Γεωμετρία Α' Λυκείου

Λύσεις Τράπεζας Θεμάτων 2014

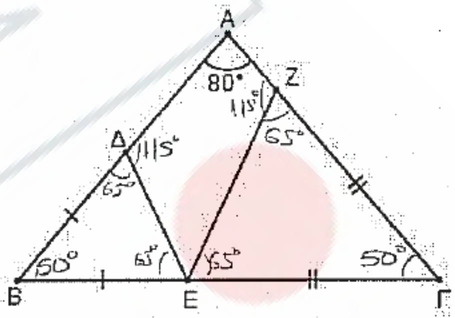
Χελιατσίδου Ρούλα

ΘΕΜΑ 2

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ είναι $\hat{A}$=80°. Παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε στην πλευρά ΒΓ και κατόπιν τα σημεία Δ και Ζ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα έτσι ώστε ΒΔ=ΒΕ και ΓΕ=ΓΖ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΒΔΕ και ΓΖΕ. (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\Delta E Z}$. (Μονάδες 10)



α) $\hat{B}=\hat{\Gamma}=\dfrac{180°-80°}{2}=\dfrac{100°}{2}=50°$

ΒΔ=ΒΕ άρα ΒΔΕ ισοσκελές με $B\hat{\Delta}E=B\hat{E}\Delta=\dfrac{180°-50°}{2}$

$=\dfrac{130°}{2}=65°$

ΖΓ=ΕΓ άρα ΖΕΓ ισοσκελές με $E\hat{Z}\Gamma=Z\hat{E}\Gamma=\dfrac{180°-50°}{2}$

$=\dfrac{130°}{2}=65°$

β) $A\hat{\Delta}E=180°-B\hat{\Delta}E=180°-65°=115°$

$A\hat{Z}E=180°-E\hat{Z}\Gamma=180°-65°=115°$

$\Delta\hat{E}Z=360°-\hat{A}-A\hat{\Delta}E-A\hat{Z}E=$

$=360°-80°-115°-115°=$

$=360°-310°=50°$

ΘΕΜΑ 2

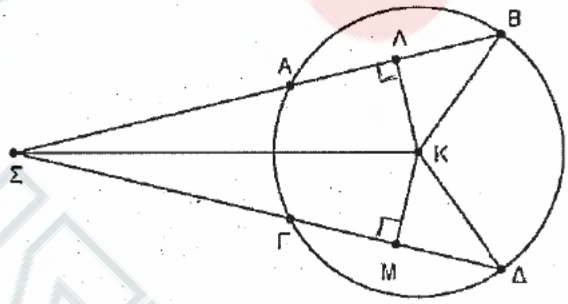
Από εξωτερικό σημείο Σ κύκλου (Κ, ρ) θεωρούμε τις τέμνουσες ΣΑΒ και ΣΓΔ του κύκλου για τις οποίες ισχύει ΣΒ=ΣΔ. Τα ΚΛ και ΚΜ είναι τα αποστήματα των χορδών ΑΒ και ΓΔ του κύκλου αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα ΚΒΣ και ΚΔΣ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

ii. ΚΛ=ΚΜ. (Μονάδες 10)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί οι χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι ίσες. (Μονάδες 5)



α)i) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ΚΒΣ}$ με $\overset{\triangle}{ΚΔΣ}$ έχω:

1) ΣΒ = ΣΔ υπόθεση

2) ΚΒ = ΚΔ ακτίνες

3) ΣΚ κοινή πλευρά

αρα ισχύει Π-Π-Π άρα $\overset{\triangle}{ΚΒΣ} = \overset{\triangle}{ΚΔΣ}$

ii) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ΒΚΛ}$ με $\overset{\triangle}{ΜΚΔ}$ έχω:

1) ορθογώνια

2) ΚΒ = ΚΔ ακτίνες

3) $\hat{Β} = \hat{Δ}$ αφού $\overset{\triangle}{ΚΒΣ} = \overset{\triangle}{ΚΔΣ}$

αρα ισχυει Υποτ + οξ.γ. αρα $\overset{\triangle}{ΒΚΛ} = \overset{\triangle}{ΜΚΔ}$

αρα: $\boxed{ΚΛ = ΚΜ}$

β) Αφού τα αποστήματα ΚΛ και ΚΜ είναι ίσα, θα είναι ίσες και οι αντίστοιχες χορδές τους, δηλ. ΑΒ = ΓΔ.

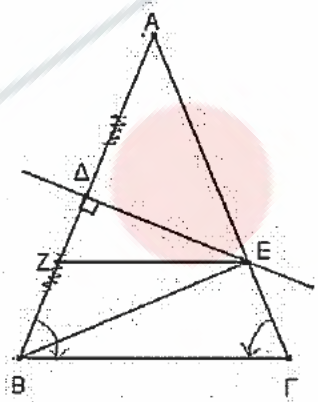
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Στο μέσο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στη βάση ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Ζ.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΕ= ΒΕ. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 10)



α) ΔΕ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ, άρα: ΑΕ=ΒΕ.

β) ΖΕ∥ΒΓ και $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ (αφού $A\hat{B}\Gamma$ ισοσκελές)

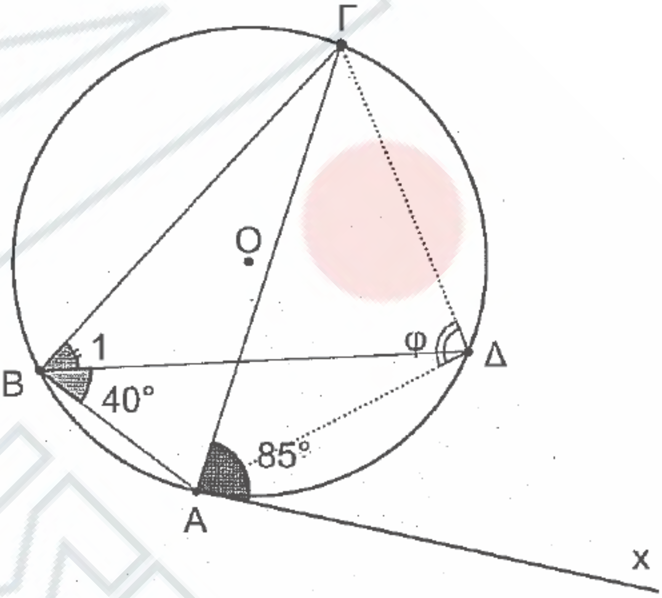
άρα ΒΓΕΖ ισοσκ. τραπέζιο.

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα που ακολουθεί, η Αx είναι εφαπτομένη του κύκλου (Ο, ρ) σε σημείο του Α και επιπλέον ισχύουν $\Gamma\hat{A}x = 85°$ και $\Delta\hat{B}\text{A} = 40°$.

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{B}_1 = 45°$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\phi}$. (Μονάδες 15)



α) $\Gamma\hat{B}A = \Gamma\hat{A}x = 85°$ ως γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης.
Τότε: $\hat{B}_1 = \Gamma\hat{B}A - \Delta\hat{B}A = 85° - 40° = 45°$.

β) $\Gamma\hat{B}A = 85°$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta A}$, άρα $\overset{\frown}{\Gamma\Delta A} = 170°$
Τότε: $\overset{\frown}{\Gamma BA} = 360° - \overset{\frown}{\Gamma\Delta A} = 360° - 170° = 190°$
$\hat{\varphi}$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο $\overset{\frown}{\Gamma BA} = 190°$, άρα $\hat{\varphi} = \frac{190°}{2} = 95°$.

