<0$.

2^{ος} Τρόπος

Είναι:

$$x^2+4x+3=x^2+4x+4-1=(x+2)^2-1=(x+2-1)(x+2+1)=(x+1)(x+3)$$

Όμως

$x<-1 \Leftrightarrow x+1<0$ και

$x>-3 \Leftrightarrow x+3>0$

Οπότε $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)<0$

3^{ος} Τρόπος

Είναι

$$\begin{aligned}
&x^2+4x+3<0 \overset{\text{συν } 1}{\Leftrightarrow}\\
&x^2+4x+1+3<1 \Leftrightarrow\\
&x^2+4x+4<1 \Leftrightarrow\\
&(x+2)^2<1 \Leftrightarrow\\
&\sqrt{(x+2)^2}<\sqrt{1} \Leftrightarrow\\
&|x+2|<1 \Leftrightarrow\\
&-1\leq x+2<1 \Leftrightarrow -1-2\leq x<1-2 \Leftrightarrow -3\leq x\leq -1
\end{aligned}$$

77. **GI_A_ALG_2_1281**

Δίνεται το τριώνυμο $-x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{3}$

α. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$. (Μονάδες 12)

β. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε $\alpha=-1,\ \beta=\sqrt{3}-1,\ \gamma=\sqrt{3}$, έτσι η διακρίνουσα είναι

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(\sqrt{3}-1\right)^2+4\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}+1+4\sqrt{3}=$$

$$=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}+1=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$$

β. Το τριώνυμο $-x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{3}$ έχει ρίζες:

$$x_{1,2}=\frac{-\left(\sqrt{3}-1\right)\pm\left(\sqrt{3}+1\right)}{-2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}+1}{-2}=\dfrac{2}{-2}=-1 \\ x_2=\dfrac{-\sqrt{3}+1-\sqrt{3}-1}{-2}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{-2}=\sqrt{3} \end{cases}$$

Οπότε παραγοντοποιείται ως εξής:

$$-x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{3}=-\left(x+1\right)\left(x-\sqrt{3}\right).$$

78. **GI_A_ALG_2_1282**

α. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $3x^2-2x-1$ (Μονάδες 8)

β. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες έχει νόημα η παράσταση $A\left(x\right)=\dfrac{x-1}{3x^2-2x-1}$ και στη συνέχεια να την απλοποιήσετε. (Μονάδες 9)

γ. Να λύσετε την εξίσωση: $\left|A\left(x\right)\right|=1$. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α. Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=\left(-2\right)^2-4\cdot3\cdot\left(-1\right)=16$ και ρίζες τους αριθμούς

$$x_{1,2}=\frac{-\left(-2\right)\pm4}{6}=\begin{cases} x_1=\dfrac{2+4}{6}=1 \\ x_2=\dfrac{2-4}{6}=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Άρα παραγοντοποιείται ως εξής: $3x^2-2x-1=3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)\left(x-1\right)=\left(3x+1\right)\left(x-1\right)$

β. Η παράσταση έχει νόημα για εκείνα τα x για τα οποία ο παρονομαστής παραμένει διάφορος του μηδενός. Οι ρίζες του παρονομαστή είναι οι ρίζες του τριωνύμου του πρώτου ερωτήματος. Οπότε η παράσταση $\mathbf{A}$ έχει νόημα για κάθε $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}, 1\right\}$

$$A(x) = \frac{x-1}{3x^2 - 2x - 1} = \frac{x-1}{(3x+1)(x-1)} = \frac{1}{3x+1}$$

γ. $|A(x)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{3x+1}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|3x+1|} = 1 \Leftrightarrow |3x+1| = 1 \Leftrightarrow$

$$3x+1 = 1 \text{ ή } 3x+1 = -1 \Leftrightarrow$$

$$3x = 0 \text{ ή } 3x = -2 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ ή } x = -\frac{2}{3}$$

79. **GI_A_ALG_2_1283**

α. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$ (Μονάδες 8)

β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1}$ και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τον τύπο της. (Μονάδες 9)

γ. Να παραστήσετε γραφικά την παραπάνω συνάρτηση. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α. Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = 4 + 12 = 16$ και ρίζες τους αριθμούς:

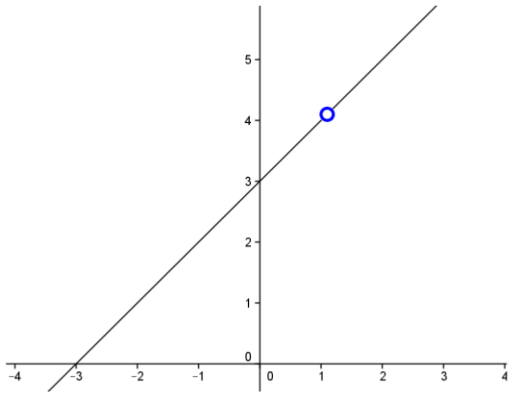
$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-2+4}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$$

Άρα παραγοντοποιείται ως εξής: $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$

β. Για να ορίζετε η συνάρτηση πρέπει $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$. Άρα το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} = \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = x + 3 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$$

γ. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι η ευθεία $\mathbf{y = x + 3}$ από την οποία εξαιρείται το σημείο με συντεταγμένες $\mathbf{(1,4)}$ και φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



80. **GI_A_ALG_2_1287**

Δίνεται ο πίνακας

	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους εννέα διψήφιους αριθμούς του παραπάνω πίνακα.

Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης των παρακάτω ενδεχομένων.

Α: ο διψήφιος να είναι άρτιος. (Μονάδες 7)

Β: ο διψήφιος να είναι άρτιος και πολλαπλάσιος του 3. (Μονάδες 9)

Γ: ο διψήφιος να είναι άρτιος ή πολλαπλάσιος του 3. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

Ο δειγματικός χώρος αποτελείται από εννέα αριθμούς και είναι ο

$$\mathbf{\Omega = \{11 , 12 , 13 , 21 , 22 , 23 , 31 , 32 , 33\}}$$

✓ Οι διψήφιοι άρτιοι αριθμοί του $\mathbf{\Omega}$ είναι οι $\mathbf{12 , 22 , 32}$ άρα το ενδεχόμενο $\mathbf{A}$ είναι το $\mathbf{A = \{12 , 22 , 32\}}$ και η πιθανότητα του είναι

$$\mathbf{P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}}$$

✓ Από τα στοιχεία του συνόλου $\mathbf{A}$ μόνο ο $\mathbf{12}$ διαιρείται με το $\mathbf{3}$, άρα το ενδεχόμενο $\mathbf{B}$ είναι το $\mathbf{B}=\{12\}$ και η πιθανότητα του $\mathbf{B}$ είναι:

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{1}{9}$$

✓ Οι αριθμοί του $\mathbf{\Omega}$ που είναι πολλαπλάσια του $\mathbf{3}$ είναι οι $\mathbf{12,21,33}$ ενώ οι άρτιοι είναι οι $\mathbf{12,22,32}$ άρα το ενδεχόμενο $\mathbf{\Gamma}$ είναι το $\mathbf{\Gamma}=\{12,21,22,32,33\}$ και η πιθανότητα του Γ είναι:

$$P(\Gamma)=\frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)}=\frac{5}{9}$$

81. **GI_A_ALG_2_1288**

α. Να λύσετε την ανίσωση: $\mathbf{x^2-10x+21<0}$. (Μονάδες 12)

β. Δίνεται η παράσταση: $\mathbf{A=|x-3|+|x^2-10x+21|}$

i) Για $\mathbf{3<x<7}$, να δείξετε ότι: $\mathbf{A=-x^2+11x-24}$. (Μονάδες 8)

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\mathbf{x\in(3,7)}$, για τις οποίες ισχύει $\mathbf{A=6}$. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α. Το τριώνυμο $\mathbf{x^2-10x+21}$ έχει $\mathbf{\Delta=100\text{-}84=16>0}$ και ρίζες:

$$x_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\frac{10\pm 4}{2}=\begin{cases}x_1=7\\ x_2=3\end{cases}$$

Αφού ο συντελεστής του $\mathbf{x^2}$ είναι το $\mathbf{\alpha=1>0}$, το πρόσημο του τριωνύμου είναι:

x	$-\infty$		3		7		$+\infty$
$x^2-10x+21$		+	0	−	0	+	

Επομένως: $\mathbf{x^2-10x+21<0\Leftrightarrow 3<x<7}$

β.

i) Αφού $\mathbf{3<x<7}$, έχουμε ότι $\mathbf{x^2-10x+21<0}$, οπότε:
$\mathbf{|x^2-10x+21|=-(x^2-10x+21)=-x^2+10x-21}$.

Ακόμα είναι $\mathbf{x>3\Rightarrow x-3>0\Rightarrow|x-3|=x-3}$. Τότε έχουμε:

$$\mathbf{A=|x-3|+|x^2-10x+21|=x-3-x^2+10x-21=-x^2+11x-24}$$

ii) Για $3<x<7$ είναι:

$$A=6 \Leftrightarrow -x^2+11x-24=6 \Leftrightarrow x^2-11x+18=0$$

Το τριώνυμο $x^2-11x+18$ έχει $\Delta=121-72=49>0$ και ρίζες:

$$x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{49}}{2\cdot 1}=\frac{11\pm 7}{2}=\begin{cases} x_1=9 \\ x_2=2 \end{cases}$$

82. **GI_A_ALG_2_1293**

Η θερμοκρασία T σε βαθμούς Κελσίου ^{o}C, σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση: $T=15+25x$, όταν $0\le x\le 200$

α. Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

β. Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με $290^0 C$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

γ. Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από $440^0 C$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α. Η θερμοκρασία είναι συνάρτηση του x, επομένως:

$$T(x)=15+25x \Rightarrow T(30)=15+25\cdot 30=765^0\ C$$

β. $T(x)=290 \Leftrightarrow 15+25x=290 \Leftrightarrow 25x=275 \Leftrightarrow x=11\ \ Km$

γ. $T(x)>440 \Leftrightarrow 15+25x>440 \Leftrightarrow 25x>425 \Leftrightarrow x>\frac{425}{25} \Leftrightarrow x>17\ \ Km$

83. **GI_A_ALG_2_1297**

α. Να λύσετε την ανίσωση: $3x^2-4x+1\le 0$ (Μονάδες 12)

β. Αν α, β δυο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{3\alpha+6\beta}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Το τριώνυμο $3x^2-4x+1$ έχει Δ=16-12$=4>0$ και ρίζες:

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2\cdot 3}=\frac{4\pm 2}{6}=\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Αφού ο συντελεστής του x^2 είναι το $\alpha=3>0$, το πρόσημο του τριωνύμου είναι:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2-4x+1$		+	0	–	0	+	

Επομένως: $3x^2-4x+1\le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\le x\le 1$

β. Εφόσον οι α, β είναι λύσεις της ανίσωσης, έχουμε ότι:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{3}\le \alpha\le 1 \\ \frac{1}{3}\le \beta\le 1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 1\le 3\alpha\le 3 \\ 2\le 6\beta\le 6 \end{aligned}\right\}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε την $3\le 3\alpha+6\beta\le 9$, οπότε $\frac{1}{3}\le\frac{3\alpha+6\beta}{9}\le 1$, που σημαίνει ότι ο αριθμός $\frac{3\alpha+6\beta}{9}$, είναι επίσης λύση της ανίσωσης.

84. **GI_A_ALG_2_1298**

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha+\beta=2 \text{ και } \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-30$$

α. Να αποδείξετε ότι: $\alpha\beta=-15$ (Μονάδες 10)

β. Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α.

$$\left.\begin{aligned} \alpha+\beta=2 \\ \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-30 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \alpha+\beta=2 \\ \alpha\beta(\alpha+\beta)=-30 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \alpha+\beta=2 \\ 2\alpha\beta=-30 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \alpha+\beta=2 \\ \alpha\beta=-15 \end{aligned}\right\}, \text{ άρα}$$

$\alpha\beta=-15$.

β. Η ζητούμενη εξίσωση θα έχει τη μορφή: $\mathbf{x^2 - Sx + P = 0}$,

όπου $\mathbf{S = \alpha+\beta=2}$, $\mathbf{P=\alpha\beta=-15}$, οπότε:

είναι η $\mathbf{x^2 - 2x - 15 = 0}$.

Είναι $\mathbf{\Delta=4+60=64>0}$ και οι ρίζες είναι: $\mathbf{x_{1,2} = \dfrac{2\pm\sqrt{64}}{2\cdot 1} = \dfrac{2\pm 8}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -3 \end{cases}}$

Επομένως $\mathbf{(\alpha,\beta)=(5,-3)}$ **ή** $\mathbf{(\alpha,\beta)=(-3,5)}$.

85. **GI_A_ALG_2_1300**

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις: $\mathbf{A=\left(\sqrt{2}\right)^6}$, $\mathbf{B=\left(\sqrt[3]{3}\right)^6}$, $\mathbf{\Gamma=\left(\sqrt[6]{6}\right)^6}$

α. Να δείξετε ότι: $\mathbf{A+B+\Gamma=23}$ (Μονάδες 13)

β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\mathbf{\sqrt[3]{3}}$, $\mathbf{\sqrt[6]{6}}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. $\mathbf{A+B+\Gamma=\left(\sqrt{2}\right)^6+\left(\sqrt[3]{3}\right)^6+\left(\sqrt[6]{6}\right)^6=2^{\frac{6}{2}}+3^{\frac{6}{3}}+6^{\frac{6}{6}}=2^3+3^2+6=8+9+6=23}$

β. $\mathbf{\sqrt[3]{3}=\sqrt[3\cdot 2]{3^2}=\sqrt[6]{9}>\sqrt[6]{6}}$, αφού $\mathbf{9>6}$

86. **GI_A_ALG_2_1301**

Δίνεται αριθμητική πρόοδος $\mathbf{(\alpha_\nu)}$ για την οποία ισχύει: $\mathbf{\alpha_4-\alpha_2=10}$

α. Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\mathbf{\omega=5}$. (Μονάδες 12)

β. Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι $\mathbf{33}$, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. $\mathbf{\alpha_4-\alpha_2=10\Leftrightarrow\alpha_1+3\omega-(\alpha_1+\omega)=10\Leftrightarrow 2\omega=10\Leftrightarrow\omega=5}$

β. $\mathbf{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=33\Leftrightarrow\alpha_1+\alpha_1+\omega+\alpha_1+2\omega=33\Leftrightarrow 3\alpha_1+3\omega=33\Leftrightarrow\alpha_1=11-5=6}$

β΄τρόπος: $\mathbf{S_3=33\Leftrightarrow\dfrac{3}{2}\left[2\alpha_1+2\omega\right]=33\Leftrightarrow\alpha_1+\omega=11\Leftrightarrow\alpha_1=11-\omega=11-5=6}$

87. **GI_A_ALG_2_1302**

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f}$, με $\mathbf{f(x)=\begin{cases} 8-x & αν\ x<0 \\ 2x+5 & αν\ x\geq 0 \end{cases}}$

α. Να δείξετε ότι $\mathbf{f(-5)=f(4)}$. (Μονάδες 13)

β. Να βρείτε τις τιμές του $\mathbf{x\in\mathbb{R}}$, ώστε $\mathbf{f(x)=9}$. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. $\left.\begin{array}{l}\mathbf{f(-5)=8-(-5)=13} \\ \mathbf{f(4)=2\cdot 4+5=13}\end{array}\right\}\Rightarrow \mathbf{f(-5)=f(4)}$

β. Αν $\mathbf{x<0}$, τότε $\mathbf{f(x)=9\Leftrightarrow 8-x=9\Leftrightarrow x=-1}$, η οποία είναι δεκτή.

Αν $\mathbf{x\geq 0}$, τότε $\mathbf{f(x)=9\Leftrightarrow 2x+5=9\Leftrightarrow x=2}$, η οποία επίσης είναι δεκτή .

88. **GI_A_ALG_2_1305**

α. Να λύσετε την ανίσωση $\mathbf{|x+4|\geq 3}$. (Μονάδες 12)

β. Αν $\mathbf{α\geq -1}$, να γράψετε την παράσταση $\mathbf{A=\big||α+4|-3\big|}$ χωρίς απόλυτες τιμές. Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. $\mathbf{|x+4|\geq 3\Leftrightarrow x+4\leq -3}$ **ή** $\mathbf{x+4\geq 3\Leftrightarrow x\leq -7}$ **ή** $\mathbf{x\geq -1}$

β. $\mathbf{α\geq -1\Leftrightarrow α+4\geq 3>0}$

Επομένως $\mathbf{|α+4|=α+4}$ και επίσης

$\mathbf{|α+4|-3\geq 0\Rightarrow \big||α+4|-3\big|=|α+4|-3=α+4-3=α+1}$

89. **GI_A_ALG_2_1506**

Δίνεται το σύνολο $\mathbf{Ω=\{1,2,3,4,5,6\}}$ και τα υποσύνολά του $\mathbf{A=\{1,2,4,5\}}$ και $\mathbf{B=\{2,4,6\}}$

α. Να παραστήσετε στο ίδιο διάγραμμα **Venn**, με βασικό σύνολο το $\mathbf{Ω}$, τα σύνολα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$. Κατόπιν, να προσδιορίσετε τα σύνολα $\mathbf{A\cup B, A\cap B\ , A'\ , B'}$. (Μονάδες 13)

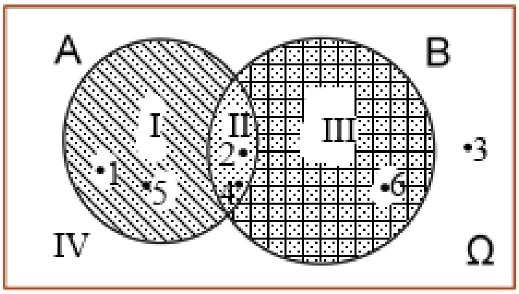
β. Επιλέγουμε τυχαία ένα στοιχείο του $\mathbf{Ω}$. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i) Να μην πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο $\mathbf{A}$. (Μονάδες 4)

ii) Να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$. (Μονάδες 4)

iii) Να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα $\mathbf{A}, \mathbf{B}$. (Μονάδες 4)

ΛΥΣΗ



α. Το ενδεχόμενο $\mathbf{A \cup B}$ παριστάνεται με τις περιοχές I,II και III και ισχύει $\mathbf{A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6\}}$

Το ενδεχόμενο $\mathbf{A \cap B}$ παριστάνεται με την περιοχή II και $\mathbf{A \cap B = \{2, 4\}}$

Το ενδεχόμενο $\mathbf{A'}$ παριστάνεται με τις περιοχές IV και III και $\mathbf{A' = \{3, 6\}}$

Το ενδεχόμενο $\mathbf{B'}$ παριστάνεται με τις περιοχές IV και I και $\mathbf{B' = \{3, 5\}}$

β.

i) Η πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο $\mathbf{A}$ είναι ίση με την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το $\mathbf{A'}$, δηλαδή: $\mathbf{P(A') = \frac{N(A')}{N(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$.

ii) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι η

$$\mathbf{P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$$

iii) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ είναι η

$$\mathbf{P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{5}{6}}$$

90. **GI_A_ALG_2_1509**

Δίνεται η εξίσωση $\mathbf{x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0}$, (1) με παράμετρο $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$.

α. Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το $\mathbf{1}$, να βρείτε το $\boldsymbol{\lambda}$. (Μονάδες 13)

β. Για $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{2}$ να λύσετε την εξίσωση (1). (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. Αφού έχει λύση το $\mathbf{1}$, ο αριθμός $\mathbf{1}$ την επαληθεύει, άρα:

$$\mathbf{1^2-(\lambda-1)\cdot 1+6=0 \Leftrightarrow 1-\lambda+1+6=0 \Leftrightarrow \lambda=8}$$

β. Για $\boldsymbol{\lambda=2}$ η εξίσωση γίνεται:

$$\mathbf{x^2-(2-1)x+6=0 \Leftrightarrow x^2-x+6=0}$$

Αυτή έχει $\mathbf{\Delta=1-4\cdot 1\cdot 6=-23<0}$ και επομένως είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

91. **GI_A_ALG_2_1512**

α. Να λυθεί η εξίσωση: $\mathbf{x^2-x-2=0}$. (Μονάδες 8)

β. Να λυθεί η ανίσωση: $\mathbf{x^2-x-2>0}$ και να παραστήσετε το σύνολο λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 12)

γ. Να τοποθετήσετε το $\mathbf{-\frac{4}{3}}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $\mathbf{-\frac{4}{3}}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

$\mathbf{x}$	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$\mathbf{x^2-x-2}$	+		-	+

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε $\mathbf{\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=9>0}$.

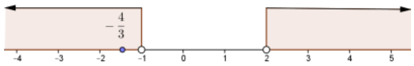
Επομένως η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις:

$$\mathbf{x_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}x_1=2\\ x_2=-1\end{cases}}$$

β. Αναζητούμε τις τιμές του $\mathbf{x}$, για τις οποίες το τριώνυμο $\mathbf{x^2-x-2}$ είναι θετικό, δηλαδή ομόσημο του $\boldsymbol{\alpha=1>0}$. Το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Συνεπώς $\mathbf{x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)}$

Οι λύσεις αυτές παριστάνονται γραφικά στο παρακάτω σχήμα:



γ. Από το προηγούμενο σχήμα το $-\frac{4}{3}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β) διότι ανήκει στο διάστημα των λύσεων, αφού $-\frac{4}{3} \in (-\infty,-1)$.

92. **GI_A_ALG_2_1513**

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_3 = 9$

α. Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 12)

β. Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο ν, ώστε να ισχύει $\alpha_\nu > 30$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Η (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω.

Από τη σχέση $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$ έχουμε:

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega \quad \alpha_3 = \alpha_1 + 2\omega \Leftrightarrow 9 = 1 + 2\omega \Leftrightarrow \omega = 4$.

β. $\alpha_\nu > 30 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega > 30 \Leftrightarrow 1 + (\nu-1)4 > 30 \Leftrightarrow$

$1 + 4\nu - 4 > 30 \Leftrightarrow 4\nu > 33 \Leftrightarrow \nu > \frac{33}{4} > \frac{32}{4} = 8$

άρα ο $\nu = 9$ είναι ο μικρότερος ζητούμενος φυσικός αριθμός.

93. **GI_A_ALG_2_1520**

Από τους σπουδαστές ενός Ωδείου, το 50% μαθαίνει πιάνο, το 40% μαθαίνει κιθάρα, ενώ το 10% των σπουδαστών μαθαίνει και τα δύο αυτά όργανα. Επιλέγουμε τυχαία ένα σπουδαστή του Ωδείου. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει πιάνο

Β: ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει κιθάρα

Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου:

α. Ο σπουδαστής αυτός να μαθαίνει ένα τουλάχιστον από τα δύο παραπάνω όργανα. (Μονάδες 12)

β. Ο σπουδαστής αυτός να μην μαθαίνει κανένα από τα δύο παραπάνω όργανα. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

Αφού,

Α: ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει πιάνο.

Β: ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει κιθάρα.

Χρησιμοποιώντας την γλώσσα των συνόλων έχουμε το ενδεχόμενο:

$\mathbf{A \cap B}$: ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει και τα δύο αυτά όργανα.

Από τα δεδομένα έχουμε ότι $\mathbf{P(A) = 0,50}$, $\mathbf{P(B) = 0,40}$ και $\mathbf{P(A \cap B) = 0,10}$.

α. Το ενδεχόμενο ο σπουδαστής αυτός να μαθαίνει ένα τουλάχιστον από τα δύο αυτά όργανα είναι στην γλώσσα των συνόλων $\mathbf{A \cup B}$.
Από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων έχουμε:
$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,50 + 0,40 - 0,10 = 0,80}$

β. Το ενδεχόμενο να μη μαθαίνει κανένα από τα όργανα ο σπουδαστής είναι είναι στη γλώσσα των συνόλων το $\mathbf{(A \cup B)'}$ και ισχύει ότι $\mathbf{P\left((A \cup B)'\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,80 = 0,20}$.

94. **GI_A_ALG_2_1529**

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f(x) = \alpha x + \beta}$, $\mathbf{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}}$ για την οποία ισχύει: $\mathbf{f(0) = 5}$ και $\mathbf{f(1) = 3}$.

α. Να αποδείξετε ότι $\mathbf{\alpha = -2}$ και $\mathbf{\beta = 5}$. (Μονάδες 10)

β. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της $\mathbf{f}$ τέμνει τους άξονες $\mathbf{x'x}$ και $\mathbf{y'y}$. (Μονάδες 7)

γ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $\mathbf{f}$. (Μονάδες 8)

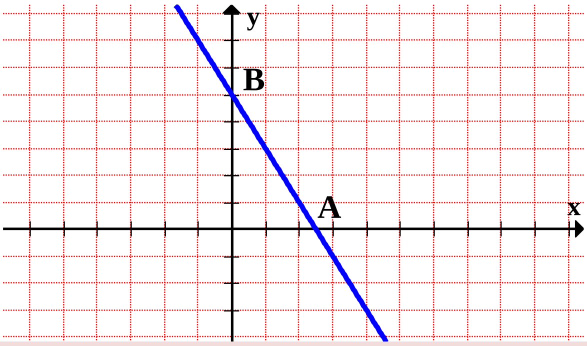
ΛΥΣΗ

α. Από τα δεδομένα έχουμε: $\mathbf{f(0) = 5 \Leftrightarrow \alpha \cdot 0 + \beta = 5 \Leftrightarrow \beta = 5}$. Επίσης έχουμε $\mathbf{f(1) = 3 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 3 \overset{\beta=5}{\Leftrightarrow} \alpha = 3 - 5 \Leftrightarrow \alpha = -2}$.

β. Για τα σημεία τομής με τον άξονα $\mathbf{x'x}$ πρέπει να ισχύει $\mathbf{y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}}$. Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $\mathbf{A\left(\frac{5}{2}, 0\right)}$.

Για το σημείο τομής της γραφικής παράστασης με τον άξονα $\mathbf{y'y}$ πρέπει $\mathbf{x = 0}$, οπότε $\mathbf{f(0)=5}$, άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $\mathbf{B(0,5)}$.

γ. Η γραφική παράσταση της $\mathbf{f}$ είναι η ακόλουθη:



95. **GI_A_ALG_2_1532**

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=\dfrac{x^3-16x}{x-4}}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\mathbf{f}$ και να αποδείξετε ότι, για τα $\mathbf{x}$ που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει $\mathbf{f(x)=x^2+4x}$. (Μονάδες 15)

β. Να βρείτε τις τιμές του $\mathbf{x}$ για τις οποίες ισχύει $\mathbf{f(x)=32}$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Για να ορίζεται η συνάρτηση πρέπει ο παρονομαστής του κλάσματος να μη γίνεται μηδέν, δηλαδή: $\mathbf{x-4\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 4}$, άρα το πεδίο ορισμού της $\mathbf{f}$ είναι $\mathbf{A=\mathbb{R}-\{4\}}$.

Τότε $\mathbf{f(x)=\dfrac{x^3-16x}{x-4}=\dfrac{x(x^2-16)}{x-4}=\dfrac{x(x-4)(x+4)}{x-4}=x(x+4)=x^2+4x}$.

β. Για $\mathbf{x\neq 4}$ έχουμε $\mathbf{f(x)=32 \Leftrightarrow x^2+4x=32 \Leftrightarrow x^2+4x-32=0}$. Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα του τριωνύμου: $\mathbf{\Delta=4^2-4(-32)=144}$ και ρίζες $\mathbf{x_{1,2}=\dfrac{-4\pm 12}{2}=\begin{cases} x_1=-8 \\ x_2=4 \end{cases}}$, από τις οποίες μόνο η πρώτη είναι δεκτή.

96. **GI_A_ALG_2_1533**

Θεωρούμε την εξίσωση $\mathbf{x^2+2x+\lambda-2=0}$ με παράμετρο $\mathbf{\lambda\in\mathbb{R}}$.

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mathbf{\lambda}$ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 10)

β. Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει δύο ρίζες $\mathbf{x_1, x_2}$ να προσδιορίσετε το $\mathbf{\lambda}$ ώστε να ισχύει: $\mathbf{x_1x_2-2(x_1+x_2)=1}$. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α. Για να έχει πραγματικές ρίζες αρκεί $\mathbf{\Delta\geq 0}$. Έχουμε λοιπόν:

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 2^2 - 4(\lambda - 2) \geq 0 \Leftrightarrow 4 - 4\lambda + 8 \geq 0 \Leftrightarrow 4\lambda \leq 12 \Leftrightarrow \lambda \leq 3$

β. Χρησιμοποιώντας τους τύπους **Vieta**, το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης είναι $P = x_1x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \lambda - 2$ και το άθροισμα είναι $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -2$.
Τότε $x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow \lambda - 2 - 2(-2) = 1 \Leftrightarrow \lambda - 2 + 4 = 1 \Leftrightarrow \lambda = -1$, το οποίο είναι δεκτό αφού για $\lambda \leq 3$ η εξίσωση έχει ρίζες.

97. **GI_A_ALG_2_1537**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

α. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2)$. (Μονάδες 10)

β. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = \frac{5}{2}$. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α. Ισχύει ότι:

$$A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}} + 1 + \frac{1}{1} - \left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 2 + 2 - 2 - \frac{1}{2} = 2$$

Επομένως $A = 2$

β. $f(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2 = 5x \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$

Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα του τριωνύμου:

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 > 0$, οπότε έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

98. **GI_A_ALG_2_1541**

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$, τότε:

α. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (Μονάδες 10)

β. Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α. Η περίμετρος του παραλληλογράμμου είναι $\Pi = 2x + 2y$ και από τα δεδομένα έχουμε:

$4 \le x \le 7$ (1) και $2 \le y \le 3$ (2)

$4 \le x \le 7 \overset{\cdot 2}{\Rightarrow} 8 \le 2x \le 14$ και $2 \le y \le 3 \overset{\cdot 2}{\Rightarrow} 4 \le 2y \le 6$.

Προσθέτοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις κατά μέλη έχουμε: $12 \le 2x + 2y \le 20$

Δηλαδή, η περίμετρος του παραλληλογράμμου είναι μεταξύ 12 και 20.

β. Το νέο παραλληλόγραμμο θα έχει διαστάσεις $x-1$ και $3y$ και περίμετρο: $2(x-1) + 2\cdot 3y = 2x + 6y - 2$ επιπλέον ισχύουν ότι $8 \le 2x \le 14$ και $2 \le y \le 3 \overset{\cdot 6}{\Rightarrow} 12 \le 6y \le 18$ και προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε: $20 \le 2x + 6y \le 32 \Leftrightarrow 20 - 2 \le 2x + 6y - 2 \le 32 - 2 \Leftrightarrow 18 \le 2x + 6y - 2 \le 30$

Δηλαδή, η περίμετρος του νέου παραλληλογράμμου είναι μεταξύ 18 και 30.

99. **GI_A_ALG_2_1542**

α. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $A = x^3 - x^2 + 3x - 3$. (Μονάδες 13)

β. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{3}{x}$ και $g(x) = x^2 - x + 3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1,3)$. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. $A = x^2(x-1) + 3(x-1) = (x-1)(x^2+3)$

β. Για τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων ισχύει ότι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{3}{x} = x^2 - x + 3 \overset{\cdot x}{\Leftrightarrow} 3 = x^3 - x^2 + 3x \Leftrightarrow (x-1)(x^2+3) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

ή $x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -3$ αδύνατο. Άρα μοναδικό σημείο τομής των δύο γραφικών παραστάσεων είναι το $A(1, f(1)) = A(1,3)$.

100. **GI_A_ALG_2_1544**

α. Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x. (Μονάδες 10)

β. Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$\mathbf{B}=\left|\mathbf{x}^2+4\mathbf{x}+5\right|-\left|\mathbf{x}^2+4\mathbf{x}+4\right|$. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α. Το τριώνυμο $\mathbf{x}^2+4\mathbf{x}+5$ έχει διακρίνουσα $\Delta=4^2-4\cdot 5=-4<0$, άρα θα διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε πραγματικό αριθμό $\mathbf{x}$, ομόσημο με το συντελεστή του $\mathbf{x}^2$, δηλαδή θετικό για κάθε πραγματικό αριθμό $\mathbf{x}\in\mathbb{R}$.

β. Εφόσον $\mathbf{x}^2+4\mathbf{x}+5>0$, για κάθε $\mathbf{x}\in\mathbb{R}$ και $\mathbf{x}^2+4\mathbf{x}+4=(\mathbf{x}+2)^2\geq 0$ έχουμε:

$$\mathbf{B}=\left|\mathbf{x}^2+4\mathbf{x}+5\right|-\left|\mathbf{x}^2+4\mathbf{x}+4\right|=\mathbf{x}^2+4\mathbf{x}+5-\left(\mathbf{x}^2+4\mathbf{x}+4\right)=5-4=1.$$

101. **GI_A_ALG_2_1553**

Δίνονται οι συναρτήσεις $\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{x}^3$ και $\mathbf{g}(\mathbf{x})=\mathbf{x}$.

α. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\mathbf{f},\mathbf{g}$ τέμνονται σε τρία σημεία τα οποία και να βρείτε. (Μονάδες 13)

β. Αν $\mathbf{A},\mathbf{O},\mathbf{B}$ είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, όπου $\mathbf{O}(0,0)$, να αποδείξετε ότι τα $\mathbf{A},\mathbf{B}$ είναι συμμετρικά ως προς $\mathbf{O}$. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. Στα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $\mathbf{f},\mathbf{g}$ θα ισχύει:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{g}(\mathbf{x})\Leftrightarrow\mathbf{x}^3=\mathbf{x}\Leftrightarrow\mathbf{x}^3-\mathbf{x}=0\Leftrightarrow\mathbf{x}\left(\mathbf{x}^2-1\right)=0\Leftrightarrow\mathbf{x}(\mathbf{x}-1)(\mathbf{x}+1)=0\Leftrightarrow$$
$\mathbf{x}=0$ **ή** $\mathbf{x}=1$ **ή** $\mathbf{x}=-1$.

Για $\mathbf{x}=0$ έχουμε $\mathbf{y}=\mathbf{g}(0)=0$ οπότε προκύπτει το σημείο $\mathbf{O}(0,0)$.
Για $\mathbf{x}=1$ έχουμε $\mathbf{y}=\mathbf{g}(1)=1$ οπότε προκύπτει το σημείο $\mathbf{A}(1,1)$.
Για $\mathbf{x}=-1$ έχουμε $\mathbf{y}=\mathbf{g}(-1)=-1$ οπότε προκύπτει το σημείο $\mathbf{B}(-1,-1)$.
Συνεπώς τα ζητούμενα σημεία τομής είναι $\mathbf{A}(1,1)$, $\mathbf{B}(-1,-1)$ και $\mathbf{O}(0,0)$.

β. Τα σημεία $\mathbf{A},\mathbf{O},\mathbf{B}$ είναι συνευθειακά, αφού ανήκουν και τα τρία στην ευθεία $\mathbf{y}=\mathbf{x}$ (καθώς οι συντεταγμένες και των τριών επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας).

Για να αποδείξουμε ότι τα $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ είναι και συμμετρικά ως προς το $\mathbf{O}$, θα δείξουμε ότι οι αποστάσεις $(\mathbf{AO})$ και $(\mathbf{BO})$ είναι ίσες.

$$(\mathbf{AO})=\sqrt{(\mathbf{x_O}-\mathbf{x_A})^2+(\mathbf{y_O}-\mathbf{y_A})^2}=\sqrt{(\mathbf{0}-\mathbf{1})^2+(\mathbf{0}-\mathbf{1})^2}=\sqrt{\mathbf{1}+\mathbf{1}}=\sqrt{\mathbf{2}}$$

$$(\mathbf{BO})=\sqrt{(\mathbf{x_O}-\mathbf{x_B})^2+(\mathbf{y_O}-\mathbf{y_B})^2}=\sqrt{(\mathbf{0}+\mathbf{1})^2+(\mathbf{0}+\mathbf{1})^2}=\sqrt{\mathbf{1}+\mathbf{1}}=\sqrt{\mathbf{2}}$$

Οπότε ισχύει $\mathbf{AO}=\sqrt{\mathbf{2}}=\mathbf{BO}$, άρα τα σημεία $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι συμμετρικά ως προς $\mathbf{O}$.

102. **GI_A_ALG_2_2212**

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f}$ με $\mathbf{f}(\mathbf{x})=\dfrac{\mathbf{2x^2-6|x|}}{\mathbf{2|x|-6}}$

α. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού $\mathbf{A}$ της συνάρτησης $\mathbf{f}$. (Μονάδες 10)

β. Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f}(\mathbf{x})=|\mathbf{x}|$ για κάθε $\mathbf{x}\in\mathbf{A}$. (Μονάδες 10)

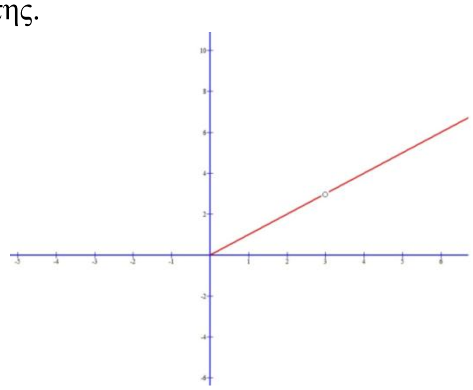
γ. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{f}$ για $\mathbf{x}>\mathbf{0}$. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α. Πρέπει ο παρανομαστής του κλάσματος να μην είναι μηδέν. Επομένως πρέπει $\mathbf{2|x|-6\neq 0\Leftrightarrow 2|x|\neq 6\Leftrightarrow |x|\neq 3}$, δηλαδή πρέπει $\mathbf{x\neq 3}$ **και** $\mathbf{x\neq -3}$. Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $\mathbf{A}=\mathbb{R}-\{\mathbf{-3,3}\}$.

β. Είναι $\mathbf{f}(\mathbf{x})=\dfrac{\mathbf{2x^2-6|x|}}{\mathbf{2|x|-6}}=\dfrac{\mathbf{2|x|^2-6|x|}}{\mathbf{2|x|-6}}=\dfrac{\mathbf{2|x|(|x|-3)}}{\mathbf{2(|x|-3)}}=|\mathbf{x}|$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}-\{\mathbf{-3,3}\}$

γ. Για $\mathbf{x}>\mathbf{0}$ έχουμε $\mathbf{f}(\mathbf{x})=|\mathbf{x}|\overset{\mathbf{x>0}}{\Rightarrow}\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{x}$, οπότε για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{f}$ για $\mathbf{x}>\mathbf{0}$, σχεδιάζουμε το τμήμα της συνάρτησης $\mathbf{y}=\mathbf{x}$ για $\mathbf{x}>\mathbf{0}$, χωρίς το σημείο $(\mathbf{3,3})$ που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της.



103. **GI_A_ALG_2_2702**

Δίνονται οι παραστάσεις $A=|2x-4|$ και $B=|x-3|$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α. Για κάθε $2\le x<3$ να αποδείξετε ότι $A+B=x-1$. (Μονάδες 16)

β. Υπάρχει $x\in[2,3)$ ώστε να ισχύει $A+B=2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α. Αφού $2\le x<3$ έχουμε $x-3<0$ και $x-2\ge 0$. Επομένως:
$A=|2x-4|=2|x-2|=2(x-2)=2x-4$ και $B=|x-3|=3-x$. Συνεπώς έχουμε $A+B=2x-4+3-x=x-1,\ \ x\in[2,3)$
$A=|2x-4|=2|x-2|=2(x-2)=2x-4$ και $B=|x-3|=3-x$.

β. Έστω ότι υπάρχει $x\in[2,3)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $A+B=2$. Τότε από το ερώτημα α) έχουμε, $x-1=2\Leftrightarrow x=3$ το οποίο όμως δεν ανήκει στο διάστημα $[2,3)$. Άτοπο. Άρα δεν υπάρχει $x\in[2,3)$ ώστε να ισχύει $A+B=2$.

104. **GI_A_ALG_2_3378**

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

α. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 6)

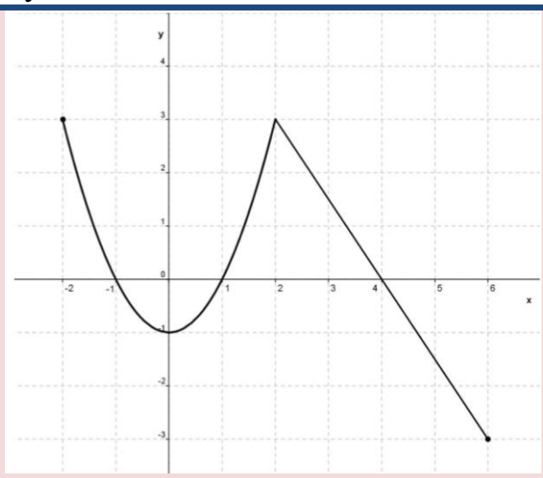
β. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών

x	-2	-1		1	2	
y			-1			-3

(Μονάδες 6)

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες. (Μονάδες 6)

δ. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές. (Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης **f** προκύπτουν τα εξής.

α. Για να βρούμε το πεδίο ορισμού της **f** πρέπει να «προβάλουμε» τη γραφική παράσταση της στον άξονα $\mathbf{x'x}$. Συνεπώς από το σχήμα προκύπτει ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\left[-2,6\right]$.

β. Παρατηρώντας το γράφημα της f συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

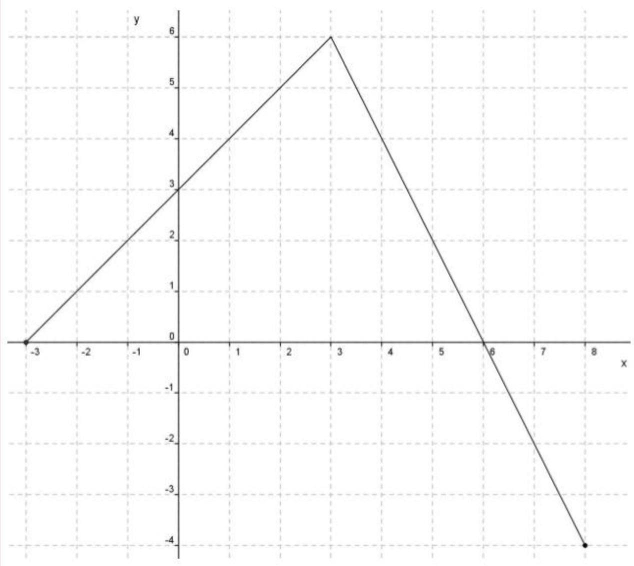
x	-2	-1	0	1	2	6
y	3	0	-1	0	3	-3

γ. Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης **f** με τον άξονα $\mathbf{x'x}$ είναι το σημείο με τεταγμένη μηδέν. Επομένως τα σημεία τομής είναι τα $\left(-1,0\right)$ **και** $\left(1,0\right)$.

Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης **f** με τον άξονα $\mathbf{y'y}$ είναι τα σημεία με τεταγμένη μηδέν. Επομένως το σημείο τομής είναι το $\left(0,-1\right)$.

δ. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές είναι αυτά στα οποία η γραφική παράσταση της βρίσκεται κάτω από τον άξονα $\mathbf{x'x}$, δηλαδή τα διαστήματα $\left(-1,1\right)$ και $\left(4,6\right)$.

105. **GI_A_ALG_2_3379**



Στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $\mathbf{f}$.

α. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 6)

β. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών

x	**-3**	**-1**	**0**	**3**		
y					**-2**	**-4**

(Μονάδες 6)

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες. (Μονάδες 6)

δ. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{f}$ προκύπτουν τα εξής.

α. Για να βρούμε το πεδίο ορισμού της $\mathbf{f}$ πρέπει να «προβάλουμε» τη γραφική της παράσταση στον άξονα $\mathbf{x'x}$. Συνεπώς από το σχήμα προκύπτει ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $[-3,8]$.

β.

X	**-3**	**-1**	**0**	**3**	**7**	**8**
Y	**0**	**2**	**3**	**6**	**-2**	**-4**

γ. Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\mathbf{f}$ με τον άξονα $\mathbf{x'x}$ είναι τα σημεία με τεταγμένη μηδέν. Επομένως τα σημεία $(-3,0)$ **και** $(6,0)$.

Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\mathbf{f}$ με τον άξονα $\mathbf{y'y}$ είναι τα σημεία με τεταγμένη μηδέν. Επομένως το σημείο $(0,3)$.

δ. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές είναι αυτά στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται πάνω από τον άξονα $\mathbf{x'x}$, δηλαδή το διάστημα $(-3,6)$.

106. **GI_A_ALG_2_3380**

Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=3x^2+9x-12,\ x\in\mathbb{R}$

α. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 13)

β. Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 12)

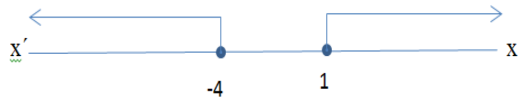
ΛΥΣΗ

α. Θα λύσουμε την ανίσωση $f(x)\le 0 \Leftrightarrow 3x^2+9x-12\le 0$.

Λύνουμε την εξίσωση $3x^2+9x-12=0 \Leftrightarrow 3(x^2+3x-4)=0 \Leftrightarrow x^2+3x-4=0$.

Είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=9-4\cdot1\cdot(-4)=25>0$ επομένως η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες τις $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-3\pm5}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-3+5}{2}=1\\ x_2=\dfrac{-3-5}{2}=-4\end{cases}$,

επομένως οι ρίζες είναι οι $x_1=1$ και $x_2=-4$. Το τριώνυμο για $\Delta>0$ είναι ομόσημο του $\alpha=3>0$ για τιμές του x εκτός των ριζών και ετερόσημο για τιμές του x μεταξύ των ριζών. Επομένως είναι $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in(-\infty,-4]\cup[1,+\infty)$.



β. Ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι μεγαλύτερος της μονάδας διότι είναι $2>1$ άρα και $\sqrt[3]{2}>\sqrt[3]{1}=1$. Επομένως $\sqrt[3]{2}\in(-\infty,-4]\cup[1,+\infty)$ άρα αποτελεί λύση της ανίσωσης.

107. **GI_A_ALG_2_3381**

Δίνεται η συνάρτηση g, με $g(x)=\dfrac{2x^2-4x+\mu}{x+1}$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο $A(1,-4)$.

α. Να δείξετε ότι $\mu=-6$. (Μονάδες 9)

β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 9)

γ. Για $\mu=-6$ να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. Αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{g}$ διέρχεται από το σημείο $(1,-4)$ είναι $g(1)=-4 \Leftrightarrow \dfrac{2-4+\mu}{2}=-4 \Leftrightarrow -2+\mu=-8 \Leftrightarrow \mu=-6$.

β. Πρέπει ο παρανομαστής $x+1\neq 0$ άρα $x\neq -1$, επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\mathbf{g}$ είναι $A=\mathbb{R}-\{-1\}$.

γ. Για $\mu=-6$ έχουμε $g(x)=\dfrac{2x^2-4x-6}{x+1}=\dfrac{2(x^2-2x-3)}{x+1}$. Θα παραγοντοποιήσουμε το x^2-2x-3 που είναι τριώνυμο με διακρίνουσα: $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=16>0$ και επομένως το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες τις $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{2\pm 4}{2}$, δηλαδή

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{2+4}{2}=3 \\ x_2=\dfrac{2-4}{2}=-1 \end{cases}$$

. Επομένως το τριώνυμο x^2-2x-3 παραγοντοποιείτε ως εξής: $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$.

Άρα η συνάρτηση γίνεται:

$$g(x)=\frac{2x^2-4x-6}{x+1}=\frac{2(x^2-2x-3)}{x+1}=\frac{2(x+1)(x-3)}{x+1}=2(x-3),\ \ x\in\mathbb{R}-\{-1\}$$

108. **GI_A_ALG_2_3382**

Δίνεται η παράσταση $A=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

α. Να δείξετε ότι $A=4$. (Μονάδες 12)

β. Να λύσετε την εξίσωση $|x+A|=1$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Κάνουμε ομώνυμα τα κλάσματα. Έτσι έχουμε,

$$A=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})+\sqrt{3}\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{3}\sqrt{3}+\sqrt{5}\sqrt{5}-\sqrt{5}\sqrt{3}}{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2}=\frac{8}{2}=4$$

β. Έχουμε

$$|x+A|=1\Leftrightarrow|x+4|=1\Leftrightarrow x+4=1 \text{ ή } x+4=-1\Leftrightarrow x=-3 \text{ ή } x=-5$$

109. **GI_A_ALG_2_3383**

Το 70% των κατοίκων μιας πόλης έχει αυτοκίνητο, το 40% έχει μηχανάκι και το 20% έχει και αυτοκίνητο και μηχανάκι. Επιλέγουμε τυχαία έναν κάτοικο αυτής της πόλης. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α : ο κάτοικος να έχει αυτοκίνητο

Μ : ο κάτοικος να έχει μηχανάκι

α. Να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

i) $A \cup M$

ii) $M - A$

iii) M'. (Μονάδες 9)

β. Να βρείτε τη πιθανότητα ο κάτοικος που επιλέχθηκε:

i) Να μην έχει μηχανάκι. (Μονάδες 7(

ii) Να μην έχει ούτε μηχανάκι ούτε αυτοκίνητο. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

Έχουμε $P(A)=\frac{70}{100}=0,7$ $\quad P(M)=\frac{40}{100}=0,4$ **και** $P(A\cap M)=\frac{20}{100}=0,2$

α. Τότε:

i) $A \cup M$ **:** ο κάτοικος να έχει Αυτοκίνητο ή Μηχανάκι.

ii) $M - A$ **:** ο κάτοικος να έχει μόνο Μηχανάκι.

iii) M' **:**ο κάτοικος να μην έχει Μηχανάκι.

β. Έχουμε:

i) Είναι $P(M')=1-P(M)=1-0,4=0,6$

ii) Είναι:

$P\left[(A\cup M)'\right]=1-P(A\cup M)=1-\left(P(A)+P(M)-P(A\cap M)\right)$ δηλαδή

$P\left[(A\cup M)'\right]=1-P(A)-P(M)+P(A\cap M)$ οπότε

$P\left[(A\cup M)'\right]=1-0,7-0,4+0,2=0,1$

110. **GI_A_ALG_2_3384**

Από τους **180** μαθητές ενός λυκείου, **20** μαθητές συμμετέχουν στη θεατρική ομάδα, **30** συμμετέχουν στην ομάδα στίβου, ενώ **10** συμμετέχουν και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή του λυκείου. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α : ο μαθητής συμμετέχει στη θεατρική ομάδα

Β : ο μαθητής συμμετέχει στην ομάδα στίβου

α. Να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

i) $A \cup B$

ii) $B - A$

iii) A' (Μονάδες 9)

β. Να βρείτε τη πιθανότητα ο μαθητής που επιλέχθηκε:

i) Να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα. (Μονάδες 7)

ii) Να συμμετέχει μόνο στην ομάδα στίβου. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

Έστω Ω το σύνολο όλων των μαθητών του σχολείου με $N(\Omega)=180$,

A το ενδεχόμενο ο μαθητής να συμμετέχει στη θεατρική ομάδα με $N(A)=20$,

B το ενδεχόμενο ο μαθητής να συμμετέχει στην ομάδα στίβου με $N(B)=30$ άρα

$A\cap B$ το ενδεχόμενο ο μαθητής να συμμετέχει και στις δύο ομάδες.

Από τον τύπο $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}$ υπολογίζουμε και τις 3 πιθανότητες.

Έχουμε $P(A)=\dfrac{20}{180}=\dfrac{1}{9}$ $\quad P(B)=\dfrac{30}{180}=\dfrac{1}{6}$ $\quad$ **και** $P(A\cap B)=\dfrac{10}{180}=\dfrac{1}{18}$

α.

i) $A\cup B$: ο μαθητής να συμμετέχει στη θεατρική ομάδα ή στην ομάδα στίβου..

ii) $B-A$: ο μαθητής να συμμετέχει **μόνο** στην ομάδα στίβου.

iii) A': ο μαθητής να μη συμμετέχει στη θεατρική ομάδα.

β.

i) Είναι:

$$P\left[(A\cup B)'\right]=1-P(A\cup B)=1-\left(P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right)=$$

$$1-\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{6}-\frac{1}{18}\right)=1-\frac{1}{9}-\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\frac{18}{18}-\frac{2}{18}-\frac{3}{18}+\frac{1}{18}=\frac{14}{18}=$$

$$=\frac{7}{9}\Rightarrow P\left[(A\cup B)'\right]=\frac{7}{9}$$

ii) Είναι:

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{9}-\frac{1}{18}=\frac{3}{18}-\frac{1}{18}=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}\Rightarrow P(B-A)=\frac{1}{9}$$

111. **GI_A_ALG_2_3828**

Οι αριθμοί $k-2$, $2k$ και $7k+4$, $k\in\mathbb{N}$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν).

α. Να αποδείξετε ότι $k=4$ και να βρείτε το λόγο λ της προόδου. (Μονάδες 12)

β.

i) Να εκφράσετε το $2^{\text{ο}}$ όρο, τον $5^{\text{ο}}$ και τον $4^{\text{ο}}$ όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1. (Μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha_2+\alpha_5=4(\alpha_1+\alpha_4)$. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. Αφού οι αριθμοί $\kappa-2, 2\kappa, 7\kappa+4$ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου ισχύει ότι:

$(2\kappa)^2=(7\kappa+4)(\kappa-2)\Leftrightarrow 4\kappa^2=7\kappa^2-14\kappa+4\kappa-8\Leftrightarrow 3\kappa^2-10\kappa-8=0$ η οποία είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς κ με διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-10)^2-4\cdot 3\cdot(-8)=100+96=196>0$ και επομένως η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες τις $\kappa_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{10 \pm 14}{6}$, επομένως οι ρίζες είναι $\kappa_1 = 4$ ή $\kappa_2 = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$ η οποία απορρίπτεται αφού $\kappa \in \mathbb{N}$. Άρα $\kappa = 4$ και οι όροι της γεωμετρικής προόδου είναι οι $\kappa - 2 = 4 - 2 = 2$, $2\kappa = 2 \cdot 4 = 8$ και $7\kappa + 4 = 7 \cdot 2 + 4 = 18$ με λόγο $\lambda = \frac{8}{2} = 4$.

β.

i) Είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1}$ επομένως $\alpha_2 = \alpha_1 \cdot 4^{2-1} = 4 \cdot \alpha_1$,

$\alpha_5 = \alpha_1 \cdot 4^{5-1} = \alpha_1 \cdot 4^4 = 256 \cdot \alpha_1$ και $\alpha_4 = \alpha_1 \cdot 4^{4-1} = \alpha_1 \cdot 4^3 = 64 \cdot \alpha_1$

ii) Έχουμε $\alpha_2 + \alpha_5 = 4\alpha_1 + 4^4\alpha_1 = 4\left(\alpha_1 + 4^3\alpha_1\right) = 4\left(\alpha_1 + \alpha_4\right)$.

112. **GI_A_ALG_2_3839**

Δίνεται η εξίσωση: $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq 0$.

α. Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2. (Μονάδες 12)

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \neq 0$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Για να είναι ο αριθμός -2 ρίζα της εξίσωσης $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1 = 0$, αρκεί να την επαληθεύει για $x = -2$, δηλαδή να ισχύει:

$$\lambda \cdot (-2)^2 - (\lambda - 1) \cdot (-2) - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\lambda + 2\lambda - 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 6\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow 6\lambda = 3 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{6} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

Άρα η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2 όταν $\lambda = \frac{1}{2}$.

β. Καθώς ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου λx^2 της εξίσωσης είναι $\lambda \neq 0$, η εξίσωσή μας είναι δευτέρου βαθμού ως προς x. Συνεπώς για να έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda \neq 0$ αρκεί να έχει διακρίνουσα $\Delta \geq 0$.

Είναι:

$$\Delta = \left[-(\lambda - 1)\right]^2 - 4 \cdot \lambda \cdot (-1) = (\lambda - 1)^2 + 4\lambda = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4\lambda = \lambda^2 + 2\lambda + 1 =$$

$(\lambda + 1)^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \neq 0$, συνεπώς η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \neq 0$.

113. **GI_A_ALG_2_3847**

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq -2$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες:

α. η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 13)

β. το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. Ισχύει $\lambda \neq -2 \Leftrightarrow \lambda+2 \neq 0$ άρα ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου $(\lambda+2)x^2$ της εξίσωσης είναι μη μηδενικός.