ΘΕΜΑ 2

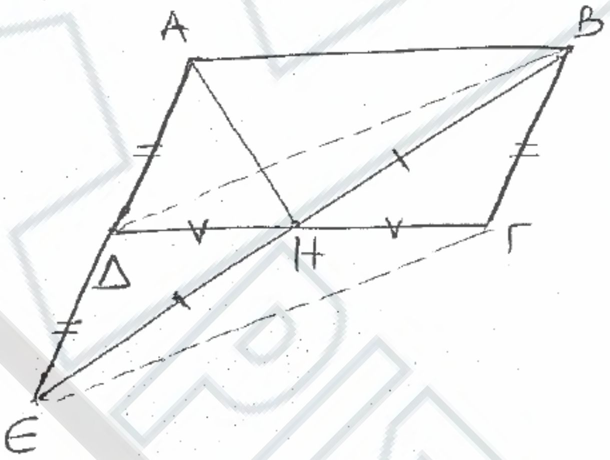
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ=2ΒΓ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα ΔΕ=ΑΔ και φέρουμε την ΒΕ που τέμνει τη ΔΓ στο σημείο Η.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΒΑΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) το ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) η ΑΗ είναι διάμεσος του ΒΑΕ τριγώνου. (Μονάδες 9)



α) ΑΕ = ΑΔ + ΔΕ = 2ΑΔ = 2ΒΓ = ΑΒ
άρα: $\overset{\triangle}{AEB}$ ισοσκελές.

β) ΔΕ = ΑΔ άρα έχω ΔΕ =// ΒΓ
άρα: ΔΕΓΒ ▱.

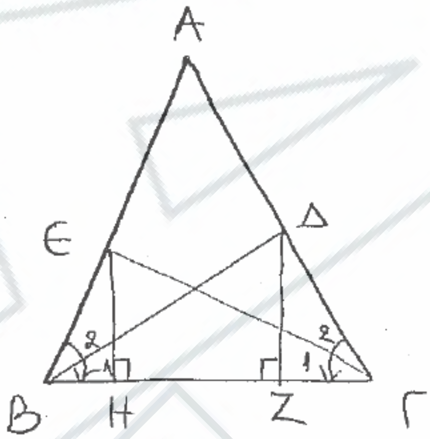
γ) Στο ▱ ΔΕΓΒ οι διαγώνιοι ΔΓ και ΕΒ διχοτομούνται στο Η, δηλ. Η μέσο ΔΓ και Η μέσο ΕΒ. Άρα ΑΗ διάμεσος στο $\overset{\triangle}{AEB}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ. Αν $ΕΗ \perp ΒΓ$ και $ΔΖ \perp ΒΓ$, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) ΕΗ = ΔΖ. (Μονάδες 12)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{\text{ΒΓΔ}}$ με $\overset{\triangle}{\text{ΓΒΕ}}$ έχω:

1) ΒΓ κοινή πλευρά

2) $\hat{\text{Β}} = \hat{\text{Γ}}$ αφού $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$ ισοσκ.

3) $\hat{\text{Γ}}_1 = \hat{\text{Β}}_1$ ως μισά ίσων γωνιών

άρα ισχύει Γ-Π-Γ άρα $\overset{\triangle}{\text{ΒΓΔ}} = \overset{\triangle}{\text{ΓΒΕ}}$

β) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{\text{ΒΕΗ}}$ με $\overset{\triangle}{\text{ΔΓΖ}}$ έχω:

1) ορθογώνια

2) $\hat{\text{Β}} = \hat{\text{Γ}}$ αφού $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$ ισοσκ.

3) ΒΕ = ΓΔ αφού $\overset{\triangle}{\text{ΒΓΔ}} = \overset{\triangle}{\text{ΓΒΕ}}$

άρα ισχύει Υποτ.+οξ.γ. άρα $\overset{\triangle}{\text{ΒΕΗ}} = \overset{\triangle}{\text{ΔΓΖ}}$

άρα: ΕΗ = ΔΖ

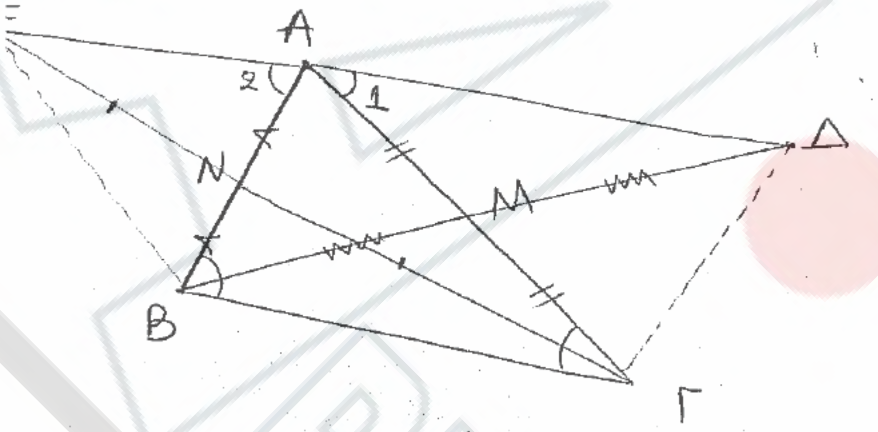
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του ΒΜ και ΓΝ. Προεκτείνουμε την ΒΜ (προς το Μ) κατά τμήμα ΜΔ=ΒΜ και την ΓΝ (προς το Ν) κατά τμήμα ΝΕ=ΓΝ.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΔ//ΒΓ και ΑΕ//ΒΓ. (Μονάδες 13)

β) Είναι τα σημεία Ε, Α και Δ συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)



α) Το ΑΒΓΔ είναι ▱ αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται στο Μ. Άρα: ΑΔ // ΒΓ.
Το ΑΕΒΓ είναι ▱ αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται στο Ν. Άρα: ΑΕ // ΒΓ.

β) $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ ως εντός εναλλάξ
$\hat{A}_2 = \hat{B}$ —\\— —\\— —\\—

Τότε: $\hat{A}_1 + \hat{A} + \hat{A}_2 = \hat{\Gamma} + \hat{A} + \hat{B} \overset{A\hat{B}\Gamma}{=\!=} 180^\circ$

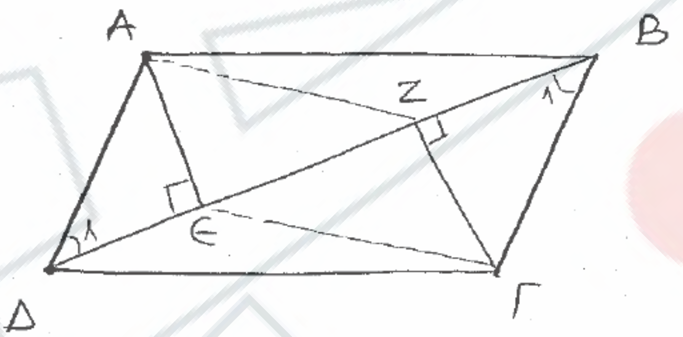
άρα Ε, Α, Δ συνευθειακά.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και η διαγώνιός του ΒΔ. Από τις κορυφές Α και Γ φέρουμε τις κάθετες ΑΕ και ΓΖ στη ΒΔ, που την τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΖ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 15)



α) Συγκρίνω $A\hat{\Delta}E$ με $\Gamma\hat{B}Z$ έχω:

1) ορθογώνια

2) ΑΔ = ΒΓ αφού ΑΒΓΔ #

3) $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$ ως εντός εναλλάξ

άρα ισχύει υποτ. + οξ. γ. άρα $A\hat{\Delta}E = \Gamma\hat{B}Z$.

β) Αφού $A\hat{\Delta}E = B\hat{\Gamma}Z$ θα έχω ΑΕ = ΓΖ και ΑΕ ∥ ΓΖ, αφού είναι ⊥ στην ΔΒ, άρα: ΑΕΓΖ #.

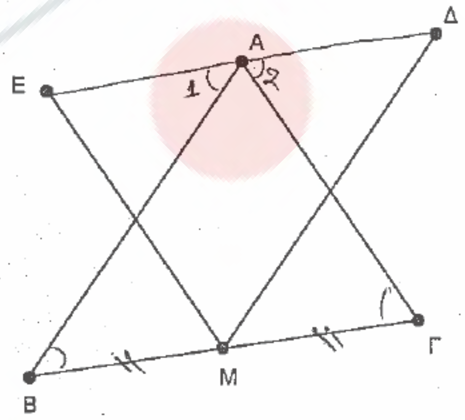
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΒΑ και ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΓΑ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΔΑ=ΑΕ (Μονάδες 8)

β) Τα σημεία Δ, Α και Ε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. (Μονάδες 9)

γ) ΔΕ=ΒΓ (Μονάδες 8)



α) Αφού $ΜΔ =\parallel ΑΒ$ θα έχω ΑΒΜΔ #,
άρα: $\boxed{ΑΔ = ΒΜ}$.
Αφού $ΜΕ =\parallel ΑΓ$ θα έχω ΑΕΜΓ #,
άρα: $\boxed{ΑΕ = ΜΓ}$

β) $\hat{Α}_1 = \hat{Β}$ ως εντός εναλλάξ
$\hat{Α}_2 = \hat{Γ}$ -"- -"- -"-
Τότε: $\hat{Α}_1 + \hat{Α} + \hat{Α}_2 = \hat{Β} + \hat{Α} + \hat{Γ} \overset{\triangle ΑΒΓ}{=} 180^\circ$
άρα: Ε, Α, Δ συνευθειακά

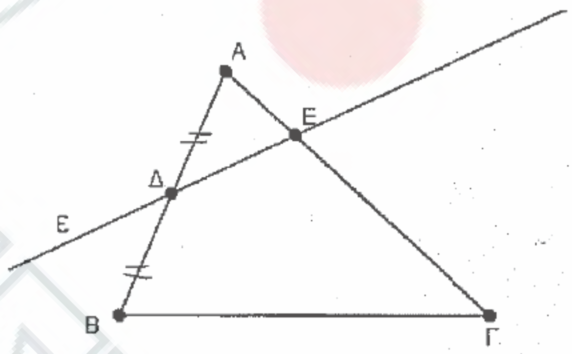
γ) Αφού ΑΒΜΔ # θα έχω $ΑΔ =\parallel ΒΜ$
Αφού ΑΕΜΓ # θα έχω $ΕΑ =\parallel ΜΓ$ }
άρα: $ΕΔ =\parallel ΒΓ$ άρα ΔΕΒΓ # άρα ΔΕ=ΒΓ.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ το μέσο της πλευράς ΑΒ. Από το Δ διέρχεται μια τυχαία ευθεία (ε) που τέμνει την πλευρά ΑΓ σε εσωτερικό της σημείο Ε. Η ευθεία (ε) χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΓ σε ένα τρίγωνο ΑΔΕ και σε ένα τετράπλευρο ΒΔΕΓ .

α) Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου Ε, ώστε το τετράπλευρο ΒΔΕΓ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του ΑΒΓ τριγώνου, ώστε το τραπέζιο του ερωτήματος (α) να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)



α) Θα πρέπει Ε μέσο της ΑΓ έτσι ώστε $ΔΕ = \parallel \frac{ΒΓ}{2}$. Άρα το ΒΔΕΓ τραπέζιο.

β) Θα πρέπει $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ ισοσκελές έτσι ώστε $\hat{Β} = \hat{Γ}$. Άρα το ΒΔΕΓ ισοσκ. τραπέζιο.

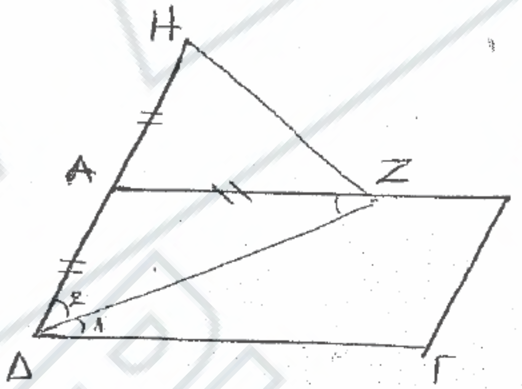
ΘΕΜΑ 2

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, προεκτείνουμε την πλευρά ΔΑ (προς το Α) κατά τμήμα ΑΗ=ΔΑ. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Delta}$, η οποία τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ζ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Το τρίγωνο ΔΖΗ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{Z}$. (Μονάδες 13)



α) $\hat{Z} = \hat{\Delta}_1$ ως εντός εναλλάξ, $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Delta}_1$ αφού ΔΖ διχοτόμος } άρα: $\hat{Z} = \hat{\Delta}_2$, άρα: $A\overset{\triangle}{\Delta}Z$ ισοσκ.

β) Στο $\Delta\overset{\triangle}{H}Z$ έχω $ZA = \frac{\Delta H}{2}$, άρα $\Delta\overset{\triangle}{H}Z$ ορθογώνιο με ΔΗ υποτείνουσα, άρα $H\hat{Z}\Delta = 90^\circ$.

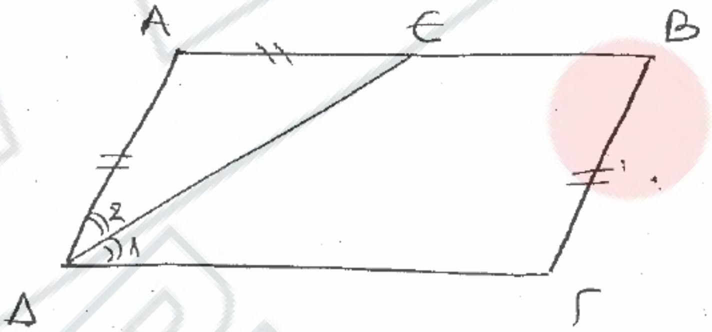
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με ΑΒ=2ΑΔ. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Delta}$ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Είναι το σημείο Ε μέσο της πλευράς ΑΒ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)



α) $\hat{E} = \hat{\Delta}_1$ ως εντός εναλλάξ
$\hat{\Delta}_2 = \hat{\Delta}_1$ αφού ΔΕ διχοτόμος

άρα: $\hat{E} = \hat{\Delta}_2$
άρα: $A\overset{\triangle}{\Delta}E$ ισοσκ.

β) $AB = 2A\Delta = 2AE$ άρα Ε μέσο ΑΒ.