Συνεπώς η εξίσωσή μας είναι δευτέρου βαθμού ως προς x και έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες όταν για τη διακρίνουσά της Δ ισχύει:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (2\lambda)^2 - 4\cdot(\lambda+2)\cdot(\lambda-1) > 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4\cdot(\lambda^2+\lambda-2) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{4\lambda^2} - \cancel{4\lambda^2} - 4\lambda + 8 > 0 \Leftrightarrow -4\lambda > -8 \Leftrightarrow \frac{-4\lambda}{-4} < \frac{-8}{-4} \Leftrightarrow \lambda < 2.$$

Λόγω και του περιορισμού $\lambda+2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -2$ συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες όταν $\lambda \in (-\infty,-2)\cup(-2,2)$.

β. Εφαρμόζοντας τον τύπο **Vieta**, $S = -\frac{\beta}{\alpha}$ για το άθροισμα των ριζών μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού, έχουμε ότι το άθροισμα των ριζών της εξίσωσής μας είναι ίσο με 2 όταν ισχύει:

$$-\frac{2\lambda}{\lambda+2} = 2 \Leftrightarrow -2\lambda = 2(\lambda+2) \Leftrightarrow -2\lambda = 2\lambda+4 \Leftrightarrow -2\lambda-2\lambda = 4 \Leftrightarrow -4\lambda = 4 \Leftrightarrow$$
$$\lambda = -1.$$

Άρα το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2 όταν $\lambda = -1$.

114. **GI_A_ALG_2_3852**

Για τους πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύουν:

$$2 \leq \alpha \leq 4 \text{ και } -4 \leq \beta \leq -3$$

Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α. $\alpha - 2\beta$ (Μονάδες 12)

β. $\alpha^2 - 2\alpha\beta$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Ισχύει $-4 \leq \beta \leq -3 \Leftrightarrow -2\cdot(-4) \geq -2\cdot\beta \geq -2\cdot(-3) \Leftrightarrow 6 \leq -2\beta \leq 8$ οπότε προσθέτοντας κατά μέλη με την $2 \leq \alpha \leq 4$ βρίσκουμε:

$2+6 \leq \alpha+(-2\beta) \leq 4+8 \Leftrightarrow 8 \leq \alpha-2\beta \leq 12$. Άρα η παράσταση $\alpha-2\beta$ παίρνει τιμές στο διάστημα $[8,12]$, δηλαδή από 8 μέχρι και 12.

β. Ισχύει $0 < 2 \leq \alpha \leq 4 \Leftrightarrow 2^2 \leq \alpha^2 \leq 4^2 \Leftrightarrow 4 \leq \alpha^2 \leq 16$ (1). Επίσης:

$-4\le\beta\le-3\Leftrightarrow-2\cdot(-4)\ge-2\cdot\beta\ge-2\cdot(-3)\Leftrightarrow 6\le-2\beta\le 8$, οπότε πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη με την $2\le\alpha\le4$ (καθώς και οι δύο έχουν μόνο θετικούς όρους) παίρνουμε:

$2\cdot6\le\alpha\cdot(-2\beta)\le4\cdot8\Leftrightarrow 12\le-2\alpha\beta\le32$ (2).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) βρίσκουμε ότι:

$4+12\le\alpha^2+(-2\alpha\beta)\le16+32\Leftrightarrow16\le\alpha^2-2\alpha\beta\le48$. Άρα η παράσταση $\alpha^2-2\alpha\beta$ παίρνει τιμές στο διάστημα $[16,48]$, δηλαδή από 16 μέχρι και 48.

115.

GI_A_ALG_2_3857

Έστω α,β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha\cdot\beta=4 \text{ και } \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=20$$

α. Να αποδείξετε ότι: $\alpha+\beta=5$.(Μονάδες 10)

β. Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α,β και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε: $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=20\Leftrightarrow\alpha\beta(\alpha+\beta)=20$ και αφού από τα δεδομένα ισχύει $\alpha\beta=4$, αντικαθιστώντας βρίσκουμε:

$4\cdot(\alpha+\beta)=20\Leftrightarrow\alpha+\beta=5$.

β. Οι αριθμοί α και β έχουν άθροισμα $S=\alpha+\beta=5$ (από το (α) ερώτημα) και γινόμενο $P=\alpha\cdot\beta=4$ (από την πρώτη δεδομένη σχέση) άρα είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$x^2-Sx+P=0\Leftrightarrow x^2-5x+4=0.$$

Η εξίσωση αυτή έχει $\Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot4=25-16=9>0$ άρα έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, τις: $x_{1,2}=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2\cdot1}=\dfrac{5\pm3}{2}$ δηλαδή $x_1=\dfrac{5+3}{2}=\dfrac{8}{2}=4$ και $x_2=\dfrac{5-3}{2}=\dfrac{2}{2}=1$. Συνεπώς $(\alpha,\beta)=(4,1)$ ή $(\alpha,\beta)=(1,4)$.

116.

GI_A_ALG_2_3863

Έστω α,β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha+\beta=-1 \text{ και } \alpha^3\beta+2\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3=-12$$

α. Να αποδείξετε ότι: $\alpha\cdot\beta=-12$. (Μονάδες 10)

β. Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α,β και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε:

$$\alpha^3\beta+2\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3=-12 \Leftrightarrow \alpha\beta\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\right)=-12 \Leftrightarrow \alpha\beta\left(\alpha+\beta\right)^2=-12$$

και αφού από τα δεδομένα ισχύει $\alpha+\beta=-1$, αντικαθιστώντας βρίσκουμε:

$\alpha\beta\cdot(-1)^2=-12 \Leftrightarrow \alpha\beta=-12$.

β. Οι αριθμοί α και β έχουν άθροισμα $S=\alpha+\beta=-1$ (από την πρώτη δεδομένη σχέση) και γινόμενο $P=\alpha\cdot\beta=-12$ (από το (α) ερώτημα) άρα είναι λύσεις της εξίσωσης:

$x^2-Sx+P=0 \Leftrightarrow x^2-(-1)\cdot x+(-12)=0 \Leftrightarrow x^2+x-12=0$.

Η εξίσωση αυτή έχει $\Delta=1^2-4\cdot1\cdot(-12)=1+48=49>0$ άρα έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, τις: $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{49}}{2\cdot1}=\dfrac{-1\pm7}{2}$ δηλαδή $x_1=\dfrac{-1+7}{2}=\dfrac{6}{2}=3$ και $x_2=\dfrac{-1-7}{2}=\dfrac{-8}{2}=-4$. Συνεπώς $(\alpha,\beta)=(3,-4)$ ή $(\alpha,\beta)=(-4,3)$.

117. **GI_A_ALG_2_3870**

Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2\alpha^2+\beta^2+9$ και $\Lambda=2\alpha(3-\beta)$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι: $K-\Lambda=\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\right)+\left(\alpha^2-6\alpha+9\right)$ (Μονάδες 3)

β. Να δείξετε ότι $K\geq\Lambda$, για κάθε τιμή των α,β. (Μονάδες 10)

γ. Για ποιες τιμές των α,β ισχύει η ισότητα $K=\Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε:

$$K-\Lambda=\left(2\alpha^2+\beta^2+9\right)-2\alpha(3-\beta)=\alpha^2+\alpha^2+\beta^2+9-6\alpha+2\alpha\beta=$$
$$=\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\right)+\left(\alpha^2-6\alpha+9\right).$$

β. Για κάθε τιμή των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$K-\Lambda=\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\right)+\left(\alpha^2-6\alpha+9\right)=(\alpha+\beta)^2+(\alpha-3)^2\geq0$,

αφού $(\alpha+\beta)^2\geq0$ και $(\alpha-3)^2\geq0$, άρα $K\geq\Lambda$, για κάθε τιμή των α,β.

γ. Ισχύει $K=\Lambda \Leftrightarrow K-\Lambda=0 \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow} (\alpha+\beta)^2+(\alpha-3)^2=0$ (1).

Επειδή $(\alpha+\beta)^2\geq0$ και $(\alpha-3)^2\geq0$, η ισότητα (1) μπορεί να ισχύει μόνο όταν:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=3\\ \beta=-\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=3\\ \beta=-3\end{cases}$$

118. **GI_A_ALG_2_3874**

Δίνονται οι μη μηδενικοί αριθμοί α,β, με $\alpha\neq\beta$ για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}=\frac{\alpha}{\beta}$$

α. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι. (Μονάδες 13)

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K=\dfrac{\alpha^{22}\cdot(\beta^3)^8}{\alpha^{-2}\cdot(\alpha\beta)^{25}}$ (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε: $\dfrac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}=\dfrac{\alpha}{\beta}\Leftrightarrow(\alpha^2+1)\cdot\beta=(\beta^2+1)\cdot\alpha\Leftrightarrow$

$$\alpha^2\beta+\beta=\beta^2\alpha+\alpha\Leftrightarrow$$
$$\alpha^2\beta+\beta-\beta^2\alpha-\alpha=0\Leftrightarrow$$
$$\alpha\beta(\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)=0\Leftrightarrow$$
$$(\alpha-\beta)(\alpha\beta-1)=0$$

και αφού ισχύει $\alpha\neq\beta\Leftrightarrow\alpha-\beta\neq 0$, έπεται ότι $\alpha\beta-1=0\Leftrightarrow\alpha\beta=1$

που σημαίνει ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

β. $K=\dfrac{\alpha^{22}\cdot(\beta^3)^8}{\alpha^{-2}\cdot(\alpha\beta)^{25}}=\dfrac{\alpha^{22}\cdot\beta^{3\cdot 8}}{\alpha^{-2}\cdot\alpha^{25}\beta^{25}}=\dfrac{\alpha^{22}\cdot\beta^{24}}{\alpha^{-2+25}\cdot\beta^{25}}=\dfrac{\alpha^{22}\beta^{24}}{\alpha^{23}\beta^{25}}=\alpha^{22-23}\cdot\beta^{24-25}=$

$\alpha^{-1}\beta^{-1}=\dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{\alpha\beta}=\dfrac{1}{1}=1$, αφού από το (α) ερώτημα βρήκαμε ότι $\alpha\beta=1$.

Τελικά $K=1$.

119. **GI_A_ALG_2_3878**

Ένα Λύκειο έχει **400** μαθητές από τους οποίους οι **200** είναι μαθητές της Α΄ τάξης. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή, η πιθανότητα να είναι μαθητής της Γ΄ τάξης είναι 20%. Να βρείτε:

α. Το πλήθος των μαθητών της Γ΄ τάξης (Μονάδες 10)

β. Το πλήθος των μαθητών της Β΄ τάξης. (Μονάδες 5)

γ. Την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέξαμε να είναι της Β΄ τάξης. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Έστω Ω το σύνολο των μαθητών του σχολείου και A, B και Γ τα ενδεχόμενα ένας μαθητής να είναι μαθητής της A', της B' ή της Γ' Λυκείου αντίστοιχα. Τότε από την υπόθεση έχουμε $N(\Omega)=400$, $N(A)=200$ και

$$P(\Gamma)=20\%\Leftrightarrow$$
$$\frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)}=\frac{20}{100}\Leftrightarrow$$
$$\frac{N(\Gamma)}{400}=\frac{20}{100}\Leftrightarrow$$
$$100\cdot N(\Gamma)=20\cdot 400\Leftrightarrow$$

$$N(\Gamma)=\frac{20\cdot 400}{100}\Leftrightarrow \quad N(\Gamma)=80,$$ δηλαδή η Γ' τάξη έχει 80 μαθητές.

β. Η B' τάξη έχει $N(B)=N(\Omega)-N(A)-N(\Gamma)=400-200-80=120$ μαθητές.

γ. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η:

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}\Rightarrow P(B)=\frac{120}{400}\Rightarrow P(B)=\frac{30}{100}=30\%.$$

Δηλαδή η πιθανότητα ο μαθητής που επιλέξαμε να είναι της B' τάξης, είναι 30%.

120. **GI_A_ALG_2_3884**

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x,3)=3-2x$

α. Να αποδείξετε ότι $x\le\frac{3}{2}$. (Μονάδες 12)

β. Αν $x\le\frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K=|2x-3|-2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του x. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Γνωρίζουμε ότι $d(2x,3)=|2x-3|$ συνεπώς η σχέση $d(2x,3)=3-2x\Rightarrow$ $|2x-3|=3-2x=-(2x-3)$, το οποίο ισχύει (από τον ορισμό της απόλυτης τιμής) όταν: $2x-3\le 0\Leftrightarrow 2x\le 3\Leftrightarrow x\le\frac{3}{2}$.

β. Από το (α) βρήκαμε ότι $x\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2x-3\le 0$, άρα $|2x-3|=-2x+3$.

Επιπλέον ισχύει $x\le\frac{3}{2}<3\Leftrightarrow 3-x>0$ άρα $|3-x|=3-x$.

Έχουμε λοιπόν: $K=|2x-3|-2|3-x|=-2x+3-2(3-x)=$

$\cancel{-2x}+3-6\cancel{+2x}=-3,$

δηλαδή η παράσταση K είναι ανεξάρτητη του x.

121. **GI_A_ALG_2_4288**

α. Να βρείτε, για ποιες τιμές του x, οι αριθμοί $x+4$, $2-x$, $6-x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 13)

β. Αν $x=5$ και ο $6-x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, να βρείτε:

i) το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 6)

ii) τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α. Οι αριθμοί $x+4$, $2-x$, $6-x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$\left(2-x\right)^2=\left(x+4\right)\cdot\left(6-x\right)\Leftrightarrow$$

$$4\cancel{-4x}+x^2=6x-x^2+24\cancel{-4x}\Leftrightarrow$$

$$4+x^2-6x+x^2-24=0\Leftrightarrow$$

$$2x^2-6x-20=0\Leftrightarrow$$

$$x^2-3x-10=0.$$

Η εξίσωση αυτή είναι δευτέρου βαθμού ως προς x με διακρίνουσα $\Delta=\left(-3\right)^2-4\cdot1\cdot\left(-10\right)=9+40=49>0$, άρα έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-\left(-3\right)\pm\sqrt{49}}{2\cdot1}=\frac{3\pm7}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{3+7}{2}=5\\ x_2=\dfrac{3-7}{2}=-2\end{cases}.$$

Άρα τελικά $x=5$ ή $x=-2$.

β. Αφού $x=5$ και ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρικής προόδου είναι ο $6-x$ θα ισχύει: $\alpha_4=6-x=6-5=1$. Επίσης, από το (α), ο τρίτος όρος της γεωμετρικής προόδου είναι ο $\alpha_3=2-x=2-5=-3$ και ο δεύτερος όρος της είναι ο $\alpha_2=x+4=5+4=9$.

i) Ο λόγος λ της γεωμετρικής προόδου είναι ίσος με:

$$\lambda=\frac{\alpha_4}{\alpha_3}=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}.$$

ii) 1^{ος} τρόπος: Γνωρίζουμε ότι $\lambda=\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\Rightarrow\alpha_1=\dfrac{\alpha_2}{\lambda}\Rightarrow\alpha_1=\dfrac{9}{-\frac{1}{3}}=-27$.

2^{ος} τρόπος: Από τη σχέση $\alpha_\nu=\alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1}$ για $\nu=4$ έχουμε $\alpha_4=\alpha_1\cdot\lambda^3\Rightarrow$

$$1=\alpha_1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3\Rightarrow1=\alpha_1\cdot\left(-\frac{1}{27}\right)\Rightarrow\alpha_1=\frac{1}{-\frac{1}{27}}=-27.$$

(όμοια θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το α_1 και με τη βοήθεια του α_3 ή του α_2 εφαρμόζοντας και πάλι τον τύπο του ν-οστού όρου για $\nu=3$ ή $\nu=2$ αντίστοιχα).

122. **GI_A_ALG_2_4290**

Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-2|<3$.

α. Να αποδείξετε ότι: $-1<x<5$. (Μονάδες 12)

β. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K=\dfrac{|x+1|+|x-5|}{2}$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε: $|x-2|<3\Leftrightarrow-3<x-2<3\Leftrightarrow-3+2<x-2+2<3+2\Leftrightarrow$ $-1<x<5$.

β. Έχουμε: $-1<x<5\Leftrightarrow x>-1$ και $x<5\Leftrightarrow x+1>0$ και $x-5<0$, άρα $|x+1|=x+1$ και $|x-5|=-\left(x-5\right)=-x+5$. Συνεπώς η παράσταση γίνεται:

$$K = \frac{|x+1|+|x-5|}{2} = \frac{x+1+(-x+5)}{2} = \frac{x+1-x+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$, δηλαδή $K = 3$.

123. **GI_A_ALG_2_4295**

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y, για τους οποίους ισχύει $|y-2|<1$.

α. Να αποδείξετε ότι $y \in (1,3)$. (Μονάδες 12)

β. Να απλοποιήσετε την παράσταση $K = \frac{|y-1|+|y-3|}{2}$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. $|y-2|<1 \Leftrightarrow -1<y-2<1 \Leftrightarrow -1+2<y-2+2<1+2 \Leftrightarrow 1<y<3$, άρα $y \in (1,3)$.

β. Επειδή $y \in (1,3)$ ισοδύναμα θα έχουμε:

$1<y<3 \Leftrightarrow 1-1<y-1<3-1 \Leftrightarrow 0<y-1<2$, επομένως $|y-1| = y-1$ και

$1<y<3 \Leftrightarrow 1-3<y-3<3-3 \Leftrightarrow -2<y-3<0$, επομένως $|y-3| = 3-y$.

Άρα η δοθείσα παράσταση απλοποιείται ως εξής:

$$K = \frac{|y-1|+|y-3|}{2} = \frac{y-1+3-y}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

124. **GI_A_ALG_2_4299**

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $3 \le x \le 5$ και $-2 \le y \le -1$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α. $y-x$. (Μονάδες 12)

β. x^2+y^2. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Είναι $-2 \le y \le -1$ (1) και $3 \le x \le 5 \Leftrightarrow -3 \ge -x \ge -5 \Leftrightarrow -5 \le -x \le -3$ (2).
Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε : $-7 \le y-x \le -4$, άρα $y-x \in [-7,-4]$.

β. Είναι

$-2 \le y \le -1 \Leftrightarrow 2 \ge -y \ge 1 \Leftrightarrow 1 \le -y \le 2 \Leftrightarrow 1^2 \le (-y)^2 \le 2^2 \Leftrightarrow 1 \le y^2 \le 4$

(1) και $3 \le x \le 5 \Leftrightarrow 3^2 \le x^2 \le 5^2 \Leftrightarrow 9 \le x^2 \le 25$ (2).

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε : $10 \le x^2+y^2 \le 29$, άρα $x^2+y^2 \in [10,29]$.

125. **GI_A_ALG_2_4300**

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.

α. Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$. (Μονάδες 12)

β. Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 152. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Γνωρίζουμε ότι ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, όπου ω η διαφορά της προόδου . Οπότε για $\nu = 25$ έχουμε $\alpha_{25} = \alpha_1 + 24\omega$ (1) ενώ για $\nu = 12$ έχουμε $\alpha_{12} = \alpha_1 + 11\omega$ (2)

Άρα λόγω των (1),(2) η σχέση $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$ γίνεται:

$\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39 \Leftrightarrow \alpha_1 + 24\omega = \alpha_1 + 11\omega + 39 \Leftrightarrow 24\omega - 11\omega = 39 \Leftrightarrow$
$13\omega = 39 \Leftrightarrow \omega = 3$.

β. Για να βρούμε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 152 αρκεί να βρούμε το ν ώστε $\alpha_\nu = 152$.

Οπότε έχουμε:

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \Leftrightarrow 152 = 2 + 3(\nu - 1) \Leftrightarrow 3(\nu - 1) = 150 \Leftrightarrow \nu - 1 = 50 \Leftrightarrow \nu = 51$
.

Άρα η τάξη του όρου 152, είναι 51, δηλαδή $\alpha_{51} = 152$..

126. **GI_A_ALG_2_4301**

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α. Να δείξετε ότι: $\dfrac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = 2$. (Μονάδες 13)

β. Αν $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18$, να βρείτε την διαφορά ω της προόδου. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. Γνωρίζουμε ότι ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$.

Οπότε έχουμε $\dfrac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = \dfrac{(\alpha_1 + 14\omega) - (\alpha_1 + 8\omega)}{(\alpha_1 + 9\omega) - (\alpha_1 + 6\omega)} = \dfrac{\alpha_1 + 14\omega - \alpha_1 - 8\omega}{\alpha_1 + 9\omega - \alpha_1 - 6\omega} = \dfrac{6\omega}{3\omega} = 2$.

β. Είναι

$\alpha_{15} - \alpha_9 = 18 \Leftrightarrow (\alpha_1 + 14\omega) - (\alpha_1 + 8\omega) = 18 \Leftrightarrow \alpha_1 + 14\omega - \alpha_1 - 8\omega = 18 \Leftrightarrow$
$6\omega = 18 \Leftrightarrow \omega = 3$.

127. **GI_A_ALG_2_4302**

Δίνεται η εξίσωση $(\alpha + 3)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) όταν $\alpha = 1$. (Μονάδες 5)

ii) όταν $\alpha = -3$. (Μονάδες 8)

β. Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε την λύση αυτή. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. Η εξίσωση ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

i) Για $\alpha = 1$ η δοθείσα εξίσωση γίνεται $4x = -8 \Leftrightarrow x = -2$.

ii) Για $\alpha = -3$ η δοθείσα εξίσωση γίνεται $0x = 0$ η οποία είναι ταυτότητα.

β. Η δοθείσα εξίσωση έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $\alpha + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -3$.

Για $\alpha \neq -3$ έχουμε $(\alpha+3)x = (\alpha-3)(\alpha+3) \Leftrightarrow x = \frac{(\alpha-3)(\alpha+3)}{\alpha+3} \Leftrightarrow x = \alpha - 3$, μοναδική λύση.

128. **GI_A_ALG_2_4303**

Σε αριθμητική πρόοδος (α_ν) ισχύουν: $\alpha_4 - \alpha_9 = 15$ και $\alpha_1 = 41$.

α. Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3. (Μονάδες 12)

β. Να βρείτε τον θετικό ακέραιο ν, ώστε $\alpha_\nu = \nu$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Γνωρίζουμε ότι ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$.

Οπότε έχουμε

$$\alpha_4 - \alpha_9 = 15 \Leftrightarrow (\alpha_1 + 3\omega) - (\alpha_1 + 8\omega) = 15 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1 + 3\omega - \alpha_1 - 8\omega = 15 \Leftrightarrow -5\omega = 15 \Leftrightarrow \omega = -3$$

β. Είναι

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega \Leftrightarrow 41 + (\nu-1)\cdot(-3) = \nu \Leftrightarrow 41 - 3\nu + 3 = \nu \Leftrightarrow 4\nu = 44 \Leftrightarrow \nu = 11$$

.

129. **GI_A_ALG_2_4304**

Σε αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά $\omega = 4$, ισχύει : $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40$.

α. Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. (Μονάδες 12)

β. Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Γνωρίζουμε ότι ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$.

Οπότε έχουμε:

$$\alpha_6 + \alpha_{11} = 40 \Leftrightarrow \alpha_1 + 5\omega + \alpha_1 + 10\omega = 40 \Leftrightarrow 2\alpha_1 + 15\omega = 40 \Leftrightarrow 2\alpha_1 + 15\cdot 4 = 40 \Leftrightarrow$$

$$2\alpha_1 + 60 = 40 \Leftrightarrow 2\alpha_1 = 40 - 60 \Leftrightarrow 2\alpha_1 = -20 \Leftrightarrow \alpha_1 = -10.$$

β. Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο $S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \Leftrightarrow S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right]$.

Για να βρούμε πόσους πρώτους όρους πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμα να είναι ίσο με μηδέν αρκεί να βρούμε το ν ώστε $S_\nu = 0$.

Είναι,

$S_v = 0 \Leftrightarrow \frac{v}{2}\left[2\alpha_1 + (v-1)\omega\right] = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{v}{2}\left[2\cdot(-10) + 4(v-1)\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{v}{2}(-20 + 4v - 4) = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{v}{2}(-24 + 4v) = 0 \Leftrightarrow v(-24 + 4v) = 0$ όπου ισοδύναμα έχουμε $v = 0$ ή

$4v - 24 = 0 \Leftrightarrow 4v = 24 \Leftrightarrow v = 6$.

Όμως $v = 0$ απορρίπτεται αφού $v \in \mathbb{N}^*$, άρα $v = 6$.

130. **GI_A_ALG_2_4305**

α. Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|2x - 3| \le 5$. (Μονάδες 9)

ii) $|2x - 3| \ge 1$. (Μονάδες 9)

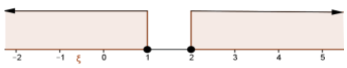
β. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

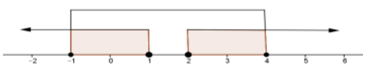
α.

i) $|2x - 3| \le 5 \Leftrightarrow -5 \le 2x - 3 \le 5 \Leftrightarrow -5 + 3 \le 2x - 3 + 3 \le 5 + 3 \Leftrightarrow$
$-2 \le 2x \le 8 \Leftrightarrow -1 \le x \le 4$, άρα $x \in [-1, 4]$.

ii) $|2x - 3| \ge 1 \Leftrightarrow 2x - 3 \ge 1$ ή $2x - 3 \le -1 \Leftrightarrow$
$2x - 3 + 3 \ge 1 + 3$ ή $2x - 3 + 3 \le -1 + 3 \Leftrightarrow$
$2x \ge 4$ ή $2x \le 2 \Leftrightarrow x \ge 2$ ή $x \le 1$, άρα $x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.



β. Οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν στα γραμμοσκιασμένα διαστήματα.



Επομένως $x \in [-1, 1] \cup [2, 4]$.

131. **GI_A_ALG_2_4306**

α. Να λύσετε την εξίσωση $2x^2 - x - 6 = 0$ (1). (Μονάδες 9)

β. Να λύσετε την ανίσωση $|x-1| < 2$ (2). (Μονάδες 9)

γ. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2). (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. Θα αναζητήσουμε τις λύσεις της εξίσωσης $2x^2 - x - 6 = 0$

Είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Leftrightarrow \Delta = (-1)^2 - 4\cdot 2\cdot(-6) \Leftrightarrow \Delta = 1 + 48 \Leftrightarrow \Delta = 49 > 0$, οπότε η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες , τις:

$x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Leftrightarrow x_{1,2} = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2\cdot 2} \Leftrightarrow x_{1,2} = \dfrac{1 \pm 7}{4}$, οπότε $x_1 = \dfrac{1-7}{4} = -\dfrac{3}{2}$ και $x_2 = \dfrac{1+7}{4} = \dfrac{8}{4} = 2$

β. $|x-1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \Leftrightarrow -2+1 < x-1+1 < 2+1 \Leftrightarrow -1 < x < 3$, άρα $x \in (1,3)$.

γ. Επειδή $x_1 = -\dfrac{3}{2} \notin (1,3)$ ενώ $x_2 = 2 \in (1,3)$, ο $x = 2$ είναι ο μοναδικός πραγματικός αριθμός x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

132. **GI_A_ALG_2_4308**

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση $\Pi = \dfrac{2x^2-1}{x^2-x} + \dfrac{1}{1-x}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 10)

β. Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{2x^2-1}{x^2-x} + \dfrac{1}{1-x} = 0$. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α. Για να έχει η παράσταση $\Pi = \dfrac{2x^2-1}{x^2-x} + \dfrac{1}{1-x}$ νόημα πραγματικού αριθμού πρέπει οι παρονομαστές των κλασμάτων να είναι μη μηδενικοί αριθμοί.

Άρα πρέπει

$x^2 - x \neq 0$ **και** $1 - x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-1) \neq 0$ **και** $x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$ **και** $x \neq 1$.

β. Για $x \neq 0$ **και** $x \neq 1$ η δοθείσα εξίσωση γίνεται ισοδύναμα

$$\frac{2x^2-1}{x^2-x} + \frac{1}{1-x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-1}{x(x-1)} + \frac{1}{-(x-1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-1}{x(x-1)} - \frac{1}{(x-1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x-1)\frac{2x^2-1}{x(x-1)} - x(x-1)\frac{1}{(x-1)} = 0\cdot x(x-1) \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0.$$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Leftrightarrow \Delta = (-1)^2 - 4\cdot 2\cdot(-1) \Leftrightarrow \Delta = 1+8 \Leftrightarrow \Delta = 9 > 0$, οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2\cdot 2} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1\pm 3}{4} \text{ οπότε } x_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

και $x_2 = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$.

Όμως $x \neq 1$, οπότε η λύση της δοθείσας εξίσωσης είναι η $x = -\frac{1}{2}$.

133. **GI_A_ALG_2_4309**

Δίνεται ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 20 \text{ cm}$ και εμβαδό $E = 24 \text{ cm}^2$.

α. Να κατασκευάσετε μία εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ως ρίζες τα μήκη των πλευρών αυτού του ορθογωνίου. (Μονάδες 15)

β. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Έστω x_1, x_2 οι διαστάσεις του ορθογωνίου. Αν θεωρήσουμε $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 x_2$ τότε:

$\Pi = 20 \cdot 2x_1 + 2x_2 = 20 \overset{:2}{\Leftrightarrow} x_1 + x_2 = 10 \cdot S = 10$.

$E = 24 \cdot x_1 \cdot x_2 = 24 \cdot P = 24$.

Η ζητούμενη εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες τις διαστάσεις του ορθογωνίου είναι η:

$$x^2 - 10x + 24 = 0$$

β. Τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου είναι λύσεις της εξίσωσης $x^2 - 10x + 24 = 0$, η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta = 100 - 96 = 4$ και συνεπώς έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις:

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{10+2}{2} = 6 \\ \frac{10-2}{2} = 4 \end{cases}$$

Άρα τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου είναι 6 και 4.

134. **GI_A_ALG_2_4310**

Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α, β, τέτοιοι ώστε:

$$\alpha + \beta = 12 \text{ και } \alpha^2 + \beta^2 = 272.$$

α. Με τη βοήθεια της ταυτότητας

$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2,$$

να δείξετε ότι: $\alpha\beta = -64$. (Μονάδες 8)

β. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β. (Μονάδες 10)

γ. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. $\alpha+\beta=12\cdot(\alpha+\beta)^2=144\cdot\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=144 \overset{\alpha^2+\beta^2=272}{\Leftrightarrow}$

$2\alpha\beta+272=144\cdot 2\alpha\beta=144-272\cdot 2\alpha\beta=-128\cdot \alpha\beta=-64$

β. Η ζητούμενη εξίσωση 2[ου] βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α και β είναι η:

$$x^2-12x-64=0$$

γ. Η παραπάνω εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=144+256=400$ και ρίζες:

$$x_{1,2}=\frac{12\pm 20}{2}=\begin{cases}\dfrac{12+20}{2}=16\\[2mm] \dfrac{12-20}{2}=-4\end{cases}$$

Άρα οι αριθμοί α,β είναι οι 16 και -4.

135. **GI_A_ALG_2_4311**

Δίνονται οι παραστάσεις $A=\sqrt{(x-2)^2}$ και $B=\sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; (Μονάδες 7)

β. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B; (Μονάδες 8)

γ. Να δείξετε ότι, για κάθε $x\le 2$, ισχύει $A=B$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Η A ορίζεται όταν: $(x-2)^2\ge 0$, το οποίο ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β. Η B ορίζεται όταν: $(2-x)^3\ge 0 \Leftrightarrow 2-x\ge 0\Leftrightarrow x\le 2$.

γ. Έχουμε $A=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|=\begin{cases}x-2, & \alpha\nu\, x>2\\ 2-x, & \alpha\nu\, x\le 2\end{cases}$ και

$B=\sqrt[3]{(2-x)^3}=2-x$ για κάθε $x\le 2$.

Άρα $A=B$ για κάθε $x\le 2$.

136. **GI_A_ALG_2_4312**

Οι αριθμοί $x+6$, $5x+2$, $11x-6$ είναι, με την σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω.

α. Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega=4$. (Μονάδες 12)

β. Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $a_1=0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε, $5x+2=\dfrac{x+6+11x-6}{2}\cdot 2(5x+2)=x+6+11x-6\cdot 10x+4=12x$

$\Leftrightarrow 4=12x-10x\Leftrightarrow 2x=4\Leftrightarrow x=2$.

Δηλαδή οι τρεις αριθμοί είναι: $\begin{cases}2+6=8\\ 5\cdot 2+2=10+2=12\\ 11\cdot 2-6=22-6=16\end{cases}$

Επομένως παίρνοντας την διαφορά δυο διαδοχικών όρων προκύπτει $\omega = 16 - 12 = 4$.

β. Είναι, $S_8 = \frac{8}{2}\left[2\cdot 0 + (8-1)\cdot 4\right] = 4(0 + 7\cdot 4) = 4\cdot 28 = 112$.

137. **GI_A_ALG_2_4313**

Δίνονται οι αριθμοί $A = \frac{1}{3-\sqrt{7}}$, $B = \frac{1}{3+\sqrt{7}}$.

α. Να δείξετε ότι: $A + B = 3$ και $A\cdot B = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 12)

β. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A, B. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε:

✓ $A = \frac{1}{3-\sqrt{7}} = \frac{1\cdot(3+\sqrt{7})}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})} = \frac{3+\sqrt{7}}{3^2 - \sqrt{7}^2} = \frac{3+\sqrt{7}}{9-7} = \frac{3+\sqrt{7}}{2}$

✓ $B == \frac{1}{3+\sqrt{7}} = \frac{1\cdot(3-\sqrt{7})}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})} = \frac{3-\sqrt{7}}{3^2 - \sqrt{7}^2} = \frac{3-\sqrt{7}}{9-7} = \frac{3-\sqrt{7}}{2}$

✓ $A + B = \frac{3+\sqrt{7}}{2} + \frac{3-\sqrt{7}}{2} = \frac{3+\sqrt{7}+3-\sqrt{7}}{2} = \frac{6}{2} = 3$

✓ $A\cdot B = \frac{3+\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{3-\sqrt{7}}{2} = \frac{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})}{4} = \frac{3^2 - \sqrt{7}^2}{4} = \frac{9-7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

β. Η ζητούμενη εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τα A, B είναι η:

$$x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 2x^2 - 6x + 1 = 0.$$

138. **GI_A_ALG_2_4314**

Αν είναι $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$, $\Gamma = \sqrt[6]{5}$, τότε:

α. Να αποδείξετε $A\cdot B\cdot \Gamma = \sqrt{15}$. (Μονάδες 15)

β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς A, B. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε,

$$A\cdot B\cdot\Gamma = \sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{5^2}\cdot\sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{5^2\cdot 3^3\cdot 5} = \sqrt[6]{5^3\cdot 3^3} = \sqrt[6]{(5\cdot 3)^3} =$$

$$\sqrt[6]{15^3} = \sqrt{15}$$

β. Είναι $A = \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$ και $B = \sqrt{3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$. Άρα $A < B$.

γ.

139. **GI_A_ALG_2_4315**

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν), για την οποία ισχύει $\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27$.

α. Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$. (Μονάδες 10)

β. Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α. $\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27 \Leftrightarrow \frac{\alpha_1 \cdot \lambda^{5-1}}{\alpha_1 \cdot \lambda^{2-1}} = 27 \Leftrightarrow \frac{\lambda^4}{\lambda} = 27 \Leftrightarrow \lambda^3 = 27 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt[3]{27} \Leftrightarrow \lambda = 3$.

β. $S_4 = 200 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \frac{3^4 - 1}{3-1} = 200 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \frac{81-1}{2} = 200 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \frac{80}{2} = 200 \Leftrightarrow$

$40\alpha_1 = 200 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{200}{40} \Leftrightarrow \alpha_1 = 5$

140. **GI_A_ALG_2_4316**

Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$, $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$. (Μονάδες 12)

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. $A \cdot B = \left(2 - \sqrt{3}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right) = 2^2 - \sqrt{3}^2 = 4 - 3 = 1$

β. $\Pi = A^2 + B^2 = (A + B)^2 - 2A \cdot B = \left(2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 1 = 4^2 - 2 = 14$

141. **GI_A_ALG_2_4317**

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

α. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 12)

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να βρείτε το λ ώστε $x_1 x_2 = -3$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Για κάθε $\lambda \neq -2$ ισχύει ότι:

$\Delta = (2\lambda)^2 - 4(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 4\lambda^2 - 4\left(\lambda^2 - \lambda + 2\lambda - 2\right) =$

$4\lambda^2 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 8\lambda + 8 = 8 - 4\lambda$

Για να έχει η εξίσωση 2 ρίζες πραγματικές και άνισες, πρέπει:

$\Delta > 0 \Leftrightarrow 8 - 4\lambda > 0 \Leftrightarrow 4\lambda < 8 \Leftrightarrow \lambda < 2$. Αλλά είναι και $\lambda \neq -2$.

Άρα $\lambda \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2)$.

β. Το γινόμενο των ριζών x_1, x_2 ισούται με,

$$P = x_1 x_2 = -3 \Leftrightarrow \frac{\lambda - 1}{\lambda + 2} = -3 \Leftrightarrow \lambda - 1 = -3(\lambda + 2) \Leftrightarrow \lambda - 1 = -3\lambda - 6 \Leftrightarrow$$

$$\lambda+3\lambda=-6+1 \Leftrightarrow 4\lambda=-5 \Leftrightarrow \lambda=-\frac{5}{4} \text{ δεκτό αφού } -\frac{5}{4} \in (-\infty,-2)\cup(-2,2)$$

142. **GI_A_ALG_2_4318**

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x-1|<1$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $0<x<1$. (Μονάδες 15)

β. Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς 1 , x , x^2.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε $|2x-1|<1 \Leftrightarrow -1<2x-1<1 \Leftrightarrow 0<2x<2 \overset{:2}{\Leftrightarrow} 0<x<1$.

β. Είναι $x<1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2<x$ και αφού $x<1$, έχουμε ότι $x^2<x<1$.

143. **GI_A_ALG_2_4319**

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) είναι $\alpha_1=2$ και $\alpha_5=14$.

α. Να αποδείξετε ότι $\omega=3$. (Μονάδες 12)

β. Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77. (Μονάδες 13)

(Δίνεται $\sqrt{1849}=43$)

ΛΥΣΗ

α. Ο ν-οστός μιας αριθμητικής προόδου ισούται με $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$, επομένως, ο πέμπτος όρος ισούται με $\alpha_5=\alpha_1+(5-1)\omega=2+4\omega$. Άρα αφού $\alpha_5=14 \Leftrightarrow 2+4\omega=14 \Leftrightarrow 4\omega=14-2 \Leftrightarrow$

$4\omega=12 \Leftrightarrow \omega=\frac{12}{4} \Leftrightarrow \omega=3$.

β. Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μια αριθμητικής προόδου ισούται με $S_\nu=\frac{\nu}{2}[2\alpha_1+(\nu-1)\omega]$.

Οπότε $S_\nu=77 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}[2\cdot 2+(\nu-1)\cdot 3]=77 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} \nu(4+3\nu-3)=154 \Leftrightarrow$

$$\nu(3\nu+1)=154 \Leftrightarrow 3\nu^2+\nu=154 \Leftrightarrow 3\nu^2+\nu-154=0.$$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta=1+1848=1849>0$. Επομένως η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες τις,

$$\nu_{1,2}=\frac{-1\pm 43}{6}=\begin{cases} \frac{-1+43}{6}=\frac{42}{6}=7, \text{ δεκτή} \\ \text{ή} \\ \frac{-1-43}{6}=-\frac{44}{6}, \text{ απορρίπτεται} \end{cases}.$$

Η περίπτωση $\nu = -\frac{44}{6}$ απορρίπτεται διότι το πλήθος των όρων ν μιας αριθμητικής προόδου είναι φυσικός αριθμός. Άρα για να πάρουμε άθροισμα 77, πρέπει να προσθέσουμε 7 πρώτους όρους.

144. **GI_A_ALG_2_7519**

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α,β, με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$ (Μονάδες 12)

β. $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4 \overset{\cdot\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha \cdot \left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right) \geq 4 \cdot \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 4 \geq 4\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 2)^2 \geq 0$

, το οποίο ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό α.

β. Με εφαρμογή του πρώτου ερωτήματος έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4 \\ \beta + \frac{4}{\beta} \geq 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 4 \cdot 4 \Rightarrow \left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16.$$

145. **GI_A_ALG_2_7521**

α. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|1 - 2x| < 5$ και (Μονάδες 9)

ii) $|1 - 2x| \geq 1$ (Μονάδες 9)

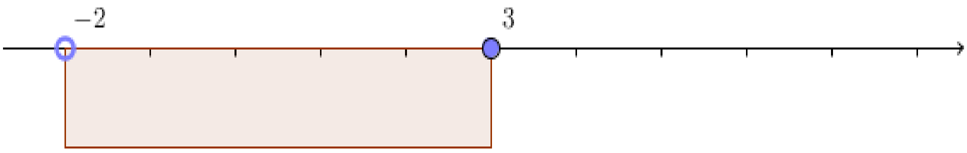
β. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

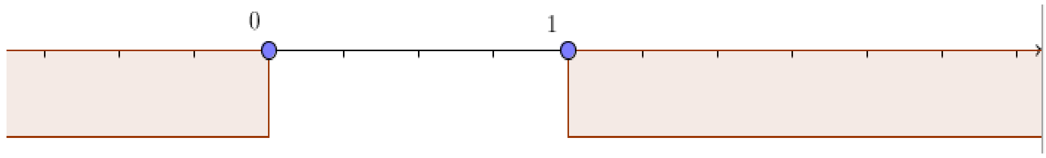
α.

i) $|1 - 2x| < 5 \Leftrightarrow -5 < 1 - 2x < 5 \Leftrightarrow -5 - 1 < -2x < 5 - 1 \Leftrightarrow$

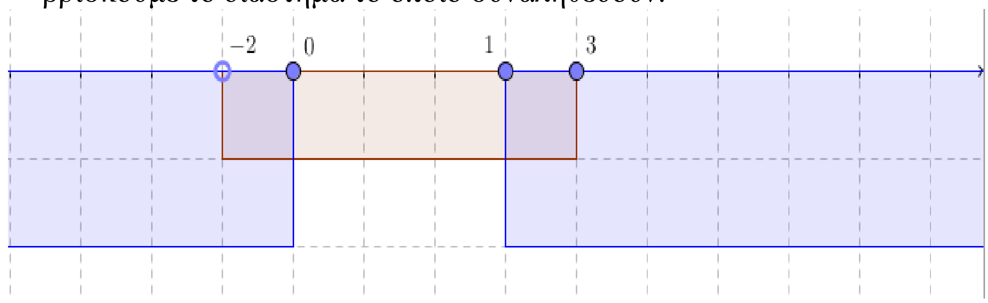
$-6 < -2x < 4 \overset{-2<0}{\Leftrightarrow} \frac{-6}{-2} > \frac{-2x}{-2} > \frac{4}{-2} \Leftrightarrow -2 < x < 3$



ii) $$|1-2x|\ge 1 \Rightarrow \begin{cases}1-2x\ge 1\\ \text{ή}\\ 1-2x\le -1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1-1\ge 2x\\ \text{ή}\\ 1+1\le 2x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0\ge 2x\\ \text{ή}\\ 2\le 2x\end{cases} \overset{2>0}{\Rightarrow} \begin{cases}\dfrac{0}{2}\ge \dfrac{2x}{2}\\ \text{ή}\\ \dfrac{2}{2}\le \dfrac{2x}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\le 0\\ \text{ή}\\ 1\le x\end{cases}$$



β. Από τη γραφική επίλυση των ανισώσεων του προηγούμενου ερωτήματος, βρίσκουμε το διάστημα το οποίο συναληθεύουν.



Όπως φαίνεται από το προηγούμενο σχήμα , η κοινή λύση είναι το σύνολο $(-2,0]\cup[1,3]$. Στη συνέχεια επιλέγουμε τις ακέραιες τιμές που περιέχονται σε αυτό, άρα $x\in\{-1,0,1,2,3\}$.

146. GI_A_ALG_2_8173

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$$\sqrt{2}\cong 1,41$$
$$\sqrt{3}\cong 1,73$$
$$\sqrt{5}\cong 2,24$$
$$\sqrt{7}\cong 2,64$$

α. Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}.\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$. (Μονάδες 12)

β. Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{3\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}$; (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Από τις ιδιότητες των ριζών βρίσκουμε:

$\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=2\sqrt{5}\cong 2\cdot 2,24=4,48$

$\sqrt{45}=\sqrt{9\cdot 5}=3\sqrt{5}\cong 3\cdot 2,24=6,72$

$\sqrt{80}=\sqrt{16\cdot 5}=4\sqrt{5}\cong 4\cdot 2,24=8,96$

β. $\dfrac{3\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{4\cdot 5}+\sqrt{16\cdot 5}}{\sqrt{9\cdot 5}-\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{4}\sqrt{5}+\sqrt{16}\sqrt{5}}{\sqrt{9\cdot 5}-\sqrt{5}}=\dfrac{6\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-\sqrt{5}}=\dfrac{10\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\dfrac{10}{2}=5$

147. **GI_A_ALG_4_1868**

Σε ένα τμήμα της Α’ Λυκείου κάποιοι μαθητές παρακολουθούν μαθήματα Αγγλικών και κάποιοι Γαλλικών. Η πιθανότητα ένας μαθητής να μην παρακολουθεί Γαλλικά είναι $0,8$. Η πιθανότητα ένας μαθητής να παρακολουθεί Αγγλικά είναι τετραπλάσια από την πιθανότητα να παρακολουθεί Γαλλικά. Τέλος, η πιθανότητα ένας μαθητής να παρακολουθεί μαθήματα τουλάχιστον μιας από τις δύο γλώσσες είναι $0,9$.

α. Επιλέγουμε ένα μαθητή στην τύχη. (Μονάδες 9)

i) Ποια είναι η πιθανότητα αυτός να παρακολουθεί μαθήματα και των δύο γλωσσών; (Μονάδες 9)

ii) Ποια είναι η πιθανότητα αυτός να παρακολουθεί μαθήματα μόνο μιας από τις δύο γλώσσες;

β. Αν 14 μαθητές παρακολουθούν μόνο Αγγλικά, πόσοι είναι οι μαθητές του τμήματος; (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

$\mathbf{A:}$ Ο μαθητής παρακολουθεί Αγγλικά και

$\mathbf{\Gamma:}$ Ο μαθητής παρακολουθεί Γαλλικά,

οπότε, το ενδεχόμενο: $A\cup\Gamma$ είναι ο μαθητής να παρακολουθεί μαθήματα τουλάχιστον μιας από τις δύο γλώσσες.

Δίνεται ότι $P(\Gamma')=0,8$, οπότε:

$P(\Gamma')=0,8\Rightarrow P(\Gamma)=1-P(\Gamma')=1-0,8=0,2$ και $P(A)=4P(\Gamma)=4\cdot 0,2=0,8$.

Ακόμα $P(A\cup\Gamma)=0,9$.

i) Ζητούμε την πιθανότητα

$P(A\cap\Gamma)=P(A)+P(\Gamma)-P(A\cup\Gamma)=0,8+0,2-0,9=0,1$

ii) Ζητούμε την πιθανότητα $P\left[(A-\Gamma)\cup(\Gamma-A)\right]$ και επειδή τα ενδεχόμενα

$\mathbf{A-\Gamma,\Gamma-A}$ είναι ασυμβίβαστα , έχουμε :

$$\mathbf{P\left[(A-\Gamma)\cup(\Gamma-A)\right]=P(\Gamma-A)+P(A-\Gamma)=P(\Gamma)-P(A\cap\Gamma)+P(A)-P(A\cap\Gamma)=}$$
$$\mathbf{=0,2+0,8-2\cdot 0,1=0,8}$$

β. Είναι: $\mathbf{P(A-\Gamma)=P(A)-P(A\cap\Gamma)=0,8-0,1=0,7}$

και $\mathbf{P(A-\Gamma)=\dfrac{N(A-\Gamma)}{N(\Omega)}\Leftrightarrow 0,7=\dfrac{14}{N(\Omega)}\Leftrightarrow N(\Omega)=\dfrac{14}{0,7}=20}$.

148. **GI_A_ALG_4_1874**

Δίνεται η εξίσωση: $\mathbf{x^2-2(\lambda-1)x+\lambda+5=0}$ **(1)** , με παράμετρο $\boldsymbol{\lambda\in\mathbb{R}}$.

α. Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι: $\mathbf{\Delta=4\lambda^2-12\lambda-16}$. (Μονάδες 7)

β. Να βρείτε τις τιμές του $\boldsymbol{\lambda\in\mathbb{R}}$, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 10)

γ. Αν η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς $\mathbf{x_1,x_2}$ και $\mathbf{d(x_1,x_2)}$ είναι η απόσταση των $\mathbf{x_1,x_2}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του $\boldsymbol{\lambda\in\mathbb{R}}$ ισχύει: $\mathbf{d\left(x_1,x_2\right)=\sqrt{24}}$. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α. Είναι:

$$\mathbf{\Delta=\left[-2\left(\lambda-1\right)\right]^2-4\left(\lambda+5\right)=4\left(\lambda-1\right)^2-4\left(\lambda+5\right)=4\lambda^2-8\lambda+4-4\lambda-20\Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{\Delta=4\lambda^2-12\lambda-16}.$$

β. Η εξίσωση θα έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\mathbf{\Delta>0\Leftrightarrow 4\lambda^2-12\lambda-16>0\Leftrightarrow 4\left(\lambda^2-3\lambda-4\right)>0\Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda-4>0}.$$

Το τριώνυμο $\mathbf{\lambda^2-3\lambda-4}$ έχει $\boldsymbol{\alpha=1>0}$ και διακρίνουσα $\mathbf{\Delta'=9-4\left(-4\right)=25>0}$, επομένως η εξίσωση $\mathbf{\lambda^2-3\lambda-4=0}$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες τις

$$\mathbf{\lambda_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{3\pm 5}{2}=\begin{cases}\lambda_1=4\\ \text{ή}\\ \lambda_2=-1\end{cases}}$$

. Συνεπώς για το πρόσημό του έχουμε:

λ	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$\lambda^2-3\lambda-4$		+	0	-	0	+	

Οπότε, $\Delta>0 \Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda-4>0 \Leftrightarrow \lambda<-1$ ή $\lambda>4$

γ. Εφόσον η εξίσωση έχει δύο ρίζες, έχουμε ότι: $\lambda<-1$ ή $\lambda>4$ (3). Τότε:

$$d(x_1,x_2)=\sqrt{24} \Leftrightarrow |x_1-x_2|=\sqrt{24} \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2=24 \Leftrightarrow x_1^2-2x_2x_1+x_2^2=24 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_2x_1-2x_2x_1=24 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_2x_1=24 \qquad (2)$$

Από τους τύπους **Vieta** και από την **(1)** έχουμε ότι:

$x_1+x_2=S=2(\lambda-1)$, $\quad x_1x_2=P=\lambda+5$, οπότε η **(2)** γίνεται:

$$4(\lambda-1)^2-4(\lambda+5)=24 \Leftrightarrow 4\lambda^2-8\lambda+4-4\lambda-20=24 \Leftrightarrow 4\lambda^2-12\lambda-40=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda-10=0 \Leftrightarrow \lambda=-2 \text{ ή } \lambda=5$$

Οι ρίζες αυτές είναι και οι δύο δεκτές, αφού ικανοποιούν τον περιορισμό (3)

149. **GI_A_ALG_4_1880**

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 10)

β. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες. (Μονάδες 7)

γ. Αν A,B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x, y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα A,B. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α. Η f ορίζεται αν και μόνο αν :

$$9-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}<\sqrt{9} \Leftrightarrow |x|<3 \Leftrightarrow -3<x<3,$$

επομένως είναι: $A_f=(-3,3)$

β. Για $x=0$, είναι $f(0)=\dfrac{0+2}{\sqrt{9-0}}=\dfrac{2}{3}$, επομένως τέμνει τον $y'y$ στο $B\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$

Για $y=0$, είναι $0=\dfrac{x+2}{\sqrt{9-x^2}} \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$, επομένως τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A(-2,0)$.

γ. Έστω $y=kx+m$ η εξίσωση της ευθείας (ε). Τα σημεία A,B, ανήκουν στην ευθεία, οπότε αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες τους σχηματίζουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l}0=k(-2)+m\\ \frac{2}{3}=k\cdot 0+m\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}2k=\frac{2}{3}\\ m=\frac{2}{3}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}k=\frac{1}{3}\\ m=\frac{2}{3}\end{array}\right\}.$$

Επομένως είναι η $(\varepsilon): y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

150. **GI_A_ALG_4_1890**

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x^2+(2\lambda+3)x+\lambda-2=0 \quad (1)$, με παράμετρο $\lambda\neq-2$.

α. Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι: $\Delta=12\lambda+25$. (Μονάδες 6)

β. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\neq-2$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

γ. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του λ το άθροισμα των ριζών $S=x_1+x_2$ και το γινόμενο των ριζών $P=x_1\cdot x_2$. (Μονάδες 4)

δ. Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) να ισχύει η σχέση: $(x_1+x_2-1)^2+(x_1\cdot x_2+3)^2=0 \qquad (2)$. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α. $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(2\lambda+3)^2-4\cdot(\lambda+2)\cdot(\lambda-2)=(2\lambda)^2+2\cdot 2\lambda\cdot 3+3^2-4(\lambda^2-4)=$

$=4\lambda^2+12\lambda+9-4\lambda^2+16=12\lambda+25$

β. Η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες όταν:

$$\Delta>0\Leftrightarrow 12\lambda+25>0\Leftrightarrow 12\lambda>-25\Leftrightarrow\lambda>\frac{-25}{12}.$$

Όμως $\lambda\neq-2$ άρα $\lambda\in\left(\frac{-25}{12},-2\right)\cup(-2,+\infty)$.

γ. $S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{2\lambda+3}{\lambda+2}$

$P=x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\lambda-2}{\lambda+2}$, για $\lambda\neq-2$

δ. Η $(x_1+x_2-1)^2+(x_1\cdot x_2+3)^2=0$ μας δίνει $x_1+x_2-1=0$ και $x_1\cdot x_2+3=0$

ΘΥΜΗΘΕΙΤΕ ότι: $\alpha^2+\beta^2=0\Leftrightarrow\alpha=\beta=0$.

✓ Άρα

$$x_1+x_2=1 \Leftrightarrow$$
$$-\frac{2\lambda+3}{\lambda+2}=1 \Leftrightarrow$$
$$-(2\lambda+3)=\lambda+2 \Leftrightarrow$$
$$-2\lambda-3=\lambda+2 \Leftrightarrow$$
$$-3\lambda=5 \Leftrightarrow$$
$$\lambda=-\frac{5}{3}$$

✓ και

$$x_1\cdot x_2=-3 \Leftrightarrow$$
$$\frac{\lambda-2}{\lambda+2}=-3 \Leftrightarrow$$
$$\lambda-2=-3(\lambda+2) \Leftrightarrow$$
$$\lambda-2=-3\lambda-6 \Leftrightarrow$$
$$\lambda+3\lambda=-6+2 \Leftrightarrow$$
$$4\lambda=-4 \Leftrightarrow$$
$$\lambda=-1$$

Άρα δεν υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει η (2).

151. **GI_A_ALG_4_1936**

Η εξέταση σε έναν διαγωνισμό των Μαθηματικών περιλάμβανε δύο θέματα τα οποία έπρεπε να απαντήσουν οι εξεταζόμενοι. Για να βαθμολογηθούν με άριστα έπρεπε να απαντήσουν και στα δύο θέματα, ενώ για να περάσουν την εξέταση έπρεπε να απαντήσουν σε ένα τουλάχιστον από τα δύο θέματα. Στο διαγωνισμό εξετάσθηκαν 100 μαθητές. Στο πρώτο θέμα απάντησαν σωστά 60 μαθητές. Στο δεύτερο θέμα απάντησαν σωστά 50 μαθητές, ενώ και στα δύο θέματα απάντησαν σωστά 30 μαθητές. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή.

α. Να παραστήσετε με διάγραμμα **Venn** και με χρήση της γλώσσας των συνόλων (ορίζοντας τα κατάλληλα ενδεχόμενα) τα παραπάνω δεδομένα. (Μονάδες 13)

β. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής:

i) Να απάντησε σωστά μόνο στο δεύτερο θέμα.

ii) Να βαθμολογηθεί με άριστα.