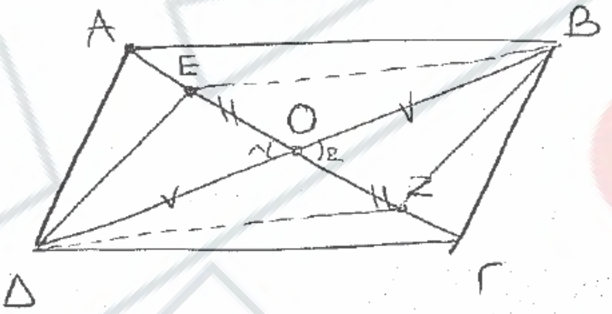
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο Ε του τμήματος ΑΟ και σημείο Ζ του τμήματος ΟΓ, ώστε ΟΕ=ΟΖ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΔΕ=ΒΖ (Μονάδες 12)

β) το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)



α) Συγκρίνω $O\overset{\triangle}{\Delta}E$ με $O\overset{\triangle}{B}Z$ έχω:

1) ΟΕ = ΟΖ υπόθεση

2) ΟΔ = ΟΒ αφού Ο μέσο ΔΒ

3) $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ ως κατακορυφήν

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $O\overset{\triangle}{\Delta}E = O\overset{\triangle}{B}Z$

άρα: $\boxed{\Delta E = BZ}$

β) Συγκρίνω $O\overset{\triangle}{E}B$ με $O\overset{\triangle}{\Delta}Z$ έχω:

1) ΟΕ = ΟΖ υπόθεση

2) ΟΔ = ΟΒ αφού Ο μέσο ΔΒ

3) $E\hat{O}B = \Delta\hat{O}Z$ ως κατακορυφήν

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $O\overset{\triangle}{E}B = O\overset{\triangle}{\Delta}Z$

άρα: $\boxed{EB = \Delta Z}$

Δηλ. έχω ΕΒ = ΔΖ και ΔΕ = ΒΖ άρα ΔΕΒΖ #.

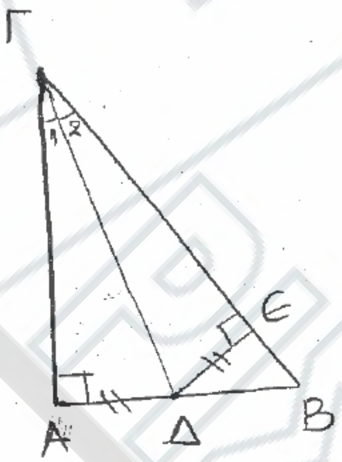
ΘΕΜΑ 2

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90°), η διχοτόμος τη γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ. Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά ΒΓ την κάθετο ΔΕ, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ε .

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ=ΔΕ (Μονάδες 13)

β) ΑΔ<ΔΒ (Μονάδες 12)



α) Δ σημείο της διχοτόμου της $\hat{\Gamma}$, αρα ισαπέχει από τις πλευρές της γωνιας, δηλ. $\boxed{ΑΔ = ΔΕ}$

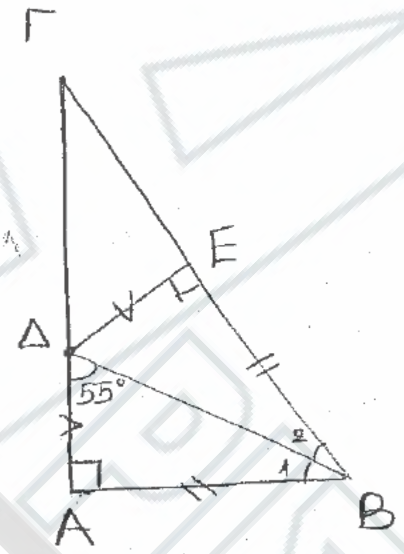
β) Στο $\overset{\triangle}{ΔΕΒ}$ εχω ΔΒ υποτείνουσα, αρα: ΔΒ > ΔΕ δηλ. ΔΒ > ΑΔ.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$). Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΕ=ΑΒ. (Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον $B\hat{\Delta}A = 55°$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΓΔΕ. (Μονάδες 13)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{A\Delta B}$ με $\overset{\triangle}{\Delta E B}$

έχω: 1) ορθογώνια

2) ΔΒ κοινή πλευρά

3) ΑΔ = ΔΕ αφού Δ ση- μείο της διχοτόμου

άρα ισχύει Υποτ.+καθ.πλ.

άρα $\overset{\triangle}{A\Delta B} = \overset{\triangle}{\Delta E B}$ άρα: ΒΕ = Α

β) $\overset{\triangle}{A\Delta B}$: $A\hat{\Delta}B = 55°$, άρα $\hat{B}_1 = 90° - 55° = 35°$

Άρα: $\hat{B} = 2 \cdot 35° = 70°$

Τότε στο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: $\hat{B} = 70°$, άρα $\hat{\Gamma} = 90° - 70° = 2$

και στο $\overset{\triangle}{\Delta\Gamma E}$: $\Gamma\hat{\Delta}E = 90° - 20° = 70°$.

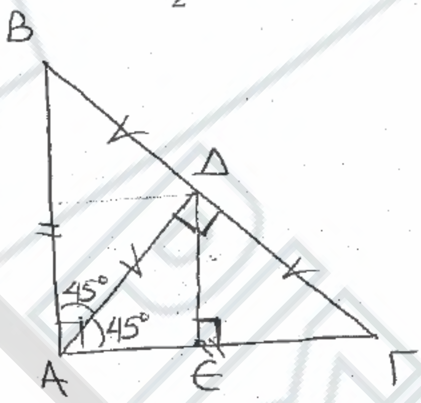
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ($\hat{A} = 90^o$) και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ= $\frac{ΒΓ}{2}$ (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

γ) ΔΕ= $\frac{ΑΓ}{2}$ (Μονάδες 9)



α) ΔΕ ⊥ ΑΓ αφού ΔΕ//ΑΒ. $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ ισοσκελές με ΑΔ διχοτόμο, άρα ΑΔ διάμεσο και ύψος. Τότε: ΑΔ = $\frac{ΒΓ}{2}$

β) Αφού ΔΕ ⊥ ΑΓ άρα $Δ\hat{Ε}Γ = 90°$, δηλ. $\overset{\triangle}{ΔΕΓ}$ ορθογώνιο.

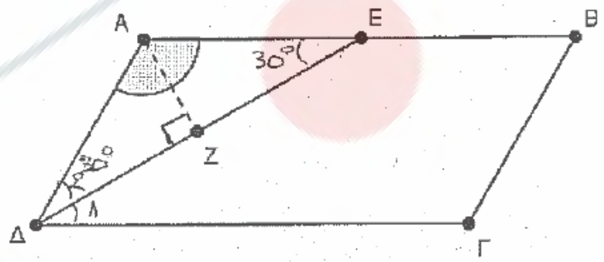
γ) ΑΔ = ΔΓ άρα $\overset{\triangle}{ΑΔΓ}$ ισοσκελές με ΔΕ ύψος, άρα ΔΕ διάμεσος, δηλ. ΔΕ = $\frac{ΑΓ}{2}$.

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με γωνία $\hat{A} = 120°$ και ΑΒ=2ΑΔ. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε, και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα ΑΖ στη ΔΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) γωνία $A\hat{\Delta}E = 30°$. (μον.10)

β) $AZ = \frac{AB}{4}$ (μον.15)



α) $\hat{E} = \hat{\Delta}_1$ ως εντός εναλλάξ
$\hat{\Delta}_2 = \hat{\Delta}_1$ αφού ΔΕ διχοτόμος
άρα $\hat{E} = \hat{\Delta}_2$, δηλ. $A\overset{\triangle}{\Delta}E$ ισοσκελές με

$$\hat{\Delta}_2 = \hat{E} = \frac{180° - 120°}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$$

β) $A\overset{\triangle}{\Delta}Z$: $\hat{\Delta}_2 = 30°$ άρα $AZ = \frac{A\Delta}{2} = \frac{\frac{AB}{2}}{2} = \frac{AB}{4}$.

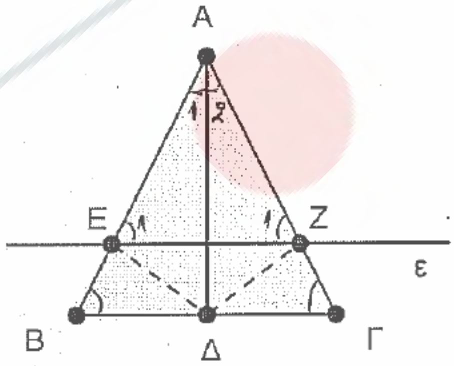
ΘΕΜΑ 2

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ και μια ευθεία (ε) παράλληλη προς την ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ είναι ίσα. (Μονάδες 15)



α) $\hat{E}_1 = \hat{B}$ ως εντός - εκτός και επί τ' αυτά

$\hat{Z}_1 = \hat{\Gamma}$ —"— —"— —"—

όμως $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ αφού $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ ισοσκελές

άρα $\hat{E}_1 = \hat{Z}_1$ άρα $A\overset{\triangle}{E}Z$ ισοσκελές

β) Συγκρίνω $A\overset{\triangle}{E}\Delta$ με $A\overset{\triangle}{\Delta}Z$ έχω:

1) ΑΔ κοινή πλευρά

2) ΑΕ = ΑΖ αφού $A\overset{\triangle}{E}Z$ ισοσκελές

3) $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ αφού ΑΔ διχοτόμος

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $A\overset{\triangle}{E}\Delta = A\overset{\triangle}{\Delta}Z$

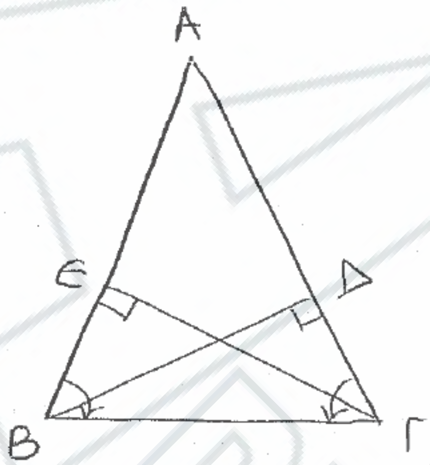
ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ είναι ίσα. (Μονάδες 15)

β) ΑΔ=ΑΕ (Μονάδες 10)



α) Συγκρίνω $B\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$ με $\Gamma\overset{\triangle}{E}B$

έχω: 1) ορθογώνια

2) ΒΓ κοινή πλευρά

3) $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ αφού $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ ισοσκ

άρα ισχύει Υποτ+οξ.γ.

άρα $B\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma = \Gamma\overset{\triangle}{E}B$

β) Αφού $B\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma = \Gamma\overset{\triangle}{E}B$ θα έχω

ΒΕ = ΔΓ άρα ΑΔ = ΑΕ ως διαφορά ίσων τμημάτων.

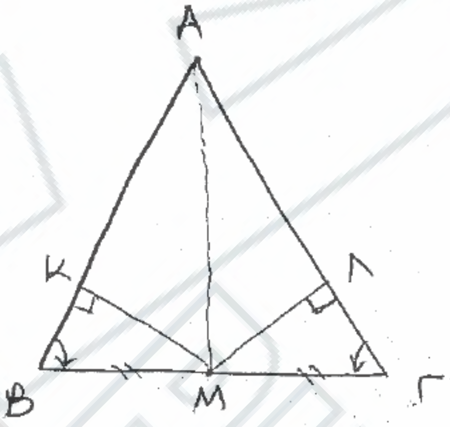
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε τις αποστάσεις ΜΚ και ΜΛ του σημείου Μ από τις ίσες πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΜΚ=ΜΛ. (Μονάδες 13)

β) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΚΜΛ. (Μονάδες 12)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{MBK}$ με $\overset{\triangle}{M\Gamma\Lambda}$

έχω: 1) ορθογώνια

2) ΜΒ = ΜΓ υπόθεση

3) $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ αφού $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισοσκ

άρα ισχύει Υποτ. + οξ. γ.

άρα $\overset{\triangle}{BMK} = \overset{\triangle}{M\Lambda\Gamma}$ άρα

$\boxed{MK = M\Lambda}$.

β) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{AMK}$ με $\overset{\triangle}{AM\Lambda}$ έχω:

1) ορθογώνια

2) ΑΜ κοινή πλευρά

3) ΜΚ = ΜΛ από α)

άρα ισχύει Υποτ. + καθ. πλευρά

άρα $\overset{\triangle}{AMK} = \overset{\triangle}{AM\Lambda}$ άρα $A\hat{M}K = A\hat{M}\Lambda$

δηλ. ΑΜ διχοτόμος της $K\hat{M}\Lambda$.

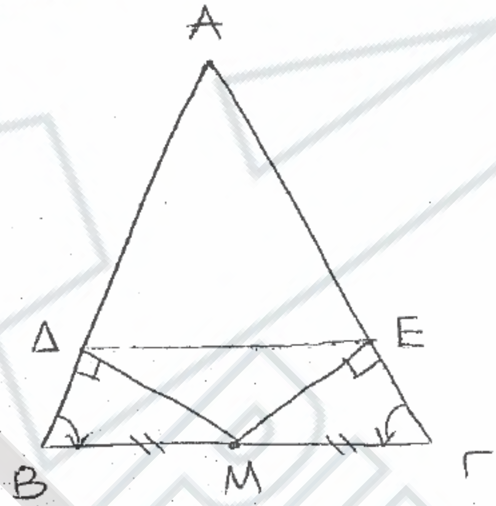
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι

α) ΜΔ=ΜΕ (Μονάδες 12)

β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές (Μονάδες 13)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{BMΔ}$ με $\overset{\triangle}{MEΓ}$

έχω: 1) ορθογώνια

2) ΜΒ = ΜΓ υπόθεση

3) $\hat{B} = \hat{Γ}$ αφού $\overset{\triangle}{ABΓ}$ ισοσκ

άρα ισχύει Υποτ. + οξ. γωνία

άρα $\overset{\triangle}{BMΔ} = \overset{\triangle}{MEΓ}$ άρα: $\boxed{MΔ = ME}$

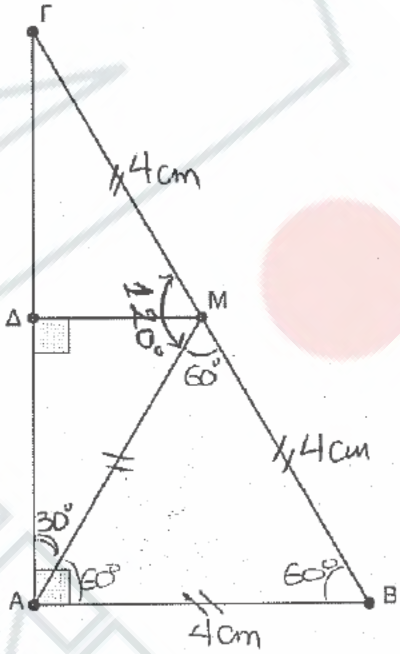
β) Αφού $\overset{\triangle}{BMΔ} = \overset{\triangle}{MEΓ}$ θα έχω ΒΔ = ΓΕ. Τότε ΑΔ = ΑΕ ως διαφορά ίσων τμημάτων, άρα $\overset{\triangle}{AΔE}$ ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) με ΒΓ = 8 cm. Έστω ΑΜ είναι διάμεσος του τριγώνου και ΜΔ ⊥ ΑΓ. Αν η γωνία $A\hat{M}\Gamma$ είναι ίση με 120°, τότε:

α) Να δείξετε ότι ΑΒ = 4 cm. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το μήκος της ΜΔ. (Μονάδες 13)



α) $A\hat{M}\Gamma = 120°$ αρα $A\hat{M}B = 60°$

$\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: έχω ΑΜ διάμεσο, αρα $AM = \frac{B\Gamma}{2} = 4cm$

Δηλ. το $\overset{\triangle}{ABM}$ ισοσκελές με $A\hat{M}B = 60°$, αρα

$\overset{\triangle}{ABM}$ ισόπλευρο, αρα ΑΒ = 4cm.