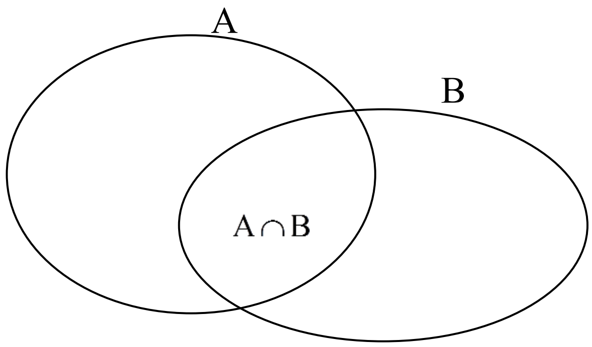
iii) Να μην απάντησε σωστά σε κανένα θέμα.

iv) Να πέρασε την εξέταση. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. Έστω τα ενδεχόμενα A, B, όπου $A:$ οι μαθητές απάντησαν σωστά στο πρώτο θέμα και $B:$ οι μαθητές απάντησαν σωστά στο δεύτερο θέμα. Τότε:

$N(A)=60,\ N(B)=50,\ N(A\cap B)=30$.



β. Είναι $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{60}{100}=\dfrac{3}{5}$, $P(B)=\dfrac{N(B)}{100}=\dfrac{50}{100}=\dfrac{1}{2}$,

$$P(A\cap B)=\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\frac{30}{100}=\frac{3}{10}$$

Τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα.

i) Να απάντησε σωστά μόνο στο δεύτερο θέμα είναι το ενδεχόμενο Β-Α με

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}-\frac{3}{10}=\frac{5-3}{10}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}.$$

ii) Βαθμολογείται με άριστα όταν απαντά και στα δύο $P(A\cap B)=\dfrac{3}{10}$.

iii) Όταν δεν απαντά σωστά σε κανένα θέμα έχουμε το $(A\cup B)'$.

$$P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)=1-\big(P(A)+P(B)-P(A\cap B)\big)=$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=1-\frac{3}{5}-\frac{1}{2}+\frac{3}{10}=\frac{10-6-5+3}{10}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

iv) Περνάει την εξέταση όταν απαντά σωστά σε ένα τουλάχιστον από τα δύο.

$P\big[(A-B)\cup(B-A)\big]=P(A-B)+P(B-A)$ γιατί είναι ασυμβίβαστα και συνεπώς εφαρμόζεται ο απλός προσθετικός νόμος.

$$P\big[(A-B)\cup(B-A)\big]=P(A-B)+P(B-A)=$$

$$=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$$

$$=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=\frac{3}{5}+\frac{1}{2}-2\cdot\frac{3}{10}=\frac{6+5-6}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

152. **GI_A_ALG_4_1955**

Τέσσερις αθλητές, ο Αργύρης, ο Βασίλης, ο Γιώργος και ο Δημήτρης τερμάτισαν σε έναν αγώνα δρόμου με αντίστοιχους χρόνους (σε λεπτά) t_A, t_B, t_Γ και t_Δ, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

- $t_A < t_B$

- $t_\Gamma = \dfrac{t_A + 2t_B}{3}$ και
- $|t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta|$

α.

i) Να δείξετε ότι: $t_\Delta = \dfrac{t_A + t_B}{2}$. (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τη σειρά με την οποία τερμάτισαν οι αθλητές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

β. Δίνεται επιπλέον ότι ισχύει:

$$t_A + t_B = 6 \text{ και } t_A \cdot t_B = 8$$

i) Να γράψετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B. (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τους χρόνους τερματισμού των τεσσάρων αθλητών. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α.

i) $|t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta| \Leftrightarrow$

$t_A - t_\Delta = t_B - t_\Delta \Leftrightarrow t_A - t_B = 0$. Άτοπο γιατί $t_A < t_B$ από την υπόθεση,

ή

$$\begin{aligned} t_A - t_\Delta &= -(t_B - t_\Delta) \Leftrightarrow \\ t_A - t_\Delta &= -t_B + t_\Delta \Leftrightarrow \\ t_A + t_B &= 2t_\Delta \Leftrightarrow \\ t_\Delta &= \frac{t_A + t_B}{2} \end{aligned}$$

ii)

✓ Συγκρίνουμε t_Γ με t_A.

$t_\Gamma - t_A = \dfrac{t_A + 2t_B}{3} - t_A = \dfrac{t_A + 2t_B - 3t_A}{3} = \dfrac{2t_B - 2t_A}{3} = \dfrac{2(t_B - t_A)}{3} > 0$ γιατί $t_B > t_A$.

Άρα $t_\Gamma - t_A > 0 \Leftrightarrow t_\Gamma > t_A$.

✓ Συγκρίνουμε t_Γ με t_B.

$t_\Gamma - t_B = \dfrac{t_A + 2t_B}{3} - t_B = \dfrac{t_A + 2t_B - 3t_B}{3} = \dfrac{t_A - t_B}{3} < 0$ γιατί $t_A < t_B$.

Άρα $t_\Gamma - t_B < 0 \Leftrightarrow t_\Gamma < t_B$.

✓ Συγκρίνουμε t_Δ με t_B (που είναι το μεγαλύτερο ως τώρα)

$t_\Delta - t_B = \dfrac{t_A + t_B}{2} - t_B = \dfrac{t_A + t_B - 2t_B}{2} = \dfrac{t_A - t_B}{2} < 0$ γιατί $t_A < t_B$.

Άρα $t_\Delta - t_B < 0 \Leftrightarrow t_\Delta < t_B$.

✓ Συγκρίνουμε t_Δ με t_Γ.

$$t_\Delta - t_\Gamma = \frac{t_A + t_B}{2} - \frac{t_A + 2t_B}{3} = \frac{3t_A + 3t_B - 2t_A - 4t_B}{6} = \frac{t_A - t_B}{6} < 0 \text{ γιατί } t_A < t_B.$$

Άρα $t_\Delta - t_\Gamma < 0 \Leftrightarrow t_\Delta < t_\Gamma$.

✓ Συγκρίνουμε t_Δ με t_A.

$$t_\Delta - t_A = \frac{t_A + t_B}{2} - t_A = \frac{t_A + t_B - 2t_A}{2} = \frac{t_B - t_A}{2} > 0 \text{ γιατί } t_A < t_B.$$

Άρα $t_\Delta - t_A > 0 \Leftrightarrow t_\Delta > t_A$.

Τελικά είναι $t_A < t_\Delta < t_\Gamma < t_B$

β.

i) ΘΥΜΗΘΕΙΤΕ: Η εξίσωση με ρίζες x_1, x_2 είναι η $x^2 - Sx + P = 0$ με $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω η εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B με

$S = t_A + t_B = 6$ και $P = t_A \cdot t_B = 8$ είναι η $t^2 - 6t + 8 = 0$ με $t > 0$.

ii) Λύνοντας της τελευταία έχουμε $t = 4$ ή $t = 2$ και αφού $t_A < t_B$ θα είναι $t_A = 2$ και $t_B = 4$.

Τότε $t_\Gamma = \dfrac{2 + 2\cdot 4}{3} = \dfrac{10}{3}$ και $t_\Delta = \dfrac{t_A + t_B}{2} = \dfrac{2+4}{2} = 3$

153. **GI_A_ALG_4_1963**

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2$ και $g(x) = \lambda x + (1 - \lambda)$, $x \in \mathbb{R}$ και λ παράμετρος με $\lambda \neq 0$.

α. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο. (Μονάδες 8)

β. Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό; (Μονάδες 8)

γ. Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g, να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει: $(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2$. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α. Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = \lambda x + (1 - \lambda) \Leftrightarrow x^2 - \lambda x - (1 - \lambda) = 0 \qquad (1)$$

Είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\lambda)^2 - 4\cdot 1[-(1-\lambda)] = \lambda^2 + 4(1-\lambda) = \lambda^2 + 4 - 4\lambda = (\lambda - 2)^2 \geq 0$$

Άρα οι C_f και C_g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β. Για να έχουν μόνο ένα κοινό σημείο πρέπει η (1) να έχει $\Delta = 0$.

$\Delta = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$

Για $\lambda = 2$ $\quad \Delta = 0$ και η (1) γίνεται $x^2 - 2x + 1 = 0$ με $x_0 = \dfrac{-\beta}{2\alpha} = \dfrac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$

Για $x = 1$ $\quad f(1) = 1^2 = 1$

Άρα οι C_f και C_g έχουν κοινό σημείο μόνο το $A(1, 1)$.

Είναι $\lambda \neq 2$ άρα και $\Delta > 0$.

γ. Είναι $x_1 + x_2 = S = \dfrac{-\beta}{\alpha} = \dfrac{-(-\lambda)}{1} = \lambda$

Τότε η $(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2$ γίνεται $\lambda^2 = |\lambda| + 2 \Leftrightarrow |\lambda|^2 - |\lambda| - 2 = 0$

Θέτουμε $\omega = |\lambda|$, $\omega > 0$ (αφού $\lambda \neq 0$) και $\omega^2 - \omega - 2 = 0$ με $\Delta = 9$ και

$$\omega = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ \dfrac{1-3}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \quad \textbf{Απορ.} \end{cases}$$

$$\text{Άρα } \omega = 2 \Leftrightarrow |\lambda| = 2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \quad \textbf{Απορ.} \quad \lambda \neq 2 \\ \text{ή} \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

154. **GI_A_ALG_4_2046**

Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α. Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες. (Μονάδες 5)

β. Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

i) Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι: $f(x) = 30 - \dfrac{3}{4}x$.(Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β(i), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος. (Μονάδες 4)

γ. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α. Αφού ο αθλητής κάνοντας ύπτιο καίει $\mathbf{9}$ θερμίδες το λεπτό, σε $\mathbf{32}$ λεπτά θα κάψει $\mathbf{9\cdot 32=288}$ θερμίδες. Ο αθλητής κάνοντας πεταλούδα καίει $\mathbf{12}$ θερμίδες το λεπτό. Έστω $\mathbf{x}$ τα λεπτά που πρέπει να κολυμπήσει ο αθλητής πεταλούδα ώστε να κάψει συνολικά $\mathbf{360}$ θερμίδες. Άρα ο αθλητής σε $\mathbf{x}$ λεπτά καίει $\mathbf{12x}$ θερμίδες. Επομένως φτιάχνουμε την πρωτοβάθμια εξίσωση:

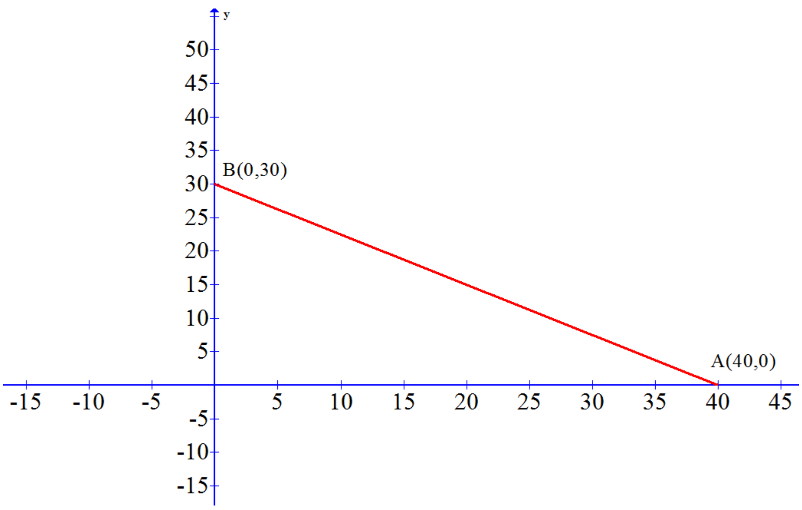
$$\mathbf{12\cdot x+288=360 \Leftrightarrow x=\frac{360-288}{12}=6} \text{ λεπτά.}$$

β.

i) Έστω $\mathbf{x}$ ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο και $\mathbf{y}$ ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει πεταλούδα. Τότε ανάλογα με τις θερμίδες που καίει κάνοντας ύπτιο και πεταλούδα αντίστοιχα, θα έχουμε $\mathbf{9x+12y=360 \Leftrightarrow y=\frac{360-9x}{12}=30-\frac{3}{4}x}$. Επομένως από τον ορισμό της συνάρτησης είναι $\mathbf{y=f(x) \Leftrightarrow f(x)=30-\frac{3}{4}x}$.

ii) Ο χρόνος είναι πάντα μη αρνητικός επομένως πρέπει $\mathbf{x\geq 0}$. Επίσης, όταν ξεπεράσουμε τα $\mathbf{40}$ λεπτά οι τιμές της συνάρτησες που δηλώνουν θερμίδες γίνονται αρνητικές κάτι το οποίο δεν έχει νόημα. Επομένως πρέπει $\mathbf{0\leq x\leq 40}$.

γ. Για $\mathbf{x=0}$ από τον τύπο της συνάρτησης έχουμε $\mathbf{y=30}$. Άρα το σημείο τομής με τον άξονα $\mathbf{y'y}$ είναι το $\mathbf{B(0,30)}$ ενώ για $\mathbf{y=0}$ έχουμε $\mathbf{x=40}$. Άρα το σημείο τομής με άξονα $\mathbf{x'x}$ είναι το $\mathbf{A(40,0)}$. Το σημείο $\mathbf{A}$ δείχνει ότι όταν ο αθλητής δεν κολυμπάει πεταλούδα χρειάζεται $\mathbf{40}$ λεπτά ύπτιο για να κάψει $\mathbf{360}$ θερμίδες ενώ το σημείο $\mathbf{B}$ δείχνει ότι όταν ο αθλητής δεν κολυμπάει ύπτιο χρειάζεται $\mathbf{30}$ λεπτά πεταλούδα για να κάψει $\mathbf{360}$ θερμίδες.



155. **GI_A_ALG_4_2047**

Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει $\mathbf{20}$ κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του $\mathbf{A}$. Η πρώτη κυψέλη απέχει $\mathbf{1}$ μέτρο από την αποθήκη $\mathbf{A}$, η δεύτερη $\mathbf{4}$ μέτρα από το $\mathbf{A}$, η τρίτη $\mathbf{7}$ μέτρα από το $\mathbf{A}$ και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη $\mathbf{A}$, $\mathbf{3}$ επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

α. Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη $\mathbf{A}$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε το όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της; (Μονάδες 6)

β. Σε πόση απόσταση από την αποθήκη $\mathbf{A}$ είναι η 20^{η} κυψέλη; (Μονάδες 6)

γ. Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη $\mathbf{A}$ συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη $\mathbf{A}$.

i) Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3η κυψέλη; (Μονάδες 6)

ii) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις $\mathbf{20}$ κυψέλες; (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. Αφού κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη $\mathbf{A}$ τρία μέτρα, σύμφωνα με τον ορισμό της αριθμητικής προόδου οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη $\mathbf{A}$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου $(\boldsymbol{\alpha}_\nu)$ με πρώτο όρο $\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{1}$ και διαφορά $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{3}$. Ο πρώτος όρος εκφράζει πόσο απέχει η πρώτη κυψέλη από την αποθήκη $\mathbf{A}$, ενώ η διαφορά $\boldsymbol{\omega}$, την απόσταση που απέχει κάθε επόμενη κυψέλη από την προηγούμενη.

β. Ψάχνουμε τον όρο $\boldsymbol{\alpha}_{20} = \boldsymbol{\alpha}_1 + 19\boldsymbol{\omega} = 1 + 19 \cdot 3 = 58$ μέτρα.

γ.

i) Πηγαίνοντας στη πρώτη κυψέλη διανύει $\mathbf{1}$ μέτρο. Έπειτα γυρνάει στην αποθήκη διανύοντας ακόμα ένα μέτρο. Συνολικά δύο. Ομοίως κάνει $\mathbf{4}$ και $\mathbf{4}$ μέτρα να πάει και να έρθει από την δεύτερη κυψέλη ενώ διανύει $\mathbf{7}$ και $\mathbf{7}$ για την τρίτη. Συνολικά λοιπόν διανύει $\mathbf{1+1+4+4+7+7=24}$ μέτρα.

ii) Ουσιαστικά ο μελισσοκόμος διανύει απόσταση ίση με το να πάει και να έρθει στην 20^{η} κυψέλη. Επομένως δύο φορές την απόσταση μέχρι την 20^{η} κυψέλη η οποία ισούται με $\mathbf{S}_{20} = \dfrac{\mathbf{20}}{\mathbf{2}}(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_{20}) = \mathbf{10 \cdot 59 = 590}$ μέτρα. Επομένως η συνολική απόσταση ισούται με $\mathbf{2 \cdot S_{20} = 2 \cdot 590 = 1180}$ μέτρα.

156. **GI_A_ALG_4_2055**

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - \lambda)x^2 - (\lambda^2 - 1)x + \lambda - 1 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού/ (Μονάδες 6)

β. Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή: $\lambda x^2 - (\lambda+1)x + 1 = 0$. (Μονάδες 6)

γ. Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

δ. Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι $2^{ου}$ βαθμού. (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α. Για να παριστάνει η εξίσωση (1), εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού θα πρέπει $(\lambda^2 - \lambda) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1) \neq 0$. Επομένως $\lambda \neq 0$ **και** $\lambda \neq 1$.

β. Για $\lambda \neq 0$ **και** $\lambda \neq 1$ η εξίσωση (1) γίνεται,

$$(\lambda^2 - \lambda)x^2 - (\lambda^2 - 1)x + \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)x^2 - (\lambda-1)(\lambda+1)x + \lambda - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-1)\left[\lambda x^2 - (\lambda+1)x + 1\right] = 0$$

επομένως αφού $\lambda \neq 1$, είναι $\lambda x^2 - (\lambda+1)x + 1 = 0 \quad (2)$

γ. Για την εξίσωση (2) έχουμε:

$$\Delta = \left[-(\lambda+1)\right]^2 - 4\lambda = (\lambda+1)^2 - 4\lambda = \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 4\lambda = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2 \geq 0$$

. Αφού όμως είναι $\lambda \neq 1$, επομένως $\Delta = (\lambda-1)^2 > 0$. Συνεπώς η εξίσωση (2), άρα και η ισοδύναμή της (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

δ. Οι ρίζες της (1) είναι $x_{1,2} = \dfrac{(\lambda+1) \pm \sqrt{(\lambda-1)^2}}{2\lambda} = \dfrac{(\lambda+1) \pm (\lambda-1)}{2\lambda}$.

Επομένως $x_1 = \dfrac{(\lambda+1)+(\lambda-1)}{2\lambda} = \dfrac{2\lambda}{2\lambda} = 1$ ή $x_2 = \dfrac{(\lambda+1)-(\lambda-1)}{2\lambda} = \dfrac{2}{2\lambda} = \dfrac{1}{\lambda}$

.

157. **GI_A_ALG_4_2064**

Σε μια ομάδα που αποτελείται από 7 άνδρες και 13 γυναίκες, 4 από τους άνδρες και 2 από τις γυναίκες παίζουν σκάκι. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα άτομα αυτά.

α. Να παραστήσετε με διάγραμμα **Venn** και με χρήση της γλώσσας των συνόλων το ενδεχόμενο το άτομο που επιλέχθηκε:

i) να είναι άνδρας ή να παίζει σκάκι. (Μονάδες 6)

ii) να μην είναι άνδρας και να παίζει σκάκι. (Μονάδες 6)

β. Να υπολογίσετε την πιθανότητα το άτομο που επιλέχθηκε να είναι γυναίκα και να παίζει σκάκι. (Μονάδες 13)

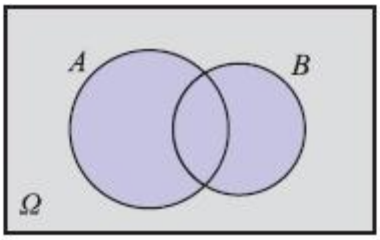
ΛΥΣΗ

Έστω A**:** «το ενδεχόμενο το άτομο που επιλέγουμε να είναι Άντρας» και B**:**« το ενδεχόμενο το άτομο που επιλέγουμε να παίζει σκάκι»

α.

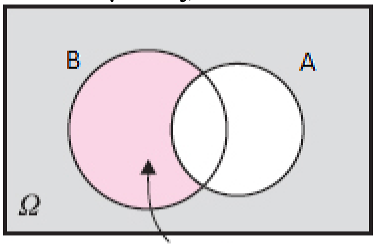
i) Το ενδεχόμενο να είναι άνδρας ή να παίζει σκάκι είναι το $A \cup B$.

Επομένως,



$A \cup B$

ii) Το ενδεχόμενο να μην είναι άνδρας και να παίζει σκάκι είναι το $\mathbf{A' \cap B = B - A}$. Επομένως,



B-A

β. Το ενδεχόμενο $\mathbf{A'}$: «το άτομο που επιλέγουμε να μην είναι άνδρας» είναι το ενδεχόμενο το άτομο που επιλέγουμε να είναι γυναίκα. Από τα $\mathbf{20}$ άτομα, οι γυναίκες που παίζουν σκάκι είναι δύο. Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με:

$$\mathbf{P(A' \cap B) = P(B - A) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}}.$$

158. **GI_A_ALG_4_2073**

Οι δράστες μιας κλοπής διέφυγαν μ' ένα αυτοκίνητο και μετά από την κατάθεση διαφόρων μαρτύρων έγινε γνωστό ότι ο τετραψήφιος αριθμός της πινακίδας του αυτοκίνητου είχε πρώτο και τέταρτο ψηφίο το $\mathbf{2}$. Το δεύτερο ψηφίο ήταν $\mathbf{6}$ ή $\mathbf{8}$ ή $\mathbf{9}$ και το τρίτο ψηφίο του ήταν $\mathbf{4}$ ή $\mathbf{7}$.

α. Με χρήση δενδροδιαγράμματος, να προσδιορίσετε το σύνολο των δυνατών αριθμών της πινακίδας του αυτοκινήτου (Μονάδες 13)

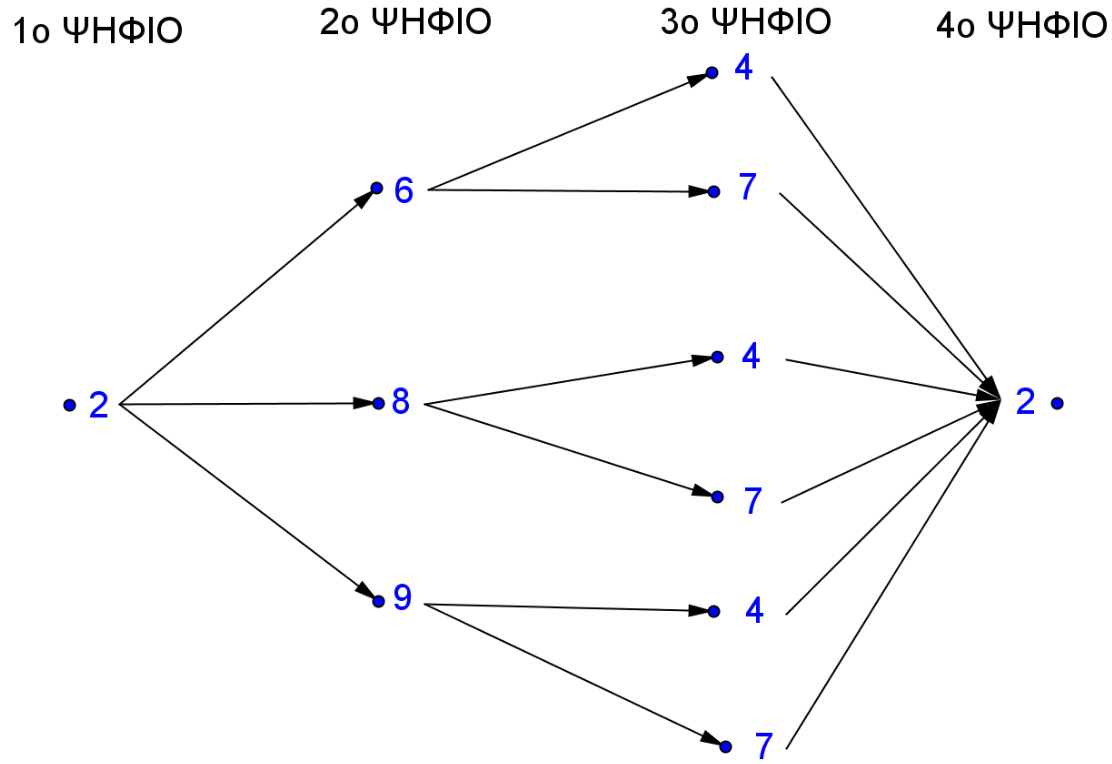
β. Να υπολογίσατε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων

Α: Το τρίτο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι το $\mathbf{7}$.

Β: Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι $\mathbf{6}$ ή $\mathbf{8}$.

Γ: Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας δεν είναι ούτε $\mathbf{8}$ ούτε $\mathbf{9}$. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ



α. Το σύνολο των δυνατών αριθμών της πινακίδας είναι: $\Omega=\{2642\ ,\ 2672\ ,\ 2842\ ,\ 2872\ ,\ 2942\ ,\ 2972\}$ και το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω είναι $N(\Omega)=6$.

β. Έστω το ενδεχόμενο $A:$ << Το τρίτο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι το 7>> Τότε $A=\{2672\ ,\ 2872\ ,\ 2972\}$, οπότε το πλήθος των στοιχείων του A είναι $N(A)=3$. Επιλέγουμε στην τύχη μία από τις 6 (ισοπίθανες) πινακίδες. Τότε, η πιθανότητα να ανήκει στο ενδεχόμενο A είναι: $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$.

Έστω το ενδεχόμενο:
$B:$ <<Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι 6 ή 8.>>
Τότε: $B=\{2642\ ,\ 2672\ ,\ 2842\ ,\ 2872\}$, οπότε το πλήθος των στοιχείων του B είναι $N(B)=4$. Επιλέγουμε στην τύχη μία από τις 6 (ισοπίθανες) πινακίδες. Τότε, η πιθανότητα να ανήκει στο ενδεχόμενο B είναι: $P(B)=\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$.

Έστω το ενδεχόμενο:
$\Gamma:$ << Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας δεν είναι ούτε 8, ούτε 9>>
Άρα να είναι 6 οπότε $\Gamma=\{2642\ ,\ 2672\}$, οπότε το πλήθος των στοιχείων του Γ είναι $N(\Gamma)=2$. Επιλέγουμε στην τύχη μία από τις 6 (ισοπίθανες) πινακίδες. Τότε, η πιθανότητα να ανήκει στο ενδεχόμενο Γ είναι: $P(\Gamma)=\dfrac{N(\Gamma)}{N(\Omega)}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.

159. **GI_A_ALG_4_2080**

Από μια έρευνα μεταξύ μαθητών ενός Λυκείου της χώρας, προέκυψε ότι το 80% των μαθητών πίνει γάλα ή τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι στο σπίτι το πρωί.

Επιλέγουμε ένα μαθητή στην τύχη και ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο μαθητής πίνει γάλα

Β: ο μαθητής τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι

Αν από το σύνολο των μαθητών το 60% πίνει γάλα και το 45% τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι,

α. Να ορίσετε με χρήση της γλώσσας των συνόλων τα ενδεχόμενα:

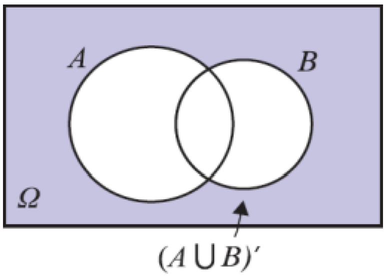
- **i)** ο μαθητής ούτε να πίνει γάλα ούτε να τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι
- **ii)** ο μαθητής να πίνει γάλα και να τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι
- **iii)** ο μαθητής να πίνει μόνο γάλα. (Μονάδες 12)

β. Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης των ενδεχομένων του α) ερωτήματος. (Μονάδες 13)

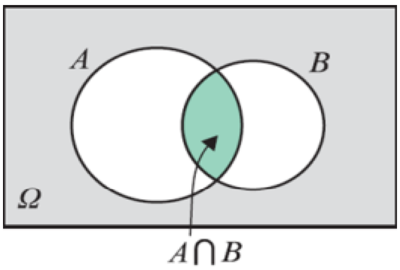
ΛΥΣΗ

α.

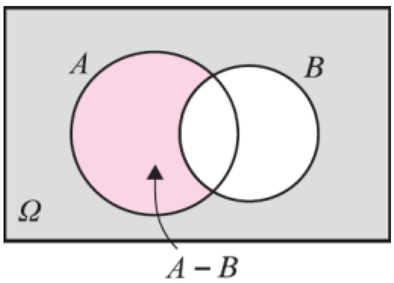
i) Αν $\mathbf{\Gamma}$ είναι το ενδεχόμενο: << ο μαθητής ούτε να πίνει γάλα, ούτε να τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι>> τότε $\mathbf{\Gamma = A' \cap B' = (A \cup B)'}$.



ii) Αν $\mathbf{\Delta}$ είναι το ενδεχόμενο: << ο μαθητής να πίνει γάλα και να τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι >> τότε $\mathbf{\Delta = A \cap B}$.



iii) Αν $\mathbf{E}$ είναι το ενδεχόμενο: << ο μαθητής να πίνει μόνο γάλα >> τότε $\mathbf{E = A - B = A \cap B'}$.



β. Από υπόθεση έχουμε:

- το 80% των μαθητών πίνει γάλα ή τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι στο σπίτι το πρωί άρα: $\mathbf{P(A\cup B)=0,8}$.
- το 60% πίνει γάλα άρα: $\mathbf{P(A)=0,6}$
- το 45% τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι, άρα: $\mathbf{P(B)=0,45}$.

Τότε:

$$\mathbf{P(\Gamma)=P\left((A\cup B)'\right)=1-P(A\cup B)=1-0,8=0,2}$$

$$\mathbf{P(\Delta)=P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0,6+0,45-0,8=0,25}$$

$$\mathbf{P(E)=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0,6-0,25=0,35}$$

160. **GI_A_ALG_4_2081**

Δίνεται η εξίσωση $\mathbf{\lambda x^2+2(\lambda-1)x+\lambda-2=0\ (1)}$ με παράμετρο $\mathbf{\lambda\in\mathbb{R}}$.

α. Να λύσετε την εξίσωση όταν $\mathbf{\lambda=0}$. (Μονάδες 5)

β. Έστω $\mathbf{\lambda\neq 0}$.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\mathbf{(1)}$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε. (Μονάδες 10)

ii) Αν $\mathbf{x_1=-1}$ και $\mathbf{x_2=-1+\frac{2}{\lambda}}$ είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να προσδιορίσετε τις τιμές του $\mathbf{\lambda}$, για τις οποίες ισχύει $\mathbf{|x_1-x_2|>1}$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Για $\mathbf{\lambda=0}$ η εξίσωση (1) γίνεται: $\mathbf{0\cdot x^2+2(0-1)x+0-2=0}$

$\mathbf{\Leftrightarrow -2x-2=0\Leftrightarrow -2x=2\Leftrightarrow x=-1}$.

β.

i) Το τριώνυμο $\mathbf{\lambda x^2+2(\lambda-1)x+\lambda-2=0}$ έχει $\mathbf{\alpha=\lambda}$, $\mathbf{\beta=2(\lambda-1)}$ και $\mathbf{\gamma=\lambda-2}$. Η διακρίνουσά του είναι:

$$\mathbf{\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(2(\lambda-1)\right)^2-4\cdot\lambda\cdot(\lambda-2)=4(\lambda-1)^2-4\lambda^2+8\lambda=}$$

$$\mathbf{4\lambda^2-8\lambda+4-4\lambda^2+8\lambda=4\Rightarrow\Delta=4>0}$$

Άρα η εξίσωση $\mathbf{(1)}$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, τις:

$$\mathbf{x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2(\lambda-1)\pm 2}{2\lambda}=\frac{-2\lambda+2\pm 2}{2\lambda}\Rightarrow}$$

$$\begin{cases}\mathbf{x_1=\frac{-2\lambda+2+2}{2\lambda}=\frac{-2(\lambda-2)}{2\lambda}=\frac{2-\lambda}{\lambda}}\\ \mathbf{x_2=\frac{-2\lambda+2-2}{2\lambda}=\frac{-2\lambda}{2\lambda}=-1}\end{cases}$$

ii) Έχουμε:

$$\mathbf{|x_1-x_2|>1\Leftrightarrow\left|\frac{2-\lambda}{\lambda}-(-1)\right|>1\Leftrightarrow}$$

$$\left|\frac{2-\lambda}{\lambda}+1\right|>1 \Leftrightarrow \left|\frac{2-\lambda}{\lambda}+\frac{\lambda}{\lambda}\right|>1 \Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{2-\lambda+\lambda}{\lambda}\right|>1 \Leftrightarrow \left|\frac{2}{\lambda}\right|>1 \Leftrightarrow \frac{2}{|\lambda|}>1 \Leftrightarrow$$

$$|\lambda|<2 \Leftrightarrow -2<\lambda<2$$

Επειδή επιπλέον $\lambda \neq 0$, τελικά ισχύει $|x_1 - x_2| > 1$ για $\lambda \in (-2,0) \cup (0,2)$.

161. **GI_A_ALG_4_2083**

Ένα κλειστό στάδιο έχει **25** σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει **12** καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α. Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά. (Μονάδες 10)

β. Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα του σταδίου. (Μονάδες 5)

γ. Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την $7^η$ μέχρι και την $14^η$ σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Αφού τα καθίσματα από σειρά σε σειρά αυξάνονται κατά δύο, έχουμε αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο $\alpha_1 = 12$ και διαφορά $\omega = 2$.

Οι σειρές του σταδίου είναι 25 (περιττός) άρα υπάρχει μεσαία σειρά και είναι η $13^η$.
α βρούμε πόσα καθίσματα έχει η $13^η$ (α_{13}) και η τελευταία, δηλαδή η $25^η$ σειρά (α_{25}).

Ο ν-οστός όρος της αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\cdot\omega \overset{\substack{\nu=13\\ \omega=2\\ \alpha_1=12}}{\Rightarrow} \alpha_{13} = 12 + (13-1)\cdot 2 = 12 + 12\cdot 2 = 36 \Rightarrow \alpha_{13} = 36$$

Δηλαδή η μεσαία σειρά έχει 36 καθίσματα.
Όμοια:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\cdot\omega \overset{\substack{\nu=25\\ \omega=2\\ \alpha_1=12}}{\Rightarrow} \alpha_{25} = 12 + (25-1)\cdot 2 = 12 + 24\cdot 2 = 60 \Rightarrow \alpha_{25} = 60$$

Δηλαδή η τελευταία σειρά έχει 60 καθίσματα.

β. Για να βρούμε τη χωρητικότητα του σταδίου θα προσθέσουμε τα καθίσματα και των 25 σειρών, δηλαδή $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{25} = S_{25}$.

Ο τύπος του αθροίσματος των ν πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου είναι:

$$S_\nu = \frac{\alpha_1 + \alpha_\nu}{2}\cdot\nu \Rightarrow S_{25} = \frac{\alpha_1 + \alpha_{25}}{2}\cdot 25 = \frac{12+60}{2}\cdot 25 = \frac{72}{2}\cdot 25 = 36\cdot 25 = 900 \Rightarrow S_{25} = 900$$

θέσεις έχει το στάδιο.

γ. Το πλήθος των καθισμάτων από την $7^η$ έως την $14^η$ σειρά δίνεται από το άθροισμα:

$\alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9 + \ldots + \alpha_{14} = S_{14} - S_6$ (1)

Έχουμε:

$$S_\nu = \frac{2\alpha_1 + (\nu-1)\omega}{2}\cdot\nu \overset{\nu=14}{\Rightarrow} S_{14} = \frac{2\alpha_1 + (14-1)\cdot 2}{2}\cdot 14 = \frac{2\cdot 12 + 13\cdot 2}{2}\cdot 14 =$$

$25\cdot 14 = 350 \Rightarrow S_{14} = 350$ θέσεις έχουν οι 14 πρώτες σειρές.

Όμοια:

$$S_\nu = \frac{2\alpha_1 + (\nu-1)\omega}{2}\cdot\nu \overset{\nu=6}{\Rightarrow} S_6 = \frac{2\alpha_1 + (6-1)\cdot 2}{2}\cdot 6 = \frac{2\cdot 12 + 5\cdot 2}{2}\cdot 6 = 17\cdot 6 \Rightarrow S_6 = 102$$

θέσεις έχουν οι 6 πρώτες σειρές.

Οπότε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου είναι $S_{14} - S_6 = 350 - 102 = 248$ μαθητές.

162. **GI_A_ALG_4_2084**

Για την κάλυψη με τετράγωνα πλακίδια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου A με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου B με πλευρά $(d+1)$ m.

α. Να βρείτε, ως συνάρτηση του d,το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου A και κάθε πλακάκι τύπου B. (Μονάδες 6)

β. Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου A είτε με 128 πλακάκια τύπου B, να βρείτε:

i) Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου. (Μονάδες 12)

ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. Το εμβαδόν τετραγώνου ισούται με το τετράγωνο της πλευράς του. Οπότε για το πλακάκι τύπου A το εμβαδόν είναι d^2 cm^2, ενώ για το πλακάκι τύπου B είναι $(d+1)^2$ cm^2.

β.

i) Η επιφάνεια καλύπτεται είτε με 200 πλακάκια τύπου A είτε με 128 πλακάκια τύπου B, άρα:

$$\left.\begin{array}{l} 200d^2 = 128(d+1)^2 \Leftrightarrow 25d^2 = 16(d+1)^2 \Leftrightarrow \\ 25d^2 = 16d^2 + 32d + 16 \Leftrightarrow 9d^2 - 32d - 16 = 0 \end{array}\right. \quad (1)$$

Η (1) έχει διακρίνουσα $\Delta = 32^2 + 4\cdot 9\cdot 16 = 1024 + 576 = 1600 = 40^2$ και ρίζες

$$d = \frac{32 \pm 40}{18} \Leftrightarrow \left(d = \frac{72}{18} \text{ ή } d = -\frac{6}{18}\right) \Leftrightarrow \left(d = 4 \text{ ή } d = -\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow d = 4.$$

Η τιμή $d = -\frac{1}{3}$, απορρίπτεται διότι το d εκφράζει μήκος, οπότε είναι θετικός αριθμός. Άρα το πλακάκι τύπου A έχει πλευρά 4 cm, ενώ το πλακάκι τύπου B έχει πλευρά 5 cm.

ii) Το εμβαδόν που καλύπτεται ισούται με: $200d^2$ ή $128(d+1)^2$.

Άρα, έχουμε, $200d^2 = 200\cdot 4^2 = 3200cm^2$.

163. **GI_A_ALG_4_2220**

Μία μπάλα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω, αφού διαγράψει μια τροχιά, μετά από κάποιο χρόνο θα πέσει στο έδαφος. Το ύψος $\mathbf{h}$ (σε $\mathbf{m}$) από το έδαφος, στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή $\mathbf{t}$ (σε $\mathbf{sec}$) κατά την κίνηση της προσδιορίζεται από τη συνάρτηση $\mathbf{h(t)=-5t^2+10t+1,05}$.

α. Να βρείτε τις τιμές $\mathbf{h(0),h(1)}$ και $\mathbf{h(2)}$ και να εξηγήσετε τι παριστάνουν στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 6)

β. Να βρείτε μετά από πόσο χρόνο η μπάλα θα πέσει στο έδαφος. (Μονάδες 8)

γ. Να αποδείξετε ότι το ύψος στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή $\mathbf{t}$ μπορεί να προσδιοριστεί και από τον τύπο: $\mathbf{h(t)=5[1,21-(t-1)^2]}$. (Μονάδες 5)

δ. Να εξετάσετε αν υπάρχει χρονική στιγμή $\mathbf{t_1}$ (σε $\mathbf{sec}$) που το ύψος $\mathbf{h}$ της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από $\mathbf{6,65\ m}$. (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α. $\mathbf{h(0)=-5\cdot 0+10\cdot 0+1,05=1,05m}$, $\mathbf{h(1)=-5\cdot 1+10\cdot 1+1,05=6,05m}$ και $\mathbf{h(2)=-5\cdot 4+10\cdot 2+1,05=1,05m}$

Τη χρονική στιγμή $\mathbf{0\ sec}$ η μπάλα βρίσκεται σε ύψος $\mathbf{1,05\ m}$, δηλαδή το σημείο εκτόξευσης βρίσκεται σε ύψος $\mathbf{1,05\ m}$ από το έδαφος.

Τη χρονική στιγμή $\mathbf{1\ sec}$ η μπάλα βρίσκεται σε ύψος $\mathbf{6,05\ m}$ από το έδαφος, ενώ τη χρονική στιγμή $\mathbf{2\ sec}$ η μπάλα επιστρέφει στο σημείο από το οποίο εκτοξεύθηκε, δηλαδή σε ύψος $\mathbf{1,05\ m}$ από το έδαφος.

β. Το ύψος της μπάλας όταν φτάσει στο έδαφος θα είναι $\mathbf{0\ m}$.

$$\mathbf{h(t)=0 \Leftrightarrow -5t^2+10t+1,05=0} \quad (1)$$

Η (1) έχει διακρίνουσα $\mathbf{\Delta=121=11^2}$ και οι ρίζες της είναι:

$$\mathbf{t_{1,2}=\frac{-10\pm 11}{-10} \Leftrightarrow t_1=2,1sec \text{ ή } t_2=-\frac{1}{10}sec \Leftrightarrow t_1=2,1sec}$$

γ. $\mathbf{h(t)=-5t^2+10t+1,05=5(-t^2+2t+0,21)=5[0,21-(t^2-2t)]=}$
$\mathbf{5[1+0,21-(t^2-2t+1)]=5[1,21-(t-1)^2]}$.

δ. Έστω ότι υπάρχει χρονική στιγμή $\mathbf{t_1}$, που το ύψος $\mathbf{h}$ της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από $\mathbf{6,65\ m}$, τότε:

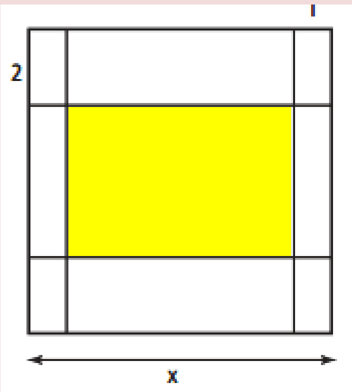
$$\mathbf{h(t_1)=6,65 \Rightarrow 5[1,21-(t-1)^2]=6,65 \Rightarrow 1,21-(t-1)^2=1,33 \Rightarrow}$$

$$\mathbf{1,21-1,33=(t-1)^2 \Rightarrow (t-1)^2=-0,12}$$,που είναι αδύνατη.

Άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή $\mathbf{t_1}$, που το ύψος $\mathbf{h}$ της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από $\mathbf{6,65\ m}$.

164. **GI_A_ALG_4_2226**

Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς $\mathbf{x\ cm}$ $(\mathbf{5 \le x \le 10})$ στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια $\mathbf{2\ cm}$ στο πάνω και στο κάτω μέρος της και $\mathbf{1\ cm}$ δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $\mathbf{E}$ της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση $\mathbf{E(x) = (x-2)(x-4)}$. (Μονάδες 8)

β. Να βρεθεί η τιμή του $\mathbf{x}$ έτσι ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι $\mathbf{35\ cm^2}$. (Μονάδες 7)

γ. Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά $\mathbf{x}$ του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον $\mathbf{24\ cm^2}$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το εμβαδόν του «κίτρινου» ορθογώνιου παραλληλόγραμμου του σχήματος, το οποίο έχει διαστάσεις $\mathbf{x-2, x-4}$, επομένως θα έχει εμβαδόν $\mathbf{(x-2)(x-4)}$.

Έχουμε λοιπόν ότι η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν:

$$\mathbf{E(x) = (x-2)(x-4)}.$$

β. Η τιμή του $\mathbf{x}$, είναι ρίζα της εξίσωσης: $\mathbf{E(x) = 35}$ (1)

$$\mathbf{(1) \Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 35 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 35 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 27 = 0\ (2)}$$

Η (2) έχει διακρίνουσα: $\mathbf{\Delta = 36 + 4 \cdot 27 = 144 = 12^2}$.

$$\mathbf{(2) \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 12}{2} \Leftrightarrow \left(x = 9 \text{ ή } x = -3\right) \overset{5 \le x \le 10}{\Leftrightarrow} x = 9}.$$

γ. Οι τιμές του $\mathbf{x}$, είναι οι λύσεις της ανίσωσης: $\mathbf{E(x) \ge 24}$ (3)

$$\mathbf{(3) \Leftrightarrow (x-2)(x-4) \ge 24 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 \ge 24 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 \ge 0\ (4)}$$

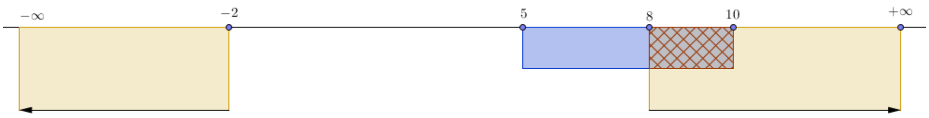
Το τριώνυμο του πρώτου μέλους της (4),έχει διακρίνουσα:

$\mathbf{\Delta' = 36 + 64 = 100 = 10^2}$.

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι: $\mathbf{x = \frac{6 \pm 10}{2} = \left(x = 8 \text{ ή } x = -2\right)}$

Το πρόσημό του παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα:

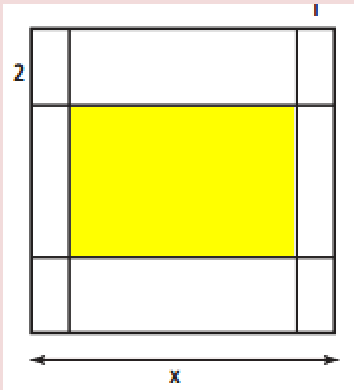
x	$-\infty$		-2		8		$+\infty$
$x^2-6x+16$		$+$	0	$-$	0	$+$	



Τελικά, $(4) \Leftrightarrow \left(x \le -2 \text{ ή } x \ge 8\right) \overset{5\le x\le 10}{\Leftrightarrow} 8 \le x \le 10$.

165. **GI_A_ALG_4_2229**

Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς $\mathbf{x}$ **cm** $(\mathbf{5 \le x \le 10})$ στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια **2 cm** στο πάνω και στο κάτω μέρος της και **1 cm** δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα



α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $\mathbf{E}$ της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση $\mathbf{E(x)=x^2-6x+8}$. (Μονάδες 8)

β. Να βρεθεί η τιμή του $\mathbf{x}$ έτσι ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι $\mathbf{24\ cm^2}$. (Μονάδες 7)

γ. Αν το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων είναι το πολύ $\mathbf{35\ cm^2}$, να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά $\mathbf{x}$ του τετραγώνου.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το εμβαδόν του «κίτρινου» ορθογώνιου παραλληλόγραμμου του σχήματος, το οποίο έχει διαστάσεις $\mathbf{x-2, x-4}$, επομένως θα έχει εμβαδόν $\mathbf{(x-2)(x-4)}$.

Έχουμε λοιπόν ότι η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν:

$$\mathbf{E(x)=(x-2)(x-4)=x^2-4x-2x+8=x^2-6x+8}.$$

β. Η τιμή του $\mathbf{x}$, είναι ρίζα της εξίσωσης: $\mathbf{E(x)=24}$ (1)

$\mathbf{(1)\ \ x^2-6x+8=24 \Leftrightarrow x^2-6x-16=0\ (2)}$

Η (2) έχει διακρίνουσα: $\mathbf{\Delta=36+4\cdot16=100=10^2}$.

$$\mathbf{(2)\Leftrightarrow x=\frac{6\pm10}{2}\Leftrightarrow (x=8 \text{ ή } x=-2)\overset{5\le x\le10}{\Leftrightarrow} x=8}.$$

γ. Οι τιμές του $\mathbf{x}$, είναι οι λύσεις της ανίσωσης: $\mathbf{E(x)\ge35}$ (3)

$\mathbf{(3) x^2-6x+8\ge35 \Leftrightarrow x^2-6x-27\ge0\ (4)}$

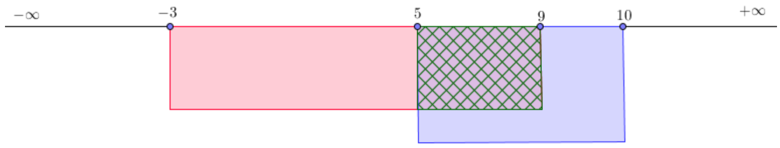
Το τριώνυμο του πρώτου μέλους της (4), έχει διακρίνουσα:

$\mathbf{\Delta'=36+108=144=12^2}$.

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι: $\mathbf{x=\frac{6\pm12}{2}\Rightarrow (x=9 \text{ ή } x=-3)}$

Το πρόσημό του παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα:

$\mathbf{x}$	$-\infty$		$\mathbf{-3}$		$\mathbf{9}$		$+\infty$
$\mathbf{x^2-6x-27}$		$+$	0	$-$	0	$+$	



Τελικά, $\mathbf{(4)\Leftrightarrow -3\le x\le 9 \overset{5\le x\le10}{\Leftrightarrow} 5\le x\le 9}$.

166. **GI_A_ALG_4_2234**

Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin) . Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις $\mathbf{\Pi_1}$ και $\mathbf{\Pi_2}$:

$\mathbf{\Pi_1}$ **:** Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($\mathbf{^oC}$) σε βαθμούς Φαρενάιτ ($\mathbf{^oF}$), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με $\mathbf{1,8}$ και προσθέτουμε $\mathbf{32}$.

$\mathbf{\Pi_2}$ **:** Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($\mathbf{^oC}$) σε βαθμούς Κέλβιν ($\mathbf{^oK}$), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου το $\mathbf{273}$.

α. Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση. (Μονάδες 8)

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν ($\mathbf{^oK}$) και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ ($\mathbf{^oF}$)

είναι η: $\mathbf{K}=\frac{\mathbf{F}-\mathbf{32}}{\mathbf{1,8}}+\mathbf{273}$. (Μονάδες 7)

γ. Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από $\mathbf{278^o K}$ μέχρι $\mathbf{283^o K}$. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε $\mathbf{^oF}$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. $\mathbf{\Pi_1}$ **:** πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με $\mathbf{1,8}$ και προσθέτουμε $\mathbf{32}$.

Οπότε έχουμε: $\mathbf{F=1,8C+32}$

$\mathbf{\Pi_2}$ **:** προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου το $\mathbf{273}$. Οπότε έχουμε:

$\mathbf{K=C+273}$.

β. Λύνουμε την ισότητα $\mathbf{F=1,8C+32}$ ως προς $\mathbf{C}$.

$$\mathbf{F=1,8C+32 \Leftrightarrow 1,8C=F-32 \Leftrightarrow C=\frac{F-32}{1,8}} \quad (1)$$

Στη σχέση $\mathbf{K=C+273}$ αντικαθιστούμε την (1) και βρίσκουμε:

$$\mathbf{K=\frac{F-32}{1,8}+273} \quad (2)$$

γ. Από υπόθεση έχουμε: $\mathbf{278 \le K \le 283 \Leftrightarrow 278 \le \frac{F-32}{1,8}+273 \le 283 \Leftrightarrow}$

$\mathbf{278-273 \le \frac{F-32}{1,8}+273-273 \le 283-273 \Leftrightarrow}$

$\mathbf{5 \le \frac{F-32}{1,8} \le 10 \Leftrightarrow 5\cdot 1,8 \le \frac{F-32}{1,8}\cdot 1,8 \le 10\cdot 1,8 \Leftrightarrow}$

$\mathbf{9 \le F-32 \le 18 \Leftrightarrow 9+32 \le F-32+32 \le 18+32 \Leftrightarrow} \boxed{\mathbf{41 \le F \le 50}}$

167. **GI_A_ALG_4_2238**

Δίνεται η εξίσωση $\mathbf{x^2-2\lambda x+\lambda^2-1=0}$, (1) με παράμετρο $\boldsymbol{\lambda\in\mathbb{R}}$.

α. Να δείξετε ότι για κάθε $\boldsymbol{\lambda\in\mathbb{R}}$ η εξίσωση έχει δυο άνισες ρίζες. (Μονάδες 6)

β. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης, για κάθε $\boldsymbol{\lambda\in\mathbb{R}}$. (Μονάδες 6)

γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού $\boldsymbol{\lambda}$, οι δυο άνισες ρίζες της εξίσωσης ανήκουν στο διάστημα $(-2,4)$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα

$$\boldsymbol{\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2\lambda)^2-4\cdot 1\cdot(\lambda^2-1)=4\lambda^2-4\lambda^2+4=4>0}$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

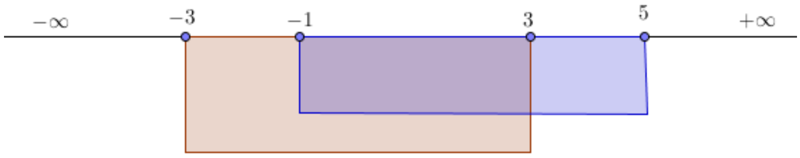
β. Για τις ρίζες του τριωνύμου έχουμε:

$$x_{1,2}=\frac{-(-2\lambda)\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{2\lambda\pm2}{2}=\begin{cases}x_1=\dfrac{2\lambda+2}{2}=\dfrac{2(\lambda+1)}{2}=\lambda+1\\[2mm] x_2=\dfrac{2\lambda-2}{2}=\dfrac{2(\lambda-1)}{2}=\lambda-1\end{cases}$$

γ. Έχουμε:

✓ $x_1\in(-2,4)\Rightarrow-2<\lambda+1<4\Rightarrow-2-1<\lambda+1-1<4-1\Rightarrow-3<\lambda<3$ και

✓ $x_2\in(-2,4)\Rightarrow-2<\lambda-1<4\Rightarrow-2+1<\lambda-1+1<4+1\Rightarrow-1<\lambda<5$



Οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι τα $\lambda\in(-1,3)$.

168. **GI_A_ALG_4_2244**

Δίνονται οι ανισώσεις: $|x-2|<3\ (1)$ και $x^2-2x-8\le0\ \ (2)$

α. Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 10)

β. Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in(-1,4]$. (Μονάδες 5)

γ. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\dfrac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Για την ανίσωση (1) έχουμε:

$|x-2|<3\Leftrightarrow-3<x-2<3\Leftrightarrow-3+2<x-2+2<3+2\Leftrightarrow\boxed{-1<x<5}$.

Για την ανίσωση (2) έχουμε:

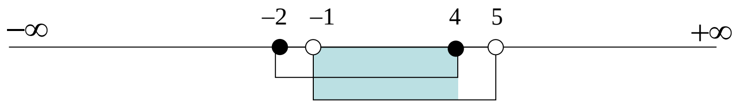
Το τριώνυμο x^2-2x-8 έχει διακρίνουσα $\Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-8)=36$ και ρίζες:

$$x_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{2\pm6}{2}=\begin{cases}x_1=\dfrac{2+6}{2}=4\\[2mm] x_2=\dfrac{2-6}{2}=-2\end{cases}.$$

Οπότε ανάμεσα στις ρίζες του διατηρεί πρόσημο ετερόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου και συνεπώς οι λύσεις της (2) είναι τα $\boxed{-2\le x\le4}$.

x	$-\infty$	-2		4	$+\infty$
x^2-2x-8	+	0	-	0	+

β. Θα βρούμε τις κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων



Άρα $\mathbf{x\in(-1,4]}$

γ. Αφού $\mathbf{\rho_1,\rho_2\in(-1,4]}$ έχουμε:

$$\begin{cases}-1<\rho_1\le 4 \;\oplus\\ -1<\rho_2\le 4\end{cases}\Rightarrow -2<\rho_1+\rho_2\le 8\Leftrightarrow \frac{-2}{2}<\frac{\rho_1+\rho_2}{2}\le\frac{8}{2}\Leftrightarrow$$

$$-1<\frac{\rho_1+\rho_2}{2}\le 4\Leftrightarrow\frac{\rho_1+\rho_2}{2}\in(-1,4]$$

169. **GI_A_ALG_4_2255**

Δίνονται οι ανισώσεις: $\mathbf{2\le|x|\le 3}$ (1) και $\mathbf{x^2-4x<0}$ (2).

α. Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 10)

β. Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $\mathbf{x\in[2,3]}$. (Μονάδες 5)

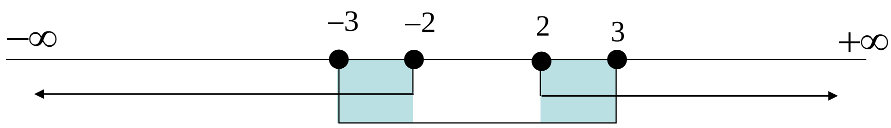
γ. Αν οι αριθμοί $\mathbf{\rho_1}$ και $\mathbf{\rho_2}$ ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\mathbf{\frac{\rho_1+\rho_2}{2}}$ είναι κοινή τους λύση. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Για την ανίσωση (1) έχουμε:

$$2\le|x|\le 3\Leftrightarrow\begin{cases}|x|\le 3\\ |x|\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\le x\le 3\\ x\ge 2 \text{ ή } x\le -2\end{cases}$$

Θα βρούμε τις κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων



Άρα $\mathbf{x\in[-3,-2]\cup[2,3]}$

Για την ανίσωση (2) θα βρούμε αρχικά τις ρίζες της αντίστοιχης εξίσωσης $\mathbf{x^2-4x=0}$.

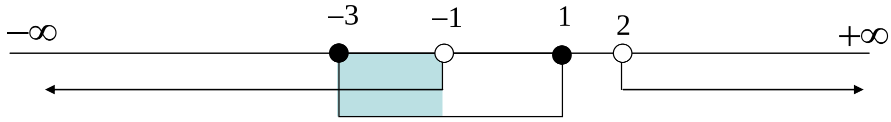
$$x^2-4x=0\Leftrightarrow x(x-4)=0\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=4$$

Κάνουμε τον πίνακα προσήμου για το τριώνυμο:

x	$-\infty$	0		4	$+\infty$
x^2-4x	+	0	-	0	+

Άρα οι λύσεις της δεύτερης ανίσωσης είναι $\mathbf{x \in (0,4)}$.

β. Θα βρούμε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:



Άρα $\mathbf{x \in [2,3]}$

γ. Αφού $\mathbf{\rho_1, \rho_2 \in [2,3]}$ έχουμε:

$$\begin{cases} 2 \le \rho_1 \le 3 \; \oplus \\ 2 \le \rho_2 \le 3 \end{cases} \Rightarrow 4 \le \rho_1 + \rho_2 \le 6 \Leftrightarrow \frac{4}{2} \le \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \le \frac{6}{2} \Leftrightarrow 2 \le \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \le 3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \in [2,3]$$

170. **GI_A_ALG_4_2273**

Δίνονται οι ανισώσεις $\mathbf{|x+1| \le 2}$ (1) και $\mathbf{x^2 - x - 2 > 0}$ (2).

α. Να λύσετε τις ανισώσεις. (Μονάδες 10)

β. Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $\mathbf{x \in [-3,-1)}$. (Μονάδες 5)

γ. Αν οι αριθμοί $\mathbf{\rho_1}$ και $\mathbf{\rho_2}$ ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι $\mathbf{\rho_1 - \rho_2 \in (-2,2)}$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Για την πρώτη ανίσωση έχουμε:

$$|x+1| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le x+1 \le 2 \Leftrightarrow -2-1 \le x+1-1 \le 2-1 \Leftrightarrow -3 \le x \le 1$$

Για την δεύτερη ανίσωση θα βρούμε αρχικά τις ρίζες της αντίστοιχης εξίσωσης $\mathbf{x^2 - x - 2 = 0}$. Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα

$\mathbf{\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9}$ και άρα έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, τις:

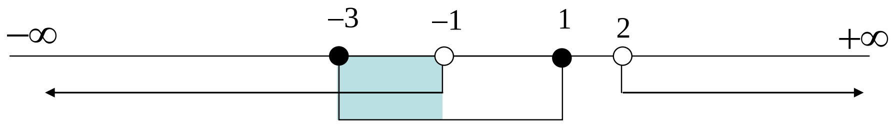
$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+3}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

Κάνουμε τον πίνακα προσήμου:

χ	−∞	-1		2		+∞
x^2-x-2	+	0	-	0	+	

Άρα οι λύσεις της δεύτερης ανίσωσης είναι οι $\mathbf{x < -1}$ **ή** $\mathbf{x > 2}$.

β. Θα βρούμε τις κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων



Άρα $\mathbf{x \in [-3,-1)}$

γ. $$\begin{cases} -3 \le \rho_1 < -1 \\ -3 \le \rho_2 < -1 \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 \le \rho_1 < -1 \\ 3 \ge -\rho_2 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 \le \rho_1 < -1 \; \oplus \\ 1 < -\rho_2 \le 3 \end{cases} \Rightarrow -2 < \rho_1 - \rho_2 < 2$$

171. **GI_A_ALG_4_2287**

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός $\mathbf{x}$ που ικανοποιεί τη σχέση: $\mathbf{d(x,5)\le 9}$.

α. Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά. (Μονάδες 5)

β. Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του $\mathbf{x}$ (Μονάδες 5)

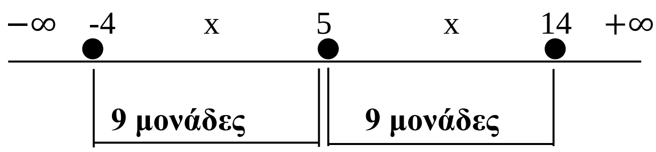
γ. Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β). (Μονάδες 10)

δ. Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι: $\mathbf{|x+4|+|x-14|=18}$. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α. Η σχέση $\mathbf{d(x,5)\le 9}$ εκφράζει ότι ο αριθμός $\mathbf{x}$ απέχει από τον αριθμό $\mathbf{5}$ πάνω στην ευθεία των πραγματικών, απόσταση μικρότερη ή ίση το $\mathbf{9}$.

β.



, Άρα $\mathbf{x\in[-4,14]}$.

γ. $\mathbf{d(x,5)\le 9 \Leftrightarrow |x-5|\le 9 \Leftrightarrow -9\le x-5\le 9 \Leftrightarrow}$

$\mathbf{-9+5\le x-5+5\le 9+5 \Leftrightarrow -4\le x\le 14 \Leftrightarrow x\in[-4,14]}$

δ. $$\mathbf{-4\le x\le 14 \Rightarrow \begin{cases} -4\le x \Rightarrow 0\le x+4 \Rightarrow x+4\ge 0 \Rightarrow \boxed{|x+4|=x+4} \\ x\le 14 \Rightarrow x-14\le 0 \Rightarrow \boxed{|x-14|=-x+14} \end{cases}}$$

Άρα $\mathbf{|x+4|+|x-14|=x+4-x+14=18}$.

172. **GI_A_ALG_4_2301**

Δίνονται τα σημεία $\mathbf{A,B}$ και $\mathbf{M}$ που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς $\mathbf{-2}$, $\mathbf{7}$ και $\mathbf{x}$ αντίστοιχα, με $\mathbf{-2<x<7}$.

α. Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

i) $\mathbf{|x+2|}$ (Μονάδες 4)

ii) $\mathbf{|x-7|}$ (Μονάδες 4)

β. Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: $\mathbf{|x+2|+|x-7|}$. (Μονάδες 5)

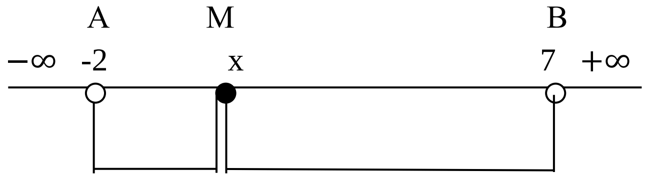
γ. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\mathbf{A=|x+2|+|x-7|}$ γεωμετρικά.

(Μονάδες 5)

δ. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. Αφού $-2<x<7$, τότε στον άξονα των πραγματικών αριθμών έχουμε :



i) $|x+2|=|x-(-2)|$: απόσταση του M από το A

ii) $|x-7|$: απόσταση του M από το B.

β. $|x+2|+|x-7|=(AM)+(BM)$: το άθροισμα των αποστάσεων του σημείου M από τα σταθερά σημεία A,B.

γ. $A=|x+2|+|x-7|=(AM)+(BM)=(AB)=9$ αφού το σημείο M είναι εσωτερικό του ευθυγράμμου τμήματος AB.

δ. Αφού $-2<x<7 \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} -2<x \Rightarrow 0<x+2 \Rightarrow x+2>0 \Rightarrow |x+2|=x+2 \\ x<7 \Rightarrow x-7<0 \Rightarrow |x-7|=-x+7 \end{cases}$

$A=|x+2|+|x-7|=x+2-x+7=9$

173. **GI_A_ALG_4_2302**

Σε έναν άξονα τα σημεία A,B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α. Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$ (Μονάδες 10)

β. Αν ισχύει $|x-5|=|x-9|$ |,

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α.

$|x-5|$: απόσταση του M από το A.

$|x-9|$: απόσταση του M από το B.

β.

i) Αφού $|x-5|=|x-9|$ έχουμε: $|x-5|=|x-9| \Leftrightarrow (AM)=(BM)$ δηλαδή το σημείο $\mathbf{M}$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος $\mathbf{AB}$ αφού ισαπέχει από τα άκρα του και βρίσκεται στην ευθεία $\mathbf{AB}$.

ii) Το μέσο $\mathbf{M}$ του ευθυγράμμου τμήματος $\mathbf{AB}$ είναι το κέντρο του διαστήματος $[5,9]$

Δηλαδή $\mathbf{x}=\frac{5+9}{2}=7$.

Έχουμε $|x-5|=|x-9|\Rightarrow\Rightarrow\begin{cases} x-5=x-9\Rightarrow -5=-9 \ \textbf{Αδύνατο} \\ x-5=-x+9\Rightarrow 2x=5+9\Rightarrow \boxed{x=7} \end{cases}$

174. **GI_A_ALG_4_2323**

Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς $\mathbf{3}$, $\mathbf{7}$, $\mathbf{11}$, $\mathbf{15}$, **...** και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά τον $\mathbf{4}$. Σταματάει όταν έχει γράψει τους $\mathbf{40}$ πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α. Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 4)

β. Να βρείτε το άθροισμα των $\mathbf{40}$ αυτών αριθμών. (Μονάδες 7)

γ. Είναι ο αριθμός $\mathbf{120}$ ένας από τους $\mathbf{40}$ αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 7)

δ. Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι τον αριθμό $\mathbf{235}$. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. Είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, διότι κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο αν προσθέσουμε τον αριθμό $\mathbf{4}$.

Έχουμε: $\alpha_1=3,\omega=4$.

β. Από τον τύπο $S_\nu=\frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1+(\nu-1)\omega\right]$,έχουμε:

$$S_{40}=\frac{40}{2}[2\alpha_1+(40-1)\omega]=20(2\cdot3+39\cdot4)=20(6+156)=20\cdot162=3240.$$

γ. Ο $\mathbf{120}$ είναι ένας από τους $\mathbf{40}$ αυτούς αριθμούς, αν και μόνο αν, υπάρχει $\nu\in\mathbb{N}^*$, τέτοιος ώστε: $\alpha_\nu=120$.Έστω ότι υπάρχει τέτοιος $\nu\in\mathbb{N}^*$,τότε:

$$\alpha_\nu=120\Rightarrow\alpha_1+(\nu-1)\omega=120\Rightarrow3+(\nu-1)\cdot4=120\Rightarrow(\nu-1)\cdot4=117\Rightarrow$$

$$4\nu-4=117\Rightarrow4\nu=121\Rightarrow\nu=\frac{121}{4}\notin\mathbb{N}^*,\text{άτοπο.}$$

Άρα ο $\mathbf{120}$, δεν είναι ένας από τους αριθμούς αυτούς.

δ. Ο Διονύσης σταματάει όταν γράψει τον αριθμό:

$\alpha_{40} = \alpha_1 + (40-1)\omega = 3 + 39 \cdot 4 = 3 + 156 = 159$.

Ο Γιώργος συνεχίζει 163 , 167, 171 ,... , 235.

Θα υπολογίσουμε ποια θέση κατέχει στην αριθμητική πρόοδο ο 235 ,δηλαδή ποιος όρος είναι. Έστω ν η θέση που κατέχει, τότε:

$\alpha_\nu = 235 \Leftrightarrow 3 + (\nu-1)4 = 235 \Leftrightarrow (\nu-1)\cdot 4 = 232 \Leftrightarrow \nu - 1 = 58 \Leftrightarrow \nu = 59$

Άρα $\alpha_{59} = 235$, ο Γιώργος σταματάει όταν γράψει τον 59 όρο της προόδου.

Το ζητούμενο άθροισμα ισούται:

$\alpha_{41} + \alpha_{42} + ... + \alpha_{59} = \left(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{59}\right) - \left(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{40}\right) = S_{59} - S_{40} =$

$\frac{59}{2}(2\cdot 3 + 58 \cdot 4) - 3240 = 59(3 + 58\cdot 2) - 3240 = 7021 - 3240 = 3781$.

175. **GI_A_ALG_4_2332**

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο άνισες ρίζες. (Μονάδες 10)

β. Αν x_1 και x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης (1):

i) Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.

ii) Να βρείτε το $P = x_1 x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ. (Μονάδες 5)

γ. Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2+\sqrt{3}$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2-\sqrt{3}$,

ii) να βρείτε το λ. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Θα μελετήσουμε το πρόσημο της διακρίνουσας,

$\Delta = (-4)^2 - 4\left(2-\lambda^2\right) = 4\lambda^2 + 8 > 0$, άρα για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο άνισες ρίζες.

β.

i) $S = x_1 + x_2 = -\frac{-4}{1} = 4$.

ii) $P = x_1 x_2 = \frac{2-\lambda^2}{1} = 2 - \lambda^2$, όπου βρέθηκε ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ.

γ.

i) Έστω $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ τότε από το ερώτημα βi) βρίσκουμε:

$S = 4 \Rightarrow x_1 + x_2 = 4 \Rightarrow \left(2+\sqrt{3}\right) + x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 2 - \sqrt{3}$.

ii) Ομοίως κάνοντας χρήση του συμπεράσματος του ερωτήματος βii) έχουμε:

$$P=2-\lambda^2 \Rightarrow x_1x_2=2-\lambda^2 \Rightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=2-\lambda^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^2-\sqrt{3}^2=2-\lambda^2 \Rightarrow 1=2-\lambda^2 \Rightarrow \lambda^2=1 \Rightarrow \lambda=\pm 1$$

176. **GI_A_ALG_4_2336**

α. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου x^2-5x+6 για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β. Δίνεται η εξίσωση $\frac{1}{4}x^2+(2-\lambda)x+\lambda-2=0$ (1) με παράμετρο λ.

i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες. (Μονάδες 10)

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α. Βρίσκουμε τη διακρίνουσα του τριωνύμου για να εξετάσουμε αν το τριώνυμο έχει ρίζες: $\Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=1>0$, άρα το τριώνυμο έχει δύο ρίζες τις: $x_1=\frac{5-1}{2}=2$ και $x_2=\frac{5+1}{2}=3$. Συνεπώς το πρόσημο του είναι:

θετικό, $x^2-5x+6>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$.

αρνητικό, $x^2-5x+6<0 \Rightarrow x\in(2,3)$.

β.

i) Για να έχει η εξίσωση δύο άνισες ρίζες πρέπει η διακρίνουσα της να είναι θετική, $\Delta>0$

$(2-\lambda)^2-4\frac{1}{4}(\lambda-2)>0 \Rightarrow 4-4\lambda+\lambda^2-\lambda+2>0 \Rightarrow \lambda^2-5\lambda+6>0$, το τριώνυμο που καταλήξαμε ως προς λ, ταυτίζεται με το τριώνυμο του ερωτήματος α) άρα σύμφωνα με την διερεύνηση του α) ερωτήματος πρέπει: $\lambda\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$.

ii) Αν οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ομόσημοι αριθμοί τότε $P=x_1x_2>0$

$P>0 \Rightarrow \frac{\lambda-2}{\frac{1}{4}}>0 \Rightarrow \lambda-2>0 \Rightarrow \lambda>2$. Η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν $\Delta\geq0 \Leftrightarrow \lambda\in(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$, συναληθεύοντας τα παραπάνω συμπεράσματα βρίσκουμε $\lambda\in[3,+\infty)$.

177. **GI_A_ALG_4_2338**

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha x-\alpha+2$ και $g(x)=x^2-\alpha+3$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1,2)$ για κάθε

τιμή του πραγματικού αριθμού α. (Μονάδες 7)

β. Αν οι γραφικές παραστάσεις των $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$ τέμνονται σε σημείο με τετμημένη $\mathbf{1}$, τότε:

i) Να βρείτε την τιμή του $\boldsymbol{\alpha}$. (Μονάδες 4)

ii) Για την τιμή του $\boldsymbol{\alpha}$ που βρήκατε υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\boldsymbol{\alpha}$ οι γραφικές παραστάσεις των $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$ έχουν δύο σημεία τομής. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbf{f(1)=2}$, πράγματι $\mathbf{f(1)=\alpha-\alpha+2=2}$, άρα η γραφική παράσταση της $\mathbf{f}$ διέρχεται από το σημείο $\mathbf{(1,2)}$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού $\boldsymbol{\alpha}$.

β.

i) Αν οι γραφικές παραστάσεις των $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$ τέμνονται σε σημείο με τετμημένη $\mathbf{1}$, τότε σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα α) θα είναι $\mathbf{g(1)=f(1)=2}$ συνεπώς:

$$\mathbf{g(1)=2\Leftrightarrow 1-\alpha+3=2\Leftrightarrow -\alpha=-2\Leftrightarrow \alpha=2}.$$

ii) Για $\boldsymbol{\alpha=2}$ οι συναρτήσεις έχουν τύπο:

$\mathbf{f(x)=2x-2+2=2x}$ και $\mathbf{g(x)=x^2-2+3=x^2+1}$, θα εξετάσουμε αν οι συναρτήσεις τέμνονται σε άλλο σημείο, για να συμβεί αυτό πρέπει να υπάρχει $\mathbf{x_0\neq 1}$ με $\mathbf{f(x_0)=g(x_0)}$,

Λύνοντας της παραπάνω εξίσωση:

$$\mathbf{f(x_0)=g(x_0)\Leftrightarrow 2x_0=x_0{}^2+1\Leftrightarrow x_0{}^2-2x_0+1=0\Leftrightarrow (x_0-1)^2=0\Leftrightarrow x_0=1}.$$

βρίσκουμε ότι δεν υπάρχει άλλο σημείο τομής τους πέρα από αυτό με τετμημένη $\mathbf{1}$.

γ. Θα πρέπει η εξίσωση $\mathbf{f(x)=g(x)}$ να έχει δύο λύσεις άνισες.

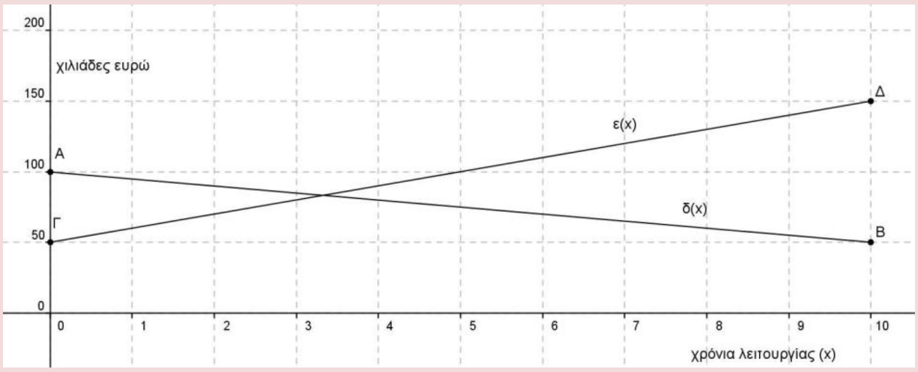
$\mathbf{f(x)=g(x)\Leftrightarrow \alpha x-\alpha+2=x^2-\alpha+3\Leftrightarrow x^2-\alpha x+1=0}$, το τριώνυμο αυτό που καταλήξαμε πρέπει να έχει διακρίνουσα θετική, συνεπώς:

$$\mathbf{\Delta>0\Leftrightarrow \alpha^2-4>0\Leftrightarrow \alpha^2>4\Leftrightarrow |\alpha|>2\Leftrightarrow \alpha\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)}.$$

178. **GI_A_ALG_4_2339**

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων το ευθύγραμμο τμήμα $\mathbf{AB}$ με $\mathbf{A(0,100)}$ και $\mathbf{B(10,50)}$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\boldsymbol{\delta}\mathbf{(x)}$ των ετήσιων δαπανών μιας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα $\mathbf{x}$ χρόνια της λειτουργίας της.

Το ευθύγραμμο τμήμα $\mathbf{\Gamma\Delta}$ με $\mathbf{\Gamma(0,50)}$ και $\mathbf{\Delta(10,150)}$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων $\varepsilon(x)$ της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.



α. Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τα έξοδα τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας. (Μονάδες 4)

β.

i) Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων $\delta(x), \varepsilon(x)$ και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο α) ερώτημα ήταν σωστές

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 6)

«ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗ» ΛΥΣΗ

α. Από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που δίνονται βρίσκουμε τις τεταγμένες των συναρτήσεων που αντιστοιχούν στην τετμημένη με τιμή 5.

Εκτιμούμε έτσι ότι: $\varepsilon(x) \cong 100$, $\delta(x) \cong 75$.

β.

i) Οι γραφικές παραστάσεις είναι ευθείες, θεωρούμε λοιπόν ότι είναι της μορφής $f(x) = \lambda x + \beta$ και θα προσδιορίσουμε για την κάθε μία τις παραμέτρους.

την $\delta(x)$: Η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(0,100)$ και $B(10,50)$

$$\delta(x) = \lambda x + \beta \Rightarrow \begin{cases} \delta(0) = 100 \\ \delta(10) = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 100 \\ 10\lambda + 100 = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 100 \\ \lambda = -5 \end{cases}$$

άρα, $\delta(x) = -5x + 100$

Για την $\varepsilon(x)$: Η οποία διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(0,50)$ και $\Delta(10,150)$

$$\varepsilon(x) = \lambda x + \beta \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon(0) = 50 \\ \varepsilon(10) = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 50 \\ 10\lambda + 50 = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 50 \\ \lambda = 10 \end{cases}$$

άρα, $\boldsymbol{\varepsilon(x)=10x+50}$

Ελέγχουμε τις εκτιμήσεις του α) ερωτήματος αντικαθιστώντας στις συναρτήσεις που βρήκαμε την τιμή $\mathbf{x=5}$:

$$\boldsymbol{\delta(5)=-5\cdot 5+100=-25+100=75}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon(5)=10\cdot 5+50=50+50=100}.$$

Αμφότερες οι εκτιμήσεις μας σωστές.

γ. Οι συντεταγμένες των σημείων τομής των τμημάτων μπορούν να βρεθούν επιλύοντας την εξίσωση: $\boldsymbol{\varepsilon(x)=\delta(x)}$

$$\boldsymbol{\varepsilon(x)=\delta(x)\Rightarrow 10x+50=-5x+100\Rightarrow 15x=50\Rightarrow x=\frac{50}{15}\cong 3,3}.$$

Ερμηνεύοντας το παραπάνω αποτέλεσμα καταλαβαίνουμε ότι η επιχείρηση στα $\mathbf{3,3}$ χρόνια λειτουργίας της είχε έσοδα ίσα με τις δαπάνες της.

ΣΧΟΛΙΟ:

Οι τιμές «ετήσια έσοδα» και «ετήσια έξοδα» είναι διακριτές (μεμονωμένες) μεταβλητές και δεν μπορούν να παριστάνονται με συνεχείς καμπύλες ή ευθείες.

Αν αντικατασταθεί η λέξη «ετήσια» με τη λέξη «συνολικά», φαίνεται ότι το πρόβλημα αποκτά νόημα, εφόσον θα μπορούσαμε να πούμε ότι π.χ. τη χρονική στιγμή x = 5 σε έτη τα συνολικά ως τότε έξοδα είναι 75 χιλιάδες ευρώ και τα τα συνολικά ως τότε έσοδα είναι 100 χιλιάδες ευρώ.

Όμως και πάλι υπάρχει πρόβλημα με τη γνησίως φθίνουσα συνάρτηση που τότε θα παριστάνει συνολικά έξοδα. Δεν μπορεί τα συσωρευμένα έξοδα να μειώνονται!

Οπότε, πρέπει να αντικατασταθεί η συνάρτηση εξόδων με μια γνήσια αύξουσα, με χαμηλότερο ρυθμό των εσόδων, κάτι που θα μπορούσε να οφείλεται π.χ. σε απόσβεση παγίων και δανείων.

179. **GI_A_ALG_4_2340**

Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:

Για το πρόγραμμα $\mathbf{A}$ πρέπει να καταθέσει τον $1^{\text{ο}}$ μήνα $\mathbf{1}$ ευρώ, το $2^{\text{ο}}$ μήνα $\mathbf{2}$ ευρώ, τον $3^{\text{ο}}$ μήνα $\mathbf{4}$ ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

Για το πρόγραμμα $\mathbf{B}$ πρέπει να καταθέσει τον $1^{\text{ο}}$ μήνα $\mathbf{100}$ ευρώ, τον $2^{\text{ο}}$ μήνα $\mathbf{110}$ ευρώ , τον τρίτο μήνα $\mathbf{120}$ ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει να καταθέτει ποσό κατά $\mathbf{10}$ ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α.

i) Να βρείτε το ποσό $\boldsymbol{\alpha_\nu}$ που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το $\boldsymbol{\nu^{\text{ο}}}$ μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα $\mathbf{A}$. (Μονάδες 4)

ii) Να βρείτε το ποσό $\boldsymbol{\beta_\nu}$ που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το $\boldsymbol{\nu^{\text{ο}}}$ μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα $\mathbf{B}$. (Μονάδες 4)

iii) Να βρείτε το ποσό $\mathbf{A_\nu}$ που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από $\mathbf{\nu}$ μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα $\mathbf{A}$. (Μονάδες 5)

iv) Να βρείτε το ποσό $\mathbf{B_\nu}$ που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από $\mathbf{\nu}$ μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα $\mathbf{B}$. (Μονάδες 5)

β.

i) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους $\mathbf{6}$ μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα; (Μονάδες 3)

ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε $\mathbf{12}$ μήνες, με ποιο από τα δυο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο; (Μονάδες 4)

ΛΥΣΗ

α.

i) Τα ποσά κατάθεσης του κάθε μήνα του προγράμματος $\mathbf{A}$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου $(\boldsymbol{\alpha_\nu})$ με πρώτο όρο $\boldsymbol{\alpha_1 = 1}$ και λόγο $\boldsymbol{\lambda = 2}$.

Άρα το ποσό που θα πρέπει να καταθέσει τον $\mathbf{\nu^o}$ μήνα θα είναι

$$\boldsymbol{\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow \alpha_\nu = 1\cdot 2^{\nu-1} \Leftrightarrow \alpha_\nu = 2^{\nu-1}}.$$

ii) Τα ποσά κατάθεσης του κάθε μήνα του προγράμματος $\mathbf{B}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου $(\boldsymbol{\beta_\nu})$ με πρώτο όρο $\boldsymbol{\beta_1 = 100}$ και διαφορά $\boldsymbol{\omega = 10}$.

Άρα το ποσό που θα πρέπει να καταθέσει τον $\mathbf{\nu^o}$ μήνα θα είναι

$$\boldsymbol{\beta_\nu = \beta_1 + (\nu-1)\omega \Leftrightarrow \beta_\nu = 100 + 10(\nu-1) \Leftrightarrow \beta_\nu = 10\nu + 90}.$$

iii) Το συνολικό ποσό που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά $\mathbf{\nu}$ μήνες θα είναι

$$\boldsymbol{S_{\alpha_\nu} = \alpha_1\frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} \Leftrightarrow S_{\alpha_\nu} = \frac{2^\nu - 1}{2-1} \Leftrightarrow S_{\alpha_\nu} = 2^\nu - 1}.$$

iv) Το συνολικό ποσό που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά $\mathbf{\nu}$ μήνες θα είναι

$$\boldsymbol{S_{\beta_\nu} = \frac{\nu}{2}\left[2\beta_1 + (\nu-1)\omega\right] \Leftrightarrow S_{\beta_\nu} = \frac{\nu}{2}\left[2\cdot 100 + (\nu-1)10\right] \Leftrightarrow}$$

$$\boldsymbol{S_{\beta_\nu} = \frac{\nu}{2}\left[10\nu + 190\right] \Leftrightarrow S_{\beta_\nu} = 5\nu^2 + 95\nu}.$$

β.

i) Για το πρόγραμμα $\mathbf{A}$ γνωρίζουμε ότι: $\boldsymbol{S_{\alpha_\nu} = 2^\nu - 1}$, οπότε για $\boldsymbol{\nu = 6}$ θα έχουμε:

$$\boldsymbol{S_{\alpha_6} = 2^6 - 1 \Leftrightarrow S_{\alpha_6} = 63} \text{ ευρώ.}$$

Για το πρόγραμμα $\mathbf{B}$ γνωρίζουμε ότι: $\boldsymbol{S_{\beta_\nu} = 5\nu^2 + 95\nu}$, οπότε για $\boldsymbol{\nu = 6}$ θα έχουμε:

$$\boldsymbol{S_{\beta_6} = 5\cdot 6^2 + 95\cdot 6 \Leftrightarrow S_{\beta_6} = 750} \text{ ευρώ.}$$

ii) Για το πρόγραμμα $\mathbf{A}$ για $\boldsymbol{\nu = 12}$ θα έχουμε : $\boldsymbol{S_{\alpha_{12}} = 2^{12} - 1 \Leftrightarrow S_{\alpha_{12}} = 4095}$ ευρώ.

Για το πρόγραμμα **Β** για $\nu = 12$ θα έχουμε: $S_{\beta_{12}} = 5\cdot 12^2 + 95\cdot 12 \Leftrightarrow S_{\beta_6} = 1860$ ευρώ.

Επομένως με το πρόγραμμα Α θα συγκεντρωθεί μεγαλύτερο ποσό.

180. **GI_A_ALG_4_4542**

α. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 < x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 8)

β. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0 < \alpha < 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς: $0\,,1\;\alpha\,,\alpha^2\,,\sqrt{\alpha}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α). (Μονάδες 10)

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα: $\sqrt{1+\alpha} < 1+\sqrt{\alpha}$. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. $x^2 < x \Leftrightarrow x^2 - x < 0$, (1)

θα βρούμε τις ρίζες της εξίσωσης $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$.

Όταν έχουμε ανίσωση 2^{ου} βαθμού κάνουμε το πινακάκι:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2-x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα η $(1) \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

β.

i) Από το α) αφού $0 < \alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha^2 < \alpha$

Σύμφωνα με εφαρμογή του βιβλίου

$0 < \alpha^2 < \alpha \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2} < \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow |\alpha| < \sqrt{\alpha}$ (και αφού $\alpha > 0$) $\Leftrightarrow \alpha < \sqrt{\alpha}$

Επίσης $0 < \alpha < 1 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} < \sqrt{1} \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} < 1$

Επομένως $0 < \alpha^2 < \alpha < \sqrt{\alpha} < 1$

$-\infty$	0	α^2	α	$\sqrt{\alpha}$	1	$+\infty$

ii) Αφού $\sqrt{1+\alpha}$, $1+\sqrt{\alpha}$ θετικοί αριθμοί έχουμε:

$$\sqrt{1+\alpha} < 1+\sqrt{\alpha} \Leftrightarrow$$
$$\left(\sqrt{1+\alpha}\right)^2 < \left(1+\sqrt{\alpha}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$1+\alpha < 1+2\cdot 1\cdot\sqrt{\alpha}+\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$0<2\sqrt{\alpha}$ που ισχύει για κάθε $\alpha>0$.

181. **GI_A_ALG_4_4545**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5|x|+6}{|x|-3}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .(Μονάδες 6)

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει: $f(x)=|x|-2$. (Μονάδες 9)

γ. Για $x\in A$, να λύσετε την εξίσωση: $\left(f(x)+2\right)^2-4f(x)-5=0$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Θα πρέπει $|x|-3\neq 0 \Leftrightarrow |x|\neq 3 \Leftrightarrow x\neq \pm 3$.

Άρα το πεδίο ορισμού $A=\mathbb{R}-\{-3,+3\}$

β. $f(x)=\dfrac{x^2-5|x|+6}{|x|-3} \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{|x|^2-5|x|+6}{|x|-3}$

Αν στον αριθμητή θέσουμε $|x|=\omega$ τότε προκύπτει το τριώνυμο $\omega^2-5\omega+6$ με $\Delta=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=1$ και ρίζες που δίνονται από τον τύπο

$$\omega=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm 1}{2}=3 \text{ ή } 2$$

Άρα $\omega^2-5\omega+6=(\omega-3)(\omega-2)\overset{|x|=\omega}{\Leftrightarrow}(|x|-3)(|x|-2)$

Επομένως $f(x)=\dfrac{(|x|-3)(|x|-2)}{|x|-3}=|x|-2$

γ. Η εξίσωση $\left(f(x)+2\right)^2-4f(x)-5=0$ με τη βοήθεια της σχέσης $f(x)=|x|-2$ γράφεται

$$\left(|x|-2+2\right)^2-4\left(|x|-2\right)-5=0 \Leftrightarrow |x|^2-4|x|+3=0$$

Αν θέσουμε $|x|=\omega$ τότε προκύπτει η εξίσωση $\omega^2-4\omega+3=0$

με $\Delta=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3=4$ και ρίζες που δίνονται από τον τύπο

$\omega = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \dfrac{4 \pm 2}{2} = 3$ ή 1

Επομένως $|x| = 3$ (που απορρίπτεται λόγω του πεδίου ορισμού της f) ή $|x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ που αποτελούν τις ρίζες της εξίσωσης.

182. **GI_A_ALG_4_4548**

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0 \quad (1)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = \dfrac{1}{\sqrt{S - P}}$, όπου S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) αντίστοιχα, έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α. Είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Leftrightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(\lambda - \lambda^2) \Leftrightarrow \Delta = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 \Leftrightarrow \Delta = (1 - 2\lambda)^2$$

Επειδή για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι $(1 - 2\lambda)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \Delta \geq 0$ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές.

β. Έχουμε $\Delta = 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{1}{2}$.

γ. Είναι $S = x_1 + x_2 \Leftrightarrow S = -\dfrac{\beta}{a} \Leftrightarrow S = -\dfrac{-1}{1} \Leftrightarrow S = 1$ και

$$P = x_1 x_2 \Leftrightarrow P = \frac{\gamma}{a} \Leftrightarrow P = \frac{\lambda - \lambda^2}{1} \Leftrightarrow P = \lambda - \lambda^2.$$

Για έχει νόημα η παράσταση $A = \dfrac{1}{\sqrt{S - P}}$, για κάθε πραγματικό αριθμό λ πρέπει να ισχύει $S - P \geq 0$ και $\sqrt{S - P} \neq 0$ ή ισοδύναμα:

$$S - P > 0 \Leftrightarrow 1 - (\lambda - \lambda^2) > 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda + \lambda^2 > 0 \overset{x2}{\Leftrightarrow}$$

$$2 - 2\lambda + 2\lambda^2 > 0 \Leftrightarrow 1 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 + \lambda^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$1 + (1 - 2\lambda + \lambda^2) + \lambda^2 > 0 \Leftrightarrow 1 + (1 - \lambda)^2 + \lambda^2 > 0$, το οποίο ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό λ, άρα θα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική σχέση.

183. **GI_A_ALG_4_4551**

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. (Μονάδες 8)

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)

γ. Αν $\lambda < 0$, τότε:

i) το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

ii) να αποδείξετε ότι $|x_1 + x_2| \geq 2x_1 \cdot x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου. (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α. Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \left[-\left(\lambda^2+1\right)\right]^2 - 4\lambda^2 =$$

$$\left(\lambda^2+1-2\lambda\right)\left(\lambda^2+1+2\lambda\right) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2 \geq 0$$

οπότε έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β. Έχουμε ότι: $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{-(\lambda^2+1)}{\lambda} = \dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}$ και $P = x_1 x_2 = \dfrac{\lambda}{\lambda} = 1$.

γ.

i) Αφού $P = 1 > 0$, οι ρίζες x_1, x_2 είναι ομόσημες.

Αφού επιπλέον ισχύει $\lambda < 0$, έχουμε ότι $S < 0$, οπότε οι ρίζες x_1, x_2 είναι αρνητικές.

ii) Αφού $P = x_1 x_2 = 1 > 0$ ισχύει:

$$\left|\frac{\lambda^2+1}{\lambda}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{\lambda^2+1}{|\lambda|} \geq 2 \Leftrightarrow \lambda^2+1 \geq 2|\lambda|$$

$$\Leftrightarrow |\lambda|^2 + 1 - 2|\lambda| \geq 0 \Leftrightarrow \left(|\lambda|-1\right)^2 \geq 0$$

η οποία ισχύει, άρα και η αρχική, οπότε $|x_1 + x_2| \geq 2x_1 x_2$.

184. **GI_A_ALG_4_4558**

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda$ με $\lambda > 0$.

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές για κάθε $\lambda > 0$. (Μονάδες 10)

β. Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε:

i) να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου. (Μονάδες 4)

ii) να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ και να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 4$ για κάθε $\lambda > 0$. (Μονάδες 8)

iii) για την τιμή του λ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 4, τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 3)

ΛΥΣΗ

α. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $A_f = \mathbb{R}$.

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = [-(\lambda^2+1)]^2 - 4\lambda\cdot\lambda = (\lambda^2-1)^2 \geq 0$,

οπότε έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda > 0$.

Οι ρίζες είναι: $x = \dfrac{-[-(\lambda^2+1)] \pm \sqrt{(\lambda^2-1)^2}}{2\lambda} = \dfrac{(\lambda^2+1)\pm(\lambda^2-1)}{2\lambda}$, δηλαδή

$x_1 = \dfrac{\lambda^2+1+\lambda^2-1}{2\lambda} = \dfrac{2\lambda^2}{2\lambda} = \lambda$ και $x_2 = \dfrac{\lambda^2+1-\lambda^2+1}{2\lambda} = \dfrac{2}{2\lambda} = \dfrac{1}{\lambda}$,

οι οποίες είναι θετικές, αφού $\lambda > 0$.

β.

i) Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι: $E = x_1 x_2 = \lambda\cdot\dfrac{1}{\lambda} = 1$, για $\lambda > 0$.

ii) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι: $\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2\lambda + \dfrac{2}{\lambda}$, για $\lambda > 0$.

Για $\lambda > 0$, ισχύει:

$$2\lambda + \frac{2}{\lambda} \geq 4 \Leftrightarrow 2\lambda^2 + 2 \geq 4\lambda \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 \geq 0,$$

η οποία ισχύει άρα και η αρχική, οπότε $\Pi \geq 4$ για κάθε $\lambda > 0$.

iii) $\Pi = 4 \Leftrightarrow 2\lambda + \dfrac{2}{\lambda} = 4 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$,

οπότε έχουμε $x_1 = x_2 = 1$, δηλαδή το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

185. **GI_A_ALG_4_4575**

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 - 4x + \alpha$ και $g(x) = \alpha x - 5$ με $\alpha \in \mathbb{R}$

α. Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του α. (Μονάδες 7)

β. για $\alpha = 1$

i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$. (Μονάδες 8)

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$. (Μονάδες 5+5=10)

ΛΥΣΗ

α. Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο $A_f = A_g = \mathbb{R}$.

Αφού $f(2) = g(2)$, έχουμε ότι:

$2^2 - 4\cdot 2 + \alpha = 2\alpha - 5 \Leftrightarrow 4 - 8 + \alpha = 2\alpha - 5 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

β. Για $\alpha = 1$ έχουμε $f(x) = x^2 - 4x + 1$ και $g(x) = x - 5$.

i) Για $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$

αφού το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=1 \text{ και ρίζες } x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases}\dfrac{5+1}{2}=3\\[2mm] \dfrac{5-1}{2}=2\end{cases},$$

οπότε έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda>0$.

ii) Για $x\in\mathbb{R}$, έχουμε:

$f(x)\ge g(x)\Leftrightarrow x^2-4x+1\ge x-5\Leftrightarrow x^2-5x+6\ge 0\Leftrightarrow x\le 2$ ή $x\ge 3$, αφού

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	

Για $x\in\mathbb{R}$, έχουμε:

$|f(x)-g(x)|\ge f(x)-g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)\ge 0\Leftrightarrow f(x)\ge g(x)\Leftrightarrow x\le 2$ ή $x\ge 3$.

186. **GI_A_ALG_4_4607**

α. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2>x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 8)

β. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha>1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς:

$0\,,\,1\,,\,\alpha\,,\,\alpha^2\,,\,\sqrt{\alpha}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α). Μονάδες 10)

ii) Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: $\alpha\,,\,\alpha^2\,,\,\dfrac{\alpha+\alpha^2}{2}$. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε $x^2>x\Leftrightarrow x^2-x>0\Leftrightarrow x(x-1)>0$ για την οποία γνωρίζουμε ότι μεταξύ των ριζών είναι το τριώνυμο x^2-x είναι ετερόσημο του $\alpha=1$, οπότε οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

β.

i) Ισχύει ότι $0<1<\alpha$, άρα αρκεί να κατατάξουμε τους α^2 και $\sqrt{\alpha}$.

Έχουμε $\alpha>1\Rightarrow\alpha^2>\alpha$ από το α) ερώτημα. Ομοίως $\sqrt{\alpha}>1\Rightarrow\sqrt{\alpha}^2>\sqrt{\alpha}\Rightarrow\alpha>\sqrt{\alpha}$

Οπότε η σωστή σειρά είναι: $0<1<\sqrt{\alpha}<\alpha<\alpha^2$.

ii) Ο $\dfrac{\alpha+\alpha^2}{2}$ είναι ο αριθμητικός μέσος των $\alpha\,,\,\alpha^2$ οπότε θα ισχύει (αφού $\alpha>1$

) $\alpha < \frac{\alpha+\alpha^2}{2} < \alpha^2$.

187. **GI_A_ALG_4_4629**

Ένα μυρμήγκι περπατάει πάνω σε ένα ευθύγραμμο κλαδί μήκους $1\ \text{m}$, με τον ακόλουθο τρόπο: Ξεκινάει από το ένα άκρο του κλαδιού και το $1^\text{ο}$ λεπτό προχωράει $1\ \text{cm}$, το $2^\text{ο}$ λεπτό προχωράει $3\ \text{cm}$ και γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση κατά $2\ \text{cm}$ μεγαλύτερη από αυτήν που διήνυσε το προηγούμενο λεπτό.

α. Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει το μυρμήγκι κάθε λεπτό της κίνησής του, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τον ν-οστό όρο α_ν αυτής της προόδου. (Μονάδες 5)

β. Να βρείτε τη συνολική απόσταση που κάλυψε το μυρμήγκι τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του. (Μονάδες 4)

γ. Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι θα φτάσει στο άλλο άκρο του κλαδιού. (Μονάδες 4)

δ. Υποθέτουμε τώρα ότι, την ίδια στιγμή που το μυρμήγκι ξεκινάει την πορεία του, από το άλλο άκρο του κλαδιού μία αράχνη ξεκινάει και αυτή προς την αντίθετη κατεύθυνση και με τον ακόλουθο τρόπο: Το $1^\text{ο}$ λεπτό προχωράει $1\ \text{cm}$, το $2^\text{ο}$ λεπτό προχωράει $2\ \text{cm}$, το $3^\text{ο}$ λεπτό προχωράει $4\ \text{cm}$ και, γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση διπλάσια από αυτήν που διήνυσε το προηγούμενο λεπτό.

i) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει η αράχνη κάθε λεπτό της κίνησής της, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να βρείτε τον ν-οστό όρο β_ν αυτής της προόδου. (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι και η αράχνη θα βρεθούν αντιμέτωπα σε απόσταση $1\ \text{cm}$. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α. Αφού το μυρμήγκι κάθε λεπτό διανύει απόσταση κατά $2\ \text{cm}$ μεγαλύτερη, οι αποστάσεις που διανύει κάθε λεπτό το μυρμήγκι είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ με διαφορά $\omega = 2$ και πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$.

Συνεπώς: $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 1 + (\nu-1)\cdot 2 = 2\nu - 1, \nu \in \mathbb{N}^*$.

β. Αν $S_\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ είναι η συνολική απόσταση που διένυσε η αράχνη,

θα ισχύει $S_\nu = \frac{2\alpha_1 + (\nu-1)\omega}{2}\cdot\nu = \frac{2\cdot 1 + (\nu-1)\cdot 2}{2}\cdot\nu = \nu^2, \nu \in \mathbb{N}^*$.

Συνεπώς: $S_5 = 5^2 = 25$, άρα τα πέντε πρώτα λεπτά της κίνησης κάλυψε $25\ \text{cm}$.

γ. Αναζητούμε $\nu \in \mathbb{N}^*$ έτσι ώστε $S_\nu = 100$ ($1\ \text{m} = 100\ \text{cm}$, άρα

$$\frac{2\cdot 1+(\nu-1)\cdot 2}{2}\cdot \nu = 100 \Leftrightarrow (1+\nu-1)\cdot \nu = 100 \Leftrightarrow \nu^2 = 100 \Leftrightarrow \nu = 10,$$

αφού $\nu \in \mathbb{N}^*$, οπότε σε **10** λεπτά θα φτάσει στο άλλο άκρο του κλαδιού.

δ.

i) Αφού η αράχνη κάθε λεπτό διανύει διπλάσια απόσταση από την απόσταση που διήνυσε το προηγούμενο λεπτό, οι αποστάσεις που διανύει κάθε λεπτό είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου $\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ με λόγο $\lambda = 2$ και πρώτο όρο $\beta_1 = 1$.

Συνεπώς: $\beta_\nu = \beta_1 \cdot \lambda^{\nu-1} = 2^{\nu-1}, \nu \in \mathbb{N}^*$.

ii) Αν $\Sigma_\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ είναι η συνολική απόσταση που διένυσε η αράχνη,

θα ισχύει $\Sigma_\nu = \beta_1 \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} = 2^\nu - 1, \nu \in \mathbb{N}^*$.

Το μυρμήγκι και η αράχνη θα βρεθούν σε απόσταση **1 cm**, όταν το άθροισμα των αποστάσεων που θα έχει διανύσει το καθένα είναι **99 cm**.

$\nu \in \mathbb{N}^*$	S_ν	Σ_ν	Σύνολο
1	1	1	2
2	4	3	7
3	9	7	16
4	16	15	31
5	25	31	56
6	36	63	99
7	49	127	176

Συνεπώς στα **6** λεπτά η απόσταση μυρμηγκιού αράχνης θα είναι **1 cm**.

188. **GI_A_ALG_4_4647**

Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (\lambda+1)x^2 - (\lambda+1)x + 2$, με $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$. (Μονάδες 3)

β. Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 4)

γ. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2,0)$, να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο. (Μονάδες 8)

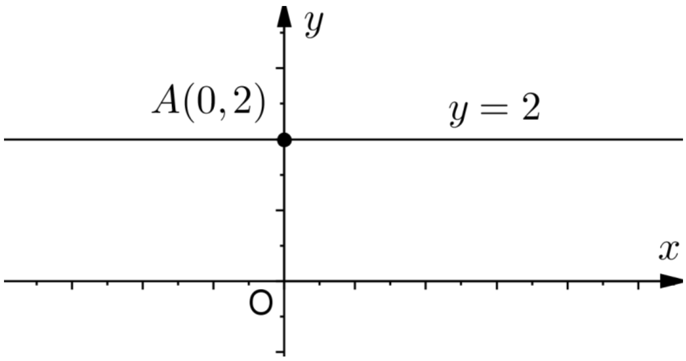
δ. Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $A_f = \mathbb{R}$.

Ισχύει ότι: $f(0) = (\lambda+1)\cdot 0^2 - (\lambda+1)\cdot 0 + 2 = 2$, οπότε η γραφική παράσταση της $\mathbf{f}$ διέρχεται από το σημείο $\mathbf{A}(0,2)$ αφού το σημείο αυτό επαληθεύει την εξίσωση της ευθείας.

β. Για $\lambda=-1$ έχουμε ότι $\mathbf{f(x)=(-1+1)\cdot x^2-(-1+1)\cdot x+2=2}$,
οπότε η γραφική παράσταση της f είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα $\mathbf{x'x}$ που διέρχεται από το σημείο $\mathbf{A}$ και η γραφική της παράσταση είναι:



γ. Αφού η γραφική παράσταση της $\mathbf{f}$ τέμνει τον άξονα $\mathbf{x'x}$ στο σημείο $\mathbf{B}(2,0)$, άρα διέρχεται από αυτό και επομένως θα ισχύει $\mathbf{f(2)=0}$, οπότε,
$\mathbf{(\lambda+1)\cdot 2^2-(\lambda+1)\cdot 2+2=0 \Leftrightarrow 4\lambda+4-2\lambda-2+2=0 \Leftrightarrow}$
$\mathbf{2\lambda=-4 \Leftrightarrow \lambda=-2}$.

δ. Για $\lambda=1$ έχουμε ότι $\mathbf{f(x)=(1+1)\cdot x^2-(1+1)\cdot x+2=2x^2-2x+2}$.
Το τριώνυμο $\mathbf{2x^2-2x+2}$ έχει διακρίνουσα $\mathbf{\Delta=(-2)^2-4\cdot 2\cdot 2=-4<0}$, άρα το τριώνυμο είναι ομόσημο του α και επειδή είναι $\mathbf{\alpha=2>0}$
τότε $\mathbf{2x^2-2x+2>0 \Leftrightarrow f(x)>0}$ για κάθε $\mathbf{x\in\mathbb{R}}$, δηλαδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{f}$ βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $\mathbf{x'x}$.

189. **GI_A_ALG_4_4654**

α. Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση $\mathbf{x^4-7x^2+12=0}$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β. Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $\mathbf{x^4+\beta x^2+\gamma=0}$ (1) με παραμέτρους, $\mathbf{\beta,\gamma\in\mathbb{R}}$.
Να δείξετε ότι: Αν $\mathbf{\beta<0}$, $\mathbf{\gamma>0}$ και $\mathbf{\beta^2-4\gamma>0}$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α. Είναι $\mathbf{x^4-7x^2+12=0 \Leftrightarrow (x^2)^2-7x^2+12=0}$ $\quad$ **(2)** .Θέτοντας
$\mathbf{x^2=\omega\ ,\ \omega\geq 0}$ η εξίσωση (2) ανάγεται στην εξίσωση:
$\mathbf{\omega^2-7\omega+12=0\quad ,\omega\geq 0}$.
Το τριώνυμο $\mathbf{\omega^2-7\omega+12}$ έχει διακρίνουσα

$\Delta = 7^2 - 4\cdot 1\cdot 12 = 1$ και ρίζες $\omega_{1,2} = \dfrac{-(-7)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1} = \begin{cases} \omega_1 = \dfrac{7+1}{2} = 4 > 0 \\ \text{ή} \\ \omega_2 = \dfrac{7-1}{2} = 3 > 0 \end{cases}$.

Συνεπώς:

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0 \overset{x^2=\omega\geq 0}{\Leftrightarrow} \omega^2 - 7\omega + 12 = 0 \Leftrightarrow (\omega = 3 \text{ ή } \omega = 4) \Leftrightarrow$$
$$(x^2 = 3 \text{ ή } x^2 = 4) \Leftrightarrow (x = -\sqrt{3} \text{ ή } x = \sqrt{3}) \text{ ή } (x = 2 \text{ ή } x = -2).$$

Συνεπώς η διτετράγωνη εξίσωση $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ έχει τέσσερις πραγματικές ρίζες τις : $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$, $x = 2$, $x = -2$.

β. Η εξίσωση $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, θέτοντας $x^2 = \omega$, $\omega \geq 0$ ανάγεται στην εξίσωση $\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0$. Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα του τριωνύμου, $\Delta = \beta^2 - 4\gamma > 0$ και επομένως η εξίσωση $\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, τις $\omega_1 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}$ ή $\omega_2 = \dfrac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}$.

- Αφού $\beta < 0 \Rightarrow -\beta > 0$, έχουμε ότι $\omega_1 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2} > 0$.
- Επίσης αφού $\beta < 0$, έχουμε ότι, $-\beta > 0$, οπότε θα είναι $\omega_2 > 0$ αν και μόνο αν:

$$-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma} > 0 \Leftrightarrow -\beta > \sqrt{\beta^2 - 4\gamma} \Leftrightarrow (-\beta)^2 > \left(\sqrt{\beta^2 - 4\gamma}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\beta^2 > \beta^2 - 4\gamma \Leftrightarrow 4\gamma > 0 \Leftrightarrow \gamma > 0$$

το οποίο ισχύει από υπόθεση, άρα ισχύει και ότι $-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma} > 0$.

Συνεπώς: $\omega_2 = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2} > 0$.

Τότε:

$$x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0 \overset{x^2=\omega\geq 0}{\Leftrightarrow} \omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2} \Leftrightarrow$$
$$x^2 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2} \text{ ή } x^2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2} \Leftrightarrow$$
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}} \text{ ή } x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}}$$

Συνεπώς η διτετράγωνη εξίσωση $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ έχει τέσσερις ρίζες, τις

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}} \text{ ή } x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}}.$$

190. **GI_A_ALG_4_4656**

Δίνονται η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=x^2+x+1, x\in\mathbb{R}}$

α. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση $\mathbf{C_f}$ της συνάρτησης $\mathbf{f}$ δεν τέμνει τον άξονα $\mathbf{x'x}$. (Μονάδες 5)

β. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της $\mathbf{C_f}$ που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $\mathbf{y=2x+3}$. (Μονάδες 10)

γ. Έστω $\mathbf{M(x,y)}$ σημείο της $\mathbf{C_f}$. Αν για την τετμημένη $\mathbf{x}$ του σημείου $\mathbf{M}$ ισχύει: $\mathbf{|2x-1|<3}$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $\mathbf{y=2x+3}$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Η συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι ορισμένη στο $\mathbf{A_f}=\mathbb{R}$.

Το τριώνυμο $\mathbf{x^2+x+1}$ έχει διακρίνουσα $\mathbf{\Delta=1^2-4\cdot1\cdot1=-3<0}$, οπότε το τριώνυμο είναι μονίμως ομόσημο του $\mathbf{\alpha=1>0}$, δηλαδή: $\mathbf{x^2+x+1>0\Leftrightarrow f(x)>0}$, οπότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{f}$ δεν τέμνει τον άξονα $\mathbf{x'x}$.

β. Η $\mathbf{C_f}$ βρίσκεται κάτω από την ευθεία $\mathbf{y=2x+3}$ για τα $\mathbf{x\in\mathbb{R}}$ για τα οποία ισχύει :

$$\mathbf{f(x)<2x+3\Leftrightarrow x^2+x+1<2x+3\Leftrightarrow x^2-x-2<0\Leftrightarrow -1<x<2},$$

αφού το τριώνυμο $\mathbf{x^2-x-2}$ έχει διακρίνουσα

$\mathbf{\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)=9>0}$, $\mathbf{\alpha=1>0}$ και ρίζες

$$\mathbf{x_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2\cdot1}=\begin{cases}x_1=\dfrac{1+3}{2}=2\\ \text{ή}\\ x_2=\dfrac{1-3}{2}=-1\end{cases}},$$

άρα ισχύει

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		+	0	−	0	+	

Συνεπώς οι τετμημένες των σημείων της $\mathbf{C_f}$ που βρίσκονται κάτω από την ευθεία με εξίσωση $\mathbf{y=2x+3}$ ανήκουν στο διάστημα $\mathbf{(-1,2)}$.

γ. Για $\mathbf{x\in\mathbb{R}}$ έχουμε:

$$\mathbf{|2x-1|<3\Leftrightarrow -3<2x-1<3\Leftrightarrow -2<2x<4\Leftrightarrow -1<x<2},$$

δηλαδή το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία με εξίσωση $\mathbf{y=2x+3}$ (λόγω του (β) ερωτήματος).

191. **GI_A_ALG_4_4657**

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f}$, με $\mathbf{f(x)=\begin{cases}-x+2, & \text{αν } x<0\\ x+2, & \text{αν } x\geq0\end{cases}}$.

α. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 3)

β.

i) Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y = 3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους. (Μονάδες 5)

ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

γ.

i) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η ευθεία $y = \alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = \alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

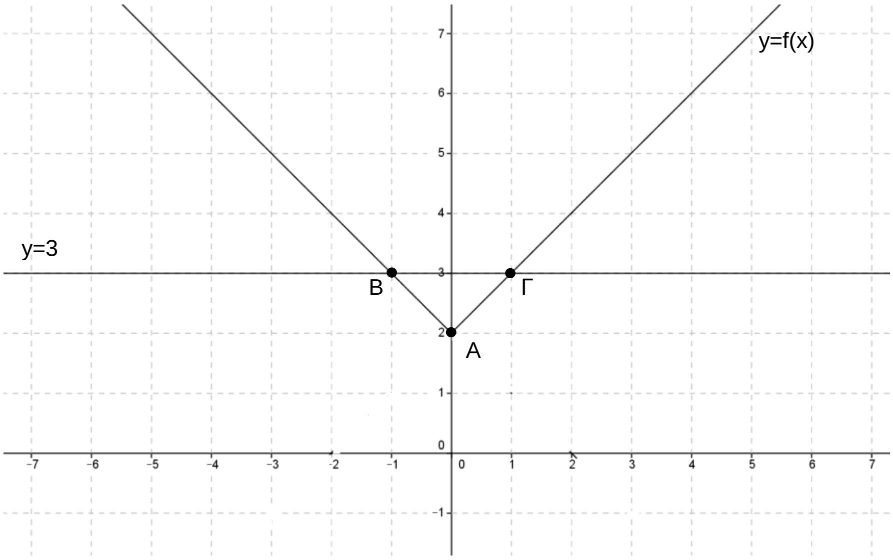
α. Έχουμε ότι: $f(0) = 0 + 2 = 2$, δηλαδή η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,2)$.

β.

i) Για $x < 0$ έχουμε ότι η γραφική παράσταση της f είναι ημιευθεία AB χωρίς την αρχή της A, όπου $A(0,2)$ και $B(-1,3)$.

Για $x \geq 0$ έχουμε ότι η γραφική παράσταση της f είναι η ημιευθεία $A\Gamma$ με $\Gamma(1,3)$.

Η ευθεία με εξίσωση $y = 3$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από τα σημεία B, Γ.



Τα σημεία τομής τους είναι τα $B(-1,3)$ και $\Gamma(1,3)$.

ii) Τα σημεία $\mathbf{B}$ και $\mathbf{\Gamma}$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $\mathbf{y'y}$, αφού έχουν αντίθετες τετμημένες και ίσες τεταγμένες.

γ.

i) Η ευθεία με εξίσωση $\mathbf{y=\alpha}$ τέμνει τη $\mathbf{C_f}$ σε δύο σημεία για κάθε $\mathbf{\alpha>2}$.

ii) Από το σχήμα παρατηρούμε ότι είναι $\mathbf{f(x)=y\geq 2}$ για κάθε $\mathbf{x\in\mathbb{R}}$. Επομένως η ευθεία με εξίσωση $\mathbf{y=\alpha}$ τέμνει τη $\mathbf{C_f}$ σε δύο σημεία για κάθε $\mathbf{\alpha>2}$ αφού για $\mathbf{\alpha=2}$ την τέμνει σε ένα, ενώ για $\mathbf{\alpha<2}$ δεν την τέμνει σε κανένα σημείο.

iii) Επειδή ισχύει $|\mathbf{x}|=\begin{cases}\mathbf{-x\ ,\ \alpha\nu\ x<0}\\ \mathbf{x\ ,\ \ \alpha\nu\ x\geq 0}\end{cases}$ έχουμε ότι: $\mathbf{f(x)=|x|+2}$.

Αναζητούμε τα $\mathbf{\alpha\in\mathbb{R}}$ έτσι ώστε η εξίσωση $\mathbf{f(x)=\alpha}$ να έχει δύο λύσεις.

Συνεπώς:

$\mathbf{f(x)=\alpha\Leftrightarrow|x|+2=\alpha\Leftrightarrow|x|=\alpha-2}$ **(I)**. Επειδή $\mathbf{|x|\geq 0}$, έχουμε ότι:

- Αν $\mathbf{\alpha-2<0\Leftrightarrow\alpha<2}$, η εξίσωση (I) είναι αδύνατη.
- Αν $\mathbf{\alpha-2=0\Leftrightarrow\alpha=2}$, η εξίσωση (I) έχει μοναδική λύση $\mathbf{x=0}$.
- Αν $\mathbf{\alpha-2>0\Leftrightarrow\alpha>2}$, η εξίσωση (I) έχει δύο λύσεις, τις $\mathbf{x=\alpha-2}$ **ή** $\mathbf{x=-(\alpha-2)=-\alpha+2}$.

192. **GI_A_ALG_4_4659**

Δίνεται η εξίσωση: $\mathbf{\alpha x^2-5x+\alpha=0}$, με παράμετρο $\mathbf{\alpha\neq 0}$.

α. Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha|\leq\frac{5}{2}$ τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς, που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους. (Μονάδες 10)

β. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν $\mathbf{\alpha=2}$. (Μονάδες 5)

γ. Να λύσετε την εξίσωση: $\mathbf{2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0}$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε ότι:

$$|\alpha|\leq\frac{5}{2}\Leftrightarrow|\alpha|^2\leq\left(\frac{5}{2}\right)^2\Leftrightarrow\alpha^2\leq\frac{25}{4}\Leftrightarrow 4\alpha^2\leq 25\Leftrightarrow 25-4\alpha^2\geq 0\ \ (1)$$

Το τριώνυμο $\mathbf{\alpha x^2-5x+\alpha}$ $(\mathbf{\alpha\neq 0})$ έχει διακρίνουσα $\mathbf{\Delta=(-5)^2-4\alpha\cdot\alpha=25-4\alpha^2\geq 0}$ από την (1). Οπότε η εξίσωση $\mathbf{\alpha x^2-5x+\alpha=0}$ έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς.

Αν $\mathbf{x_1,x_2}$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\mathbf{\alpha x^2-5x+\alpha=0}$, τότε το γινόμενο των ριζών θα είναι $\mathbf{P=x_1\cdot x_2=\frac{\alpha}{\alpha}=1}$, δηλαδή οι ρίζες $\mathbf{x_1,x_2}$ είναι αντίστροφες.

β. Αν $\mathbf{\alpha=2}$ η εξίσωση είναι η $\mathbf{2x^2-5x+2=0}$ και έχει διακρίνουσα $\mathbf{\Delta=25-4\cdot 2^2=9>0}$. Επομένως η εξίσωση $\mathbf{2x^2-5x+2=0}$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, τις $\mathbf{x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\begin{cases}\frac{5+3}{4}=2\\ ή\\ \frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}\end{cases}}$.

γ. Για $x \neq 0$, έχουμε:

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0 \overset{\omega=x+\frac{1}{x}}{\Leftrightarrow} 2\omega^2-5\omega+2=0 \Leftrightarrow \left(\omega=2 \ \text{ή} \ \omega=\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{1}{x}=2 \ \text{ή} \ x+\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left(x^2+1=2x \ \text{ή} \ 2x^2+2=x\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(x^2-2x+1=0 \ \text{ή} \ 2x^2-x+2=0\right) \Leftrightarrow \left((x-1)^2=0 \ \text{ή} \ 2x^2-x+2=0\right) \Leftrightarrow x=1$$ αφού το τριώνυμο $2x^2-x+2$ έχει αρνητική διακρίνουσα.

193. **GI_A_ALG_4_4660**

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, με $f(x)=x^2-2x$ και $g(x)=3x-4, x\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. (Μονάδες 5)

β. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g. (Μονάδες 10)

γ. Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y=\alpha$, $\alpha<-1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Οι συναρτήσεις f, g έχουν πεδίο ορισμού $A_f=A_g=\mathbb{R}$.

Για $x\in\mathbb{R}$, έχουμε:

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-2x=3x-4\Leftrightarrow x^2-5x+4=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=4$,

αφού το τριώνυμο x^2-5x+4 έχει διακρίνουσα $\Delta=(-5)^2-4\cdot4=9>0$ και ρίζες

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2\cdot1}=\frac{5\pm3}{2}=\begin{cases} x_1=4 \\ \text{ή} \\ x_2=1 \end{cases}.$$

Συνεπώς τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι τα $A(1,f(1))=(1,-1)$ και $B(4,f(4))=(4,8)$, αφού $f(1)=g(1)=-1$ και $f(4)=g(4)=8$.

β. Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g λύνουμε την ανίσωση $f(x)<g(x), x\in\mathbb{R}$, έχουμε: $f(x)<g(x)\Leftrightarrow x^2-5x+4<0$. Επομένως $x\in(1,4)$ αφού,

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
x^2-5x+4		+	0	−	0	+	

γ. Για να βρίσκεται κάθε ευθεία της μορφής $\mathbf{y=\alpha}$, $\mathbf{\alpha<-1}$, κάτω από τη γραφική παράσταση της $\mathbf{f}$ αρκεί να ισχύει $\mathbf{f(x)>\alpha}$ για κάθε $\mathbf{\alpha<-1}$.

Επομένως:

$\mathbf{x^2-2x>\alpha \Leftrightarrow x^2-2x-\alpha>0}$, η οποία ισχύει αφού το τριώνυμο $\mathbf{x^2-2x-\alpha}$ έχει διακρίνουσα $\mathbf{\Delta=(-2)^2-4(-\alpha)=4+4\alpha=4(1+\alpha)<0}$ για κάθε $\mathbf{\alpha<-1 \Leftrightarrow \alpha+1<0}$

Συνεπώς κάθε ευθεία με εξίσωση $\mathbf{y=\alpha}$, $\mathbf{\alpha<-1}$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{f}$.

194. **GI_A_ALG_4_4663**

Δίνεται η εξίσωση $\mathbf{(x-2)^2=\lambda(4x-3)}$ με παράμετρο $\mathbf{\lambda\in\mathbb{R}}$.

α. Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή $\mathbf{\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0}$. (Μονάδες 5)

β. Να βρείτε για ποιές τιμές του $\mathbf{\lambda}$ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 10)

γ. Αν $\mathbf{x_1,x_2}$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης, στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες,

i) να υπολογίσετε τα $\mathbf{S=x_1+x_2}$ και $\mathbf{P=x_1x_2}$.

ii) να αποδείξετε ότι η παράσταση $\mathbf{A=(4x_1-3)(4x_2-3)}$ είναι ανεξάρτητη του $\mathbf{\lambda}$, δηλαδή σταθερή. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Είναι: $\mathbf{(x-2)^2=\lambda(4x-3)\Leftrightarrow x^2-4x+4=4\lambda x-3\lambda \Leftrightarrow}$

$\mathbf{x^2-4x+4-4\lambda x+3\lambda=0 \Leftrightarrow x^2-4(1+\lambda)x+4+3\lambda=0}$, η οποία είναι στη μορφή $\mathbf{\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0}$ με $\mathbf{\alpha=1\neq 0}$, $\mathbf{\beta=-4(1+\lambda)}$ και $\mathbf{\gamma=4+3\lambda}$.

β. Το τριώνυμο $\mathbf{x^2-4(1+\lambda)x+4+3\lambda}$ έχει διακρίνουσα:

$$\mathbf{\Delta=[-4(\lambda+1)]^2-4\cdot(4+3\lambda)=16(\lambda+1)^2-4(4+3\lambda)=4[4(\lambda^2+2\lambda+1)-(4+3\lambda)]=}$$
$$\mathbf{=4(4\lambda^2+8\lambda+4-4-3\lambda)=4(4\lambda^2+5\lambda)}$$

Το τριώνυμο $\mathbf{4\lambda^2+5\lambda}$ έχει διακρίνουσα $\mathbf{\Delta=5^2-4\cdot4\cdot0=25}$ και ρίζες

$$\mathbf{\lambda_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25}}{2\cdot4}=\frac{-5\pm5}{8}=\begin{cases}\frac{-5+5}{8}=0\\ ή\\ \frac{-5-5}{8}=-\frac{5}{4}\end{cases}}$$, ενώ ισχύει

λ	$-\infty$	$-\frac{5}{4}$		0	$+\infty$
$4(4\lambda^2+5\lambda)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Η εξίσωση $\mathbf{x^2-4(1+\lambda)x+4+3\lambda=0}$ (1), έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, όταν

$\mathbf{\Delta>0\Leftrightarrow 4(4\lambda^2+5\lambda)>0\Leftrightarrow \lambda<-\frac{5}{4}}$ **ή** $\mathbf{\lambda>0}$.

γ.

i) Για $\lambda < -\frac{5}{4}$ ή $\lambda > 0$ η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες και πραγματικές ρίζες x_1, x_2, με άθροισμα $S = x_1 + x_2 = -\frac{-4(1+\lambda)}{1} = 4(1+\lambda)$ και γινόμενο

$$P = x_1 x_2 = \frac{4+3\lambda}{1} = 4 + 3\lambda$$

ii) Για $\lambda < -\frac{5}{4}$ ή $\lambda > 0$ έχουμε ότι:

$$A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3) = 16x_1x_2 - 12x_1 - 12x_2 + 9 = 16x_1x_2 - 12(x_1 + x_2) + 9 = 16P - 12S + 9$$
$$= 16(4+3\lambda) - 12 \cdot 4(1+\lambda) + 9 = 64 + 48\lambda - 48 - 48\lambda + 9 = 25$$

που είναι ανεξάρτητη του λ.

195. **GI_A_ALG_4_4665**

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0 \ (1)$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1). (Μονάδες 5)

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Είναι $\Delta = (-\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot [-(\lambda^2 + 5)] = \lambda^2 + 4 \cdot (\lambda^2 + 5) = \lambda^2 + 4\lambda^2 + 20 = 5\lambda^2 + 20$

β. Έχουμε $\Delta = 5\lambda^2 + 20 > 0$, αφού $5\lambda^2 \geq 0$ και $20 > 0$, οπότε η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ. Είναι x_1, x_2 οι δύο άνισες και πραγματικές ρίζες. Από τους τύπους του **Vieta** έχουμε ότι:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{-\lambda}{1} = \lambda \text{ και } P = x_1 x_2 = \frac{-(\lambda^2 + 5)}{1} = -(\lambda^2 + 5)$$

Συνεπώς:

$$(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4 \Leftrightarrow x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4 = -4 \Leftrightarrow x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow P - 2S + 8 = 0 \Leftrightarrow -(\lambda^2 + 5) - 2\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -3$$

αφού το τριώνυμο $-\lambda^2 - 2\lambda + 3$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-2)^2 - 4(-1) \cdot 3 = 16$ και ρίζες

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \frac{2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \frac{2+4}{-2} = -3 \\ \text{ή} \\ \frac{2-4}{-2} = 1 \end{cases}.$$

196. **GI_A_ALG_4_4667**

α. Να λύσετε την εξίσωση: $\mathbf{x^2-3x-4=0}$ $\mathbf{(1)}$. (Μονάδες 10)

β. Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ για τους οποίους ισχύει:

$\boldsymbol{\alpha^2-3\alpha\beta-4\beta^2=0}$.

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\dfrac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1). (Μονάδες 7)

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο $\boldsymbol{\alpha}$ είναι τετραπλάσιος του $\boldsymbol{\beta}$. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α. Το τριώνυμο $\mathbf{x^2-3x-4}$ έχει διακρίνουσα $\mathbf{\Delta=(-3)^2-4(-4)\cdot 1=25}$

και ρίζες $$x_{1,2}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm 5}{2}=\begin{cases}\dfrac{3+5}{2}=4\\ \text{ή}\\ \dfrac{3-5}{2}=-1\end{cases}.$$

Συνεπώς $\mathbf{x^2-3x-4=0\Leftrightarrow x=4}$ ή $\mathbf{x=-1}$.

β.

i) Θέτουμε όπου $x=\dfrac{\alpha}{\beta}$ στο τριώνυμο $\mathbf{x^2-3x-4}$, και έχουμε ότι:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-3\frac{\alpha}{\beta}-4=\frac{\alpha^2}{\beta^2}-3\frac{\alpha\beta}{\beta^2}-\frac{4\beta^2}{\beta^2}=\frac{\alpha^2-3\alpha\beta-4\beta^2}{\beta^2}=\frac{0}{\beta^2}=0,$$

άρα ο αριθμός $\dfrac{\alpha}{\beta}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $\mathbf{x^2-3x-4=0}$.

ii) Αφού ο αριθμός $\dfrac{\alpha}{\beta}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $\mathbf{x^2-3x-4=0}$, από το (α) ερώτημα έχουμε ότι: $\dfrac{\alpha}{\beta}=4$ ή $\dfrac{\alpha}{\beta}=-1$.

Όμως οι αριθμοί $\boldsymbol{\alpha,\beta}$ είναι ομόσημοι, οπότε η περίπτωση $\dfrac{\alpha}{\beta}=-1$ απορρίπτεται αφού το κλάσμα δύο ομόσημων αριθμών είναι πάντα θετικός αριθμός, άρα δε μπορεί να ισούται με -1. Συνεπώς ισχύει $\dfrac{\alpha}{\beta}=4\Leftrightarrow\alpha=4\beta$, δηλαδή ο $\boldsymbol{\alpha}$ είναι τετραπλάσιος του $\boldsymbol{\beta}$.

197. **GI_A_ALG_4_4671**

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha_{20}-\alpha_{10}=10\omega$. (Μονάδες 6)

β. Αν $\alpha_{20}-\alpha_{10}=30$ και $\alpha_1=1$, να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu=3\nu-2$. (Μονάδες 6)

γ. Ποιος είναι ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνάει το 30; (Μονάδες 7)

δ. Πόσοι όροι της παραπάνω προόδου είναι μικρότεροι του 60; (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α. Αφού η $\alpha_\nu, \nu\in\mathbb{N}^*$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω, έχουμε ότι:

$$\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega, \nu\in\mathbb{N}^*.$$

Συνεπώς:

$$\alpha_{20}-\alpha_{10}=(\alpha_1+19\omega)-(\alpha_1+9\omega)=\alpha_1+19\omega-\alpha_1-9\omega=10\omega.$$

β. Αφού $\alpha_{20}-\alpha_{10}=30$, από το (α) ερώτημα έχουμε: $10\omega=30\Leftrightarrow\omega=3$.
Επιπλέον $\alpha_1=1$, οπότε $\alpha_\nu=1+(\nu-1)\cdot 3=3\nu-2, \nu\in\mathbb{N}^*$.

γ. Αναζητούμε τον μικρότερο $\nu\in\mathbb{N}^*$ έτσι ώστε $\alpha_\nu>30$.
Συνεπώς:

$$3\nu-2>30\Leftrightarrow 3\nu>32\Leftrightarrow \nu>\frac{32}{3}\Leftrightarrow \nu>10+\frac{2}{3},$$

άρα ο $11^{ος}$ όρος ξεπερνά το 30.

δ. Αναζητούμε τον μεγαλύτερο $\nu\in\mathbb{N}^*$ έτσι ώστε $\alpha_\nu<60$.
Συνεπώς:

$3\nu-2<60\Leftrightarrow 3\nu<62\Leftrightarrow \nu<\frac{62}{3}\Leftrightarrow \nu<20+\frac{2}{3}$, άρα οι 20 πρώτοι όροι είναι μικρότεροι του 60.

198. **GI_A_ALG_4_4679**

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\sqrt{x^2-x+\frac{\alpha}{4}}$

α. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το πεδίο ορισμού τη συνάρτησης f να είναι το σύνολο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β. Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας. (Μονάδες 7)

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α. Η συνάρτηση $\mathbf{f}$ ορίζεται όταν $\mathbf{x^2 - x + \frac{\alpha}{4} \geq 0}$.

Για να ορίζεται η συνάρτηση $\mathbf{f}$ στο $\mathbb{R}$, πρέπει η ανίσωση $\mathbf{x^2 - x + \frac{\alpha}{4} \geq 0}$ να ισχύει για κάθε $\mathbf{x \in \mathbb{R}}$, δηλαδή θα πρέπει η διακρίνουσα του τριωνύμου να είναι μη θετική.

Συνεπώς πρέπει:

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{\alpha}{4} \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 1.$$

β.

i) Αν $\boldsymbol{\alpha \geq 1}$, η γραφική παράσταση της $\mathbf{f}$ διέρχεται από το σημείο $\mathbf{A\left(0, \frac{1}{2}\right)}$, οπότε:

$$f(0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{0^2 - 0 + \frac{\alpha}{4}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\alpha}{4}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha = 1,$$ που είναι δεκτή.

Για $\boldsymbol{\alpha = 1}$, έχουμε:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \left|x - \frac{1}{2}\right|.$$

ii) $\mathbf{f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}}$ ή $\mathbf{x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1}$ ή $\mathbf{x = 0}$.

199. **GI_A_ALG_4_4680**

Δίνεται η εξίσωση: $\mathbf{x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0}$ με παράμετρο $\boldsymbol{\lambda \in \mathbb{R}}$ $\quad (1)$

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα $\boldsymbol{\Delta}$ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\boldsymbol{\lambda \in \mathbb{R}}$ (Μονάδες 10)

β. Για ποια τιμή του $\boldsymbol{\lambda}$ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ. Αν $\mathbf{x_1, x_2}$ είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιε τιμές του $\boldsymbol{\lambda}$ ισχύει $\mathbf{0 < d(x_1, x_2) < 2}$. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α. $\mathbf{\Delta = 1 - 4(\lambda - \lambda^2) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0}$.

Επομένως αφού $\mathbf{\Delta \geq 0}$ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\boldsymbol{\lambda \in \mathbb{R}}$.

β. Για να έχει η εξίσωση (1) δύο ρίζες ίσες πρέπει $\mathbf{\Delta = 0}$. Έχουμε λοιπόν:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

γ. Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι $\mathbf{x_1 = \frac{1 + (2\lambda - 1)}{2}}$, $\mathbf{x_2 = \frac{1 - (2\lambda - 1)}{2}}$.

Επομένως $\mathbf{d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| = \left|\frac{1 + (2\lambda - 1)}{2} - \frac{1 - (2\lambda - 1)}{2}\right| = |2\lambda - 1|}$

Όμως $\mathbf{0 < d(x_1, x_2) < 2 \Leftrightarrow 0 < |x_1 - x_2| < 2 \Leftrightarrow 0 < |2\lambda - 1| < 2}$

Είναι $|2\lambda-1|\geq 0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, άρα $|2\lambda-1|>0$ για κάθε $\lambda\neq\frac{1}{2}$ αφού είναι

$|2\lambda-1|=0$ όταν $2\lambda-1=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{2}$. Επίσης,

$$|2\lambda-1|<2\Leftrightarrow -2<2\lambda-1<2\Leftrightarrow -1<2\lambda<3\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<\lambda<\frac{3}{2}.$$

Άρα $\lambda\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

200. **GI_A_ALG_4_4681**

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-x+\lambda-\lambda^2=0$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$ $\quad(1)$

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχε ρίζες

πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ (Μονάδες 10)

β. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ. Αν $\lambda\neq\frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $d(x_1,x_2)=\frac{1}{d(x_1,x_2)}$. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α. $\Delta=1-4(\lambda-\lambda^2)=4\lambda^2-4\lambda+1=(2\lambda-1)^2\geq 0$. Επομένως, αφού $\Delta\geq 0$ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β. Για να έχει η εξίσωση (1) δύο ρίζες ίσες πρέπει

$$\Delta=0\Leftrightarrow(2\lambda-1)^2=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{2}.$$

γ. Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι $x_1=\frac{1+(2\lambda-1)}{2}$, $\quad x_2=\frac{1-(2\lambda-1)}{2}$.

Επομένως

$$d(x_1,x_2)=|x_1-x_2|=\left|\frac{1+(2\lambda-1)}{2}-\frac{1-(2\lambda-1)}{2}\right|=|2\lambda-1|$$

Άρα για $\lambda\neq\frac{1}{2}$ έχουμε:

$$d(x_1,x_2)=\frac{1}{d(x_1,x_2)}\Leftrightarrow|2\lambda-1|=\frac{1}{|2\lambda-1|}\Leftrightarrow|2\lambda-1|^2=1\Leftrightarrow|2\lambda-1|=1 \text{ ή } |2\lambda-1|=-1$$

αδύνατη αφού $|2\lambda-1|\geq 0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Επομένως $|2\lambda-1|=1\Leftrightarrow 2\lambda-1=1$ ή $2\lambda-1=-1$. Δηλαδή $\lambda=1$ ή $\lambda=0$.

201. **GI_A_ALG_4_4682**

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 10)

β. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ. Να βρείτε το λ, ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \lambda - \lambda^2}$ να είναι το σύνολο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α. $\Delta = 1 - 4(\lambda - \lambda^2) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0$. Επομένως αφού $\Delta \geq 0$ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Για να έχει η εξίσωση (1) δύο ρίζες ίσες πρέπει

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

γ. Θα πρέπει $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως θα πρέπει $\Delta \leq 0$. Όμως $\Delta = 1 - 4(\lambda - \lambda^2) = (2\lambda - 1)^2 \geq 0$ και συνεπώς:

$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 \leq 0$ άρα αναγκαστικά $\lambda = \frac{1}{2}$.

202. **GI_A_ALG_4_4819**

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x + \lambda - \lambda^2$ με $\lambda \in \mathbb{R}$

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β. Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ. Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε:

i) Να δείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$. (Μονάδες 4)

ii) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς $f(x_2)$, $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$, $f(x_2 + 1)$. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α. $\Delta = 1 - 4(\lambda - \lambda^2) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0$. Επομένως αφού $\Delta \geq 0$ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Για να έχει η εξίσωση (1) δύο ρίζες ίσες πρέπει

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

γ.

i) $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2 \Leftrightarrow 2x_1 < x_1 + x_2 < 2x_2$, που προφανώς ισχύει αφού $2x_1 < x_1 + x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$ και $x_1 + x_2 < 2x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$ που ισχύει από υπόθεση.

ii) Αφού x_1, x_2 είναι δύο άνισες ρίζες, το πρόσημο του τριωνύμου είναι:

- $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ (Ετερόσημο του $\alpha = 1 > 0$)
- $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ (Ομόσημο του α)
- και $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Άρα αφού $x_1 < \dfrac{x_1 + x_2}{2} < x_2 \Rightarrow f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) < 0$

Επίσης $x_2 + 1 > x_2 \Rightarrow (x_2 + 1) \in (x_2, +\infty) \Rightarrow f(x_2 + 1) > 0$

Επομένως $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) < f(x_2) = 0 < f(x_2 + 1)$.

203. **GI_A_ALG_4_4833**

Μία υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x, να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από τη σχέση: $\lambda = (2x + 5)^2 - 8x \quad (1)$

α. Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το -5, ποιος είναι ο εξαγόμενος; (Μονάδες 6)

β. Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20, ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος; (Μονάδες 6)

γ. Να γράψετε τη σχέση (1) στη μορφή $4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$ και στη συνέχεια:

i) να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x, ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5. (Μονάδες 6)

ii) να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. Αν ο λοιπόν ο εισαγόμενος αριθμός $x = -5$ τότε:

$$\lambda = (2(-5) + 5)^2 - 8(-5) = (-5)^2 + 40 = 65.$$

β. Αν ο εξαγόμενος αριθμός $\lambda = 20$, τότε

$20 = (2x + 5)^2 - 8x \Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 5 = 0$. Το τριώνυμο $4x^2 + 12x + 5$ έχει

$\Delta = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 144 - 80 = 64 > 0$ και συνεπώς η εξίσωση

$4x^2 + 12x + 5 = 0$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, τις:

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 4} = \frac{-12 \pm 8}{8} \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2} \ \text{ή} \ x_2 = -\frac{5}{2}.$$

γ. Η σχέση (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$\lambda = (2x + 5)^2 - 8x \Leftrightarrow \lambda = 4x^2 + 12x + 25 \Leftrightarrow 4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$$

i) Αν $\lambda = 5$ τότε πράγματι η εξίσωση γίνεται

$4x^2 + 12x + 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 5 = 0$ που έχει $\Delta = -11 < 0$, δηλαδή είναι αδύνατη.

(Δεν επαληθεύεται για καμία τιμή του εισαγόμενου αριθμού $\mathbf{x}$)

ii) Για να επαληθεύεται για κάποια τιμή του εισαγόμενου αριθμού $\mathbf{x}$ η σχέση $\mathbf{4x^2+12x+(25-\lambda)=0}$ (Δηλαδή να έχει πραγματικές ρίζες η εξίσωση), θα πρέπει $\mathbf{\Delta \geq 0}$.

Επομένως $\mathbf{\Delta = 144-16(25-\lambda) = -256+16\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq 16}$.

204. **GI_A_ALG_4_4835**

Δίνεται η εξίσωση $\mathbf{x^2-\beta x+\gamma=0}$ με $\mathbf{\beta,\gamma}$ πραγματικούς αριθμούς.

Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $\mathbf{|x_1+x_2|=4}$, τότε:

α. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του $\mathbf{\beta}$. (Μονάδες 6)

β. Να αποδείξετε ότι $\mathbf{\gamma<4}$. (Μονάδες 7)

γ. Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $\mathbf{x^2-\beta|x|+3=0}$ (1)

Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του $\mathbf{\beta}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. Από τους τύπους **Vieta** παίρνουμε,

$$\mathbf{|x_1+x_2|=4 \Leftrightarrow |S|=4 \Leftrightarrow \left|\frac{-(-\beta)}{1}\right|=4 \Leftrightarrow |\beta|=4}.$$

Άρα $\mathbf{\beta=4}$ ή $\mathbf{\beta=-4}$.

β. Αφού η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, έχουμε

$$\mathbf{\Delta>0 \Rightarrow (-\beta)^2-4\gamma>0 \Rightarrow 4\gamma<\beta^2}$$

$$\mathbf{\Rightarrow 4\gamma<\beta^2 \Rightarrow 4\gamma<|\beta|^2 \Rightarrow 4\gamma<16 \Rightarrow \gamma<4}$$

γ. Είναι, $\mathbf{x^2-\beta|x|+3=0 \Leftrightarrow |x|^2-\beta|x|+3=0}$. Αν θέσουμε $\mathbf{|x|=\omega}$ η εξίσωση γίνεται $\mathbf{\omega^2-\beta\omega+3=0}$.

Για $\mathbf{\beta=4}$ έχουμε $\mathbf{\omega^2-4\omega+3=0}$ με $\mathbf{\Delta=4}$ και ρίζες $\mathbf{\omega_1=1}$ ή $\mathbf{\omega_2=3}$

Άρα $\mathbf{|x|=1 \Leftrightarrow x=\pm1}$ ή $\mathbf{|x|=3 \Leftrightarrow x=\pm3}$

Για $\mathbf{\beta=-4}$ έχουμε $\mathbf{\omega^2+4\omega+3=0}$ με $\mathbf{\Delta=4}$ και ρίζες $\mathbf{\omega_3=-1}$ ή $\mathbf{\omega_4=-3}$

Άρα $\mathbf{|x|=-1}$ αδύνατη ή $\mathbf{|x|=-3}$ αδύνατη.

Επομένως για $\mathbf{\beta=-4}$ η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

205. **GI_A_ALG_4_4836**

Δίνεται η εξίσωση $\mathbf{x^2-\lambda x+1=0}$ (1) με παράμετρο $\mathbf{\lambda \in \mathbb{R}}$.

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mathbf{\lambda}$ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 8)

β. Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης. (Μονάδες 5)

γ. Για $\lambda > 2$, να αποδείξετε ότι:

i) Οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.

ii) $x_1 + 4x_2 \geq 4$. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. Για να έχει η εξίσωση (1) ρίζες πραγματικές και άνισες, θα πρέπει $\Delta > 0$.
Είναι:

$$\Delta = \lambda^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 > 4 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2} > \sqrt{4} \Leftrightarrow |\lambda| > 2 \Leftrightarrow \lambda < -2 \text{ ή } \lambda > 2.$$

β. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), τότε επαληθεύει τη σχέση (1), δηλαδή

$\rho^2 - \lambda\rho + 1 = 0$. (2)

Ο αριθμός ρ είναι προφανώς διάφορος του μηδενός, γιατί διαφορετικά θα είχαμε $0 - 0 + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ το οποίο είναι άτοπο.

Ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει τη σχέση (1), αφού:

$\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 - \lambda\left(\frac{1}{\rho}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\rho^2} - \frac{\lambda}{\rho} + 1 = 0 \Leftrightarrow \rho^2 - \lambda\rho + 1 = 0$ που ισχύει από την (2)

γ.

i) Από τους τύπους **Vieta** παίρνουμε: $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$ και $x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = 1$

Επομένως για $\lambda > 2$ έχουμε $x_1 + x_2 > 0$ και $x_1 x_2 > 0$.

Δηλαδή οι ρίζες x_1, x_2 είναι ομόσημοι αριθμοί με άθροισμα θετικό.

Άρα οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί

ii) Αφού x_1, x_2 είναι αριθμοί θετικοί, έχουμε:

$x_1 + 4x_2 \geq 4 \Leftrightarrow (x_1 + 4x_2)^2 \geq 16 \Leftrightarrow x_1^2 + 8x_1x_2 + 16x_2^2 \geq 16$ (3)

Όμως $x_1 x_2 = 1$, άρα η (3) γράφεται ισοδύναμα

$x_1^2 + 8x_1x_2 + 16x_2^2 \geq 16x_1x_2 \Leftrightarrow x_1^2 - 8x_1x_2 + 16x_2^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x_1 - 4x_2)^2 \geq 0$, που ισχύει για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x_1, x_2.

206. **GI_A_ALG_4_4853**

Δίνεται το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$,με ρίζες τους αριθμούς 1 και 2.

α. Χρησιμοποιώντας τους τύπους για το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών του τριωνύμου, να αποδείξετε ότι: $\gamma = 2\alpha$ και $\beta = -3\alpha$. (Μονάδες 9)

β. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x \in (1,2)$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha < 0$. (Μονάδες 9)

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\gamma x^2 + \beta x + \alpha < 0$. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. Από τους τύπους **Vieta**, έχουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow 1 + 2 = -\frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \beta = -3\alpha$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow 1 \cdot 2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow \gamma = 2\alpha .$$

β.

i) Το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α, για κάθε x, που ανήκει εντός των ριζών. Αφού παίρνει θετικές τιμές εντός των ριζών, συμπεραίνουμε ότι: $\alpha < 0$.

ii) Είναι $\gamma x^2 + \beta x + \alpha < 0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow} 2\alpha x^2 - 3\alpha x + \alpha < 0 \overset{(:\alpha<0)}{\Leftrightarrow} 2x^2 - 3x + 1 > 0 \ (1)$

Η εξίσωση $2x^2 - 3x + 1 = 0$ έχει ρίζες $1, \frac{1}{2}$ και ισχύει:

- $2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ή $x = 1$
- $2x^2 - 3x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ ή $x > 1$
- $2x^2 - 3x + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 1$

Τελικά, $2x^2 - 3x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ ή $x > 1$.

207. **GI_A_ALG_4_4857**

Δίνεται η εξίσωση $\alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0$, όπου α, β δύο θετικοί αριθμοί.

α. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 - \beta^2)^2$. (Μονάδες 8)

β. Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών α, β, έτσι ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες, τις οποίες να προσδιορίσετε, ως συνάρτηση των α, β. (Μονάδες 10)

γ. Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1 = \frac{\alpha}{\beta}$ και $x_2 = \frac{\beta}{\alpha}$, τότε να αποδείξετε ότι: $(1 + x_1)(1 + x_2) \geq 4$. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. Η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης ισούται με:

$$\Delta = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha\beta\alpha\beta = \alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 - 4\alpha^2\beta^2 = \alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 = (\alpha^2 - \beta^2)^2 .$$

β. Η δευτεροβάθμια εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, αν και μόνο αν,

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (\alpha^2 - \beta^2)^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 \neq \beta^2 \Leftrightarrow |\alpha| \neq |\beta|$$

Οι ρίζες της εξίσωσης, είναι:

$$x_{1,2}=\frac{\left(\alpha^2+\beta^2\right)\pm\left(\alpha^2-\beta^2\right)}{2\alpha\beta}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{2\alpha^2}{2\alpha\beta}\\ \text{ή}\\ x_2=\dfrac{2\beta^2}{2\alpha\beta}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{\alpha}{\beta}\\ \text{ή}\\ x_2=\dfrac{\beta}{\alpha}\end{cases}$$

γ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$(1+x_1)(1+x_2)\geq 4\Leftrightarrow 1+x_1+x_2+x_1x_2\geq 4\Leftrightarrow 1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\geq 4\Leftrightarrow 1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+1\geq$$

$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}-2\geq 0$, οπότε πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $\alpha\beta>0$

(αφού $\alpha>0$ και $\beta>0$), η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\geq 0\Leftrightarrow(\alpha-\beta)^2\geq 0$, που ισχύει.

208. **GI_A_ALG_4_4858**

Μία περιβαλλοντολογική οργάνωση ξεκινά να καταγράφει τον πληθυσμό των ελαφιών σε μια δασική περιοχή από το 2000 όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Έτος	2000	2001	2002	2003	2004
Αριθμός ελαφιών	1300	1360	1420	1480	1540

Αν ο πληθυσμός των ελαφιών συνεχίζει να αυξάνεται με τον ίδιο σταθερό ρυθμό και μετά το 2004:

α. Να βρείτε μια σχέση που να επιτρέπει τον υπολογισμό του πληθυσμού των ελαφιών στο τέλος κάθε έτους από το 2000 και μετά. (Μονάδες 6)

β. Με τη βοήθεια της σχέσης αυτής:

i) Να προσδιορίσετε τον πληθυσμό των ελαφιών στο τέλος του 2012. (Μονάδες 6)

ii) Να προβλέψετε το έτος στο τέλος του οποίου ο αρχικός πληθυσμός των 1300 ελαφιών θα αυξηθεί κατά 60%. (Μονάδες 6)

iii) Να προβλέψετε το έτος που ο πληθυσμός των ελαφιών δεν θα υπερβεί τα 2600 ελάφια. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. Παρατηρούμε ότι για τους αριθμούς των ελαφιών ισχύει:
1360-1300=60 , 1420-1360=60 , 1480-1420=60 , 1540-1480=60 , επομένως έχουμε σταθερή αύξηση **60** ελαφιών από έτος σε έτος, πράγμα το οποίο ισχύει και μετά το **2004.** Συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί των ελαφιών

1300 , 1360 , 1420 , 1480 ,... σχηματίζουν μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) με πρώτο όρο $\alpha_1 = 1300$ και διαφορά $\omega = 60$.

Ο ν-οστός όρος της προόδου είναι:

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 1300 + (\nu - 1)60 = 60\nu + 1240$.

Εφόσον για ν=1 έχουμε το έτος 2000, ο ν-οστός όρος της προόδου υπολογίζει τον πληθυσμό των ελαφιών στο τέλος του έτους $1999 + \nu$.

β.

i) $2012 = 1999 + \nu$,άρα, $\nu = 13$.

Ο πληθυσμός των ελαφιών στο τέλος του 2012 ισούται με

$\alpha_{13} = 60 \cdot 13 + 1240 = 2020$.

ii) Ο πληθυσμός είναι: $1300 + \dfrac{60}{100}1300 = 1300 + 60 \cdot 13 = 2080$

Έχουμε: $\alpha_\nu = 2080 \Leftrightarrow 60\nu + 1240 = 2080 \Leftrightarrow 60\nu = 840 \Leftrightarrow \nu = 14$.

Ο πληθυσμός θα γίνει 2080 ελάφια στο τέλος του έτους $1999 + 14 = 2013$

iii) $\alpha_\nu \le 2600 \Leftrightarrow 60\nu + 1240 \le 2600 \Leftrightarrow 60\nu \le 1360 \Leftrightarrow \nu \le 22,66$, άρα, $\nu = 22$, αφού $\nu \in \mathbb{N}$. Το ζητούμενο θα συμβεί το έτος $1999 + 22 = 2021$.

209. **GI_A_ALG_4_4859**

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + \kappa x - 4$ με παράμετρο $\kappa \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ, το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 10)

β. Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

γ. Αν x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου και α , β δύο πραγματικοί ώστε να ισχύει: $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Η διακρίνουσα του τριωνύμου ισούται με:

$\Delta = \kappa^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = \kappa^2 + 48 > 0$, αφού $\kappa^2 \ge 0$ και $48 > 0$.

Έχουμε: $\Delta > 0$, για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$, άρα, το τριώνυμο έχει πραγματικές και άνισες ρίζες.

β. Το γινόμενο P των ριζών του τριωνύμου, από τις σχέσεις **Vieta**, είναι:

$P = \dfrac{\gamma}{\alpha} = -\dfrac{4}{3} < 0$.

Συμπεραίνουμε ότι οι ρίζες είναι ετερόσημες, διότι το γινόμενό τους είναι αρνητικό.

γ. Δίνεται ότι: $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$. Επειδή οι ρίζες είναι ετερόσημες, έχουμε: $\alpha < x_1 < 0 < x_2 < \beta$. Στο τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + \kappa x - 4$ είναι $\alpha = 3 > 0$, επομένως έχουμε την παρακάτω διάταξη προσήμων

x	$-\infty$	α	x_1	0	x_2	β	$+\infty$
f(x)		+	0	−	0	+	

Από τη διάταξη αυτή προκύπτει ότι: $f(\alpha)>0, f(\beta)>0$, $\alpha<0$ και $\beta>0$, άρα το γινόμενο $\alpha\cdot f(\alpha)\cdot\beta\cdot f(\beta)$ είναι αρνητικό.

210. **GI_A_ALG_4_4861**

Μία μπάλα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω, αφού διαγράψει μια τροχιά, μετά από κάποιο χρόνο θα πέσει στο έδαφος. Το ύψος $\mathbf{h}$ (σε $\mathbf{m}$) από το έδαφος, στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή $\mathbf{t}$ (σε $\mathbf{sec}$) κατά την κίνησή της προσδιορίζεται από τη συνάρτηση $\mathbf{h(t)=-5t^2+10t+1,05}$.

α. Να βρείτε τις τιμές $\mathbf{h(0),h(1),h(2)}$ και να εξηγήσετε τι παριστάνουν στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 6)

β. Να βρείτε μετά από πόσο χρόνο η μπάλα θα πέσει στο έδαφος. (Μονάδες 8)

γ. Να αποδείξετε ότι το ύψος στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή $\mathbf{t}$ μπορεί να προσδιοριστεί και από τον τύπο: $\mathbf{h(t)=5[1,21-(t-1)^2]}$. (Μονάδες 5)

δ. Να εξετάσετε αν υπάρχει χρονική στιγμή $\mathbf{t_1}$ (σε $\mathbf{sec}$) που το ύψος $\mathbf{h}$ της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από $\mathbf{6,65\ m}$. (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε:

✓ $\mathbf{h(0)=-5\cdot 0+10\cdot 0+1,05=1,05m}$

✓ $\mathbf{h(1)=-5\cdot 1+10\cdot 1+1,05=6,05m}$ και

✓ $\mathbf{h(2)=-5\cdot 4+10\cdot 2+1,05=1,05m}$

Τη χρονική στιγμή $\mathbf{0\ sec}$ η μπάλα βρίσκεται σε ύψος $\mathbf{1,05\ m}$, δηλαδή το σημείο εκτόξευσης είναι σε ύψος $\mathbf{1,05\ m}$ από το έδαφος. Τη χρονική στιγμή $\mathbf{1\ sec}$ η μπάλα βρίσκεται σε ύψος $\mathbf{6,05\ m}$ και τη χρονική στιγμή $\mathbf{2\ sec}$ η μπάλα βρίσκεται σε ύψος $\mathbf{2\ sec}$.

β. Το ύψος της μπάλας όταν φτάσει στο έδαφος θα είναι $\mathbf{0\ m}$.

$$\mathbf{h(t)=0 \Leftrightarrow -5t^2+10t+1,05=0}\ (1)$$

Η (1) έχει διακρίνουσα $\mathbf{\Delta=121=11^2}$ και οι ρίζες της είναι:

$$\mathbf{t_{1,2}=\frac{-10\pm 11}{-10}}=\begin{cases}\mathbf{t_1=2,1}\\ \text{ή}\\ \mathbf{t_2=-0,1}\end{cases}$$ και επειδή $\mathbf{t>0}$, έχουμε: $\mathbf{t_1=2,1sec}$.

γ. $\mathbf{h(t)=-5t^2+10t+1,05=5(-t^2+2t+0,21)=5[0,21-(t^2-2t)]=}$
$\mathbf{5[1+0,21-(t^2-2t+1)]=5[1,21-(t-1)^2]}$.

δ. Έστω ότι υπάρχει χρονική στιγμή t_1, που το ύψος h της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από $6,65\ m$, τότε:

$h(t_1)=6,65 \Leftrightarrow 5\left[1,21-(t-1)^2\right]=6,65 \Leftrightarrow 1,21-(t-1)^2=1,33 \Leftrightarrow$

$1,21-1,33=(t-1)^2 \Leftrightarrow (t-1)^2=-0,12$,που είναι αδύνατη.

Άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή t_1, που το ύψος h της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από $6,65\ m$.

211. **GI_A_ALG_4_4862**

Αν ένας κάτοικος μιας πόλης A καταναλώσει x κυβικά νερού σε ένα χρόνο, το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει δίνεται (σε ευρώ) από τη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}12+0,5x & \text{αν } 0\le x\le 30\\ 0,7x+6 & \text{αν } x>30\end{cases}.$$

α. Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:

i) έλειπε από το σπίτι του και δεν είχε καταναλώσει νερό. (Μονάδες 2)

ii) έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 3)

iii) έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 5)

β. Σε μια άλλη πόλη B το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο $g(x)=12+0,6x$, για $x\ge 0$.

Ένας κάτοικος της πόλης A και ένας κάτοικος της πόλης B κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά νερού για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης A πλήρωσε μεγαλύτερο λογαριασμό από τον κάτοικο της πόλης B, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δυο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α.

i) Αφού δεν κατανάλωσε νερό, θα έχουμε $x=0$ και επειδή $0\in[0,30]$ αντικαθιστούμε όπου $x=0$ στον πρώτο κλάδο της f και έχουμε: $f(0)=12+0,5\cdot 0 \Leftrightarrow f(0)=12$. Επομένως θα πληρώσει 12 ευρώ.

ii) Αφού κατανάλωσε 10 κυβικά νερό, θα έχουμε $x=10$ και επειδή $10\in[0,30]$ αντικαθιστούμε όπου $x=10$ στον πρώτο κλάδο της f και έχουμε: $f(10)=12+0,5\cdot 10 \Leftrightarrow f(10)=12+5 \Leftrightarrow f(10)=17$. Επομένως θα πληρώσει 17 ευρώ.

iii) Αφού κατανάλωσε 50 κυβικά νερό, θα έχουμε $x=50$ και επειδή $50\in(30,+\infty)$ αντικαθιστούμε όπου $x=50$ στο δεύτερο κλάδο της f και έχουμε: $f(50)=0,7\cdot 50+6 \Leftrightarrow f(50)=35+6 \Leftrightarrow f(50)=41$. Επομένως θα πληρώσει 41 ευρώ.

β. Διακρίνουμε περιπτώσεις για την κατανάλωση του κατοίκου της πόλης A.

- Έστω ότι κατανάλωσε x κυβικά νερού σε ένα χρόνο με $x\in[0,30]$.

Επειδή ο κάτοικος της πόλης A πλήρωσε μεγαλύτερο λογαριασμό, θα ισχύει

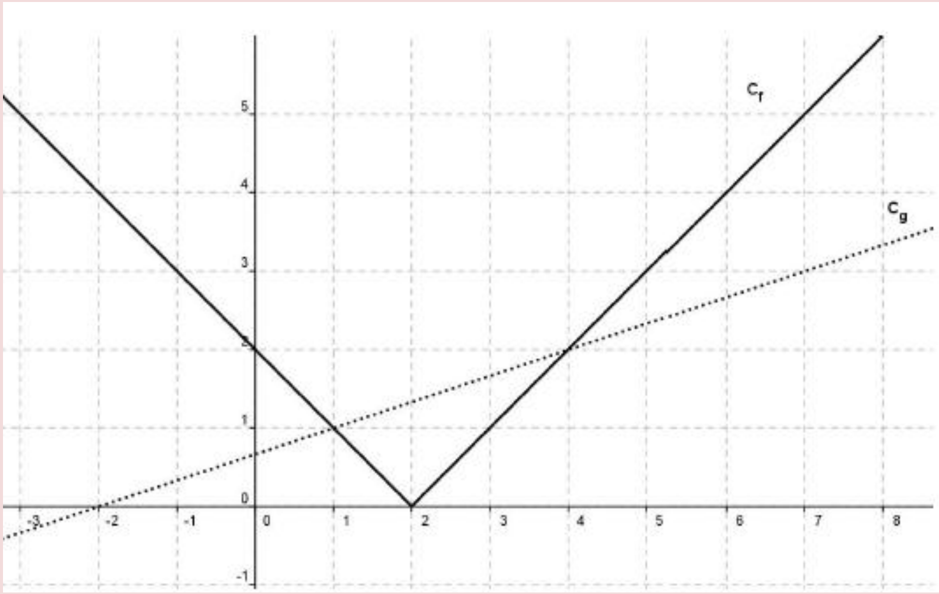
$\mathbf{f(x) > g(x) \Leftrightarrow 12 + 0,5x > 12 + 0,6x \Leftrightarrow 0,5x - 0,6x > 12 - 12 \Leftrightarrow -0,1x > 0 \Leftrightarrow x < 0}$, άτοπο, αφού $\mathbf{x \in [0,30]}$, Οπότε δεν μπορεί ο κάτοικός της πόλης $\mathbf{A}$ να κατανάλωσε λιγότερα ή ίσα από $\mathbf{30}$ κυβικά νερού.

- Έστω ότι κατανάλωσε $\mathbf{x}$ κυβικά νερού σε ένα χρόνο με $\mathbf{x > 30}$.

Επειδή ο κάτοικος της πόλης $\mathbf{A}$ πλήρωσε μεγαλύτερο λογαριασμό, θα ισχύει $\mathbf{f(x) > g(x) \Leftrightarrow 0,7x + 6 > 12 + 0,6x \Leftrightarrow 0,7x - 0,6x > 12 - 6 \Leftrightarrow 0,1x > 6 \Leftrightarrow x > 60}$.
Οπότε καθένας από τους κατοίκους των πόλεων $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ κατανάλωσε περισσότερα από $\mathbf{60}$ κυβικά νερού.

212. **GI_A_ALG_4_4886**

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις $\mathbf{C_f}$ και $\mathbf{C_g}$ των συναρτήσεων $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$ αντίστοιχα, με $\mathbf{f(x) = |x - 2|}$ και $\mathbf{g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}$, $\mathbf{x \in \mathbb{R}}$.



α. Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των $\mathbf{C_f}$ και $\mathbf{C_g}$. (Μονάδες 6)

β. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α). (Μονάδες 8)

γ. Με την βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε για ποιες τιμές του $\mathbf{x}$ η $\mathbf{C_f}$ βρίσκεται πάνω από την $\mathbf{C_g}$. (Μονάδες 6)

δ. Με την βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του $\mathbf{x}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση $\mathbf{K = \sqrt{3|2 - x| - (x + 2)}}$. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α. Από το δοθέν σχήμα , οι C_f και C_g τέμνονται για $x=1$ και για $x=4$. Άρα τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι τα $A(1,1)$ και $B(4,2)$.

β. Τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι οι λύσεις του συστήματος: $y=f(x)$ και $y=g(x)$ (1)

Από το σύστημα (1) παίρνουμε $f(x)=g(x) \Leftrightarrow |x-2|=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3} \Leftrightarrow 3|x-2|=x+2$ (2).

- Αν $x+2<0 \Leftrightarrow x<-2$, η εξίσωση (2) είναι αδύνατη
- Αν $x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -2$, η εξίσωση (2) ισοδύναμα γίνεται:

$$\begin{cases} 3(x-2)=x+2 \\ \text{ή} \\ 3(x-2)=-x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-6=x+2 \\ \text{ή} \\ 3x-6=-x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=8 \\ \text{ή} \\ 4x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ \text{ή} \\ x=1 \end{cases}$$

που είναι δεκτές αφού $4\geq -2$ και $1\geq -2$.

Οπότε θέτοντας $x=1$ σε μια από τις δύο εξισώσεις του συστήματος (1) έχουμε:

$y=f(1) \Leftrightarrow y=|1-2| \Leftrightarrow y=1$,

ενώ θέτοντας $x=4$ σε μια από τις δύο εξισώσεις του συστήματος (1) έχουμε:

$y=f(4) \Leftrightarrow y=|4-2| \Leftrightarrow y=2$

Άρα τα σημεία τομής είναι τα $A(1,1)$ και $B(4,2)$.

γ. Από το δοθέν σχήμα, η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g όταν $x\in(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$.

δ. Για να ορίζεται η παράσταση $K=\sqrt{3|2-x|-(x+2)}$ θα πρέπει η υπόριζη ποσότητα να είναι μη αρνητική, άρα έχουμε

$3|2-x|-(x+2)\geq 0 \Leftrightarrow 3|2-x|\geq x+2 \Leftrightarrow |2-x|\geq \frac{1}{3}x+\frac{2}{3} \Leftrightarrow |x-2|\geq \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$, (3).

Οι λύσεις της (3) είναι τα διαστήματα του x για τα οποία η C_f είναι πάνω από τη C_g μαζί με τα σημεία τομής των C_f, C_g (για το «ίσον»).

Επομένως από το (γ) ερώτημα έχουμε $x\in(-\infty,1]\cup[4,+\infty)$.

213. **GI_A_ALG_4_4903**

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2+(2\lambda-1)x+\lambda-1=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

α. Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή. (Μονάδες 8)

β. Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ. (Μονάδες 7)

γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Είναι:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Leftrightarrow \Delta = (2\lambda - 1)^2 - 4\lambda(\lambda - 1) \Leftrightarrow \Delta = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 4\lambda^2 + 4\lambda \Leftrightarrow \Delta = 1 > 0$, σταθερή (δηλαδή ανεξάρτητη του λ.

β. Είναι $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Leftrightarrow x_{1,2} = \dfrac{-2\lambda + 1 \pm 1}{2\lambda} =$

$$= \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2\lambda + 1 - 1}{2\lambda} \\ \text{ή} \\ x_2 = \dfrac{-2\lambda + 1 + 1}{2\lambda} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2\lambda}{2\lambda} \\ \text{ή} \\ x_2 = \dfrac{-2\lambda + 2}{2\lambda} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ \text{ή} \\ x_2 = \dfrac{2(1-\lambda)}{2\lambda} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ \text{ή} \\ x_2 = \dfrac{1-\lambda}{\lambda} \end{cases}$$

γ. Η απόσταση δύο αριθμών x_1, x_2 ορίζεται ως η απόλυτη τιμή της διαφοράς τους.

Επομένως ζητάμε τις λύσεις τις εξίσωσης $|x_2 - x_1| = 2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{1-\lambda}{\lambda} + 1\right| = 2$ με $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Έχουμε

$$\left|\dfrac{1-\lambda}{\lambda} + 1\right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{1-\lambda}{\lambda} + 1\right| = 2 \\ \text{ή} \\ \dfrac{1-\lambda}{\lambda} + 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \lambda + \lambda = 2\lambda \\ \text{ή} \\ 1 - \lambda + \lambda = -2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2\lambda \\ \\ 1 = -2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{2} \\ \text{ή} \\ \lambda = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

214. **GI_A_ALG_4_4912**

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = x + \alpha$, με $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Για $\alpha = 1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. (Μονάδες 5)

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δύο σημεία. (Μονάδες 10)

γ. Για $\alpha > 1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Για $\alpha = 1$, ο τύπος της συνάρτησης g είναι $g(x) = x + 1$. Τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι οι λύσεις του συστήματος:

$(\mathbf{y = f(x)}$ και $\mathbf{y = g(x)})$ (1).

Επομένως από το σύστημα (1) παίρνουμε:

$$\mathbf{f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 1 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1} \quad (2)$$

Οπότε για $\mathbf{x = 0}$ σε μια από τις δύο εξισώσεις του συστήματος (1) έχουμε $\mathbf{y = f(0) \Leftrightarrow y = 0^2 + 1 \Leftrightarrow y = 1}$,

ενώ για $\mathbf{x = 1}$ σε μια από τις δύο εξισώσεις του συστήματος (1) έχουμε $\mathbf{y = f(1) \Leftrightarrow y = 1^2 + 1 \Leftrightarrow y = 2}$. Άρα τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$ είναι τα $\mathbf{A(0,1)}$ και $\mathbf{B(1,2)}$.

β. Για να τέμνονται σε δύο σημεία οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$ θα πρέπει το σύστημα : $\mathbf{y = f(x)}$ και $\mathbf{y = g(x)}$ (1) να έχει δύο λύσεις.