β) $M\hat{A}B = 60°$ αρα $M\hat{A}\Delta = 30°$ τότε στο $\overset{\triangle}{A\Delta M}$

θα έχω: $M\Delta = \frac{MA}{2} = \frac{4}{2} = 2cm$.

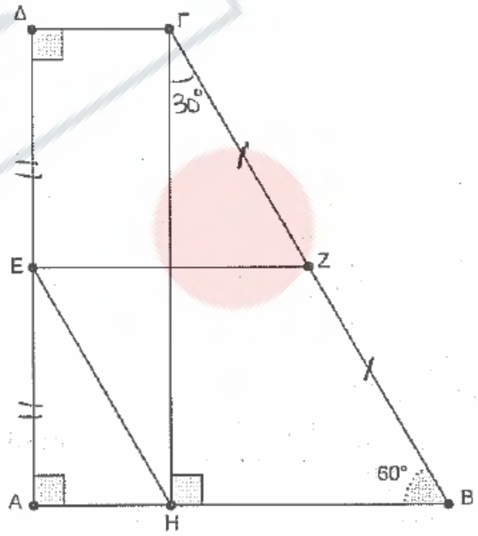
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, ΑΒ > ΓΔ, ΒΓ = 4ΓΔ και $\hat{B} = 60^\circ$. Φέρουμε την ΓΗ ⊥ ΑΒ και θεωρούμε τα μέσα Ε και Ζ των πλευρών ΑΔ και ΒΓ αντιστοίχως.

Να δείξετε ότι:

α) ΑΒ = 3ΓΔ. (Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο ΕΗΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)



α) $\underline{\hat{\Gamma H B}}$: $\hat{B} = 60^\circ$ αρα $H\hat{\Gamma}B = 30^\circ$, αρα $BH = \frac{B\Gamma}{2} =$

$= \frac{4\Gamma\Delta}{2} = 2\Gamma\Delta$

ΑΗΓΔ ορθογώνιο, αφού έχει 3 ορθές γωνίες

άρα: ΑΗ = ΓΔ.

Τότε: ΑΒ = ΑΗ + ΒΗ = ΓΔ + 2ΓΔ = 3ΓΔ.

β) ΕΖ διάμεσος του τραπεζίου ΑΒΓΔ

αρα: $EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{3\Gamma\Delta + \Gamma\Delta}{2} = \frac{4\Gamma\Delta}{2} = 2\Gamma\Delta$

και ΕΖ ∥ ΑΒ ∥ ΓΔ

Δηλ. έχω ΕΖ =∥ ΗΒ αρα ΕΖΒΗ ▱.

ΘΕΜΑ 2

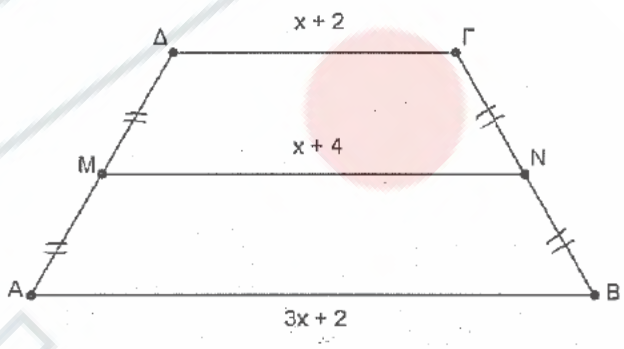
Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB > \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$.

α) Αν τα μήκη των βάσεων είναι:

$$AB = 3x + 2, \quad \Gamma\Delta = x + 2$$

και το μήκος της διαμέσου του τραπεζίου είναι $MN = x + 4$, τότε να δείξετε ότι $x = 2$. (Μονάδες 12)

β) Αν η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου. (Μονάδες 13)



α) $MN = \dfrac{\Gamma\Delta + AB}{2}$

$x + 4 = \dfrac{x + 2 + 3x + 2}{2}$

$x + 4 = \dfrac{4x + 4}{2}$

$x + 4 = 2x + 2$

$4 - 2 = 2x - x$

$\boxed{2 = x}$

β) $\hat{\Gamma} + \hat{B} = 180^\circ$ ως εντός και επί τ'αυτά

$2\hat{B} + \hat{B} = 180^\circ$

$3\hat{B} = 180^\circ$

$\hat{B} = 60^\circ$ άρα $\hat{\Gamma} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$

$\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 120^\circ$

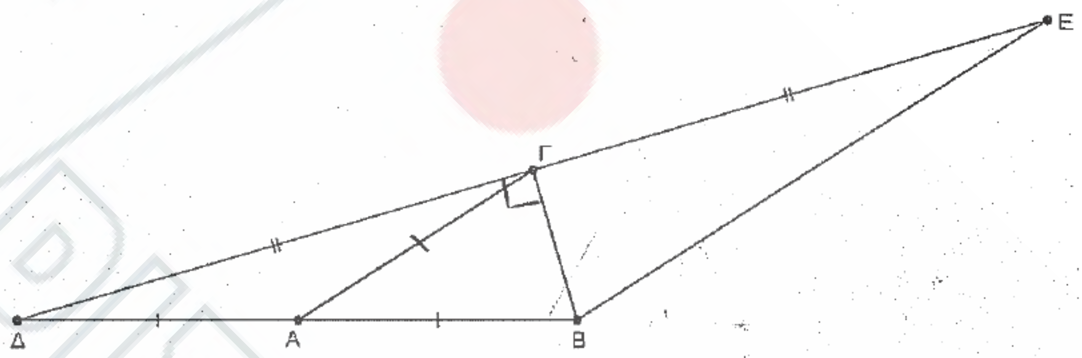
$\hat{A} = \hat{B} = 60^\circ$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Στην προέκταση της ΒΑ (προς το μέρος της κορυφής Α) παίρνουμε σημείο Δ ώστε ΑΒ = ΑΔ και στην προέκταση της ΔΓ (προς το μέρος της κορυφής Γ) παίρνουμε σημείο Ε ώστε ΔΓ = ΓΕ.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔΓΒ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι ΒΕ//ΑΓ και $ΑΓ = \frac{ΒΕ}{2}$. (Μονάδες 13)

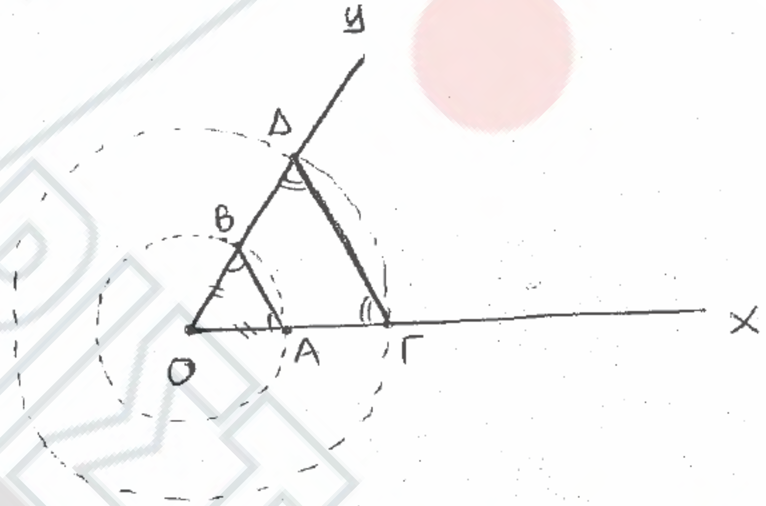


α) Στο $\overset{\triangle}{ΔΓΒ}$ έχω $ΓΑ = \frac{ΔΒ}{2}$, άρα $\overset{\triangle}{ΔΓΒ}$ είναι ορθογώνιο με ΔΒ υποτείνουσα, άρα $Δ\hat{Γ}Β = 90°$.

β) $\underline{\overset{\triangle}{ΔΒΕ}}$: $\left.\begin{matrix} Α \text{ μέσο } ΔΒ \\ Γ \text{ μέσο } ΔΕ \end{matrix}\right\}$ άρα: $ΑΓ =\parallel \frac{ΒΕ}{2}$.

ΘΕΜΑ 2

Ένας μαθητής της Α' λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία ΧΟΨ . Στη συνέχεια με κέντρο την κορυφή Ο της γωνίας σχεδιάζει δυο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές ΟΧ και ΟΨ της γωνίας στα σημεία Α, Β αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ, Δ. Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε; (Μονάδες 25)



$OA = OB =$ ακτίνες άρα $O\hat{A}B$ ισοσκελές
με $O\hat{B}A = O\hat{A}B = \dfrac{180^\circ - \hat{O}}{2}$

$O\Gamma = O\Delta =$ ακτίνες άρα $O\hat{\Gamma}\Delta$ ισοσκελές
με $O\hat{\Gamma}\Delta = O\hat{\Delta}\Gamma = \dfrac{180^\circ - \hat{O}}{2}$

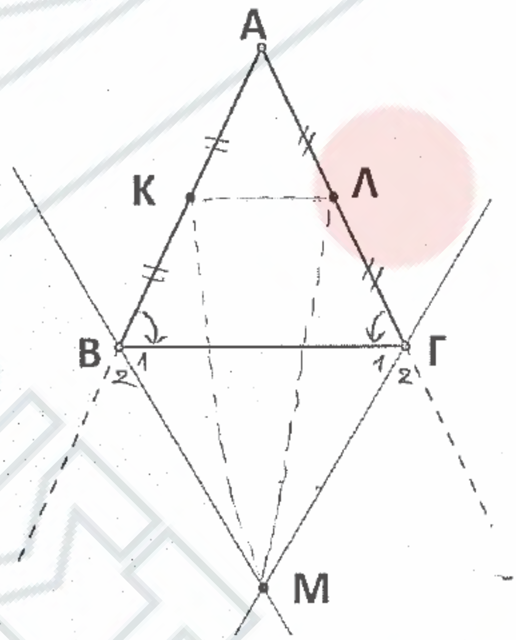
άρα: $O\hat{B}A = O\hat{A}B = O\hat{\Gamma}\Delta = O\hat{\Delta}\Gamma$
δηλ. έχω: $O\hat{B}A = O\hat{\Delta}\Gamma$ δηλ. έχω εντός-εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες, άρα $AB \parallel \Gamma\Delta$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών Β και Γ τέμνονται στο σημείο Μ και Κ, Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές με ΜΒ=ΜΓ. (Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι ΜΚ=ΜΛ. (Μονάδες 13)



α) $\hat{B}_{εξ} = \hat{Γ}_{εξ}$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών άρα $\hat{B}_1 = \hat{Γ}_1$ ως μισά ίσων γωνιών, άρα $\overset{\triangle}{BMΓ}$ ισοσκελές με ΜΒ=ΜΓ.

β) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{BMK}$ με $\overset{\triangle}{MΛΓ}$ έχω:

1) ΒΚ=ΛΓ ως μισά ίσων πλευρών

2) ΒΜ=ΜΓ από α)

3) $K\hat{B}M = Λ\hat{Γ}M$ ως άθροισμα ίσων γωνιών

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\overset{\triangle}{BMK} = \overset{\triangle}{MΛΓ}$

άρα: ΜΚ=ΜΛ.

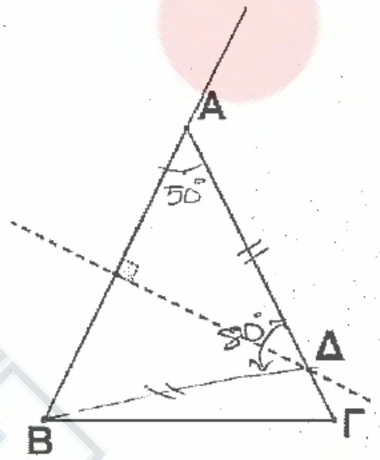
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η εξωτερική γωνία Α είναι διπλάσια της εσωτερικής γωνίας Β.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ. (Μονάδες 10)

β) Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο εσωτερικό της σημείο Δ. Αν η γωνία ΑΔΒ είναι ίση με 80^o, τότε να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 15)



α) $\hat{A}_{εξ} = 2\hat{B}$

$\hat{B} + \hat{Γ} = 2\hat{B}$

$\hat{Γ} = 2\hat{B} - \hat{B}$

$\hat{Γ} = \hat{B}$ άρα $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ.

β) Δ σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ

άρα: ΔΑ = ΔΒ άρα $\Delta\overset{\triangle}{A}B$ ισοσκελές

με $\hat{A} = A\hat{B}\Delta = \dfrac{180^\circ - 80^\circ}{2} = \dfrac{100^\circ}{2} = 50^\circ$

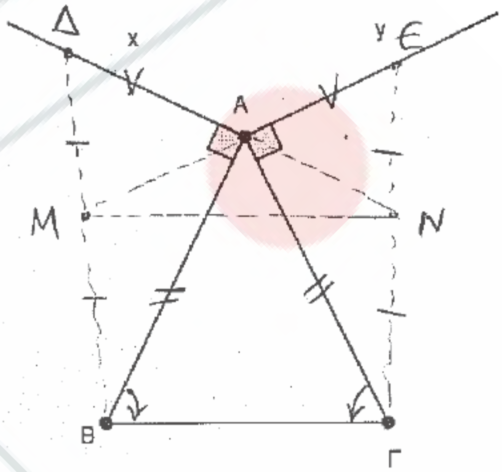
$\hat{Γ} = \hat{B} = \dfrac{180^\circ - 50^\circ}{2} = \dfrac{130^\circ}{2} = 65^\circ$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Αx και Αy τέτοιες ώστε Αx⊥ΑΒ και Αy⊥ΑΓ. Στις Αx και Αy θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε ΑΔ=ΑΕ.

α) Να αποδείξετε ότι ΒΔ=ΓΕ. (Μονάδες 12)

β) Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των τμημάτων ΒΔ και ΓΕ αντίστοιχα , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΜΝ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{A\Delta B}$ με $\overset{\triangle}{AE\Gamma}$ εχω:

1) ορθογώνια

2) ΑΔ = ΑΕ υποθεση

3) ΑΒ = ΑΓ —"—

αρα ισχυει Π-Γ-Π αρα $\overset{\triangle}{A\Delta B} = \overset{\triangle}{AE\Gamma}$

αρα: ΒΔ = ΓΕ.