Επομένως από το σύστημα παίρνουμε

$$\mathbf{f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 1 = x + \alpha \Leftrightarrow x^2 - x + 1 - \alpha = 0} \quad (3)$$

Για να έχει η εξίσωση (3) που προέκυψε, δύο λύσεις πρέπει και αρκεί να έχουμε:

$$\mathbf{\Delta > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1-\alpha) > 0 \Leftrightarrow 1 - 4 + 4\alpha > 0 \Leftrightarrow 4\alpha > 3 \Leftrightarrow \alpha > \frac{3}{4}}$$

γ. Για $\mathbf{\alpha > 1}$ είναι $\mathbf{1 - \alpha < 0}$. Επίσης αφού $\mathbf{\alpha > 1 > \frac{3}{4}}$, η (3) έχει δύο λύσεις, έστω $\mathbf{x_1, x_2}$

Επειδή στην (3) είναι $\mathbf{P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = 1 - \alpha < 0}$, οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$ είναι ετερόσημες.

215. **GI_A_ALG_4_4925**

Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\mathbf{\alpha_2 = \kappa^2}$ και $\mathbf{\alpha_3 = (\kappa+1)^2}$, $\mathbf{\kappa}$ ακέραιος με $\mathbf{\kappa > 1}$.

α. Να αποδείξετε ότι η διαφορά $\mathbf{\omega}$ της προόδου είναι αριθμός περιττός. (Μονάδες 8)

β. Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\mathbf{\alpha_1 = 2}$, τότε:

i) Να βρείτε τον αριθμό $\mathbf{\kappa}$ και να αποδείξετε ότι $\mathbf{\omega = 7}$. (Μονάδες 8)

ii) Να εξετάσετε αν ο αριθμός $\mathbf{1017}$ είναι όρος της προόδου. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α. Γνωρίζουμε ότι η διαφορά $\mathbf{\omega}$ μιας αριθμητικής προόδου δίνεται από τη σχέση $\mathbf{\omega = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu}$.

Οπότε έχουμε $\mathbf{\omega = \alpha_3 - \alpha_2 \Leftrightarrow \omega = (\kappa+1)^2 - \kappa^2 \Leftrightarrow \omega = \kappa^2 + 2\kappa + 1 - \kappa^2 \Leftrightarrow \omega = 2\kappa + 1}$, άρα ο $\mathbf{\omega}$ είναι περιττός αριθμός.

β.

i) Είναι $\omega = 2\kappa + 1\ (1)$ και $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 \Leftrightarrow \omega = \kappa^2 - 2\ (2)$.

Από τις σχέσεις $(1),(2)$ με $\kappa > 1$ έχουμε $\kappa^2 - 2 = 2\kappa + 1 \Leftrightarrow \kappa^2 - 2\kappa - 3 = 0$.

Το τριώνυμο (1) έχει:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Leftrightarrow \Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-3) \Leftrightarrow \Delta = 4 + 12 \Leftrightarrow \Delta = 16 > 0$

Άρα έχει δύο ρίζες άνισες, τις $\kappa_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2\cdot 1} = \dfrac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \kappa_1 = 3 \\ \kappa_2 = -1 \end{cases}$

Η τιμή $\kappa_1 = 3$ είναι δεκτή, αφού $3 > 1$, ενώ η τιμή $\kappa_2 = -1$, απορρίπτεται αφού $-1 < 1$.

Για $\kappa = 3$ είναι $\omega = 2\cdot 3 + 1 \Leftrightarrow \omega = 7$.

ii) Για να βρούμε αν υπάρχει όρος της προόδου που είναι ίσος με 1017, αρκεί να εξετάσουμε αν υπάρχει $\nu \in \mathbb{N}^*$ ώστε $\alpha_\nu = 1017$.

Οπότε για $\kappa = 3$ και $\omega = 7$ έχουμε:

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \Leftrightarrow 1017 = 2 + 7(\nu - 1) \Leftrightarrow 7(\nu - 1) = 1015 \Leftrightarrow \nu - 1 = 145 \Leftrightarrow \nu = 146$

.

Άρα υπάρχει όρος που είναι ίσος με 1017 και είναι ο α_{146}.

216. **GI_A_ALG_4_4946**

α. Να λύσετε την ανίσωση $|x - 3| \le 5$. (Μονάδες 7)

β. Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x - 3|$. (Μονάδες 5)

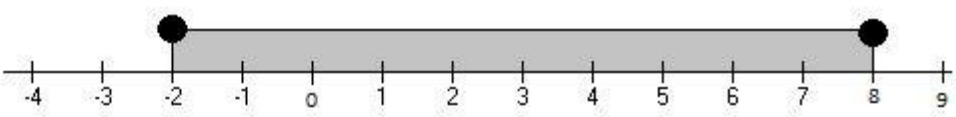
γ. Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x - 3| \le 5$. (Μονάδες 5)

δ. Να βρείτε το πλήθος των ακέραιων αριθμών x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x| - 3| \le 5$. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

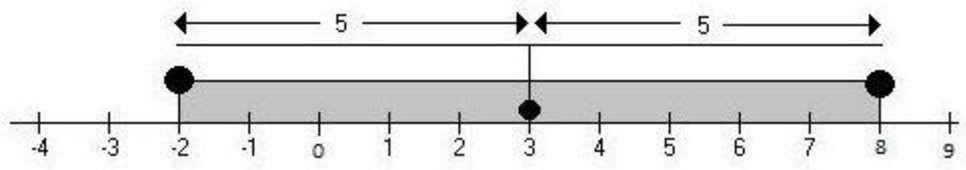
α. $|x - 3| \le 5 \Leftrightarrow -5 \le x - 3 \le 5 \Leftrightarrow -5 + 3 \le x - 3 + 3 \le 5 + 3 \Leftrightarrow -2 \le x \le 8$

β.



Η γεωμετρική ερμηνεία της παράστασης $|x - 3|$ είναι η απόσταση του πραγματικού αριθμού x από τον αριθμό 3.

Άρα αναζητάμε τους πραγματικούς αριθμούς $\mathbf{x}$ οι οποίοι απέχουν από τον αριθμό $\mathbf{3}$ απόσταση μικρότερη ή ίση από $\mathbf{5}$.



γ. Η λύση της ανίσωσης $|\mathbf{x}-\mathbf{3}|\le\mathbf{5}$, από το α) ερώτημα δίνει $-\mathbf{2}\le\mathbf{x}\le\mathbf{8}$.
Επομένως οι ακέραιοι αριθμοί $\mathbf{x}$ που ικανοποιούν την ανίσωση $|\mathbf{x}-\mathbf{3}|\le\mathbf{5}$ είναι οι $-\mathbf{2},-\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5},\mathbf{6},\mathbf{7},\mathbf{8}$.

δ. $\left||\mathbf{x}|-\mathbf{3}\right|\le\mathbf{5}\Leftrightarrow-\mathbf{5}\le|\mathbf{x}|-\mathbf{3}\le\mathbf{5}\Leftrightarrow-\mathbf{5}+\mathbf{3}\le|\mathbf{x}|-\mathbf{3}+\mathbf{3}\le\mathbf{5}+\mathbf{3}\Leftrightarrow-\mathbf{2}\le|\mathbf{x}|\le\mathbf{8}$
Άρα $-\mathbf{2}\le|\mathbf{x}|$ που ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό $\mathbf{x}$ και $|\mathbf{x}|\le\mathbf{8}\Leftrightarrow-\mathbf{8}\le\mathbf{x}\le\mathbf{8}$.
Οπότε $-\mathbf{8}\le\mathbf{x}\le\mathbf{8}$, επομένως το πλήθος των ακεραίων που την επαληθεύουν είναι $\mathbf{8}+\mathbf{1}+\mathbf{8}=\mathbf{17}$.

217. **GI_A_ALG_4_4952**

α. Θεωρούμε την εξίσωση $\mathbf{x}^2+\mathbf{2x}+\mathbf{3}=\boldsymbol{\alpha}$, με παράμετρο $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\boldsymbol{\alpha}$ η εξίσωση $\mathbf{x}^2+\mathbf{2x}+\mathbf{3}=\boldsymbol{\alpha}$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 6)

ii) Να βρείτε την τιμή του $\boldsymbol{\alpha}$ ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 6)

β. Δίνεται το τριώνυμο $\mathbf{f(x)}=\mathbf{x}^2+\mathbf{2x}+\mathbf{3}$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(x)}\ge\mathbf{2}$, για κάθε $\mathbf{x}\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{\mathbf{f(x)}-\mathbf{2}}\le\mathbf{2}$. (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α.

i) Η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γίνεται $\mathbf{x}^2+\mathbf{2x}+\mathbf{3}=\boldsymbol{\alpha}\Leftrightarrow\mathbf{x}^2+\mathbf{2x}+\mathbf{3}-\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ $(\mathbf{1})$. Άρα για να έχει η δοθείσα εξίσωση δυο ρίζες πραγματικές και άνισες πρέπει η $(\mathbf{1})$ να έχει θετική διακρίνουσα.

Οπότε έχουμε:
$$\boldsymbol{\Delta}>\mathbf{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{\beta}^2-\mathbf{4}\boldsymbol{\alpha\gamma}>\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathbf{2}^2-\mathbf{4}\cdot\mathbf{1}\cdot(\mathbf{3}-\boldsymbol{\alpha})>\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathbf{4}-\mathbf{12}+\mathbf{4}\boldsymbol{\alpha}>\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathbf{4}\boldsymbol{\alpha}>\mathbf{8}\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}>\mathbf{2}$$
.

ii) Για να έχει η δοθείσα εξίσωση διπλή ρίζα, πρέπει η $(\mathbf{1})$ να έχει διακρίνουσα ίση με το μηδέν.

Οπότε έχουμε: $\boldsymbol{\Delta}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{2}$.
Για $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{2}$ η $(\mathbf{1})$ γίνεται
$\mathbf{x}^2+\mathbf{2x}+\mathbf{3}-\mathbf{2}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathbf{x}^2+\mathbf{2x}+\mathbf{1}=\mathbf{0}\Leftrightarrow(\mathbf{x}+\mathbf{1})^2=\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathbf{x}+\mathbf{1}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathbf{x}=-\mathbf{1}$, η

διπλή ρίζα της εξίσωσης.

β.

i) Είναι $f(x)=x^2+2x+3 \Leftrightarrow f(x)=x^2+2x+1+2 \Leftrightarrow f(x)=(x+1)^2+2$.

Οπότε έχουμε για κάθε $x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow (x+1)^2\ge 0 \Leftrightarrow (x+1)^2+2\ge 2 \Leftrightarrow f(x)\ge 2$

ii) Επειδή $f(x)\ge 2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η ανίσωση $\sqrt{f(x)-2}\le 2$ ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε έχουμε:

$$\sqrt{f(x)-2}\le 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+3-2}\le 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+1}\le 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2}\le 2 \Leftrightarrow |x+1|\le 2 \Leftrightarrow$$

$$-2\le x+1\le 2 \Leftrightarrow -2-1\le x+1-1\le 2-1 \Leftrightarrow -3\le x\le 1.$$

218. **GI_A_ALG_4_4957**

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$. (Μονάδες 8)

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)

γ. Αν $\lambda>0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 6)

δ. Για κάθε $\lambda>0$, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, να αποδείξετε ότι $\sqrt{x_1x_2}\le\dfrac{x_1+x_2}{2}$. (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α. Είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma \Leftrightarrow \Delta=\left[-(\lambda^2+1)\right]^2-4\cdot\lambda\cdot\lambda \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta=(\lambda^2+1)^2-4\lambda^2 \Leftrightarrow \Delta=\lambda^4+2\lambda^2+1-4\lambda^2 \Leftrightarrow$

$\Delta=\lambda^4-2\lambda^2+1 \Leftrightarrow \Delta=(\lambda^2-1)^2\ge 0$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$, οπότε το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές.

β. $S=x_1+x_2 \Leftrightarrow S=-\dfrac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow S=-\dfrac{-(\lambda^2+1)}{\lambda} \Leftrightarrow S=\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}$ και

$P=x_1x_2 \Leftrightarrow P=\dfrac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow P=\dfrac{\lambda}{\lambda} \Leftrightarrow P=1$.

γ. Για $\lambda>0$ είναι $P=1>0$ και $S=\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}>0$, οπότε έχει ρίζες θετικές.

δ. Για $\lambda>0$ είναι $\sqrt{x_1x_2}\le\dfrac{x_1+x_2}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x_1x_2}\le x_1+x_2 \Leftrightarrow 2\sqrt{P}\le S$,επειδή $S,P>0$, ισοδύναμα έχουμε:

$2\sqrt{x_1x_2}\le x_1+x_2 \Leftrightarrow 4x_1x_2\le (x_1+x_2)^2 \Leftrightarrow x_1^2+2x_1x_2+x_2^2\ge 4x_1x_2$

$\Leftrightarrow x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-4x_1x_2\ge 0 \Leftrightarrow$

$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \geq 0$, που ισχύει για κάθε $\lambda > 0$.

219. **GI_A_ALG_4_4962**

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. (Μονάδες 8)

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)

γ. Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 6)

δ. Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνεται τους αριθμούς $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ και 1. (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α. Είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Leftrightarrow \Delta = \left[-(\lambda^2+1)\right]^2 - 4\cdot\lambda\cdot\lambda \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta = (\lambda^2+1)^2 - 4\lambda^2 \Leftrightarrow \Delta = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 \Leftrightarrow$

$\Delta = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 \Leftrightarrow \Delta = (\lambda^2-1)^2 \geq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$,

οπότε το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές.

β. $S = x_1 + x_2 \Leftrightarrow S = -\dfrac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow S = -\dfrac{-(\lambda^2+1)}{\lambda} \Leftrightarrow S = \dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}$ και

$P = x_1x_2 \Leftrightarrow P = \dfrac{\gamma}{a} \Leftrightarrow P = \dfrac{\lambda}{\lambda} \Leftrightarrow P = 1$

γ. Για $\lambda > 0$ είναι $P = 1 > 0$ και $S = \dfrac{\lambda^2+1}{\lambda} > 0$, οπότε έχει ρίζες θετικές

δ. Βρίσκουμε το πρόσημο της διαφοράς των αριθμών $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ και 1.

Είναι $\dfrac{x_1+x_2}{2} - 1 = \dfrac{\frac{\lambda^2+1}{\lambda}}{2} - 1 = \dfrac{\lambda^2+1}{2\lambda} - 1 = \dfrac{\lambda^2+1-2\lambda}{2\lambda} = \dfrac{(\lambda-1)^2}{2\lambda} > 0$,

για κάθε $0 < \lambda \neq 1$.Επομένως $\dfrac{x_1+x_2}{2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x_1+x_2}{2} > 1$.

220. **GI_A_ALG_4_4970**

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 + \lambda x - 36 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 8)

β. Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ. (Μονάδες 7)

i) Να δείξετε ότι ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2 - \lambda x - 36 = 0$

ii) Να δείξετε ότι:

- $\rho \neq 0$ και
- ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $-36x^2+\lambda x+2=0$. (Μονάδες 4+6=10)

ΛΥΣΗ

α. Είναι $\Delta=\lambda^2-4\cdot 2\cdot(-36)=\lambda^2+288>0$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ. Άρα η εξίσωση (1) έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες.

β.

i) Αφού το ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) άρα την επαληθεύει. Συνεπώς ισχύουν τα εξής:

$2\rho^2+\lambda\rho-36=0 \quad (2) \quad \Leftrightarrow \quad 2(-\rho)^2-\lambda(-\rho)-36=0$ που σημαίνει ότι το $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2-\lambda x\text{-}36\text{=}0$.

ii) Αν ήταν $\rho=0$ τότε από τη (2) θα είχαμε $-36=0$, άτοπο. Τότε διαιρώντας τα δύο μέλη της (2) με $\rho^2\neq 0$ παίρνουμε διαδοχικά τα εξής:

$$2+\frac{\lambda}{\rho}-\frac{36}{\rho^2}=0 \Leftrightarrow -36\cdot\left(\frac{1}{\rho}\right)^2+\lambda\cdot\frac{1}{\rho}+2=0$$

Όμως η τελευταία σημαίνει ότι το $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $-36x^2+\lambda x+2=0$.

221. **GI_A_ALG_4_4975**

α. Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4-8x^2-9=0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β. Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4+\beta x^2+\gamma=0$ (1) με παραμέτρους $\beta\ ,\ \gamma\in\mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι: Αν $\gamma<0$ τότε:

i) $\beta^2-4\gamma>0$. (Μονάδες 3)

ii) η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. Θέτουμε $x^2=\omega\geq 0$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2-8\omega-9=0$ με διακρίνουσα $\Delta=100$. Άρα οι δύο ρίζες ω_1,ω_2 της τελευταίας εξίσωσης είναι $\omega_1=9$ και $\omega_2=-1$ που απορρίπτεται αφού $x^2=\omega\geq 0$. Άρα τελικά $\omega=9\Leftrightarrow x^2=9\Leftrightarrow x=\pm 3$. Άρα οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης είναι οι αριθμοί 3 και -3.

β.

i) Έχουμε $\gamma<0\Leftrightarrow 4\gamma<0\Leftrightarrow -4\gamma>0$. Επίσης είναι $\beta^2\geq 0$ οπότε προσθέτοντας τις δύο τελευταίες ανισότητες παίρνουμε $\beta^2-4\gamma>0$ που είναι και το ζητούμενο.

ii) Αν θέσουμε και πάλι $x^2=\omega\geq 0$ τότε η εξίσωση $x^4+\beta x^2+\gamma=0$ γίνεται $\omega^2+\beta\omega+\gamma=0$ με διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\gamma>0$ και $P=\gamma\Leftrightarrow\omega_1\omega_2<0$ έτσι προκύπτει η εξίσωση $\omega^2+\beta\omega+\gamma=0$ έχει δυο ρίζες ω_1,ω_2 ετερόσημες όμως $\omega=x^2\geq 0$ άρα η αρνητική ρίζα απορρίπτεται .Έτσι έχουμε μια μόνο ρίζα $\omega>0$ και από την $x^2=\omega\geq 0$ προκύπτει $x=\pm\sqrt{\omega}$ άρα η εξίσωση $x^4+\beta x^2+\gamma=0$ έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες, μία θετική και μία αρνητική.

222. **GI_A_ALG_4_4992**

α. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο $\Pi=34\text{ cm}$ και διαγώνιο $\delta=13\text{ cm}$.

i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E=60\text{ cm}^2$. (Μονάδες 5)

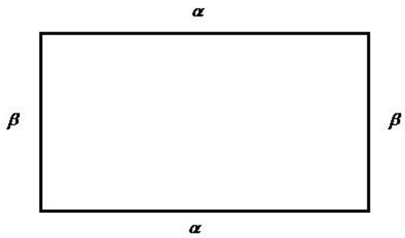
ii) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 5)

iii) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 5)

β. Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 40 cm^2 και διαγώνιο 8 cm.(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε:



i) Έστω α,β οι διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Τότε σύμφωνα με την εκφώνηση έχουμε $2\alpha+2\beta=34\Leftrightarrow\alpha+\beta=17$ και από το πυθαγόρειο θεώρημα, αν με δ συμβολίσουμε τη διαγώνιο του ορθογωνίου παραλληλογράμμου έχουμε $\delta=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2=169$. Όμως από την ταυτότητα $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ αντικαθιστώντας τις παραπάνω παίρνουμε $169=17^2-2\alpha\beta\Leftrightarrow\alpha\beta=60$ που εκφράζει το εμβαδό E του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Άρα $E=60\text{cm}^2$.

ii) Αν S,P είναι αντίστοιχα το άθροισμα $\alpha+\beta$ και το γινόμενο $\alpha\beta$ των πλευρών του ορθογωνίου τότε $S=17$ και $P=60$. Συνεπώς οι α,β είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2-17x+60=0\quad(1)$.

iii) Λύνοντας την εξίσωση (1) βρίσκουμε τις ρίζες που είναι οι αριθμοί 5 και 12. Άρα $\alpha=5$ και $\beta=12$ ή αντίστροφα $\alpha=12$ και $\beta=5$.

β. Όμοια όπως πριν αν α,β οι διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαγώνιο δ τότε πρέπει $\alpha\beta=40$ και $\delta=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2=64$. Από την παραπάνω ταυτότητα πρέπει $\alpha+\beta=12$ και τότε οι α,β είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2-12x+40=0$ η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta=-16<0$, άρα είναι αδύνατη. Συνεπώς δεν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με τις ζητούμενες προδιαγραφές.

223. **GI_A_ALG_4_5275**

Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία $\mathbf{A}$ χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο: $\mathbf{y = 60 + 0,20x}$ όπου $\mathbf{x}$ είναι η απόσταση που διανύθηκε σε $\mathbf{Km}$ και $\mathbf{y}$ είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α. Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας $\mathbf{A}$, ο οποίος σε μία ημέρα ταξίδεψε $\mathbf{400Km}$; (Μονάδες 5)

β. Πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ένας πελάτης ο οποίος, για μία ημέρα, πλήρωσε $\mathbf{150}$ ευρώ; (Μονάδες 5)

γ. Μία άλλη εταιρεία, η $\mathbf{B}$, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο $\mathbf{y = 80 + 0,10x}$ όπου, όπως προηγουμένως, $\mathbf{x}$ είναι η απόσταση που διανύθηκε σε $\mathbf{Km}$ και $\mathbf{y}$ είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε. (Μονάδες 10)

δ. Αν $\mathbf{f(x) = 60 + 0,20x}$ και $\mathbf{g(x) = 80 + 0,10x}$ είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$ και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή καθεμιάς από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος (γ).

ΛΥΣΗ

α. Για $\mathbf{x = 400}$ παίρνουμε $\mathbf{y = 60 + 0,20 \cdot 400 = 140}$. Άρα θα πληρώσει $\mathbf{140}$ ευρώ.

β. Αν $\mathbf{y = 150}$ τότε $\mathbf{60 + 0,20 \cdot x = 150 \Leftrightarrow x = 450}$. Άρα οδήγησε $\mathbf{450km}$.

γ. Για να δούμε πότε η εταιρεία $\mathbf{A}$ χρεώνει λιγότερο (αντίστοιχα περισσότερο) από την εταιρεία $\mathbf{B}$ θα πρέπει να βρούμε για ποιες τιμές του $\mathbf{x}$ είναι $\mathbf{60 + 0,20 \cdot x < 80 + 0,10 \cdot x}$ (αντίστοιχα $\mathbf{60 + 0,20 \cdot x > 80 + 0,10 \cdot x}$). Λύνουμε την παραπάνω ανίσωση και βρίσκουμε $\mathbf{x < 200}$ (αντίστοιχα $\mathbf{x > 200}$). Συνεπώς η εταιρεία $\mathbf{A}$ χρεώνει λιγότερο όταν ο πελάτης διανύσει λιγότερα από $\mathbf{200km}$, η εταιρεία $\mathbf{B}$ χρεώνει λιγότερο όταν ο πελάτης διανύσει περισσότερα από $\mathbf{200km}$.

δ. Για την εύρεση του σημείου τομής λύνουμε την εξίσωση $\mathbf{f(x) = g(x) \Leftrightarrow 60 + 0,20 \cdot x = 80 + 0,10 \cdot x \Leftrightarrow x = 200}$.

Για $\mathbf{x = 200}$ βρίσκουμε $\mathbf{f(200) = g(200) = 100}$ οπότε το σημείο τομής είναι το $\mathbf{A(200,100)}$ και εκφράζει ότι το κόστος ενοικίασης του αυτοκινήτου είναι το ίδιο και με τις δύο εταιρείες αν ο πελάτης σκοπεύει να διανύσει ακριβώς $\mathbf{200km}$. Σε αυτή την περίπτωση το κόστος και στις δύο εταιρείες είναι 100 ευρώ.

224. **GI_A_ALG_4_5285**

Δίνονται οι εξισώσεις $x^2-3x+2=0$ (1) και $x^4-3x^2+2=0$ (2).

α. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (1). (Μονάδες 5)

β. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (2). (Μονάδες 10)

γ. Να βρείτε τριώνυμο της μορφής $x^2+\beta x+\gamma$ που οι ρίζες του να είναι κάποιες από τις ρίζες της εξίσωσης (2) και επιπλέον, για κάθε αρνητικό αριθμό x, να έχει θετική τιμή. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=(-3)^2-4\cdot 2=1$. Άρα οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι $x_1=\frac{3-1}{2}=1$ και $x_2=\frac{3+1}{2}=2$.

β. Θέτουμε $x^2=\omega\geq 0$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2-3\omega+2=0$ με ρίζες τους αριθμούς 1 , 2 (όπως είδαμε και στο ερώτημα α).

Άρα αν $\omega=1\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$, ενώ αν $\omega=2\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$. Άρα οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης είναι οι αριθμοί $-\sqrt{2},-1,1,\sqrt{2}$.

γ. <u>**Σχόλιο**</u>**:** Δε διευκρινίζεται εάν οι ρίζες του τριωνύμου μπορεί να είναι ίδιες ή όχι.

Αν επιτρέπεται οι ρίζες του τριωνύμου να είναι ίδιες τότε οποιοδήποτε ζεύγος ίδιων θετικών λύσεων ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του προβλήματος. Αν π.χ. το τριώνυμο είχε διπλή ρίζα το 1 (αντίστοιχα το $\sqrt{2}$) τότε μηδενίζεται μόνο στο 1 (αντίστοιχα το $\sqrt{2}$) ενώ για οποιαδήποτε άλλη τιμή του x, το τριώνυμο έχει τιμή ομόσημη του $\alpha=1>0$ δηλαδή θετική.

Αν δεν επιτρέπεται οι ρίζες του τριωνύμου να είναι ίδιες τότε επιλέγουμε οι δύο ρίζες να είναι οι θετικές το 1 και το $\sqrt{2}$. Τότε το τριώνυμο μηδενίζεται στους αριθμούς 1 και $\sqrt{2}$, για τις τιμές του x στο διάστημα $(1,\sqrt{2})$ έχει τιμή ετερόσημη του $\alpha=1>0$ δηλαδή αρνητική ενώ για οποιαδήποτε άλλη τιμή του x (άρα και για τις τιμές κάτω από το 1 οπότε και για όλες τις αρνητικές) έχει τιμή ομόσημη του $\alpha=1>0$ δηλαδή θετική.

225. **GI_A_ALG_4_5316**

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2+\beta x+\beta^2$, όπου $\beta\in\mathbb{R}$.

α. Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου. (Μονάδες 4)

β.

i) Αν $\beta\neq 0$ τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου; (Μονάδες 7)

ii) Πώς αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), ότα $\beta=0$; (Μονάδες 6)

γ. Με τη βοήθεια της απάντησης στο ερώτημα (β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\alpha^2+\alpha\cdot\beta+\beta^2>0$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς

$\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα $\mathbf{0}$. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = \beta^2 - 4\beta^2 = -3\beta^2 \le 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $\beta = 0$.

β.

i) Αν $\beta \ne 0$, τότε $\Delta < 0$ και συνεπώς το τριώνυμο είναι πάντα ομόσημο του $\alpha = 1 > 0$, δηλαδή θετικό.

ii) Αν $\beta = 0$, τότε το τριώνυμο γίνεται $x^2 + 0 \cdot x + 0^2$, δηλαδή το x^2 το οποίο μηδενίζεται μόνο για $x = 0$ (διπλή λύση) και για οποιαδήποτε άλλη τιμή του x είναι θετικό.

γ. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Αν $\beta \ne 0$ τότε σύμφωνα με το ερώτημα βi) έχουμε $x^2 + \beta x + \beta^2 > 0$ για οποιαδήποτε τιμή του x. Άρα αν θέσω $x = \alpha$ παίρνω $\alpha^2 + \beta \cdot \alpha + \beta^2 > 0$ που είναι και το ζητούμενο.

Αν $\beta = 0$ τότε από την εκφώνηση έχουμε $\alpha \ne 0$ και επειδή από το ερώτημα βii) είναι $x^2 + \beta x + \beta^2 > 0$ για κάθε $x \ne 0$ άρα αν θέσω $x = \alpha$ (για το οποίο ισχύει $\alpha \ne 0$), παίρνουμε και πάλι $\alpha^2 + \beta \cdot \alpha + \beta^2 > 0$ που είναι και το ζητούμενο. Άρα σε κάθε περίπτωση αν τα α, β δεν είναι ταυτόχρονα ίσα με μηδέν τότε ισχύει $\alpha^2 + \beta \cdot \alpha + \beta^2 > 0$.

226. **GI_A_ALG_4_5317**

α. Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10).

β. Να κατασκευάσετε μια διτετράγωνη εξίσωση της μορφής $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, η οποία να έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας λύνοντας την εξίσωση που κατασκευάσατε. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α. Θέτουμε $x^2 = \omega \ge 0$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2 - 9\omega + 20 = 0$ με ρίζες τους αριθμούς 4 , 5. Άρα αν $\omega = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$ ενώ αν $\omega = 5 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$. Άρα οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης είναι οι αριθμοί $-\sqrt{5}, -2, 2, \sqrt{5}$.

β. Αρκεί η αντίστοιχη δευτεροβάθμια εξίσωση $\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0$ **(1)** που προκύπτει αν θέσουμε $x^2 = \omega \ge 0$ να έχει μία θετική και μία αρνητική λύση ως προς το ω. Τότε η αρνητική λύση δε δίνει πραγματικές λύσεις ενώ η θετική λύση δίνει δύο λύσεις της αρχικής διτετράγωνης εξίσωσης ως προς x.

Για παράδειγμα αν επιλέξουμε $\omega_1 = -1$ και $\omega_2 = 2$ με άθροισμα $S = 1$ και γινόμενο $P = -2$, η εξίσωση που έχει ως λύσεις είναι η $\omega^2 - S\omega + P = 0$ δηλαδή η $\omega^2 - \omega - 2 = 0$ από την οποία προκύπτει η διτετράγωνη εξίσωση $x^4 - x^2 - 2 = 0$ που έχει δύο λύσεις.

Πράγματι αν θέσουμε $\mathbf{x^2=\omega\geq 0}$ τότε καταλήγουμε στην $\mathbf{\omega^2-\omega-2=0}$ με λύσεις τους αριθμούς $\mathbf{-1,2}$. Άρα αν $\mathbf{\omega=-1\Leftrightarrow x^2=-1}$ η οποία είναι αδύνατη, ενώ αν $\mathbf{\omega=2\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}}$. Άρα η εξίσωση $\mathbf{x^4-x^2-2=0}$ έχει λύσεις τους αριθμούς $\mathbf{-\sqrt{2},\sqrt{2}}$.

227. **GI_A_ALG_4_5322**

Δίνεται το τριώνυμο: $\mathbf{x^2-2x-8}$

α. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού $\mathbf{x}$. (Μονάδες 10)

β. Αν $\mathbf{\kappa=-\dfrac{8889}{4444}}$, είναι η τιμή της παράστασης: $\mathbf{\kappa^2-2\kappa-8}$ μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ. Αν ισχύει $\mathbf{-4<\mu<4}$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης: $\mathbf{\mu^2-2|\mu|-8}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\mathbf{\Delta=(-3)^2-4\cdot(-8)=36}$ και οι ρίζες του είναι οι αριθμοί

$\mathbf{x_1=\dfrac{2-6}{2}=-2}$ και $\mathbf{x_2=\dfrac{2+6}{2}=4}$. Το πρόσημο του τριωνύμου είναι:

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$
x^2-2x+8	$+$	$-$	$+$	

Αν $\mathbf{x\in(-2,4)}$ τότε το τριώνυμο έχει αρνητική τιμή ενώ αν $\mathbf{x\in(-\infty,-2)\cup(4,+\infty)}$, το τριώνυμο έχει θετική τιμή.

β. Επειδή $\mathbf{\kappa=-\dfrac{8889}{4444}<-\dfrac{8888}{4444}=-2}$ άρα η τιμή της παράστασης $\mathbf{\kappa^2-2\kappa-8}$, σύμφωνα με το ερώτημα α είναι θετική.

γ. Αν $\mathbf{-4<\mu<4}$ δηλαδή $\mathbf{|\mu|<4}$ δηλαδή προφανώς $\mathbf{0\leq|\mu|<4}$, τότε η παράσταση $\mathbf{\mu^2-2|\mu|-8}$ που μπορεί να γραφεί διαφορετικά και ως $\mathbf{|\mu|^2-2|\mu|-8}$ λόγω του ερωτήματος α έχει πάντοτε αρνητική τιμή, αφού το τριώνυμο $\mathbf{x^2-2x-8}$ έχει αρνητική τιμή για οποιοδήποτε $\mathbf{x\in(-2,4)}$, άρα και για οποιοδήποτε $\mathbf{x\in[0,4)}$.

228. **GI_A_ALG_4_5879**

Ο αγώνας δρόμου ανάμεσα στη χελώνα και το λαγό γίνεται σύμφωνα μα τους ακόλουθους κανόνες:

- Η διαδρομή είναι τμήμα ενός ευθυγράμμου τμήματος.
- Ο λαγός ξεκινάει τη χρονική στιγμή $\mathbf{t=0}$ από ένα σημείο $\mathbf{O}$.
- Το τέρμα βρίσκεται σε σημείο $\mathbf{M}$ με $\mathbf{OM>600}$ μέτρα.
- Η χελώνα ξεκινάει τη στιγμή $\mathbf{t=0}$ με προβάδισμα, δηλαδή από ένα σημείο $\mathbf{A}$ που βρίσκεται μεταξύ του $\mathbf{O}$ και του $\mathbf{M}$ με $\mathbf{OA=600}$ μέτρα.

Υποθέτουμε ότι, για $\mathbf{t\geq 0}$,η απόσταση του λαγού από το $\mathbf{O}$ τη χρονική στιγμή $\mathbf{t}$ min δίνεται από τον τύπο $\mathbf{S_{\Lambda}(t)=10t^2}$ μέτρα, ενώ η απόσταση χελώνας από το $\mathbf{O}$ τη χρονική στιγμή $\mathbf{t}$ min δίνεται από τον τύπο $\mathbf{S_X(t)=600+40t}$ μέτρα.

α. Να βρείτε σε πόση απόσταση από το $\mathbf{O}$ θα πρέπει να βρίσκεται το σημείο $\mathbf{M}$, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα. (Μονάδες 10)

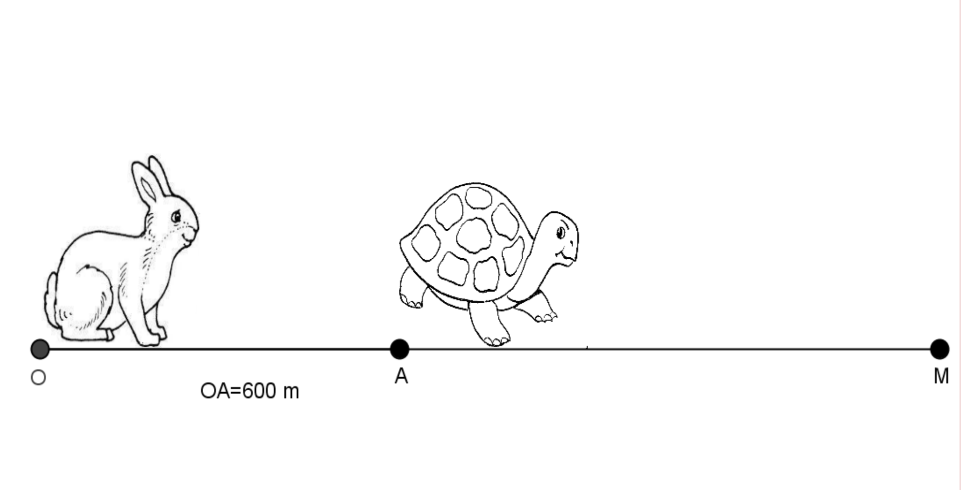
β. Υποθέτουμε τώρα ότι η απόσταση του τέρματος $\mathbf{M}$ από το $\mathbf{O}$ είναι $\mathbf{OM=2250}$ μέτρα.

Να βρείτε:

i) Ποια χρονική στιγμή ο λαγός φτάνει τη χελώνα; (Μονάδες 5)

ii) Ποιος τους δύο δρομείς προηγείται τη χρονική στιγμή $\mathbf{t=12}$min και ποια είναι τότε η μεταξύ τους απόσταση; (Μονάδες 5)

iii) Ποια χρονική στιγμή τερματίζει ο νικητής τον αγώνα; (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α. **<u>Σχόλιο</u>:** Η ερώτηση πρέπει να αναδιατυπωθεί ως εξής (η προσθήκη με έντονα υπογραμμισμένα γράμματα): «Να βρείτε σε πόση απόσταση **<u>το πολύ</u>** από το $\mathbf{O}$ θα πρέπει να βρίσκεται το τέρμα $\mathbf{M}$, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα».

Το τέρμα $\mathbf{M}$ μπορεί να είναι σε οποιαδήποτε θέση για την οποία να ισχύει

$S_X(t) > S_\Lambda(t) \Leftrightarrow 600 + 40t > 10t^2 \Leftrightarrow 10t^2 - 40t - 600 < 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 60 < 0$. Το τριώνυμο $t^2 - 4t - 60$ έχει ρίζες τους αριθμούς -6 και 10 συνεπώς (επειδή $t \geq 0$) ισχύει $t \in [0,10)$.

Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$0 \leq t < 10 \Leftrightarrow 0 \leq 40t \leq 400 \Leftrightarrow 600 \leq 600 + 40t < 1000 \Leftrightarrow 600 \leq S_\Lambda(t) < 1000$$

συνεπώς το M μπορεί να απέχει λιγότερο από 1000 μέτρα από το σημείο O και η χελώνα θα έχει διαρκώς προβάδισμα.

β.

i) Ο λαγός φτάνει τη χελώνα όταν $S_X(t) = S_\Lambda(t) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow t = 10\,min$.

ii) Αφού $S_\Lambda(12) = 1440$ και $S_X(12) = 1080$ άρα ο λαγός προηγείται της χελώνας κατά $1440 - 1080 = 360$ μέτρα.

iii) Πρέπει να βρούμε το χρόνο t ώστε να ισχύει:

$$S_\Lambda(t) = 2250 \Leftrightarrow 10t^2 = 2250 \Leftrightarrow t^2 = 225 \overset{t\geq 0}{\Leftrightarrow} t = 15\,min$$

229. **GI_A_ALG_4_5882**

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x-1)^2 - 4$ και $g(x) = |x-1| + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 9)

β. Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 4)

γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για εκείνα τα x για τα οποία ισχύει $f(x) > 0$. Συνεπώς έχουμε διαδοχικά:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 4 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0$$

Το τριώνυμο $x^2 - 2x - 3$ έχει ρίζες τους αριθμούς -1 και 3 άρα είναι $x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (3,+\infty)$.

β. Ισχύει ότι $|x-1| \geq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x. Συνεπώς αν προσθέσουμε και στα δύο μέλη τον αριθμό 2 παίρνουμε $|x-1| + 2 \geq 2 > 0$. Άρα τελικά $g(x) \geq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x πράγμα που σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$ βρίσκεται πάντοτε πάνω από τον άξονα $x'x$.

γ. Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 = |x-1| + 2 \Leftrightarrow |x-1|^2 - |x-1| - 6 = 0$.

Θέτουμε $|x-1| = \omega \geq 0$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2 - \omega - 6 = 0$ με ρίζες τους αριθμούς 3 και -2. Άρα αν $\omega = -2 \Leftrightarrow |x-1| = -2$ η οποία είναι αδύνατη, ενώ αν $\omega = 3 \Leftrightarrow |x-1| = 3 \Leftrightarrow (x-1 = 3 \text{ ή } x-1 = -3) \Leftrightarrow (x = 4 \text{ ή } x = -2)$.

Αν $x = 4$ τότε $f(4) = g(4) = 5$ άρα ένα σημείο τομής είναι το $A(4,5)$ ενώ, αν $\mathbf{x=-2}$ τότε $\mathbf{f(-2)=g(-2)=5}$ άρα ένα δεύτερο σημείο τομής είναι το $\mathbf{B(-2,5)}$.

230. **GI_A_ALG_4_5884**

Δίνεται το τριώνυμο $\mathbf{f(x)=x^2-6x+\lambda-3}$, με $\boldsymbol{\lambda\in\mathbb{R}}$.

α. Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα $\mathbf{\Delta}$ του τριωνύμου. (Μονάδες 5)

β. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 7)

γ. Αν $\mathbf{3<\lambda<12}$, τότε:

i) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες. (Μονάδες 6)

ii) Αν $\mathbf{x_1,x_2}$ με $\mathbf{x_1<x_2}$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και $\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{\mu}$ είναι δύο αριθμοί με $\mathbf{\kappa<0}$ και $\mathbf{x_1<\mu<x_2}$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\mathbf{\kappa f(\kappa)\mu f(\mu)}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. $\mathbf{\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma}$ οπότε

$$\mathbf{\Delta=(-6)^2-4(\lambda-3)=36-4\lambda+12=48-4\lambda=4(12-\lambda)}$$

β. Πρέπει $\mathbf{\Delta>0}$ επομένως: $\mathbf{4(12-\lambda)>0\Leftrightarrow}\boxed{\mathbf{\lambda<12}}$

γ.

i) Αφού είναι $\mathbf{\lambda<12}$ έχουμε $\mathbf{\Delta>0}$. Υπολογίζουμε τα $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}$.

$\mathbf{S=-\dfrac{\beta}{\alpha}\Rightarrow S=-(-6)=6}$ άρα $\mathbf{S>0}$ και $\mathbf{P=\dfrac{\gamma}{\alpha}\Rightarrow P=\dfrac{\lambda-3}{1}=\lambda-3}$ άρα $\mathbf{P>0}$ αφού είναι $\mathbf{\lambda>3}$

Επομένως: $\mathbf{\Delta>0}$, $\mathbf{S>0}$ και $\mathbf{P>0}$ άρα το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες.

ii)

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$, $\alpha=1>0$	$+$	0	$-$	0	$+$

Επειδή $\mathbf{\kappa<0}$, $\mathbf{x_1<\mu<x_2}$ και $\mathbf{x_1,x_2}$ θετικές είναι: $\mathbf{\kappa<0<x_1<\mu<x_2}$ (1)

Το πρόσημο του τριωνύμου $\mathbf{f(x)=x^2-6x+\lambda-3}$ είναι αρνητικό στο διάστημα εντός των ριζών και θετικό στα διαστήματα εκτός των ριζών καθώς $\mathbf{\alpha=1>0}$.

Επομένως $\mathbf{f(\mu)<0}$ και $\mathbf{f(\kappa)>0}$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε: $\mathbf{\kappa\cdot f(\kappa)\cdot\mu\cdot f(\mu)>0}$

231. **GI_A_ALG_4_5885**

α.

i) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου: $\mathbf{x^2+9x+18}$. (Μονάδες 4)

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $\mathbf{|x+3|+|x^2+9x+18|=0}$. (Μονάδες 7)

β.

i) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $\mathbf{x^2+9x+18}$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού $\mathbf{x}$. (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\mathbf{x}$ για τις οποίες ισχύει: $\mathbf{|x^2+9x+18|=-x^2-9x-18}$. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α.

i) $\mathbf{\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma \Rightarrow \Delta=9^2-4\cdot 1\cdot 18=9}$

$$\mathbf{x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Rightarrow x_1=\frac{-9+\sqrt{9}}{2} \Rightarrow x_1=-3} \text{ και}$$

$$\mathbf{x_1=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Rightarrow x_1=\frac{-9-\sqrt{9}}{2} \Rightarrow x_1=-6}$$

ii) Είναι $\mathbf{|x+3|\ge 0}$ και $\mathbf{|x^2+9x+18|\ge 0}$ επομένως η εξίσωση

$\mathbf{|x+3|+|x^2+9x+18|=0}$ αληθεύει μόνο όταν $\mathbf{|x+3|=0}$ και

$\mathbf{|x^2+9x+18|=0}$

Άρα $\mathbf{x=-3}$ και ($\mathbf{x=-3}$ ή $\mathbf{x=-6}$) οπότε $\mathbf{x=-3}$

β.

i)

x	$-\infty$		-6		-3		$+\infty$
$\underset{\alpha=1>0}{x^2+9x+18}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ii) $\mathbf{|x^2+9x+18|=-x^2-9x-18 \Leftrightarrow |x^2+9x+18|=-(x^2+9x+18)}$ το οποίο ισχύει όταν

$\mathbf{x^2+9x+18\le 0}$ επομένως (από πίνακα) $\mathbf{x\in(-\infty,-6]\cup[-3,+\infty)}$ $\mathbf{x}$

232. **GI_A_ALG_4_6143**

Στην Α’ τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται το Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα:

«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε $\mathbf{x}$ σειρές με $\mathbf{x-1}$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $\mathbf{x+3}$ σειρές με $\mathbf{x-3}$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α. Να βρείτε την τιμή του $\mathbf{x}$. (Μονάδες 6)

β. Να αποδείξετε η Α΄ τάξη έχει $\mathbf{90}$ μαθητές. (Μονάδες 6)

γ. Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω $\mathbf{90}$ μαθητές σε $\mathbf{\nu}$ ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε $\mathbf{2}$ μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν $\mathbf{2}$ παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του $\mathbf{\nu}$, δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Το πλήθος των μαθητών είναι: $\mathbf{x(x-1)}$ ή $\mathbf{(x+3)(x-3)-1}$

Επομένως: $\mathbf{x(x-1)=(x+3)(x-3)-1 \Leftrightarrow x^2-x=x^2-9-1 \Leftrightarrow x=10}$

β. Για $\mathbf{x=10}$ έχουμε: $\mathbf{10\cdot(10-1)=90\;10\cdot(10-1)=90}$

γ. Το πλήθος των μαθητών στις ομάδες εργασίας αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου με $\mathbf{\alpha_1=2}$, $\mathbf{\omega=2}$ και $\mathbf{S_\nu=90}$. Τότε:

$$\mathbf{S_\nu=\frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1+(\nu-1)\omega\right]}$$

$$\mathbf{\Rightarrow \frac{\nu}{2}\left[2\cdot 2+(\nu-1)\cdot 2\right]=90 \Leftrightarrow 2\nu^2+2\nu-180=0 \Leftrightarrow \nu^2+\nu-90=0}$$

Η τελευταία έχει διακρίνουσα $\mathbf{\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma \Rightarrow \Delta=1^2-4\cdot1\cdot(-90)=361}$ και ρίζες,

$\mathbf{\nu_1=\dfrac{-1+\sqrt{361}}{2}=9}$ και $\mathbf{\nu_2=\dfrac{-1-\sqrt{361}}{2}=-10}$ η οποία απορρίπτεται αφού ο $\mathbf{\nu}$ είναι φυσικός. Άρα θα δημιουργηθούν $\mathbf{9}$ ομάδες εργασίας.

233. **GI_A_ALG_4_6144**

Μια ημέρα, στο τμήμα $\mathbf{A_1}$ ενός Λυκείου, το $\mathbf{\frac{1}{4}}$ των μαθητών δεν έχει διαβάσει ούτε Άλγεβρα ούτε Γεωμετρία, ενώ το $\mathbf{\frac{1}{3}}$ των μαθητών έχει διαβάσει και τα δύο αυτά μαθήματα. Η καθηγήτρια των μαθηματικών επιλέγει τυχαία ένα μαθητή για να τον εξετάσει. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

$\mathbf{A:}$ ο μαθητής να έχει διαβάσει Άλγεβρα

$\mathbf{\Gamma:}$ ο μαθητής να έχει διαβάσει Γεωμετρία

α. Να παραστήσετε με διάγραμμα **Venn** και με χρήση της γλώσσας των συνόλων τα δεδομένα του προβλήματος. (Μονάδες 9)

β. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής:

i) να έχει διαβάσει ένα τουλάχιστον από τα δύο μαθήματα

ii) να έχει διαβάσει ένα μόνο από τα δυο μαθήματα. (Μονάδες 8)

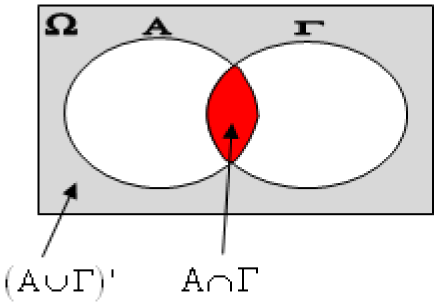
γ. Αν γνωρίζουμε επιπλέον ότι οι μισοί από τους μαθητές έχουν διαβάσει Γεωμετρία, να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής:

i) να έχει διαβάσει Γεωμετρία

ii) να έχει διαβάσει Άλγεβρα. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α.



- Ο μαθητής δεν έχει διαβάσει ούτε Άλγεβρα ούτε Γεωμετρία: $(\mathbf{A}\cup\mathbf{\Gamma})'$
- Ο μαθητής έχει διαβάσει Άλγεβρα και Γεωμετρία: $\mathbf{A}\cap\mathbf{\Gamma}$

β. $N(A\cup\Gamma)'=\frac{1}{4}N(\Omega)$ άρα $\frac{N(A\cup\Gamma)'}{N(\Omega)}=\frac{1}{4}$ οπότε $P(A\cup\Gamma)'=\frac{1}{4}$

$N(A\cap\Gamma)=\frac{1}{3}N(\Omega)$ άρα $\frac{N(A\cap\Gamma)}{N(\Omega)}=\frac{1}{3}$ οπότε $P(A\cap\Gamma)=\frac{1}{3}$

i) $P(A\cup\Gamma)=1-P(A\cup\Gamma)'=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

ii) $P\left[(A-\Gamma)\cup(\Gamma-A)\right]\overset{\frac{A-\Gamma,\Gamma-A}{\text{ασύμβ}}}{=}P(A-\Gamma)+P(\Gamma-A)=$

$=P(A)-P(A\cap\Gamma)+P(\Gamma)-P(A\cap\Gamma)=$

$P(A\cup\Gamma)-P(A\cap\Gamma)=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$

γ.

i) $N(\Gamma)=\frac{1}{2}N(\Omega)\Rightarrow\frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)}=\frac{1}{2}\Rightarrow P(\Gamma)=\frac{1}{2}$

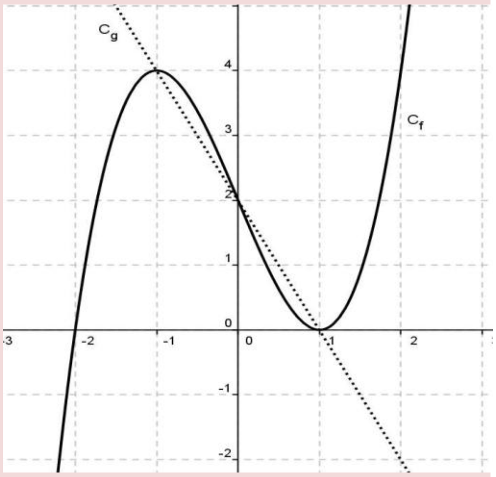
ii) $P(A\cup\Gamma)=P(A)+P(\Gamma)-P(A\cap\Gamma)$

$P(A)=P(A\cup\Gamma)-P(\Gamma)+P(A\cap\Gamma)$

$P(A)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{9-6+4}{12}=\frac{7}{12}$

234. **GI_A_ALG_4_6146**

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x)=-2x+2$.



Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:

α. Τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)=-2x+2$. (Μονάδες 6)

β. Τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$. (Μονάδες 6)

γ. Τις τιμές του x, για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g. (Μονάδες 6)

δ. Τις τιμές του x, για τις οποίες η παράσταση $A=\sqrt{f(x)+2x-2}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. Οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)=-2x+2$ είναι οι τετμημένες των σημείων όπου οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g τέμνονται. Επομένως, παρατηρώντας το σχήμα έχουμε: $x=-1, x=0, x=1$

β. Από το σχήμα είναι $f(-1)=4, f(0)=2, f(1)=0$

γ. Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g όταν $x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$ (παρατηρώντας το σχήμα).

δ. Πρέπει $f(x)+2x-2\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq -2x+2$ δηλαδή όταν η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g. Επομένως, παρατηρώντας το σχήμα έχουμε: $x\in[-1,0]\cup[1,+\infty)$.

235. **GI_A_ALG_4_6223**

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 5\lambda x -1=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:

i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$\left(x_1+x_2\right)^2-18-7\left(x_1\cdot x_2\right)^{24}=0$. (Μονάδες 9)

ii) Για $\lambda=1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A=x_1^2x_2-3x_1+4-3x_2+x_1x_2^2$ (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α. Είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(5\lambda)^2-4\cdot1\cdot(-1)=25\lambda^2+4>0$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. Άρα η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

β.

i) Είναι $x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=5\lambda$ και $x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=-1$. Επομένως:

$$\left(x_1+x_2\right)^2-18-7\left(x_1\cdot x_2\right)^{24}=0\Leftrightarrow(5\lambda)^2-18-7(-1)^{24}=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 25\lambda^2-18-7==0\Leftrightarrow25\lambda^2=25\ \Leftrightarrow\lambda^2=1\ \Leftrightarrow(\lambda=1\ \text{ή}\ \lambda=-1)$$

ii) Για $\lambda=1$ είναι $x_1+x_2=5$ και $x_1\cdot x_2=-1$. Επομένως:

$$A=x_1^2x_2-3x_1+4-3x_2+x_1x_2^2=x_1x_2(x_1+x_2)-3(x_1+x_2)+4$$
$$=(-1)\cdot5-3\cdot5+4=-5-15+4=-16$$

236. **GI_A_ALG_4_6224**

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2-4\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)x+16=0,\ \text{με}\ \lambda\in(0,4)$$

α. Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ. (Μονάδες 6)

ii) το εμβαδόν E του ορθογωνίου. (Μονάδες 6)

β. Να αποδείξετε ότι $\Pi\geq16$, για κάθε $\lambda\in(0,4)$. (Μονάδες 7)

γ. Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α.

i) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi=2x_1+2x_2=2(x_1+x_2)$. Όμως, από τις σχέσεις **Vieta** παίρνουμε ότι:

$$x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=4\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)\ \text{και}\ x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=16$$

Επομένως είναι:

$$\Pi=2(x_1+x_2)=2\cdot4\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)=8\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right),\lambda\in(0,4)$$

ii) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι: $E=x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=16$

β. Εργαζόμαστε με ισοδυναμίες: $\Pi \geq 16 \Leftrightarrow 8\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \geq 16 \Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{\lambda} \geq 2$

που ισχύει διότι $\lambda > 0$.

Θα μπορούσαμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι

$\lambda + \frac{1}{\lambda} \geq 2 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \geq 0$ η οποία ισχύει.

γ. Η περίμετρος Π γίνεται ελάχιστη όταν:

$$\Pi = 16 \Leftrightarrow 8\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = 16 \Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{\lambda} = 2 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Αλλά για $\lambda = 1$ η εξίσωση γίνεται $x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

Η εξίσωση έχει λοιπόν μία διπλή ρίζα, δηλαδή $x_1 = x_2 = 4$, που σημαίνει ότι οι πλευρές του ορθογωνίου είναι ίσες. Άρα το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

237. **GI_A_ALG_4_6226**

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 2x + \lambda(2 - \lambda) = 0, \text{ με } \lambda \in (0,2)$$

α. Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου. (Μονάδες 6)

ii) το εμβαδόν E του ορθογωνίου συναρτήσει του λ. (Μονάδες 6)

β. Να αποδείξετε ότι $E \leq 1$, για κάθε $\lambda \in (0,2)$. (Μονάδες 7)

γ. Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; (Μονάδες 6)

ΛΣΗ

α. Έχουμε το τριώνυμο $x^2 - 2x + \lambda(2-\lambda) = 0$ με $\alpha = 1$, $\beta = -2$ και $\gamma = \lambda(2-\lambda)$, οπότε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4 - 4\lambda(2-\lambda) = 4 - 8\lambda + 4\lambda^2 = 4\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0$$

και άρα έχει 2 πραγματικές ρίζες τις x_1, x_2.

i) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2)$. Όμως, από τις σχέσεις **Vieta** παίρνουμε ότι

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = 2 \text{ και } x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \lambda(2-\lambda).$$

Επειδή x_1, x_2 είναι πλευρές ορθογωνίου παραλληλογράμμου πρέπει να είναι θετικές, δηλαδή: $x_1, x_2 > 0$, άρα και $x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow 2 > 0$, που ισχύει, και

$$x_1 x_2 > 0 \Rightarrow \lambda(2-\lambda) > 0 \Rightarrow 2\lambda - \lambda^2 > 0 \Rightarrow -\lambda^2 + 2\lambda > 0$$

Θα λύσουμε την εξίσωση $-\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(2-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \text{ ή} \\ 2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \end{cases}$.

Όταν έχουμε ανίσωση 2^ου^ βαθμού κάνουμε πινακάκι:

λ	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$-\lambda^2+2\lambda$	-	0	+		-

Άρα $\lambda \in (0,2)$ και

συνεπώς είναι $\mathbf{\Pi = 2(x_1 + x_2) = 2 \cdot 2 = 4}$.

ii) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $\mathbf{E = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \lambda(2-\lambda)}$, $\mathbf{\lambda \in (0,2)}$

β. Εργαζόμαστε με ισοδυναμίες:

$$\mathbf{E \le 1 \Leftrightarrow \lambda(2-\lambda) \le 1 \Leftrightarrow 2\lambda - \lambda^2 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \lambda^2 - 2\lambda + 1 \Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{\lambda^2 - 2\lambda + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 \ge 0}$$

Η τελευταία σχέση ισχύει, οπότε ισχύει και η ζητούμενη ανισότητα.

γ. Το εμβαδόν $\mathbf{E}$ γίνεται μέγιστο, όταν:

$$\mathbf{E = 1 \Leftrightarrow \lambda(2-\lambda) = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1}$$

Αλλά για $\mathbf{\lambda = 1}$ η εξίσωση γίνεται

$$\mathbf{x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1}$$

Η εξίσωση έχει λοιπόν μία διπλή ρίζα, δηλαδή είναι $\mathbf{x_1 = x_2 = 1}$, που σημαίνει ότι οι πλευρές του ορθογωνίου είναι ίσες. Άρα το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

238. **GI_A_ALG_4_6227**

α. Να λύσετε την ανίσωση: $\mathbf{x^2 - 5x - 6 < 0}$. (Μονάδες 10)

β. Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $\mathbf{K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5 \cdot \frac{46}{47} - 6}$ και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 7)

γ. Αν $\mathbf{\alpha \in (-6, 6)}$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\mathbf{\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α. Για τη λύση της ανίσωσης $\mathbf{x^2 - 5x - 6 < 0}$, θα λύσουμε πρώτα την αντίστοιχη εξίσωση $\mathbf{x^2 - 5x + 6 = 0}$, με $\mathbf{\alpha = 1}$, $\mathbf{\beta = -5}$ και $\mathbf{\gamma = -6}$.

$$\mathbf{\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 25 + 24 = 49}$$

$\mathbf{x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{5 \pm 7}{2}}$. Άρα $\mathbf{x_1 = 6}$ και $\mathbf{x_2 = -1}$.

x	$-\infty$	-1		6	$+\infty$
x^2-5x-6	+	0	-	0	+

Επομένως:

$x \in (-1, 6)$

β. $K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5\cdot\frac{46}{47} - 6 = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 - 5\cdot\left(-\frac{46}{47}\right) - 6 < 0$ διότι ο αριθμός K προκύπτει αν στο τριώνυμο του α΄ ερωτήματος, αντικαταστήσουμε στη θέση του x τον αριθμό $-\frac{46}{47}$. Το τριώνυμο γίνεται αρνητικό όταν $x \in (-1, 6)$ οπότε εφόσον $-1 < -\frac{46}{47} < 6$, το πρόσημο του αριθμού K είναι αρνητικό.

γ. $\alpha \in (-6, 6) \Leftrightarrow -6 < \alpha < 6 \Leftrightarrow 0 \le |\alpha| < 6 \Rightarrow |\alpha| \in [0,6) \subset (-1,6)$, επομένως θέτοντας όπου x το $|\alpha|$ στο τριώνυμο του α΄ ερωτήματος, προκύπτει ότι: $|\alpha|^2 - 5|\alpha| - 6 < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 5|\alpha| - 6 < 0 \Leftrightarrow \Lambda < 0$

239. **GI_A_ALG_4_6228**

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^o$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x, y τέτοια, ώστε: $x + y = 10$.

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο: $E(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x)$, $x \in (0, 10)$. (Μονάδες 9)

β. Να αποδείξετε ότι $E(x) \le \frac{25}{2}$ για κάθε $x \in (0, 10)$. (Μονάδες 8)

γ. Για ποια τιμή του $x \in (0, 10)$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$; Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο $AB\Gamma$; (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α. $x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$

Επειδή $x, y > 0$ έχουμε: $x > 0$ και $y > 0 \Leftrightarrow 10 - x > 0 \Leftrightarrow x < 10$. Το εμβαδόν τριγώνου δίνεται από τον τύπο: $E_{\tau\rho\iota\gamma.} = \frac{1}{2}(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta)\cdot(\acute{\upsilon}\psi o\varsigma) \Rightarrow$

$E(x) = \frac{1}{2}x\cdot y = \frac{1}{2}x\cdot(10 - x) = \frac{1}{2}(10x - x^2)$ με $x \in (0, 10)$

β. Έχουμε:

$$E(x) - \frac{25}{2} = \frac{1}{2}(10x - x^2) - \frac{25}{2} = \frac{10x - x^2 - 25}{2} = -\frac{x^2 - 10x + 25}{2} = -\frac{(x-5)^2}{2} \le 0$$

Άρα: $E(x) - \frac{25}{2} \le 0 \Leftrightarrow E(x) \le \frac{25}{2}$ για κάθε $x \in (0, 10)$.

γ. $E(x) = \frac{25}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(10x - x^2) = \frac{25}{2} \Leftrightarrow 10x - x^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

Άρα το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο όταν $x = 5$ και $y = 10 - x = 10 - 5 = 5$, οπότε το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι και ισοσκελές.

240. **GI_A_ALG_4_6229**

Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία **TAXI** με το όνομα **RED** χρεώνει 1 ευρώ με την είσοδο στο **TAXI** και $0,6$ ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης.

Μια άλλη εταιρεία **TAXI** με το όνομα **YELLOW** χρεώνει 2 ευρώ με την είσοδο στο **TAXI** και $0,4$ ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης.

Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

α.

i) Αν $f(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία **RED** για μια διαδρομή x χιλιομέτρων, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)	0	2	8
f(x) (ευρώ)			

(Μονάδες 3)

ii) Αν $g(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία **YELLOW** για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)			
g(x) (ευρώ)	2	3,2	4,8

(Μονάδες 3)

β. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g και τους τύπους τους $f(x), g(x)$. (Μονάδες 8)

γ. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας **RED** είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

δ. Αν δυο πελάτες A και B μετακινηθούν με την εταιρεία **RED** και ο πελάτης A διανύσει 3 χιλιόμετρα παραπάνω από τον B, να βρείτε πόσο παραπάνω θα πληρώσει ο A σε σχέση με τον B. (Μονάδες 3)

ΛΥΣΗ

α.

i) Αφού το ταξί έκανε $\mathbf{0}$ χιλ. τότε ο πελάτης πληρώνει μόνο την είσοδο $\mathbf{1}$ ευρώ.
Αφού το ταξί έκανε $\mathbf{2}$ χιλ. τότε ο πελάτης πληρώνει $\mathbf{2\cdot 0,6=1,2}$ ευρώ και την είσοδο $\mathbf{1}$ ευρώ, άρα σύνολο $\mathbf{2,2}$ ευρώ.
Αφού το ταξί έκανε $\mathbf{8}$ χιλ. τότε ο πελάτης πληρώνει $\mathbf{8\cdot 0,6=4,8}$ ευρώ και για την είσοδο $\mathbf{1}$ ευρώ, άρα σύνολο $\mathbf{5,8}$ ευρώ.

x (km)	0	2	8
f(x) (ευρώ)	1	2,2	5,8

ii) Αφού ο πελάτης πλήρωσε $\mathbf{2}$ ευρώ και η εταιρεία χρεώνει $\mathbf{2}$ ευρώ την είσοδο τότε το ταξί δεν έκανε καθόλου χιλ.
Αφού ο πελάτης πλήρωσε $\mathbf{3,2}$ ευρώ και η εταιρεία χρεώνει $\mathbf{2}$ ευρώ την είσοδο τότε ο πελάτης πλήρωσε $\mathbf{1,2}$ ευρώ για τα χιλ. που έκανε.
Δεδομένου ότι το κάθε χιλ. αντιστοιχεί σε $\mathbf{0,4}$ ευρώ, το ταξί έκανε $\mathbf{1,2:0,4=3}$ χιλ.
Αφού ο πελάτης πλήρωσε $\mathbf{4,8}$ ευρώ και η εταιρεία χρεώνει $\mathbf{2}$ ευρώ την είσοδο, ο πελάτης πλήρωσε $\mathbf{2,8}$ ευρώ για τα χιλ. που έκανε. Δεδομένου ότι το κάθε χιλ. αντιστοιχεί σε $\mathbf{0,4}$ ευρώ, το ταξί έκανε $\mathbf{2,8:0,4=7}$ χιλ.

x (km)	0	3	7
g(x) (ευρώ)	2	3,2	4,8

β. Αφού οι παραπάνω τιμές των χιλ. ($\mathbf{x}$) ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από $\mathbf{15}$ χιλιόμετρα , τότε $\mathbf{A_f = A_g = [0,15)}$

Θα βρούμε τον τύπο της συνάρτησης $\mathbf{f}$.
Αφού για κάθε χιλ ο πελάτης πληρώνει $\mathbf{0,6}$ ευρώ, στα ($\mathbf{x}$) χιλ. θα πληρώσει $\mathbf{0,6x}$ ευρώ. Ο πελάτης όμως πληρώνει και $\mathbf{1}$ ευρώ με την είσοδο στο ταξί, άρα συνολικά πληρώνει $\mathbf{0,6x+1}$ ευρώ. Άρα $\mathbf{f(x)=0,6x+1}$.

Θα βρούμε τον τύπο της συνάρτησης $\mathbf{g}$.
Αφού για κάθε χιλ ο πελάτης πληρώνει $\mathbf{0,4}$ ευρώ, στα ($\mathbf{x}$) χιλ. θα πληρώσει $\mathbf{0,4x}$ ευρώ. Ο πελάτης όμως πληρώνει και $\mathbf{2}$ ευρώ με την είσοδο στο ταξί, άρα συνολικά πληρώνει $\mathbf{0,4x+2}$ ευρώ. Άρα $\mathbf{g(x)=0,4x+2}$.

γ. Οι συναρτήσεις $\mathbf{f,g}$ έχουν τύπους της μορφής $\mathbf{y=\alpha x+\beta}$, άρα οι γραφικές τους παραστάσεις βρίσκονται πάνω σε ευθείες γραμμές.
Για να βρούμε τις γραφικές παραστάσεις των $\mathbf{f,g}$ θα φτιάξουμε για την κάθε μία τον πίνακα τιμών.
Για τη συνάρτηση $\mathbf{f}$ έχουμε:

χ	0	15
y	1	10

Για $\mathbf{x=15}$ έχουμε $\mathbf{y=0,6+1=9+1=10}$.
Προσοχή την τιμή $\mathbf{x=15}$ η συνάρτηση δεν μπορεί να την πάρει οπότε στη

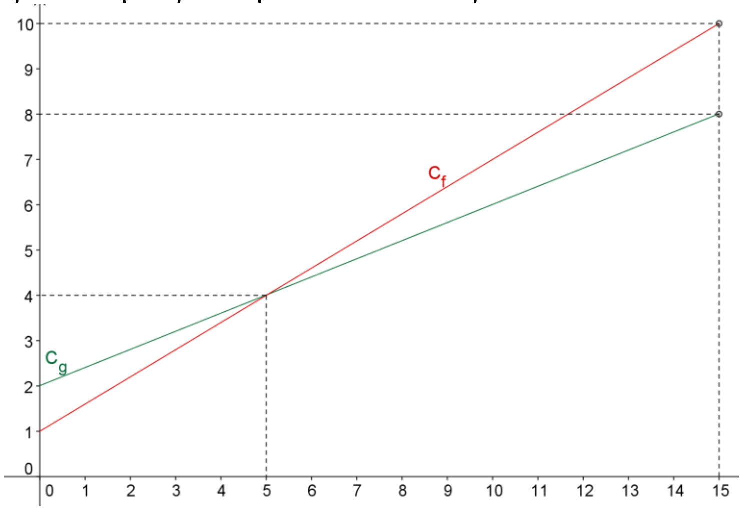
γραφική παράσταση θα βάλουμε κυκλάκι αντί για κουκίδα.

Για τη συνάρτηση $\mathbf{g}$ έχουμε:

χ	0	15
y	1	8

Για $\mathbf{x=15}$ έχουμε $\mathbf{y=0,4+2=6+2=8}$.

Προσοχή την τιμή $\mathbf{x=15}$ η συνάρτηση δεν μπορεί να την πάρει οπότε στη γραφική παράσταση θα βάλουμε κυκλάκι αντί για κουκίδα.



Η εταιρεία **RED** ($\mathbf{f(x)}$) είναι οικονομικότερη για διαδρομές μικρότερες των **5 km** διότι όπως βλέπουμε και στη γραφική της παράσταση, για $\mathbf{x<5}$ ισχύει ότι $\mathbf{f(x)<g(x)}$.

(η $\mathbf{C_f}$ είναι κάτω από τη $\mathbf{C_g}$)

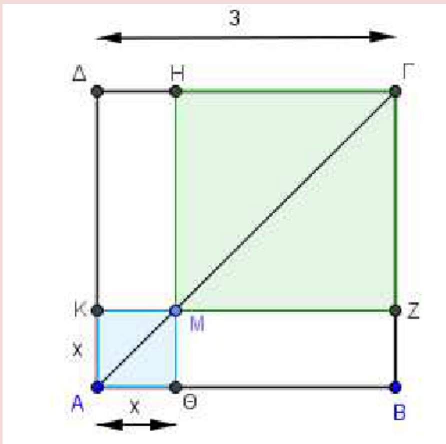
δ. Αν ο πελάτης **Β** μετακινηθεί **α km** (με $\mathbf{0\le\alpha<12}$) τότε θα πληρώσει $\mathbf{1+0,6\alpha}$ €

Ο πελάτης **Α** θα μετακινηθεί προφανώς $\mathbf{(\alpha+3)km}$ οπότε το ποσό που θα πληρώσει είναι $\mathbf{1+0,6\,(\alpha+3)=1+0,6\alpha+1,8=(1+0,6\alpha)+1,8}$ €

Συνεπώς ο πελάτης **Α** θα πληρώσει **1,8** € περισσότερα από τον πελάτη **Β**.

241. **GI_A_ALG_4_6231**

Στο διπλανό σχήμα το **ΑΒΓΔ** είναι τετράγωνο πλευράς $\mathbf{AB=3}$ και το **Μ** είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου **ΑΓ**. Έστω **Ε** το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος.



α. Να αποδείξετε ότι $\mathbf{E=2x^2-6x+9}$ με $\mathbf{x\in(0,3)}$. (Μονάδες 9)

β. Να αποδείξετε ότι $E \geq \frac{9}{2}$ για κάθε $x \in (0, 3)$. (Μονάδες 8)

γ. Για ποια θέση του M πάνω στην $A\Gamma$ το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α. Η πλευρά του τετραγώνου $AKM\Theta$ έχει μήκος (x) ενώ η πλευρά του τετραγώνου $H\Gamma ZM$ έχει μήκος ($3-x$), άρα πρέπει $x>0$ και $3-x>0 \Rightarrow x<3$, οπότε $0<x<3$

$E = E_{AKM\Theta} + E_{H\Gamma ZM} = x^2 + (3-x)^2 = x^2 + x^2 - 6x + 9 = 2x^2 - 6x + 9$ με $x \in (0, 3)$

β. Υπολογίζουμε το πρόσημο της διαφοράς $E - \frac{9}{2}$ κι έχουμε:

$$E - \frac{9}{2} = 2x^2 - 6x + 9 - \frac{9}{2} = \frac{4x^2 - 12x + 18 - 9}{2} = \frac{4x^2 - 12x + 9}{2} = \frac{(2x-3)^2}{2} \geq 0$$

Επομένως: $E - \frac{9}{2} \geq 0 \Leftrightarrow E \geq \frac{9}{2}$ για κάθε $x \in (0, 3)$.

γ. $E = \frac{9}{2} \Leftrightarrow E - \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{(2x-3)^2}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. Η διαγώνιος του τετραγώνου, μπορεί να προσδιοριστεί με τη βοήθεια του Πυθαγορείου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$:

$A\Gamma^2 = 3^2 + 3^2 \Leftrightarrow A\Gamma^2 = 18 \Leftrightarrow A\Gamma = 3\sqrt{2}$

Αν $x = \frac{3}{2}$, τότε ομοίως στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Theta M$ προκύπτει:

$$AM^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow AM^2 = \frac{18}{4} \Leftrightarrow AM = \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{A\Gamma}{2}$$

Συνεπώς για να γίνει το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος ελάχιστο, θα πρέπει το σημείο M να είναι στο μέσο της διαγωνίου του τετραγώνου.

242. **GI_A_ALG_4_6678**

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α, β και εμβαδόν E, τέτοια ώστε οι αριθμοί α, E, β, με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

α. Να αποδείξετε ότι $E = 1$. (Μονάδες 10)

β. Αν $\alpha + \beta = 10$ τότε:

i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τα μήκη α, β. (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τα μήκη α, β. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Το $\mathbf{E}$ είναι εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου με μήκη πλευρών α,β, θα ισχύει:

$$E = \alpha \cdot \beta \quad (1)$$

Οι αριθμοί α , E , β με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου οπότε ισχύει: $E^2 = \alpha \cdot \beta \quad (2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι εφόσον τα δεύτερα μέλη είναι ίσα, θα είναι και τα πρώτα μέλη ίσα, άρα:

$E^2 = E \Leftrightarrow E^2 - E = 0 \Leftrightarrow E(E-1) = 0 \Leftrightarrow E = 0 \text{ ή } E = 1$

Επειδή όμως το E εκφράζει εμβαδόν προφανώς είναι $E > 0$, άρα καταλήγουμε ότι: $E = 1$

β.

i) $S = \alpha + \beta = 10$ και $P = \alpha \cdot \beta = E^2 = 1$

Άρα η δευτεροβάθμια εξίσωση με λύσεις τους αριθμούς α,β είναι:

$x^2 - S \cdot x + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10 \cdot x + 1 = 0$

ii) Η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 100 - 4 = 96 = 16 \cdot 6 = \left(4\sqrt{6}\right)^2$ και οι ρίζες $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{10 \pm 4\sqrt{6}}{2}$ άρα $x_1 = \dfrac{10 + 4\sqrt{6}}{2} = 5 + 2\sqrt{6}$ και $x_2 = \dfrac{10 - 4\sqrt{6}}{2} = 5 - 2\sqrt{6}$

Άρα $\alpha = 5 + 2\sqrt{6}$ και $\beta = 5 - 2\sqrt{6}$.

243. **GI_A_ALG_4_6859**

Δίνονται οι αριθμοί 2 , x , 8 με $x > 0$.

α. Να βρείτε την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2 , x , 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου; (Μονάδες 5)

β. Να βρείτε τώρα την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2 , x , 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου; (Μονάδες 5)

γ. Αν (α_ν) είναι η αριθμητική πρόοδος $2,5,8,11,\ldots$ και (β_ν) είναι η γεωμετρική πρόοδος 2 , 4 , 8 , 16 , ... τότε:

i) Να βρείτε το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν). (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε την τιμή του ν ώστε, για το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν) να ισχύει: $2(S_\nu + 24) = \beta_7$. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α. Αφού οι αριθμοί 2 , x , 8 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου έχουμε:

$x=\frac{2+8}{2}=5$ και $\omega=x-2=5-2=3$.

β. Αφού οι αριθμοί $2\ ,\ x\ ,\ 8$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου έχουμε:

$$x^2=2\cdot 8\Rightarrow x^2=16\overset{x>0}{\Rightarrow}x=\sqrt{16}\Rightarrow x=4 \text{ και } \lambda=\frac{x}{2}=\frac{4}{2}=2.$$

γ.

i) Ο τύπος που δίνει το άθροισμα των ν πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου $(\alpha_\nu):2\ ,\ 5\ ,\ 8\ ,\ \ldots$ είναι:

$$S_\nu=\frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1+(\nu-1)\omega\right]\Rightarrow$$

$$S_\nu=\frac{\nu\cdot\left[2\cdot 2+(\nu-1)\cdot 3\right]}{2}=\frac{\nu\cdot(4+3\nu-3)}{2}=\frac{\nu\cdot(1+3\nu)}{2}=\frac{\nu+3\nu^2}{2}$$

ii) Η γεωμετρική πρόοδος $(\beta_\nu):2\ ,\ 5\ ,\ 8\ ,\ \ldots$ έχει γενικό όρο

$$\beta_\nu=\beta_1\lambda^{\nu-1}\overset{\nu=7}{\Rightarrow}\beta_7=\beta_1\lambda^6.\ 2(S_\nu+24)=\beta_7\Leftrightarrow 2\left(\frac{\nu+3\nu^2}{2}+24\right)=\beta_1\cdot\lambda^6\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \nu+3\nu^2+48=2\cdot 2^6\Leftrightarrow \nu+3\nu^2+48=128\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\nu^2+\nu-80=0$$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1+960=961$$

$$\nu_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-1\pm 31}{6} \text{ άρα } \nu_1=5 \text{ ή } \nu_2=-\frac{16}{3}\notin\mathbb{N} \text{ Άρα } \nu=5.$$

244. **GI_A_ALG_4_7263**

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2-6x+\lambda-7$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$

α. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 7)

β.

i) Αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος $S=x_1+x_2$ των ριζών και να εκφράσετε συναρτήσει του λ το γινόμενο $P=x_1x_2$ των ριζών. (Μονάδες 2)

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε λ με $7<\lambda<16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες. Ποιο είναι τότε το πρόσημο των ριζών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

γ.

i) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $x^2-6|x|+\lambda=7\quad(1)$ έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 8)

ii) Έχει η εξίσωση (1) για $\lambda=3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

ΛΥΣΗ

α. Το τριώνυμο $\mathbf{x^2-6x+\lambda-7}$, $\boldsymbol{\lambda\in\mathbb{R}}$, $\boldsymbol{\lambda\in\mathbb{R}}$ θα έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο $\boldsymbol{\Delta\geq 0}$. Έχουμε:

$$\boldsymbol{\Delta\geq 0\Leftrightarrow\beta^2-4\alpha\gamma\geq 0\Leftrightarrow 36-4\cdot(\lambda-7)\geq 0\Leftrightarrow 36-4\lambda+28\geq 0\Leftrightarrow 4\lambda\leq 64\Leftrightarrow\lambda\leq 16}$$

β.

i) $\mathbf{S=-\frac{\beta}{\alpha}=\frac{6}{1}=6}$, $\mathbf{P=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\lambda-7}{1}=\lambda-7}$

ii) Αν $\boldsymbol{\lambda<16\Leftrightarrow\Delta>0}$ (σύμφωνα με το α΄ ερώτημα) οπότε το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

Αν $\boldsymbol{\lambda>7\Leftrightarrow P>0}$ οπότε το τριώνυμο έχει ρίζες ομόσημες.

Συνεπώς για κάθε λ με $\boldsymbol{7<\lambda<16}$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες.

Επειδή όμως $\mathbf{S=6>0}$, άρα οι ρίζες του τριωνύμου είναι θετικές.

γ.

i) $\mathbf{x^2-6|x|+\lambda=7\Leftrightarrow|x|^2-6|x|+\lambda-7=0\ (1)}$

Θέτουμε $\boldsymbol{\omega=|x|}$ και η (1) γίνεται: $\boldsymbol{\omega^2-6\omega+\lambda-7=0\ (2)}$

Για να έχει η εξίσωση (1) τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες θα πρέπει η (2) να έχει $\mathbf{2}$ θετικές και άνισες ρίζες. Δηλαδή θα πρέπει (σύμφωνα και με τα προηγούμενα ερωτήματα) να ισχύει: $\boldsymbol{7<\lambda<16}$.

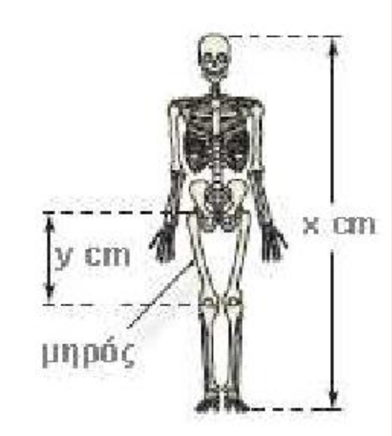
Αν $\boldsymbol{7<\lambda<16}$ τότε η (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

ii) Αν $\boldsymbol{\lambda=3\sqrt{10}}$ η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες διότι:

$$\mathbf{49<90<256\Leftrightarrow 7^2<\left(3\sqrt{10}\right)^2<16^2\Leftrightarrow\sqrt{7^2}<\sqrt{\left(3\sqrt{10}\right)^2}<\sqrt{16^2}\Leftrightarrow 7<\lambda<16}.$$

245. **GI_A_ALG_4_7502**

Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους $\mathbf{y}$ (σε $\mathbf{cm}$) οστού του μηρού και του ύψους $\mathbf{x}$ (σε $\mathbf{cm}$) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του:



Γυναίκα: $\mathbf{y=0,43x-26}$

Άνδρας: $\mathbf{y=0,45x-31}$

α. Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους $\mathbf{38,5}$ $\mathbf{cm}$ που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας. (Μονάδες 8)

β. Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου $\mathbf{164\ \ cm}$. Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους $\mathbf{42,8\ cm}$ που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ. Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α. Πρέπει: $\mathbf{y = 0,43x - 26 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2600}{43}}$ για τις γυναίκες

$\mathbf{y = 0,45x - 31 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3100}{45}}$ για τους άντρες

$\mathbf{38,5 = 0,43 \cdot x - 26 \Leftrightarrow 0,43 \cdot x = 64,5 \Leftrightarrow x = 150}$, άρα το ύψος της γυναίκας είναι $\mathbf{150\ cm}$

β. Αν το μηριαίο οστό των $\mathbf{42,8\ cm}$ ανήκει σε άντρα ύψους $\mathbf{164\ cm}$, θα πρέπει αντικαθιστώντας τις τιμές στον τύπο της συνάρτησης που αναφέρεται στους άντρες, η συνάρτηση να επαληθεύεται. Έχουμε λοιπόν:

$$\mathbf{y = 0.45x - 31 \overset{\substack{y=42,8\ cm\\ x=164\ cm}}{\Rightarrow} 42,8 = 0,45 \cdot 164 - 31 \Leftrightarrow 42,8 = 73,8 - 31 \Leftrightarrow 42,8 = 42,8}$$

(που ισχύει)

Επομένως το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού προέρχονται από το ίδιο άτομο.

γ. Αν ένας άντρας και μια γυναίκα ίσου ύψους είχαν ίσα μηριαία οστά, τότε:

$\mathbf{0,43x - 26 = 0,45x - 31 \Leftrightarrow 0,02x = 5 \Leftrightarrow x = 250}$

Αν λοιπόν, ένας άντρας και μια γυναίκα ίσου ύψους είχαν ίσα μηριαία οστά, τότε θα έπρεπε να είχαν ύψος $\mathbf{250\ cm}$, πράγμα το οποίο δεν είναι δυνατόν να συμβεί στην πραγματικότητα! Άρα δεν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους.

246. **GI_A_ALG_4_7503**

Οι αριθμοί: $\mathbf{x^2 + 5}$, $\mathbf{x^2 + x}$, $\mathbf{2x + 4}$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού $\mathbf{x}$. (Μονάδες 6)

β. Αν $\mathbf{x = 3}$ και ο αριθμός $\mathbf{x^2 + 5}$ είναι ο 4^{ος} όρος της προόδου, να βρείτε:

i) Τη διαφορά $\boldsymbol{\omega}$ της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 5)

ii) Τον πρώτο όρο της προόδου. (Μονάδες 6)

iii) Το άθροισμα $S = \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{17} + ... + \alpha_{24}$. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α. Αφού οι αριθμοί $x^2 + 5$, $x^2 + x$, $2x + 4$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, ισχύει:

$$x^2 + x = \frac{x^2 + 5 + 2x + 4}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2x = x^2 + 2x + 9 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

β.

i) $\alpha_4 = 3^2 + 5 \Leftrightarrow \alpha_4 = 14$

$\alpha_5 = 3^2 + 3 \Leftrightarrow \alpha_5 = 12$

$\omega = \alpha_5 - \alpha_4 = 12 - 14 = -2$

ii) $\alpha_4 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 - 3 \cdot 2 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 = 14 + 6 \Leftrightarrow \alpha_1 = 20$

iii) Έχουμε:

$$S = \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{17} + ... + \alpha_{24} \Rightarrow S = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_{24}) - (\alpha_1 + \ldots + \alpha_{14}) \Rightarrow$$

$$S = S_{24} - S_{14} = \frac{24 \cdot (2\alpha_1 + 23 \cdot \omega)}{2} - \frac{14 \cdot (2\alpha_1 + 13 \cdot \omega)}{2} =$$

$$12 \cdot (2 \cdot 20 - 23 \cdot 2) - 7 \cdot (2 \cdot 20 - 13 \cdot 2) =$$

$$= 12 \cdot (40 - 46) - 7 \cdot (40 - 26) = 12 \cdot (-6) - 7 \cdot 14 = -72 - 98 = -170$$

247. **GI_A_ALG_4_7504**

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν), ο 3ος όρος είναι $\alpha_3 = 8$ και ο 8ος όρος είναι $\alpha_8 = 23$.

α. Να αποδείξετε ότι ο 1ος όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1 = 2$ και η διαφορά της $\omega = 3$. (Μονάδες 9)

β. Να υπολογίσετε τον $31^{ο}$ όρο της. (Μονάδες 6)

Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S = (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 2) + (\alpha_3 + 3) + ... + (\alpha_{31} + 31)$

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Γνωρίζουμε ότι ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$. Επομένως:

$$\alpha_3 = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 + 2\omega = 8 \ (1)$$

$$\alpha_8 = 23 \Leftrightarrow \alpha_1 + 7\omega = 23 \ (2)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) έχουμε:

$(2)-(1)$: $5\omega = 15 \Leftrightarrow \omega = 3$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) έχουμε: $\alpha_1 + 2\cdot 3 = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 = 8-6 \Leftrightarrow \alpha_1 = 2$

β. Από την ίδια σχέση $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$ για $\nu = 31$ παίρνουμε:

$\alpha_{31} = \alpha_1 + 30\omega = 2 + 30\cdot 3 = 92$

γ. $S = (\alpha_1+1)+(\alpha_2+2)+\ldots+(\alpha_{31}+31) = (\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{31}) + (1+2+3+\ldots+31)$ (3)

Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο β_ν με $\beta_1 = 1$ και $\omega = 1$.

Τότε: $1+2+3+\ldots+31 = S_{31}$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο $S_\nu = \frac{\nu}{2}(\beta_1+\beta_\nu)$ για $\nu = 31$

$$S_{31} = \frac{31\cdot(\beta_1+\beta_{31})}{2} = \frac{31\cdot(1+31)}{2} = \frac{31\cdot 32}{2} = 31\cdot 16 = 496.$$

Όμοια για την αριθμητική πρόοδο α_ν ισχύει: $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{31} = S_{31}$

Από τον τύπο $S_\nu = \frac{\nu}{2}(\beta_1+\beta_\nu)$

$$S_{31} = \frac{31\cdot(\alpha_1+\alpha_{31})}{2} = \frac{31\cdot(2+92)}{2} = \frac{31\cdot 94}{2} = 31\cdot 47 = 1457$$

Επομένως:

$(3) \Leftrightarrow S = 1457 + 496 = 1953$

248. **GI_A_ALG_4_7506**

Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε m) στο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση: $y = 60t - 5t^2$

α. Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;

β. Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος $y = 175m$;

γ. Να βρεθεί το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από $100\ m$.

ΛΥΣΗ

α. Όταν η σφαίρα επανέλθει στο έδαφος θα ισχύει:

$\mathbf{y = y(t) = 0 \Leftrightarrow 60t - 5t^2 = 0 \Leftrightarrow 5t(12-t) = 0 \Leftrightarrow 5t = 0}$ ή $\mathbf{12 - t = 0 \Leftrightarrow t = 0}$ ή $\mathbf{t = 12}$.

Προφανώς η χρονική στιγμή $\mathbf{t = 0}$ αντιστοιχεί στην αρχή της κίνησης της σφαίρας, συνεπώς η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος μετά από $\mathbf{t = 12 sec}$.

β. Τη στιγμή που η σφαίρα θα βρεθεί σε ύψος **175 m** θα ισχύει:

$\mathbf{y = y(t) = 175 \Leftrightarrow 60t - 5t^2 = 175 \Leftrightarrow -5t^2 + 60t - 175 = 0 \overset{:(-5)}{\Leftrightarrow} t^2 - 12t + 35 = 0}$. Η τελευταία είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς $\mathbf{t}$ με διακρίνουσα $\mathbf{\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 35 =}$ $\mathbf{144 - 140 = 4 > 0}$, συνεπώς έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, τις:

$\mathbf{t_{1,2} = \dfrac{-(-12) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \dfrac{12 \pm 2}{2}}$, δηλαδή $\mathbf{t_1 = \dfrac{12+2}{2} = \dfrac{14}{2} = 7}$ ή $\mathbf{t_1 = \dfrac{12-2}{2} = \dfrac{10}{2} = 5}$. Άρα η σφαίρα θα βρεθεί σε ύψος **175 m** τις χρονικές στιγμές $\mathbf{t = 5 sec}$ και $\mathbf{t = 7 sec}$.

γ. Η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από **100 m** όταν ισχύει: $\mathbf{y = y(t) > 100 \Leftrightarrow}$ $\mathbf{60t - 5t^2 > 100 \Leftrightarrow t^2 - 12t + 20 < 0 \ (1)}$. Το τριώνυμο $\mathbf{t^2 - 12t + 20}$ έχει διακρίνουσα $\mathbf{\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 144 - 80 = 64 > 0}$ και ρίζες $\mathbf{t_{1,2} = \dfrac{-(-12) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \dfrac{12 \pm 8}{2}}$ δηλαδή

$\mathbf{t_1 = \dfrac{12+8}{2} = \dfrac{20}{2} = 10}$ και $\mathbf{t_2 = \dfrac{12-8}{2} = \dfrac{4}{2} = 2}$.

Από τον ακόλουθο πίνακα προσήμων του τριωνύμου:

t	$-\infty$		2		10		$+\infty$
$\mathbf{t^2 - 12t + 20}$		+	0	–	0	+	

συμπεραίνουμε ότι η ανίσωσή $\mathbf{(1)}$ ισχύει όταν $\mathbf{t \in (2,10)}$. Συνεπώς η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από **100 m** μεταξύ των χρονικών στιγμών **2 sec** και **10 sec**.

249. **GI_A_ALG_4_7510**

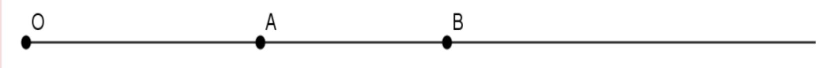
Τα σπίτια τεσσάρων μαθητών, της Άννας, του Βαγγέλη, του Γιώργου και της Δήμητρας βρίσκονται πάνω σε ένα ευθύγραμμο δρόμο, ο οποίος ξεκινάει από το σχολείο τους. Οι αποστάσεις των τεσσάρων σπιτιών από το σχολείο, $\mathbf{s_A}$, $\mathbf{s_B}$, $\mathbf{s_\Gamma}$ και $\mathbf{s_\Delta}$ αντίστοιχα, ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\mathbf{s_A < s_B}$$

$$\mathbf{s_\Gamma = \frac{s_A + 3s_B}{4}} \quad \text{και}$$

$$\mathbf{|s_\Delta - s_A| = |s_\Delta - s_B|}$$

Στον παρακάτω άξονα, το σχολείο βρίσκεται στο σημείο **Ο** και τα σημεία **Α , Β** παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών της Άννας και του Βαγγέλη αντίστοιχα.



α. Να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα τα σημεία Γ και Δ, που παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών του Γιώργου και της Δήμητρας. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β. Αν επιπλέον, οι τιμές των αποστάσεων s_A, s_B σε $\mathbf{km}$ ικανοποιούν τις σχέσεις

$$s_A + s_B = 1{,}4 \text{ και } s_A \cdot s_B = 0{,}45 \text{ τότε:}$$

i) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς s_A, s_B. (Μονάδες 6)

ii) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις s_A, s_B, s_Γ και s_Δ. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε $s_A < s_B \Leftrightarrow s_A - s_B < 0$

Για να βρούμε την σχετική θέση των σημείων A, B και Γ, αρκεί να συγκρίνουμε τις αποστάσεις των 3 σπιτιών από το σχολείο, s_A, s_B και s_Γ.

Αυτό μπορεί να συμβεί αν βρούμε το πρόσημο των διαφορών $s_A - s_\Gamma$ και $s_B - s_\Gamma$

Έτσι $s_A - s_\Gamma = s_A - \dfrac{s_A + 3s_B}{4} = \dfrac{4s_A - (s_A + 3s_B)}{4} = \dfrac{3s_A - 3s_B}{4} = \dfrac{3(s_A - s_B)}{4} < 0$

Άρα $s_A - s_\Gamma < 0 \Leftrightarrow s_A < s_\Gamma$

Όμοια $s_B - s_\Gamma = s_B - \dfrac{s_A + 3s_B}{4} = \dfrac{4s_B - (s_A + 3s_B)}{4} = \dfrac{s_B - s_A}{4} > 0$

Άρα $s_B - s_\Gamma > 0 \Leftrightarrow s_B > s_\Gamma$

Συνεπώς $s_A < s_\Gamma < s_B$, δηλαδή το σημείο Γ βρίσκεται μεταξύ των Α και Β.

Επίσης η σχέση $|s_\Delta - s_A| = |s_\Delta - s_B| \Leftrightarrow d(s_\Delta, s_A) = d(s_\Delta, s_B)$, όπου A, B, Δ συνευθειακά σημεία, σημαίνει ότι το Δ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB, άρα $s_A < s_\Delta < s_B$.

Τέλος για να βρούμε τη σχετική θέση των Γ και Δ βρούμε το πρόσημο των διαφορών $s_\Delta - s_\Gamma$

Έχουμε: $|s_\Delta - s_A| = |s_\Delta - s_B| \Leftrightarrow s_\Delta - s_A = s_\Delta - s_B$ ή $s_\Delta - s_A = -s_\Delta + s_B$

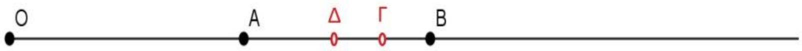
$\Leftrightarrow s_A = s_B$ (απορρίπτεται) ή $2s_\Delta = s_A + s_B \Leftrightarrow s_\Delta = \dfrac{s_A + s_B}{2}$.

$s_\Delta - s_A = -(s_\Delta - s_B) \Leftrightarrow s_\Delta - s_A = -s_\Delta + s_B \Leftrightarrow 2s_\Delta = s_A + s_B \Leftrightarrow s_\Delta = \dfrac{s_A + s_B}{2}$.

Έτσι $s_\Gamma - s_\Delta = \dfrac{s_A + 3s_B}{4} - \dfrac{s_A + s_B}{2} = \dfrac{s_A + 3s_B - 2(s_A + s_B)}{4} = \dfrac{s_B - s_A}{4} > 0$

Άρα $s_Γ - s_Δ > 0 \Leftrightarrow s_Γ > s_Δ$

Άρα τελικά τα σημεία $Γ$ και Δ είναι μεταξύ των A και B, με το $Δ$ να είναι αριστερά του $Γ$, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



β.

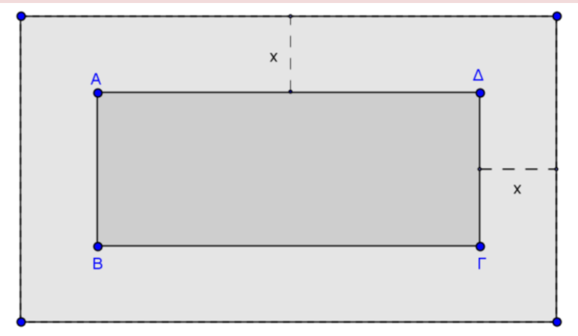
i) Οι αριθμοί s_A και s_B έχουν άθροισμα $S = s_A + s_B = 1,4$ και γινόμενο $P = s_A \cdot s_B = 0,45$, άρα θα είναι οι λύσεις της εξίσωσης: $x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow$ $x^2 - 1,4x + 0,45 = 0$, που είναι και η ζητούμενη εξίσωση.

ii) Η εξίσωση $x^2 - 1,4x + 0,45 = 0$ έχει διακρίνουσα $Δ = (-1,4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0,45 = 1,96 - 1,80 = 0,16 = 0,4^2 > 0$, και λύσεις $x_{1,2} = \frac{-(-1,4) \pm \sqrt{0,4^2}}{2 \cdot 1} = \frac{1,4 \pm 0,4}{2}$ άρα $x_1 = \frac{1,4 + 0,4}{2} = \frac{1,8}{2} = 0,9$ και $x_2 = \frac{1,4 - 0,4}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$. Αφού $s_A < s_B$, θα είναι $s_A = 0,5$ και $s_B = 0,9$.

Τότε $s_Γ = \frac{s_A + 3s_B}{4} \Rightarrow s_Γ = \frac{0,5 + 3 \cdot 0,9}{4} = 0,8$ και $s_Δ = \frac{s_A + s_B}{2} \Rightarrow$ $s_Δ = \frac{0,5 + 0,9}{2} = 0,7$. Τελικά $s_A = 0,5$, $s_B = 0,9$, $s_Γ = 0,8$ και $s_Δ = 0,7$.

250. **GI_A_ALG_4_7511**

Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$, με διαστάσεις $15\ m$ και $25\ m$. Ο δήμος, για λόγους ασφαλείας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος $x\ m$ ($x > 0$), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση: $E(x) = 4x^2 + 80x$, $x > 0$ (Μονάδες 9)

β. Να βρεθεί το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό $E = 500\ m^2$. (Μονάδες 7)

γ. Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από $500\ m^2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α. Το εξωτερικό ορθογώνιο θα έχει διαστάσεις $(15+2x)m$ και $(25+2x)m$ άρα εμβαδό $(15+2x)\cdot(25+2x)\ m^2$. Άρα η ζώνη θα έχει εμβαδό:

$$E(x)=(15+2x)\cdot(25+2x)-(ΑΒΓΔ)=(15+2x)\cdot(25+2x)-15\cdot 25=$$

$$\cancel{15\cdot 25}+15\cdot 2x+2x\cdot 25+(2x)^2\cancel{-15\cdot 25}=30x+50x+4x^2\Rightarrow$$

$$E(x)=4x^2+80x,\ \ x>0.$$

β. Έχουμε:

$$E=500m^2\Leftrightarrow 4x^2+80x=500\Leftrightarrow 4x^2+80x-500=0\Leftrightarrow x^2+20x-125=0$$

Η εξίσωση αυτή είναι δευτέρου βαθμού ως προς x με διακρίνουσα $\Delta=20^2-4\cdot 1\cdot(-125)=400+500=900>0$ και ρίζες:

$$x_{1,2}=\frac{-20\pm\sqrt{900}}{2\cdot 1}=\frac{-20\pm 30}{2}.$$

Άρα $x_1=\frac{-20+30}{2}=\frac{10}{2}=5$ και $x_1=\frac{-20-30}{2}=\frac{-50}{2}=-25$, που απορρίπτεται, αφού πρέπει $x>0$. Άρα $x=5$, δηλαδή για να έχει η ζώνη εμβαδό $500m^2$ πρέπει να έχει πλάτος $5\ m$.

γ. Η ζώνη έχει πλάτος μικρότερο από $500m^2$ όταν ισχύει

$E<500m^2\Leftrightarrow 4x^2+80x<500\Leftrightarrow 4x^2+80x-500<0\Leftrightarrow x^2+20x-125<0$ (1) με $x>0$.

Το τριώνυμο $x^2+20x-125$ έχει τον ακόλουθο πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$		-25		5		$+\infty$
$x^2+20x-125$		+	0	–	0	+	

Η ανίσωση αυτή ισχύει όταν το x βρίσκεται μεταξύ των ριζών του παραπάνω τριωνύμου, δηλαδή όταν $x\in(-25,5)$. Αφού επιπλέον έχουμε τον περιορισμό $x>0$, τελικά πρέπει $x\in(0,5)$, δηλαδή το πλάτος της ζώνης να είναι μεταξύ $0\ m$ και $5\ m$.

251. **GI_A_ALG_4_7512**

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο $\Pi=40cm$. Αν $x\ cm$ είναι το μήκος του παραλληλογράμμου, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $0<x<20$. (Μονάδες 4)

β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση: $E(x)=20x-x^2$. (Μονάδες 8)

γ. Να αποδείξετε ότι ισχύει $E(x) \le 100$, για κάθε $x \in (0,20)$. (Μονάδες 6)

δ. Να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο $40\ cm$, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς $10\ cm$. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. Έστω x το μήκος και y το πλάτος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Τότε προφανώς πρέπει να ισχύουν $x, y > 0$ (ώστε να υφίσταται το σχήμα) και $\Pi = 2x + 2y = 40 \Leftrightarrow 2(x+y) = 40 \Leftrightarrow x + y = 20 \Leftrightarrow y = 20 - x$.

Όμως ισχύει ότι $y > 0 \Leftrightarrow 20 - x > 0 \Leftrightarrow x < 20$, οπότε τελικά $0 < x < 20$.

β. Τα εμβαδόν του ορθογωνίου είναι ίσο με:

$E = x \cdot y$ ή $E(x) = x \cdot (20 - x) \Rightarrow E(x) = 20x - x^2$.

γ. Για κάθε $x \in (0,20)$ έχουμε:

$E(x) \le 100 \Leftrightarrow 20x - x^2 \le 100 \Leftrightarrow -x^2 + 20x - 100 \le 0 \Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 \ge 0 \Leftrightarrow$ $(x-10)^2 \ge 0$ που ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό.

Άρα ισχύει και η σχέση $E(x) \le 100$ για κάθε $x \in (0,20)$.

δ. Το τετράγωνο πλευράς $10\ cm$ έχει εμβαδό $(10cm)^2 = 100cm^2$.

Τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με σταθερή περίμετρο $40\ cm$, έχουν μέγιστο εμβαδόν $100cm^2$, αφού $E(x) \le 100$ για κάθε $x \in (0,20)$, άρα το τετράγωνο πλευράς $10\ cm$ είναι από όλα τα ορθογώνια με περίμετρο $40\ cm$, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

252. **GI_A_ALG_4_7514**

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_3 = 10$ και $\alpha_{20} = 61$.

α. Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της προόδου. (Μονάδες 8)

β. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου. (Μονάδες 8)

γ. Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (α_ν), τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α. Γνωρίζουμε ότι ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$. Επομένως:

$\begin{cases} \alpha_{20} = 61 \\ \alpha_3 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 19\omega = 61 \\ \alpha_1 + 2\omega = 10 \end{cases}$, οπότε αφαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε ότι:

$$(\alpha_1 + 19\omega) - (\alpha_1 + 2\omega) = 61 - 10 \Leftrightarrow \alpha_1 + 19\omega - \alpha_1 - 2\omega = 51 \Leftrightarrow$$

$$17\omega = 51 \Leftrightarrow \omega = \frac{51}{17} \Leftrightarrow \omega = 3.$$

Αντικαθιστώντας στην $\alpha_1 + 2\omega = 10$ βρίσκουμε

$\alpha_1 + 2\cdot 3 = 10 \Leftrightarrow \alpha_1 = 10 - 6 \Leftrightarrow \alpha_1 = 4$. Άρα τελικά $\alpha_1 = 4$ και $\omega = 3$.

β. Αναζητούμε αν υπάρχει $\nu \in \mathbb{N}$ με $\alpha_\nu = 333 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 333$. Από το (α) βρήκαμε $\alpha_1 = 4$ και $\omega = 3$ οπότε έχουμε: $4 + (\nu - 1)\cdot 3 = 333 \Leftrightarrow$

$4 + 3\nu - 3 = 333 \Leftrightarrow 3\nu = 333 - 4 + 3 \Leftrightarrow 3\nu = 332 \Leftrightarrow \nu = \frac{332}{3} \notin \mathbb{N}$, άτοπο!

Άρα δεν υπάρχει όρος της προόδου ίσος με 333.

γ. Υπάρχουν δύο υποπεριπτώσεις:

Η πρώτη είναι οι x , y να είναι διαδοχικοί όροι της αριθμητικής προόδου με τη σειρά που δίνονται, δηλαδή να ισχύει $y - x = 3$, ενώ

η δεύτερη είναι οι x , y να είναι διαδοχικοί όροι της αριθμητικής προόδου με αντίστροφη σειρά δηλαδή να ισχύει $x - y = 3$.

- ✓ Αν $y - x = 3 \Leftrightarrow y = x + 3$ τότε θα έχουμε: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{x+3}{3} \Leftrightarrow$

  $3x = 2(x+3) \Leftrightarrow 3x = 2x + 6 \Leftrightarrow 3x - 2x = 6 \Leftrightarrow x = 6$.

Αν υπάρχει όρος ίσος με 6 τότε θα πρέπει να ισχύει: $\alpha_\nu = 6 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 6$

δηλαδή $4 + (\nu - 1)\cdot 3 = 6 \Leftrightarrow 4 + 3\nu - 3 = 6 \Leftrightarrow 3\nu = 6 - 4 + 3 = 5 \Leftrightarrow \nu = \frac{5}{3} \notin \mathbb{N}$,

άτοπο. Άρα δεν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x , y της αριθμητικής προόδου, με τη σειρά που δίνονται, που να ικανοποιούν τη δεδομένη σχέση.

- ✓ Αν $x - y = 3 \Leftrightarrow x = y + 3$ τότε θα έχουμε: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Leftrightarrow \frac{y+3}{2} = \frac{y}{3} \Leftrightarrow$

  $3(y+3) = 2y \Leftrightarrow 3y + 9 = 2y \Leftrightarrow 3y - 2y = -9 \Leftrightarrow y = -9$.

Αν υπάρχει όρος ίσος με -9 τότε θα πρέπει να ισχύει: $\alpha_\nu = -9 \Leftrightarrow$

$\alpha_1 + (\nu - 1)\omega = -9$ δηλαδή $4 + (\nu - 1)\cdot 3 = -9 \Leftrightarrow 4 + 3\nu - 3 = -9 \Leftrightarrow$

$3\nu = -9 - 4 + 3 = -10 \Leftrightarrow \nu = -\frac{10}{3} \notin \mathbb{N}$, άτοπο.

Άρα δεν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x , y της αριθμητικής προόδου, με αντίστροφη σειρά, που να ικανοποιούν τη δεδομένη σχέση.

Συνεπώς σε κάθε περίπτωση, δεν υπάρχουν διαδοχικοί όροι της παραπάνω προόδου (α_ν) τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$.

253. **GI_A_ALG_4_7515**

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1 , x_2 διαφορετικές μεταξύ τους. (Μονάδες 6)

β. Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 2$. (Μονάδες 4)

γ. Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον:

$$|x_1-2|=|x_2+2|\text{, τότε:}$$

i) Να δείξετε ότι: $x_1-x_2=4$. (Μονάδες 7)

ii) Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και την τιμή του λ. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α. Η εξίσωσή μας είναι δευτέρου βαθμού ως προς x με διακρίνουσα $\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot\lambda \Leftrightarrow \Delta=4-4\lambda>0$ αφού ισχύει από υπόθεση $\lambda<1 \Leftrightarrow 4\lambda<4 \Leftrightarrow 4-4\lambda>0$. Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

β. Σύμφωνα με τον πρώτο τύπο **Vieta** το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με $S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}$, δηλαδή $S=x_1+x_2=-\frac{-2}{1}=2$.

γ. Έχουμε:

i) $|x_1-2|=|x_2+2| \Leftrightarrow x_1-2=x_2+2$ ή $x_1-2=-(x_2+2) \Leftrightarrow$ $x_1-x_2=2+2$ ή $x_1\cancel{-2}=-x_2\cancel{-2} \Leftrightarrow x_1-x_2=4$ ή $x_1+x_2=0$. Όμως η δεύτερη σχέση είναι αδύνατη αφού από το (β) ερώτημα βρήκαμε ότι $x_1+x_2=2$. Συνεπώς ισχύει $x_1-x_2=4$.

ii) Οι σχέσεις $x_1+x_2=2$ και $x_1-x_2=4$, με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν: $2x_1=6 \Leftrightarrow x_1=3$, οπότε αντικαθιστώντας στην $x_1+x_2=2$ βρίσκουμε $3+x_2=2 \Leftrightarrow x_2=2-3=-1$.

Για το λ έχουμε:

1^{ος} τρόπος: Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης, από τον δεύτερο τύπο **Vieta** δίνεται από τη σχέση: $P=x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}$ ή $3\cdot(-1)=\frac{\lambda}{1} \Leftrightarrow \lambda=-3$, λύση που είναι δεκτή και από τον περιορισμό $\lambda<1$ της εκφώνησης για το λ, αφού $-3<1$.

2^{ος} τρόπος: Ο αριθμός 3 είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2-2x+\lambda=0$, άρα θέτοντας όπου $x=3$ θα ισχύει: $3^2-2\cdot 3+\lambda=0 \Leftrightarrow 9-6+\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=-9+6 \Leftrightarrow \lambda=-3$ (δεκτή από τον περιορισμό όπως αναφέραμε παραπάνω).

Άρα τελικά $x_1=3$, $x_2=-1$ και $\lambda=-3$.

254. **GI_A_ALG_4_7516**

Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2-(\alpha^2-1)x-\alpha=0$, με παράμετρο $\alpha\neq 0$.

α. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta=(\alpha^2+1)^2$. (Μονάδες 5)

β. Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $\rho_1=\alpha$ και $\rho_2=-\frac{1}{\alpha}$. (Μονάδες 10)

γ. Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε: $|\rho_1-\rho_2|=2$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε

$$\Delta=\left[-\left(\alpha^2-1\right)\right]^2-4\cdot\alpha\cdot(-\alpha)=\left(\alpha^2-1\right)^2+4\alpha^2=\left(\alpha^2\right)^2-2\alpha^2+1+4\alpha^2=$$
$$\left(\alpha^2+1\right)^2.$$

β. $\Delta=\left(\alpha^2+1\right)^2>0$ αφού $\alpha^2+1\geq 1>0$ για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ άρα η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες:

$$\rho_{1,2}=\frac{-\left[-\left(\alpha^2-1\right)\right]\pm\sqrt{\left(\alpha^2+1\right)^2}}{2\alpha}=\frac{\alpha^2-1\pm\left|\alpha^2+1\right|}{2\alpha}=\frac{\alpha^2-1\pm\left(\alpha^2+1\right)}{2\alpha}\text{ άρα}$$

$$\rho_1=\frac{\alpha^2-1+\alpha^2+1}{2\alpha}=\frac{2\alpha^2}{2\alpha}=\alpha\text{ και }\rho_2=\frac{\alpha^2-1-\alpha^2-1}{2\alpha}=\frac{-2}{2\alpha}=-\frac{1}{\alpha}.$$

γ. $\left|\rho_1-\rho_2\right|=2\Leftrightarrow\left|\alpha-\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\right|=2\Leftrightarrow\left|\alpha+\frac{1}{\alpha}\right|=2\Leftrightarrow\alpha+\frac{1}{\alpha}=2$ ή $\alpha+\frac{1}{\alpha}=-2\Leftrightarrow$

$\alpha^2+1-2\alpha=0$ ή $\alpha^2+1+2\alpha=0\Leftrightarrow(\alpha-1)^2=0$ ή $(\alpha+1)^2=0\Leftrightarrow$

$\alpha-1=0$ ή $\alpha+1=0\Leftrightarrow\alpha=1$ ή $\alpha=-1$.

255. **GI_A_ALG_4_7517**

Δύο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα.

Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους κ.α).

Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

α. Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος $K(\nu)$ της επιχείρησης, αν γεμίζει ν τόνερ το μήνα. (Μονάδες 5)

β. Να γράψετε μία σχέση που να εκφράζει τα μηνιαία έσοδα $E(\nu)$ της επιχείρησης από την πώληση ν αριθμού τόνερ το μήνα. (Μονάδες 5)

γ. Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση

i) να μην έχει ζημιά. (Μονάδες 7)

ii) να εχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α. Το μηνιαίο κόστος $K(\nu)$ της επιχείρησης, αν γεμίζει ν τόνερ το μήνα θα είναι: $K(\nu)=6500+15\cdot\nu$.

β. Τα μηνιαία έσοδα $E(\nu)$ της επιχείρησης από την πώληση ν αριθμού τόνερ το μήνα θα είναι: $E(\nu)=25\cdot\nu$.

γ. Αν εκφράσουμε με $P(\nu)$ το κέρδος της επιχείρησης, τότε αυτό υπολογίζεται από τη σχέση: $\mathbf{P(v)=E(v)-K(v)\Rightarrow}$ $\mathbf{P(v)=25v-(6500-15v)=}$ $\mathbf{25v-6500-15v\Rightarrow}$ $\mathbf{P(v)=10v-6500}$.

i) Η επιχείρηση δεν έχει ζημιά όταν ισχύει: $\mathbf{P(v)\geq 0\Leftrightarrow}$ $\mathbf{10v-6500\geq 0\Leftrightarrow 10v\geq 6500\Leftrightarrow v\geq 650}$, δηλαδή όταν πουλήσει τουλάχιστον $\mathbf{650}$ τόνερ.

ii) Η επιχείρηση θα έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον $\mathbf{500}$ ευρώ όταν ισχύει: $\mathbf{P(v)\geq 500\Leftrightarrow 10v-6500\geq 500\Leftrightarrow}$ $\mathbf{10v\geq 6500+500=7000\Leftrightarrow v\geq 700}$, δηλαδή όταν πουλήσει τουλάχιστον $\mathbf{700}$ τόνερ.

256. **GI_A_ALG_4_7677**

Δίνεται η ανίσωση: $\mathbf{|x+1|<4}$ $\mathbf{(1)}$

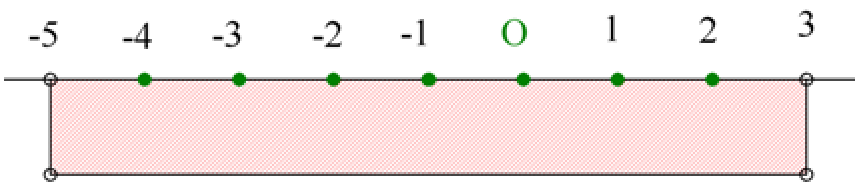
α. Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 7)

β. Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης $\mathbf{(1)}$. (Μονάδες 3)

γ. Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $\mathbf{x^2+\beta x+\gamma}$ το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης $\mathbf{(1)}$ και να έχει θετική τιμή, για κάθε $\mathbf{x\leq 0}$. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α. Γνωρίζουμε ότι αν $\mathbf{\theta>0,\ |x|<\theta\Leftrightarrow -\theta<x<\theta}$ άρα $\mathbf{|x+1|<4\Leftrightarrow -4<x+1<4}$ και αφαιρώντας παντού τη μονάδα παίρνουμε $\mathbf{-5<x<3}$ που είναι και η λύση της ανίσωσης $\mathbf{(1)}$.



β. Μεταξύ των λύσεων της ανίσωσης $\mathbf{(1)}$ βρίσκονται οι ακέραιοι $\mathbf{-4,-3,-2,-1,0,1,2}$

γ. Σύμφωνα με όσα γνωρίζουμε για το πρόσημο ενός τριωνύμου, εντός και εκτός των ριζών και παρατηρώντας ότι έχουμε $\mathbf{\alpha=1>0}$ σκεπτόμαστε:

Καταρχήν διαπιστώνουμε ότι το μηδέν δεν μπορεί να είναι ρίζα του τριωνύμου γιατί τότε θα μηδενίζεται για $\mathbf{x=0}$, που αναιρεί την υπόθεση ότι θέλουμε θετικές τιμές του τριωνύμου για $\mathbf{x\leq 0}$.

Έστω τώρα ότι και οι δύο ρίζες είναι αρνητικές. Τότε στο διάστημα μεταξύ των δύο ριζών το τριώνυμο θα είναι ετερόσημο του α, δηλαδή θα έχουμε αρνητικές τιμές του τριωνύμου για αρνητικές τιμές του $\mathbf{x}$. Άτοπο.

Έστω ότι έχουμε μια αρνητική και μια θετική ρίζα, τότε ομοίως στο διάστημα μεταξύ των δύο ριζών θα έχουμε ένα υποσύνολο με αρνητικές τιμές του $\mathbf{x}$ που θα «δίνουν» αρνητικές τιμές του τριωνύμου.

Άρα υποχρεωτικά έχουμε και τις δύο ρίζες θετικές. Δηλαδή τα ζεύγη $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$ ή $\mathbf{1{,}1}$ ή $\mathbf{2{,}2}$

Από τους τύπους του **Vieta** προκύπτει σε κάθε περίπτωση η εξίσωση:

Α. $\mathbf{S = x_1 + x_2 \Leftrightarrow \frac{-\beta}{1} = 1 + 2 \Leftrightarrow \beta = -3}$ και $\mathbf{P = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{1} = 1 \cdot 2 \Leftrightarrow \gamma = 2}$

Δηλαδή $\mathbf{x^2 - 3x + 2 = 0}$

Β. $\mathbf{S = x_1 + x_2 \Leftrightarrow \frac{-\beta}{1} = 1 + 1 \Leftrightarrow \beta = -2}$ και $\mathbf{P = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{1} = 1 \cdot 1 \Leftrightarrow \gamma = 1}$

Δηλαδή $\mathbf{x^2 - 2x + 1 = 0}$

Γ. $\mathbf{S = x_1 + x_2 \Leftrightarrow \frac{-\beta}{1} = 2 + 2 \Leftrightarrow \beta = -4}$ και $\mathbf{P = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{1} = 2 \cdot 2 \Leftrightarrow \gamma = 4}$

Δηλαδή $\mathbf{x^2 - 4x + 4 = 0}$

Β΄ ΤΡΟΠΟΣ

Αναζητούμε ένα τριώνυμο $\mathbf{f(x) = x^2 + \beta x + \gamma}$ με $\mathbf{\alpha = 1 > 0}$ που να έχει 2 ακέραιες ρίζες τέτοιο ώστε $\mathbf{f(x) > 0}$ για κάθε $\mathbf{x \le 0}$.

Δηλαδή αναζητούμε ένα τριώνυμο που να είναι **ομόσημο του α για κάθε** $\mathbf{x \in (-\infty, 0]}$

Επομένως το ερώτημα τίθεται ως εξής:

Πότε ένα τριώνυμο, που έχει 2 ρίζες, είναι **ομόσημο του α;**

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

α) Ενα τριώνυμο που έχει 2 ρίζες άνισες είναι ομόσημο του α έξω από τις ρίζες του. Επομένως το $\mathbf{(-\infty, 0]}$ είναι «έξω » από τις ρίζες που αναζητούμε. Άρα οι ρίζες είναι οι αριθμοί $\mathbf{1}$ και $\mathbf{2}$.

Τότε η ζητούμενη εξίσωση δίνεται από τον τύπο $\mathbf{x^2 - Sx + P = 0}$

όπου $\mathbf{S = x_1 + x_2 = 1 + 2 = 3}$ και $\mathbf{P = x_1 \cdot x_2 = 1 \cdot 2 = 2}$ δηλαδή $\mathbf{x^2 - 3x + 2 = 0}$

β) Ενα τριώνυμο που έχει μία διπλή ρίζα είναι ομόσημο του α για κάθε τιμή του $\mathbf{x}$ εκτός από την διπλή αυτή ρίζα για την οποία μηδενίζεται.

Επομένως η διπλή ρίζα δεν μπορεί να ανήκει στο $\mathbf{(-\infty, 0]}$.

Δηλαδή θα είναι το $\mathbf{1}$ ή το $\mathbf{2}$.

Άρα από τον ίδιο τύπο $\mathbf{x^2 - Sx + P = 0}$ έχουμε:

$\mathbf{S = x_1 + x_2 = 1 + 1 = 2}$ και $\mathbf{P = x_1 \cdot x_2 = 1 \cdot 1 = 1}$ δηλαδή $\mathbf{x^2 - 2x + 1 = 0}$,

ή $\mathbf{S = x_1 + x_2 = 2 + 2 = 4}$ και $\mathbf{P = x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 2 = 4}$ δηλαδή $\mathbf{x^2 - 4x + 4 = 0}$.

257. **GI_A_ALG_4_7684**

Δίνεται η ανίσωση: $|\mathbf{x-1}| \leq \mathbf{3}$ $\quad (1)$

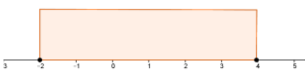
α. Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 7)

β. Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1). (Μονάδες 3)

γ. Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $\mathbf{x^2 + \beta x + \gamma}$ το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $\mathbf{x \geq 0}$. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α. Γνωρίζουμε ότι αν $\boldsymbol{\theta > 0}$, $|\mathbf{x}| \leq \boldsymbol{\theta} \Leftrightarrow -\boldsymbol{\theta} \leq \mathbf{x} \leq \boldsymbol{\theta}$ άρα $|\mathbf{x-1}| \leq \mathbf{3} \Leftrightarrow \mathbf{-3 \leq x-1 \leq 3}$ και προσθέτοντας παντού τη μονάδα παίρνουμε $\mathbf{-2 \leq x \leq 4}$ που είναι και η λύση της ανίσωσης (1).



β. Οι ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) είναι οι αριθμοί
$\mathbf{-2 \,,\, -1 \,,\, 0 \,,\, 1 \,,\, 2 \,,\, 3 \,,\, 4}$

γ. Σύμφωνα με όσα γνωρίζουμε για το πρόσημο ενός τριωνύμου, εντός και εκτός των ριζών και παρατηρώντας ότι έχουμε $\boldsymbol{\alpha = 1 > 0}$ σκεπτόμαστε:

Αν το μηδέν είναι ρίζα δηλαδή μηδενίζεται για $\mathbf{x = 0}$ τότε αναιρείται η υπόθεση που ζητάει θετικές τιμές για κάθε $\mathbf{x \geq 0}$.

Έστω τώρα ότι και οι δύο ρίζες είναι θετικές τότε, στο διάστημα μεταξύ των δύο ριζών το τριώνυμο θα είναι ετερόσημο του $\boldsymbol{\alpha}$, δηλαδή θα έχουμε αρνητικές τιμές του τριωνύμου για θετικές τιμές του $\mathbf{x}$. Άτοπο.

Ομοίως αν είχαμε μια θετική και μια αρνητική ρίζα, αφού και πάλι στο διάστημα μεταξύ των δύο ριζών θα έχουμε ένα υποσύνολο με θετικές τιμές του $\mathbf{x}$ που θα «δίνουν» αρνητικές τιμές του τριωνύμου.

Άρα υποχρεωτικά έχουμε και τις δύο ρίζες αρνητικές. Δηλαδή τα ζεύγη $\mathbf{-2 \,,\, -1}$ ή

$-2\,,-2$ ή $-1,-1$

Από τους τύπους του **Vieta** προκύπτει σε κάθε περίπτωση η εξίσωση:

Α. $S=x_1+x_2 \Leftrightarrow \frac{-\beta}{1}=-1+(-2) \Leftrightarrow \beta=3$ και $P=x_1\cdot x_2 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{1}=-1\cdot(-2) \Leftrightarrow \gamma=2$

Δηλαδή $x^2+3x+2=0$

Β. $S=x_1+x_2 \Leftrightarrow \frac{-\beta}{1}=-1-1 \Leftrightarrow \beta=2$ και $P=x_1\cdot x_2 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{1}=-1\cdot(-1) \Leftrightarrow \gamma=1$

Δηλαδή $x^2+2x+1=0$

Γ. $S=x_1+x_2 \Leftrightarrow \frac{-\beta}{1}=-2+(-2) \Leftrightarrow \beta=4$ και $P=x_1\cdot x_2 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{1}=-2\cdot(-2) \Leftrightarrow \gamma=4$

Δηλαδή $x^2+4x+4=0$

Β ΤΡΟΠΟΣ

Αναζητούμε ένα τριώνυμο $f(x)=x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha=1>0$ που να έχει 2 ακέραιες ρίζες τέτοιο ώστε $f(x)>0$ για κάθε $x\geq 0$.

Δηλαδή αναζητούμε ένα τριώνυμο που να είναι **ομόσημο του α για κάθε** $x\in[0,+\infty)$

Επομένως το ερώτημα τίθεται ως εξής:

Πότε ένα τριώνυμο, που έχει 2 ρίζες, είναι **ομόσημο του α ;**

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

α) Ενα τριώνυμο που έχει 2 ρίζες άνισες είναι ομόσημο του α έξω από τις ρίζες του . Επομένως το $[0,+\infty)$ είναι «έξω » από τις ρίζες που αναζητούμε. Άρα οι ρίζες είναι οι αριθμοί 1 και 2 .

Τότε η ζητούμενη εξίσωση δίνεται από τον τύπο $x^2-Sx+P=0$

όπου $S=x_1+x_2=1+2=3$ και $P=x_1\cdot x_2=1\cdot 2=2$ δηλαδή $x^2-3x+2=0$

β) Ενα τριώνυμο που έχει μία διπλή ρίζα είναι ομόσημο του α για κάθε τιμή του x εκτός από την διπλή αυτή ρίζα για την οποία μηδενίζεται.

Επομένως η διπλή ρίζα δεν μπορεί να ανήκει στο $[0,+\infty)$.

Δηλαδή θα είναι το 1 ή το 2.

Άρα από τον ίδιο τύπο $x^2-Sx+P=0$ έχουμε:

$S=x_1+x_2=1+1=2$ και $P=x_1\cdot x_2=1\cdot 1=1$ δηλαδή $x^2-2x+1=0$,

ή $S=x_1+x_2=2+2=4$ και $P=x_1\cdot x_2=2\cdot 2=4$ δηλαδή $x^2-4x+4=0$.

258. **GI_A_ALG_4_7745**

Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=-x^2+2x+3$

α. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $\mathbf{f(x)}$ για τις διάφορες τιμές του $\mathbf{x}$. (Μονάδες 10)

β. Να προσδιορίσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου: $\mathbf{f(2,999)\cdot f(-1,002)}$ (Μονάδες 7)

γ. Αν $\mathbf{-3<\alpha<3}$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού: $\mathbf{-\alpha^2+2|\alpha|+3}$. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α. Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\mathbf{\Delta=4+12=16}$ και ρίζες:

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{-2}=\frac{-2\pm4}{-2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{-2+4}{-2}=-1 \\ x_2=\dfrac{-2-4}{-2}=3 \end{cases}$$

Το τριώνυμο $\mathbf{-x^2+2x+3}$ έχει τον ακόλουθο πίνακα προσήμων :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2+2x+3$		+	0	–	0	+	

Συνεπώς το τριώνυμο είναι:

-Αρνητικό «έξω» από τις ρίζες δηλαδή για $\mathbf{x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)}$

-Μηδέν για $\mathbf{x=-1}$ και $\mathbf{x=3}$

-Θετικό «μεταξύ» των ριζών, δηλαδή για $\mathbf{x\in(-,3)}$

β. Είναι $\mathbf{2,999\in(-1,3)}$ δηλαδή ο αριθμός ανήκει στο διάστημα στο οποίο το τριώνυμο είναι θετικό, οπότε $\mathbf{f(2,999)>0}$.

Ακόμη $\mathbf{-1,002\in(-\infty,-1)}$ επομένως ομοίως με πριν $\mathbf{f(-1,002)<0}$

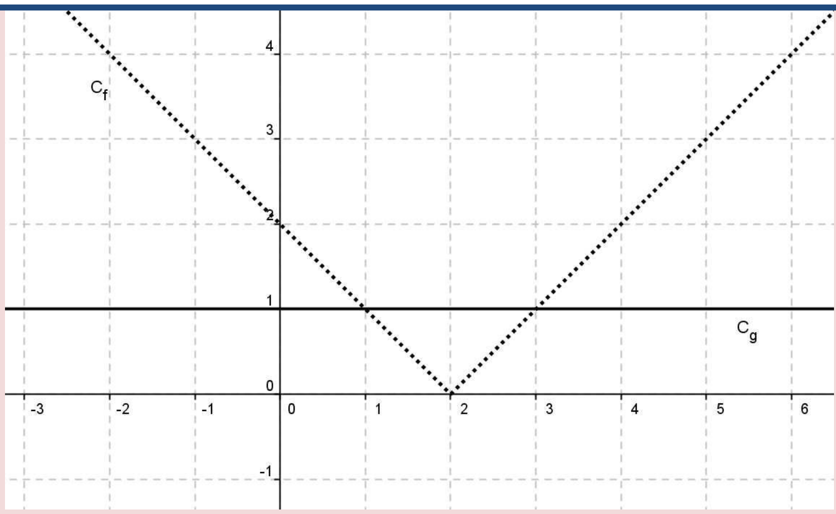
Συνεπώς το γινόμενο $\mathbf{f(2,999)\cdot f(-1,002)}$ αποτελείται από δύο ετερόσημους παράγοντες κι έτσι είναι αρνητικό.

γ. $\mathbf{-3<\alpha<3\Leftrightarrow|\alpha|<3}$.Ακόμη $\mathbf{|\alpha|\geq0}$ άρα $\mathbf{|\alpha|\in[0,3)}$.

Όμως το τριώνυμο είναι θετικό για $\mathbf{x\in(-1,3)}$ άρα και για $\mathbf{x\in[0,3)}$ επομένως $\mathbf{-\alpha^2+2|\alpha|+3=-|\alpha|^2+2|\alpha|+3=f(|\alpha|)>0}$.

259. **GI_A_ALG_4_7784**

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις $\mathbf{C_f}$ και $\mathbf{C_g}$ των συναρτήσεων $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$ αντίστοιχα, με $\mathbf{f(x)=|x-2|}$ και $\mathbf{g(x)=1}$, $\mathbf{x\in\mathbb{R}}$.



α.

i) Να εκτιμήσετε τα σημεία τομής των C_f και C_g.

ii) Να εκτιμήσετε τις τιμές του x, για τις οποίες η C_f είναι κάτω από τη C_g.

(Μονάδες 10)

β. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα. (Μονάδες 10)

γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση: $A = \dfrac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}$ (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α. Από το σχήμα προκύπτει ότι:

i) Οι C_f και C_g ότι τέμνονται στα σημεία $A(1,1)$, $B(3,1)$

ii) Η C_f είναι κάτω από την C_g για $1<x<3$

β. για το i) πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=g(x)$ αφού σημεία τομής σημαίνει για ποιο (ίδιο x) έχουμε ίδια εικόνα, δηλαδή ίδιο y.

Άρα $f(x)=g(x) \Leftrightarrow |x-2|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=1 \\ x-2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=1 \end{cases}$ όπου προκύπτουν τα σημεία:

Για $x=3$ παίρνουμε $f(3)=g(3)=1$

Για $x=1$ παίρνουμε $f(1)=g(1)=1$

Άρα τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι τα σημεία $A(1,1)$, $B(3,1)$

Για το ii) θα λύσουμε την ανίσωση $f(x)<g(x)$ αφού στην ουσία το πάνω ή κάτω αφορά τον άξονα $y'y$ και άρα τις εικόνες των συναρτήσεων.

Έχουμε λοιπόν $|x-2|<1 \Leftrightarrow -1<x-2<1 \overset{\pi\alpha\nu\tau o\upsilon+2}{\Leftrightarrow} 1<x<3$

γ. Για να έχει νόημα πρέπει $f(x)\neq 0$ αφού σε κανένα κλάσμα δεν επιτρέπεται παρανομαστής μηδέν και $1-f(x)\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\leq 1$ αφού η υπόριζη ποσότητα πρέπει να είναι πάντα αριθμός θετικός ή μηδέν.

Άρα $|x-2|\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq x-2\leq 1 \overset{\pi\alpha\nu\tau o\upsilon+2}{\Leftrightarrow} 1\leq x\leq 3$ και με την δέσμευση

$|x-2|\neq 0 \Rightarrow x\neq 2$ Προκύπτει λοιπόν ότι $x\in[1,2)\cup(2,3]$.

260. **GI_A_ALG_4_7791**

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση:

$$(\alpha-1)(1-\beta)>0$$

α. Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α , β. (Μονάδες 13)

β. Αν επιπλέον $|\beta-\alpha|=4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K=|\alpha-1|+|1-\beta|$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε, γεωμετρικά είτε αλγεβρικά (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. Ένα γινόμενο δύο παραγόντων είναι θετικό όταν οι δύο παράγοντες του γινομένου είναι ομόσημοι δηλαδή ή και οι δύο είναι θετικοί ή και οι δύο είναι αρνητικοί.

Οπότε:

$$\alpha-1>0 \text{ και } 1-\beta>0 \Leftrightarrow \alpha>1 \text{ και } \beta<1 \Leftrightarrow \beta<1<\alpha$$

ή

$$\alpha-1<0 \text{ και } 1-\beta<0 \Leftrightarrow \alpha<1 \text{ και } \beta>1 \Leftrightarrow \alpha<1<\beta$$

Σε κάθε περίπτωση η μονάδα βρίσκεται ανάμεσα στους α , β.

β. Διακρίνοντας πάλι τις ίδιες περιπτώσεις και βγάζοντας τα απόλυτα η παράσταση K γράφεται:

Αν $\beta<1<\alpha$ τότε $K=|\alpha-1|+|1-\beta|=(\alpha-1)+(1-\beta)=\alpha-\beta$

Αν $\alpha<1<\beta$ τότε $K=|\alpha-1|+|1-\beta|=(-\alpha+1)+(-1+\beta)=\beta-\alpha$

Άρα $K=\begin{cases}\alpha-\beta, & \text{αν } \alpha>\beta\\ \beta-\alpha, & \text{αν } \alpha<\beta\end{cases} \Leftrightarrow K=|\alpha-\beta|$

Άρα $K=4$.

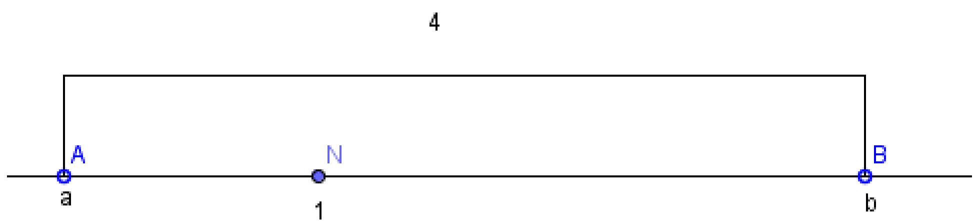
<u>Γεωμετρικά</u>

Γνωρίζουμε ότι η απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο αριθμών εκφράζει απόσταση των δύο αριθμών.

Η μονάδα βρίσκεται πάντα ανάμεσα στους α , β και εμείς ξέρουμε ότι η απόσταση από το α στο β είναι 4.

Το K εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων από το α στο 1 και από το 1 στο β.

Τότε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (για την περίπτωση που $\alpha<1<\beta$)



$$K=|\alpha-1|+|1-\beta|=AN+NB=AB=|\beta-\alpha|=4$$

Όμοια αντιμετωπίζεται η περίπτωση που $\beta<1<\alpha$.

261. **GI_A_ALG_4_7940**

α. Να λύσετε τις εξισώσεις $3x^2-14x+8=0\ (1)$ και $8x^2-14x+3=0\ (2)$. (Μονάδες 10)

β. Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0\ (3)$ και $\gamma x^2+\beta x+\alpha=0\ (4)$, με $\alpha,\gamma\neq 0$.

Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι:

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha\cdot\gamma\neq 0$, τότε

i) $\rho\neq 0$ και (Μονάδες 5)

ii) ο $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4). (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε:

✓ Για την εξίσωση (1) η διακρίνουσα είναι

$\Delta=(-14)^2-4\cdot 3\cdot 8=196-96=100>0$ και συνεπώς η (1) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-(-14)\pm\sqrt{100}}{2\cdot 3}=\frac{14\pm 10}{6}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{14+10}{6}=\frac{24}{6}=4\\ x_2=\frac{14-10}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\end{cases}$$

✓ Για την εξίσωση (2) η διακρίνουσα είναι

$\Delta=(-14)^2-4\cdot 8\cdot 3=196-96=100>0$ και συνεπώς η (2) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-(-14)\pm\sqrt{100}}{2\cdot 8}=\frac{14\pm 10}{16}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{14+10}{16}=\frac{24}{16}=\frac{3}{2}\\ x_2=\frac{14-10}{16}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}\end{cases}$$

β.

i) Αν $\rho=0$ τότε $\alpha\cdot 0^2+\beta\cdot 0+\gamma=0\Leftrightarrow\gamma=0$ άτοπο αφού $\alpha\gamma\neq 0$.

ii) Αφού ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) έχουμε: $\gamma+\beta\rho+\alpha\rho^2=0$

Η σχέση (4) για $x=\frac{1}{\rho}$ γίνεται: $\gamma\frac{1}{\rho^2}+\beta\frac{1}{\rho}+\alpha=\frac{1}{\rho^2}\left(\gamma+\beta\rho+\alpha\rho^2\right)=0$.

Έτσι το ζητούμενο αποδείχθηκε..

262. **GI_A_ALG_4_7958**

α. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2+1\geq\frac{5}{2}x$.(1) (Μονάδες 10)

β. Δίνονται δύο αριθμοί κ , λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση: $(\lambda-1)(\kappa-1)<0$.

i) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των κ , λ. (Μονάδες 8)

ii) Να δείξετε ότι: $|\kappa-\lambda|\geq\frac{3}{2}$. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. Πολλαπλασιάζοντας την (1) με 2 για απαλοιφή παρανομαστή, η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα. $2x^2+2\geq 5x \Leftrightarrow 2x^2-5x+2\geq 0$ (1)

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 2=9>0$.

Επομένως το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές, άνισες ρίζες:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{5\pm 3}{4}=\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Το τριώνυμο $2x^2-5x+2$ έχει τον ακόλουθο πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x^2-5x+2$		+	0	−	0	+	

$-x^2+2x+3$

Άρα η λύση της ανίσωσης είναι $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[2,+\infty)$.

β.

i) Το γινόμενο είναι αρνητικό άρα οι παράγοντές του είναι ετερόσημοι.

Επομένως $\kappa-1>0$ **και** $\lambda-1<0\Leftrightarrow\kappa>1$ και $\lambda<1\Leftrightarrow\lambda<1<\kappa$ ή αντίστροφα.

Σε κάθε περίπτωση η μονάδα βρίσκεται ανάμεσα στους δύο αριθμούς.

ii) Αφού οι δύο αριθμοί είναι και λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος α) θα ανήκουν στην ένωση $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[2,+\infty)$.

Ο μεγαλύτερος από τους δύο θα είναι σίγουρα μεγαλύτερος ή ίσος του 2 (αφού θα είναι μεγαλύτερος του 1) και ο μικρότερος θα είναι μικρότερος ή ίσος του $\frac{1}{2}$.

Άρα $|\kappa-\lambda|\geq\left|2-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}$.

<u>Β Τρόπος</u>

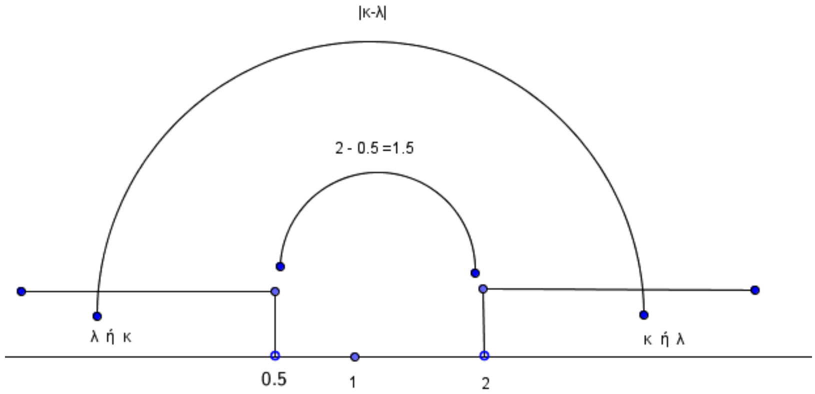
Αφού οι κ,λ είναι λύσεις της ανίσωσης (1) θα βρίσκονται σε κάποιο από τα διαστήματα της λύσης. Όμως ο αριθμός $\mathbf{1}$ βρίσκεται ανάμεσα τους από ερώτημα 1. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι τα κ,λ θα βρίσκονται σε διαφορετικά υποδιαστήματα της ένωσης.

Έστω ότι $\kappa \geq 2$ και $\lambda \leq \frac{1}{2}$ τότε από ιδιότητες απολύτων και ανισώσεων

$\begin{cases} \kappa \geq 2 \\ \lambda \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\lambda \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$ και με πρόσθεση κατά μέλη $\kappa-\lambda \geq \frac{3}{2}$ και προφανώς έπεται $|\kappa-\lambda| \geq \frac{3}{2}$

Ομοίως αν ήταν $\kappa \leq \frac{1}{2}$ και $\lambda \geq 2$ θα παίρναμε $\lambda-\kappa \geq \frac{3}{2}$ όπου και πάλι θα προέκυπτε το ζητούμενο.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η απόσταση των αριθμών κ και λ .



263. **GI_A_ALG_4_7974**

Δίνεται πραγματικός αριθμός α, που ικανοποιεί τη σχέση: $|\alpha-2|<1$.

α. Να γράψετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του α. (Μονάδες 8)

β. Θεωρούμε στη συνέχεια το τριώνυμο: $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}$

i) Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να προσδιορίσετε το πρόσημό της. (Μονάδες 10)

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}>0$. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. $|\alpha-2|<1 \Leftrightarrow -1<\alpha-2<1 \overset{\text{παντού } +2}{\Leftrightarrow} 1<\alpha<3 \Leftrightarrow \alpha \in (1,3)$

β.

i) $\Delta=(\alpha-2)^2-4$ η οποία είναι αρνητική αφού

$$|\alpha-2|<1 \Leftrightarrow |\alpha-2|^2<1^2 \Leftrightarrow |\alpha-2|^2-1<0 \overset{\pi\alpha\nu\tau o\upsilon\ -3}{\Leftrightarrow} |\alpha-2|^2-4<-3<0$$

ii) Αφού $\Delta<0$ και $\alpha=1>0$ τότε το τριώνυμο είναι παντού ομόσημο του α. Δηλαδή θετικό.

264. **GI_A_ALG_4_8170**

Δίνεται γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\alpha_3=4\ ,\ \alpha_5=15 \text{ και } \lambda>0.$$

α. Να βρεθούν ο πρώτος όρος α_1 και ο λόγος λ της προόδου. (Μονάδες 8)

β. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) με $\beta_\nu=\dfrac{1}{\alpha_\nu}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν). (Μονάδες 9)

γ. Αν $S_{10}\ ,\ S'_{10}$ είναι τα αθροίσματα των δέκα πρώτων όρων των ακολουθιών (α_ν) και (β_ν) αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι $S'_{10}=\dfrac{1}{2^9}S^{10}$. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α. Από τον τύπο $\alpha_\nu=\alpha_1\lambda^{\nu-1}$ παίρνουμε: $\alpha_3=\alpha_1\lambda^2=4$ (1) και $\alpha_5=\alpha_1\lambda^4=16$ (2) .

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (2) : (1) λαμβάνουμε $\dfrac{\alpha_1\lambda^4}{\alpha_1\lambda^2}=\dfrac{16}{4}\Leftrightarrow\lambda^2=4$ και επειδή $\lambda>0$ θα είναι $\lambda=2$.

Με αντικατάσταση σε κάποια από τις σχέσεις παίρνουμε $\alpha_1=1$.

β. Ας πάρουμε δύο οποιουσδήποτε διαδοχικούς όρους της ακολουθίας, έστω $\beta_\nu\ ,\ \beta_{\nu+1}$.

Έχουμε $\dfrac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu}=\dfrac{\frac{1}{\alpha_{\nu+1}}}{\frac{1}{\alpha_\nu}}=\dfrac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}}=\dfrac{\alpha_\nu}{\lambda\cdot\alpha_\nu}=\dfrac{1}{\lambda}$.

Άρα η ακολουθία β_ν είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda'=\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{1}{2}$ και

$\beta_1=\dfrac{1}{\alpha_1}=\dfrac{1}{1}=1$

γ. Από τον τύπο $S_\nu=\alpha_1\cdot\dfrac{\lambda^\nu-1}{\lambda-1}$ παίρνουμε: $S_{10}=\alpha_1\cdot\dfrac{2^{10}-1}{2-1}=2^{10}-1=1023$.

Άρα $\dfrac{S_{10}}{2^9}=\dfrac{1023}{2^9}$.

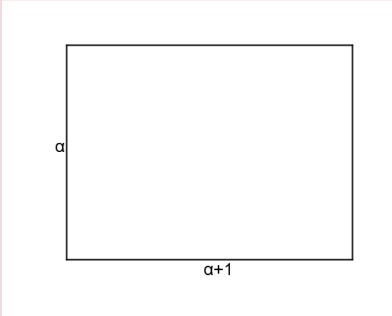
Τώρα $S'_{10} = \beta_1 \cdot \dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10} - 1}{\dfrac{1}{2} - 1} = \dfrac{\dfrac{1}{1024} - 1}{-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{1024}}{\dfrac{1}{2}} = 2 \cdot \dfrac{1023}{1024} = \dfrac{1023}{512} = \dfrac{1023}{2^9}$ όπως θέλαμε.

265. **GI_A_ALG_4_8217**

α. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + x - 6 < 0$. (Μονάδες 8)

β. Να λύσετε την ανίσωση $\left|x - \dfrac{1}{2}\right| > 1$. (Μονάδες 5)

γ. Δίνεται το παρακάτω παραλληλόγραμμο με πλευρές α και $\alpha + 1$



όπου ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $\left|\alpha - \dfrac{1}{2}\right| > 1$. Αν για το εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $E < 6$, τότε:

i) Να δείξετε ότι: $\dfrac{3}{2} < \alpha < 2$. (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α. Το τριώνυμο $x^2 + x - 6$ έχει διακρίνουσα :

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$.

Επομένως έχει δύο πραγματικές, άνισες ρίζες, τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

Το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου φαίνεται από τον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x^2 + x - 6$	+	-	+	

Για να λύσουμε την ανίσωση $x^2 + x - 6 < 0$, αναζητούμε τις τιμές του x για τις οποίες το τριώνυμο $x^2 + x - 6$ είναι αρνητικό, δηλαδή ετερόσημο του $\alpha = 1 > 0$. Επομένως $x \in (-3, 2)$

β. $\left|x - \dfrac{1}{2}\right| > 1 \Leftrightarrow x - \dfrac{1}{2} < -1$ ή $x - \dfrac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2} - 1$ ή $x > \dfrac{1}{2} + 1 \Leftrightarrow x < -\dfrac{1}{2}$ ή

$x > \frac{3}{2}$

γ. Από το **β**). Έχουμε $\left|\alpha - \frac{1}{2}\right| > 1 \Leftrightarrow \alpha < -\frac{1}{2}$ ή $\alpha > \frac{3}{2}$.. Όμως το α είναι θετικός αριθμός, ως πλευρά του ορθογωνίου. Επομένως δεχόμαστε μόνο ότι $\alpha > \frac{3}{2}$ (1)

Συγχρόνως ισχύει ότι $E < 6 \Leftrightarrow \alpha(\alpha+1) < 6 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha - 6 < 0$ με $\alpha > \frac{3}{2}$

Η ανίσωση $\alpha^2 + \alpha - 6 < 0$, από το 1. έχει ως λύση $\alpha \in (-3,2)$ (2)

i) Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\frac{3}{2} < \alpha < 2$

ii) Η περίμετρος του παραλληλογράμμου είναι $\Pi = 2\alpha + 2(\alpha+1) = 4\alpha + 2$

Ισχύει ότι $\frac{3}{2} < \alpha < 2 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{3}{2} < 4\alpha < 4 \cdot 2 \Leftrightarrow 6 < 4\alpha < 8 \Leftrightarrow 2 < 4\alpha - 2 < 6$

Επομένως $2 < \Pi < 6$

266. **GI_A_ALG_4_8443**

α. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει $|x-4| < 2$. (Μονάδες 10)

β. Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη του 4.

i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλασίου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών περιέχεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. $|x-4| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-4 < 2 \Leftrightarrow 2 < x < 6$

β. Γνωρίζουμε ότι: $d(x,4) < 2 \Leftrightarrow |x-4| < 2$

i) Από το 1. ισχύει $|x-4| < 2 \Leftrightarrow 2 < x < 6 \overset{\cdot 3}{\Leftrightarrow} 6 < 3x < 18 \Leftrightarrow 2 < 3x-4 < 14$
.

Όμως $d(3x,4) = |3x-4| = 3x-4$ αφού $3x-4 > 0$

Άρα $2 < d(3x,4) < 14$ που είναι το ζητούμενο.

ii) Όπως είδαμε πιο πάνω $|x-4| < 2 \Leftrightarrow 6 < 3x < 18 \Leftrightarrow -13 < 3x-19 < -1$

$\overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow} 13 > -3x+19 > 1 \Leftrightarrow 1 < -3x+19 < 13$.

Όμως $d(3x,19) = |3x-19| = -3x+19$ αφού $3x-19 < 0$

Επομένως η απόσταση του $3x$ από το 19 είναι μεγαλύτερη από 1 και μικρότερη από 13

267. **GI_A_ALG_4_8445**

α. Δίνεται το τριώνυμο x^2-3x+2, $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.

β. Αν για πραγματικούς αριθμούς α,β διαφορετικούς του μηδενός με $\alpha<\beta$ για τους οποίους ισχύει $(\alpha^2-3\alpha+2)(\beta^2-3\beta+2)<0$, να αποδείξετε ότι $|(\alpha-1)(\beta-2)|=(\alpha-1)(\beta-2)$.

ΛΥΣΗ

α. Το τριώνυμο x^2-3x+2 έχει διακρίνουσα $\Delta=(-3)^2-4\cdot1\cdot2=9-8=1$ και ρίζες

$x_{1,2}=\dfrac{3\pm1}{2}\Leftrightarrow x_1=1$ ή $x_2=2$. Το πρόσημό του παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	–	0	+	

β. Το ότι το γινόμενο είναι αρνητικό σημαίνει ότι οι παράγοντες είναι ετερόσημοι.

Άρα $\alpha^2-3\alpha+2<0$ και $\beta^2-3\beta+2>0$ ή αντίστροφα.

Δηλαδή $\alpha\in(1,2)$ και $\beta\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ ή αντίστροφα.

-Αν $\alpha\in(1,2)$ επειδή $\alpha<\beta$ θα είναι $\beta\in(2,+\infty)$.

Επομένως $\alpha-1>0$ και $\beta-2>0$ κι έτσι

$(\alpha-1)(\beta-2)>0\Leftrightarrow|(\alpha-1)(\beta-2)|=(\alpha-1)(\beta-2)$ όπως θέλαμε.

-Αν $\alpha\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ θα είναι $\beta\in(1,2)$ κι επειδή $\alpha<\beta$ αναγκαστικά $\alpha\in(-\infty,1)$.

Έτσι $\alpha-1<0$ και $\beta-2<0$ άρα

$(\alpha-1)(\beta-2)>0\Leftrightarrow|(\alpha-1)(\beta-2)|=(\alpha-1)(\beta-2)$.

268. **GI_A_ALG_4_8448**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{|2-x|}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

β. Να αποδειχθεί ότι $f(x)=\begin{cases}x-3 & ,\ x>2\\ -x+3, & x<2\end{cases}$

γ. Να γίνει η γραφική παράσταση της f και να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της $\mathbf{f}$ με τους άξονες $\mathbf{x'x}$ και $\mathbf{y'y}$.

δ. Να λύσετε την ανίσωση $\mathbf{f(x) \le 0}$.

ΛΥΣΗ

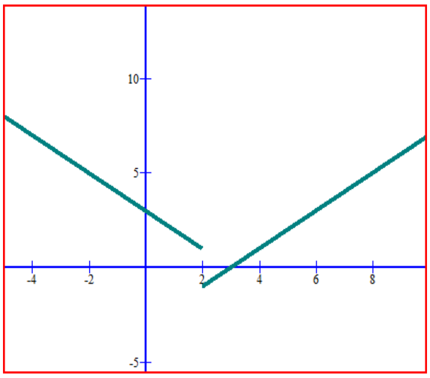
α. Πρέπει και αρκεί: $|\mathbf{2-x}| \ne \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x \ne 2}$.

Έτσι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbf{A} = \mathbb{R} - \{2\}$.

β. Αν $\mathbf{x > 2}$ τότε $\mathbf{f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x-2} = \dfrac{(x-2)(x-3)}{x-2} = x-3}$.

Για $\mathbf{x < 2}$ είναι $\mathbf{f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{2-x} = \dfrac{(x-2)(x-3)}{-(x-2)} = -(x-3) = -x+3}$ και το ζητούμενο απεδείχθη.

γ.



$\mathbf{f(0) = -0+3 = 3}$. Άρα σημείο τομής με τον άξονα $\mathbf{y'y}$ το $\mathbf{(0,3)}$.

Ακόμη $\mathbf{f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-5x+6}{|2-x|} = 0 \Leftrightarrow x^2-5x+6 = 0 \Leftrightarrow x = 2}$ **ή** $\mathbf{x = 3}$.

Προφανώς θα απορρίψουμε τη λύση $\mathbf{x = 2}$, άρα το μοναδικό σημείο τομής με τον άξονα $\mathbf{x'x}$ είναι το $\mathbf{(3,0)}$.

δ. Η ανίσωση ορίζεται στο $\mathbf{A} = \mathbb{R} - \{2\}$

$\mathbf{f(x) \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-5x+6}{|2-x|} \le 0}$.

Ο παρονομαστής είναι πάντα θετικός άρα η ανίσωση είναι ισοδύναμη με την

$\mathbf{x^2-5x+6 \le 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) \le 0 \Leftrightarrow x \in [2,3] \overset{x \in A}{\Leftrightarrow} x \in (2,3]}$.

269. **GI_A_ALG_4_8451**

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f(x) = \dfrac{4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha}{2x-3}}$, όπου $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $\mathbf{f}$.

β. Να αποδειχθεί ότι $\mathbf{f(x) = 2x-\alpha}$ για κάθε $\mathbf{x}$ που ανήκει στο πεδίο ορισμού της $\mathbf{f}$.

γ. Να βρεθεί η τιμή του $\boldsymbol{\alpha}$ αν η γραφική παράσταση της $\mathbf{f}$ διέρχεται από το σημείο $(-1,1)$.

δ. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της $\mathbf{f}$ με τους άξονες $\mathbf{x'x}$ και $\mathbf{y'y}$.

ΛΥΣΗ

α. Πρέπει και αρκεί: $2x-3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \frac{3}{2}$, άρα, $A=R-\{\frac{3}{2}\}$.

β. Έχουμε:

$$4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha=4x^2-6x-2\alpha x+3\alpha=$$

$$=2x(2x-3)-\alpha(2x-3)=(2x-\alpha)(2x-3)$$

Επομένως $f(x)=\dfrac{4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha}{2x-3}=\dfrac{(2x-\alpha)(2x-3)}{2x-3}=2x-\alpha, x\in A=R-\{\frac{3}{2}\}$.

γ. Είναι $f(-1)=1$ ή ισοδύναμα $2\cdot(-1)-\alpha=1 \Leftrightarrow -\alpha=3 \Leftrightarrow \alpha=-3$.

δ. Για $x=0$ είναι $y=2\cdot 0-\alpha \Leftrightarrow y=-\alpha$ άρα η C_f τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0,-\alpha)$.

Για $y=0$ έχουμε $0=2x-\alpha \Leftrightarrow x=\frac{\alpha}{2}$.

Επίσης πρέπει $x\in A \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}\neq\frac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha\neq 3$.

Αν $\alpha\neq 3$, τότε η C_f τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $\left(\frac{\alpha}{2},0\right)$ και αν $\alpha=3$, τότε η C_f δεν τέμνει τον $x'x$.

270. **GI_A_ALG_4_8453**

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει:

- $|\alpha-2|<1$
- $|\beta-3|\leq 2$

α. Να αποδειχθεί ότι $1<\alpha<3$

β. Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β.

γ. Να βρεθεί μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha-3\beta$.

δ. Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$.

ΛΥΣΗ

α. Είναι, $|\alpha-2|<1 \Leftrightarrow -1<\alpha-2<1 \Leftrightarrow 1<\alpha<3$

β. Είναι, $|\beta-3|\leq 2 \Leftrightarrow -2\leq\beta-3\leq 2 \Leftrightarrow 1\leq\beta\leq 5$

γ. Έχουμε, $1<\alpha<3 \Leftrightarrow 2<2\alpha<6$. (1)

Επίσης $3 \le 3\beta \le 15 \Leftrightarrow -15 \le -3\beta \le -3$. (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των ανισώσεων (1) και (2) παίρνουμε $-13 < 2\alpha - 3b < 3$.

δ. Έχουμε, $1 \le \beta \le 5 \Leftrightarrow 1 \ge \frac{1}{\beta} \ge \frac{1}{5}$.

Ακόμη γνωρίζουμε ότι $3 > \alpha > 1$.

Επειδή οι δύο τελευταίες ανισότητες έχουν θετικά μέλη μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη χωρίς να αλλάξει η φορά. Άρα $3 > \frac{\alpha}{\beta} > \frac{1}{5}$.

271. **GI_A_ALG_4_8455**

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει:

- $|1 - 3\alpha| < 2$
- Η απόσταση του αριθμού β από τον αριθμό 2 είναι μικρότερη του 1.

α. Να αποδειχθεί ότι $-\frac{1}{3} < \alpha < 1$

β. Να αποδειχθεί ότι $|\beta - 3\alpha - 1| < 3$

γ. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4(b-2)x + b^2}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

α. Είναι, $|1 - 3\alpha| < 2 \Leftrightarrow |3\alpha - 1| < 2 \Leftrightarrow -2 < 3\alpha - 1 < 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < \alpha < 1$

β. Η δεύτερη συνθήκη δίνει $|\beta - 2| < 1$.

Από την ιδιότητα των απολύτων $|x| + |y| \ge |x + y|$

παίρνουμε $|\beta - 3\alpha - 1| \le |\beta - 2| + |1 - 3\alpha| < 1 + 2 = 3$.

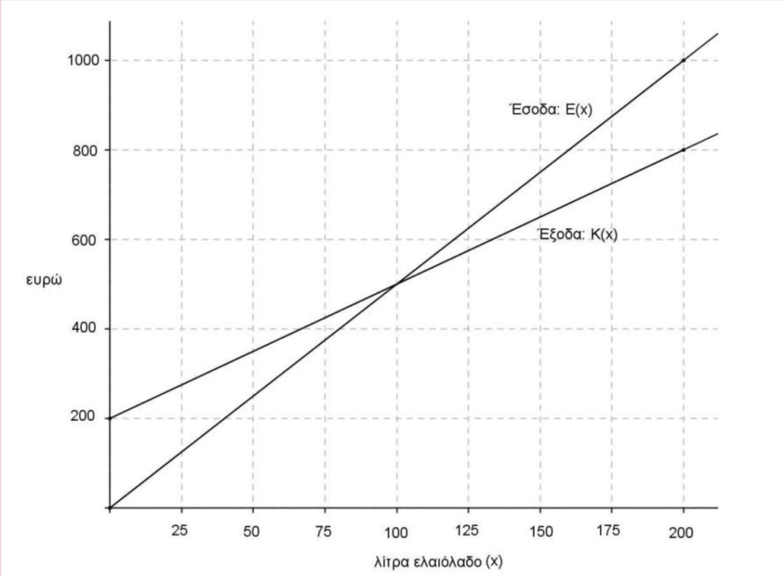
γ. Η διακρίνουσα του τριωνύμου $4x^2 - 4(b-2)x + b^2$ είναι

$\Delta = 16(\beta - 2)^2 - 16\beta^2 = 64(1 - \beta)$

Όμως $|\beta - 2| < 1 \Leftrightarrow 1 < \beta < 3$ άρα $\beta > 1 \Leftrightarrow 1 - \beta < 0$.

Άρα $\Delta < 0$ και έτσι το τριώνυμο είναι πάντα ομόσημο του συντελεστή α του x^2 άρα είναι θετικό αφού $\alpha = 4 > 0$. Έτσι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R}$.

272. **GI_A_ALG_4_10774**



Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο. Στο παραπάνω σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα $K(x)$ και τα έσοδα $E(x)$ από την πώληση x λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.

α. Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του. (Μονάδες 6)

β. Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας; (Μονάδες 5)

γ. Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά (Μονάδες 6)

δ. Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων $K(x)$ και $E(x)$ και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος (γ). (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α. Από το σχήμα βλέπουμε ότι οι δύο γραμμές τέμνονται στο σημείο $(100,500)$.

Αυτό σημαίνει ότι όταν η εταιρεία πουλήσει 100 λίτρα ελαιόλαδο, τότε έσοδα και έξοδα είναι ίσα με 500 ευρώ, δηλαδή όταν η εταιρεία πουλήσει 100 λίτρα ελαιόλαδο, δεν έχει ούτε κέρδος ούτε ζημιά.

β. Η ευθεία που απεικονίζει τα έξοδα της εταιρείας τέμνει τον κατακόρυφο άξονα στο σημείο με τεταγμένη 200, πράγμα που σημαίνει ότι τα πάγια έξοδα της εταιρείας (αυτά δηλαδή που αντιστοιχούν σε πώληση $x=0$ λίτρων ελαιολάδου) είναι 200 ευρώ.

γ. Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι η ευθεία των εσόδων βρίσκεται πάνω από την ευθεία των εξόδων (και άρα τα έσοδα της εταιρείας είναι περισσότερα από τα έξοδά της) για όλα τα σημεία από το σημείο τομής των δύο ευθειών και προς τα δεξιά, πράγμα που σημαίνει ότι για να μην έχει η εταιρεία ζημιά θα πρέπει οι πωλήσεις της να είναι τουλάχιστον $\mathbf{100}$ λίτρα ελαιόλαδο.

δ. Η ευθεία των εσόδων διέρχεται από την αρχή των αξόνων, άρα είναι της μορφής $\mathbf{y=\lambda x}$. Επιπλέον διέρχεται και από το σημείο $\mathbf{(100,500)}$, άρα πρέπει να ισχύει: $\mathbf{500=\lambda\cdot 100\Leftrightarrow \lambda=5}$, άρα η εξίσωση της ευθείας είναι η $\mathbf{y=5x}$, και είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{E(x)=5x}$ που υπολογίζει τα έσοδα της εταιρείας από την πώληση $\mathbf{x}$ λίτρων ελαιολάδου. Η ευθεία των εξόδων διέρχεται από τα σημεία $\mathbf{(0,200)}$ και $\mathbf{(100,500)}$ άρα θα είναι της μορφής $\mathbf{y=\alpha x+\beta}$ και θα ισχύουν: $\begin{cases}\mathbf{200=\alpha\cdot 0+\beta}\\ \mathbf{500=\alpha\cdot 100+\beta}\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}\mathbf{\beta=200}\\ \mathbf{500=\alpha\cdot 100+200}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\mathbf{\beta=200}\\ \mathbf{100\alpha=300}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\mathbf{\alpha=3}\\ \mathbf{\beta=200}\end{cases}$ άρα η ευθεία των εξόδων έχει εξίσωση $\mathbf{y=3x+200}$ και είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{K(x)=3x+200}$ που υπολογίζει τα έξοδα της εταιρείας από την πώληση x λίτρων ελαιολάδου.

Για να μην έχει η εταιρεία ζημιά πρέπει: $\mathbf{E(x)\geq K(x)\Leftrightarrow\ 5x\geq 3x+200\Leftrightarrow}$ $\mathbf{5x-3x\geq 200\Leftrightarrow\ 2x\geq 200\Leftrightarrow\ x\geq 100}$, συνεπώς επαληθεύουμε και αλγεβρικά το εύρημα του ερωτήματος (γ), όπου είχαμε βρει ότι για να μην έχει η εταιρεία ζημιά θα πρέπει οι πωλήσεις της να είναι τουλάχιστον $\mathbf{100}$ λίτρα ελαιολάδου.

273. **GI_A_ALG_4_10775**

Σε μια αίθουσα θεάτρου με $\mathbf{20}$ σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η 1^{η} σειρά έχει $\mathbf{16}$ καθίσματα και η 7^{η} σειρά έχει $\mathbf{28}$ καθίσματα.

α. Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο και τη διαφορά αυτής της προόδου. (Μονάδες 5)

β. Να βρείτε το γενικό όρο της προόδου. (Μονάδες 4)

γ. Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο; (Μονάδες 5)

δ. Αν στην 1^{η} σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν $\mathbf{6}$ κενά καθίσματα, στη 2^{η} υπάρχουν $\mathbf{9}$ κενά καθίσματα, στην 3^{η} υπάρχουν $\mathbf{12}$ κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη 2^{η} και μετά, είναι κατά $\mathbf{3}$

περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i) Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα. (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές. (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α. Ο αριθμός των καθισμάτων κάθε σειράς είναι αυξημένος από τον αριθμό καθισμάτων της προηγούμενης κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων, συνεπώς οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Η πρώτη σειρά έχει $\mathbf{16}$ καθίσματα άρα $\boldsymbol{\alpha_1 = 16}$, ενώ η έβδομη σειρά έχει $\mathbf{28}$ καθίσματα άρα $\boldsymbol{\alpha_7 = 28 \Rightarrow}$ $\boldsymbol{\alpha_1 + 6\omega = 28 \Rightarrow \quad 16 + 6\omega = 28 \Rightarrow \quad 6\omega = 28 - 16 = 12 \Rightarrow \quad \omega = 2}$. Άρα η αριθμητική πρόοδος έχει πρώτο όρο $\boldsymbol{\alpha_1 = 16}$ και διαφορά $\boldsymbol{\omega = 2}$.

β. Ο γενικός όρος της προόδου είναι $\boldsymbol{\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \underset{\omega=2}{\overset{\alpha_1=16}{\Rightarrow}}}$ $\boldsymbol{\alpha_\nu = 16 + (\nu - 1)\cdot 2 \Rightarrow \alpha_\nu = 16 + 2\nu - 2 \Rightarrow \alpha_\nu = 2\nu + 14}$.

γ. Το σύνολο των καθισμάτων όλου του θεάτρου (που έχει συνολικά $\mathbf{20}$ σειρές καθισμάτων) είναι ίσο με: $\boldsymbol{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{20} = S_{20}}$, οπότε εφαρμόζοντας τον τύπο $\boldsymbol{S_\nu = \frac{\nu}{2}\cdot\left[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega\right]}$ βρίσκουμε:

$$\boldsymbol{S_{20} = \frac{20}{2}\left[2\cdot 16 + (20 - 1)\cdot 2\right] = 10\cdot(32 + 19\cdot 2) = 10\cdot(32 + 38) = 10\cdot 70 = 700},$$

δηλαδή το θέατρο έχει συνολικά $\mathbf{700}$ καθίσματα.

δ.

i) Η πρώτη σειρά θα έχει $\mathbf{16 - 6 = 10}$ κατειλημμένα καθίσματα και κάθε επόμενη σειρά θα έχει μεν δύο παραπάνω καθίσματα αλλά ταυτόχρονα και $\mathbf{3}$ περισσότερα ελεύθερα από την προηγούμενη, άρα θα έχει $\mathbf{1}$ κατειλημμένο κάθισμα λιγότερο. Συνεπώς ο αριθμός των κατειλημμένων καθισμάτων κάθε σειράς θα ακολουθεί αριθμητική πρόοδο $\boldsymbol{(\beta_\nu)}$ με πρώτο όρο $\boldsymbol{\beta_1 = 10}$ και διαφορά $\boldsymbol{\omega = -1}$ (άρα και φθίνοντες όρους) μέχρι φυσικά να μηδενιστούν τα κατειλημμένα καθίσματα, οπότε σε κάθε σειρά από αυτήν και πέρα θα έχουμε μόνο άδεια καθίσματα. Ισχύει $\boldsymbol{\beta_\nu > 0 \Rightarrow}$ $\boldsymbol{\beta_1 + (\nu - 1)\omega > 0 \Rightarrow \quad 10 + (\nu - 1)\cdot(-1) > 0 \Rightarrow \quad 10 - \nu + 1 > 0 \Rightarrow \quad \nu < 11}$.

Άρα κατειλημμένα καθίσματα έχουν οι πρώτες $\mathbf{10}$ σειρές, οπότε από την ενδέκατη και πάνω οι σειρές είναι άδειες.

ii) Το πλήθος των θεατών ισούται προφανώς με το πλήθος των κατειλημμένων καθισμάτων που είναι ίσο με το άθροισμα των πρώτων $\mathbf{10}$ όρων της αριθμητικής προόδου $(\boldsymbol{\beta}_\nu)$, δηλαδή:

$\mathbf{S_{10} = \frac{10}{2} \cdot \left[2 \cdot 10 + (10-1) \cdot (-1)\right] = 5 \cdot (20 - 9 \cdot 1) = 55}$. Άρα έχουμε $\mathbf{55}$ θεατές.