β) $\overset{\triangle}{A\Delta B}$: έχω ΜΑ διαμεσο, αρα $MA = \frac{\Delta B}{2}$

$\overset{\triangle}{AE\Gamma}$: εχω ΝΑ διάμεσο, αρα $NA = \frac{\Gamma E}{2}$

αρα ΜΑ = ΝΑ, δηλ. $\overset{\triangle}{AMN}$ ισοσκελές

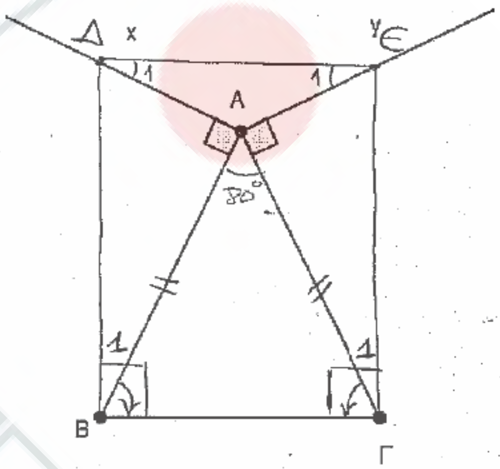
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ. Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Αx και Αy τέτοιες ώστε Αx⊥ΑΒ και Αy⊥ΑΓ. Οι κάθετες στην πλευρά ΒΓ στα σημεία Β και Γ τέμνουν τις Αx και Αy στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι ΒΔ=ΓΕ. (Μονάδες 12)

β) Αν η γωνία ΒΑΓ είναι ίση με 80°, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΔΑΕ.

(Μονάδες 13)



α) Συγκρίνω $\Delta\hat{A}B$ με $A\hat{\Gamma}E$ έχω:

1) ορθογώνια

2) $AB = A\Gamma$ υπόθεση

3) $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ ως συμπληρωματικές ίσων γωνιών

άρα ισχύει Γ-Π-Γ άρα $\Delta\hat{A}B = A\hat{\Gamma}E$

άρα $\boxed{\Delta B = E\Gamma}$.

β) Αφού $\Delta\hat{A}B = A\hat{\Gamma}E$ θα έχω $\Delta A = EA$

άρα $A\hat{\Delta}E$ ισοσκελές με $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$

$\Delta\hat{A}E = 360° - 90° - 90° - 80° =$

$= 360° - 260° = 100°$

άρα: $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1 = \dfrac{180° - 100°}{2} = \dfrac{80°}{2} = 40°$

ΘΕΜΑ 2

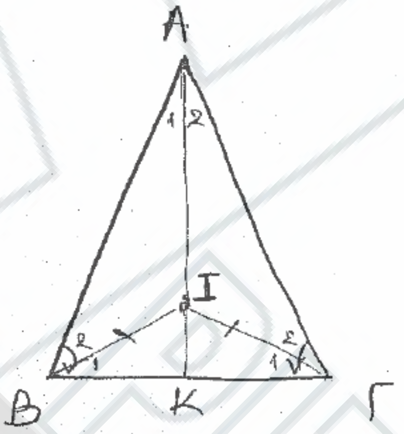
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Οι γωνίες $A\hat{I}\Gamma$ και $A\hat{I}B$ είναι ίσες. (Μονάδες 10)

γ) Η ευθεία ΑΙ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ. (Μονάδες 7)



α) $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ ως μισά ίσων γωνιών, άρα $B\overset{\triangle}{I}\Gamma$ ισοσκ.

β) Συγκρίνω $A\overset{\triangle}{\Gamma}I$ με $A\overset{\triangle}{B}I$ έχω:

1) ΑΙ κοινή πλευρά

2) ΒΙ = ΓΙ από α)

3) ΑΒ = ΑΓ αφού $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ ισοσκ.

άρα ισχύει Π-Π-Π άρα $A\overset{\triangle}{\Gamma}I = A\overset{\triangle}{B}I$

άρα: $A\hat{I}\Gamma = A\hat{I}B$.

γ) $B\hat{I}K = \Gamma\hat{I}K$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών

Τότε: στο ισοσκελές $B\overset{\triangle}{I}\Gamma$ έχω ΙΚ διχοτόμο άρα ΙΚ διάμεσος και ύψος, δηλ. ΑΚ μεσοκάθετος της ΒΓ.

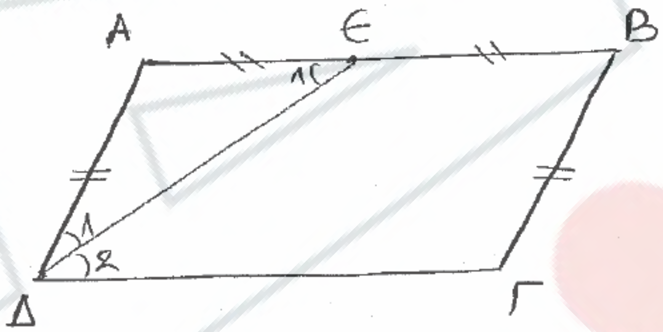
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ=2ΒΓ και Ε το μέσο της πλευράς του ΑΒ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$. (Μονάδες 15)



α) $AB = 2B\Gamma$ άρα: $AE = EB = B\Gamma = A\Delta$

άρα $A\hat{\Delta}E$ ισοσκελές.

β) $A\hat{\Delta}E$ ισοσκελές με $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$

όμως $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_1$ ως εντός εναλλάξ

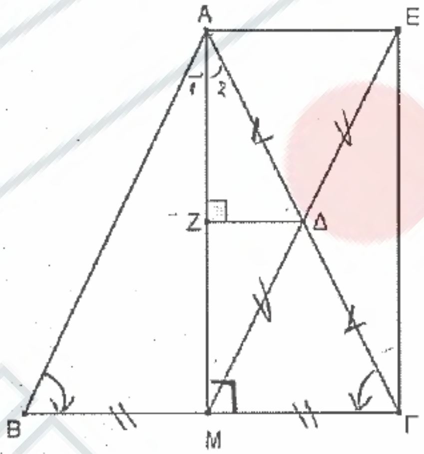
άρα: $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ δηλ. ΔΕ διχοτόμος της $\hat{\Delta}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και η διάμεσός του ΑΜ. Στην προέκταση της διαμέσου ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ θεωρούμε σημείο Ε ώστε ΜΔ=ΔΕ . Αν το σημείο Ζ είναι το ίχνος του Δ στην ΑΜ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 12)

β) $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{4}$ (Μονάδες 13)



α) Στο ισοσκ. $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ έχω ΑΜ διάμεσο, άρα ΑΜ ύψος και διχοτόμος.

ΑΕΓΜ # αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται στο Δ και έχει 1 ορθή γωνία, άρα ΑΕΓΜ ορθογώνιο.

β) ΔΖ // ΜΓ γιατί είναι ⊥ στην ΑΜ
Δ μέσο ΑΓ
} άρα Ζ μέσ. του ΑΜ

Τότε: $\overset{\triangle}{AM\Gamma}$: Ζ μέσο ΑΜ
Δ μέσο ΑΓ
} άρα: $\Delta Z = \parallel \frac{M\Gamma}{2}$

$\Delta Z = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2}$

$\Delta Z = \frac{B\Gamma}{4}$.

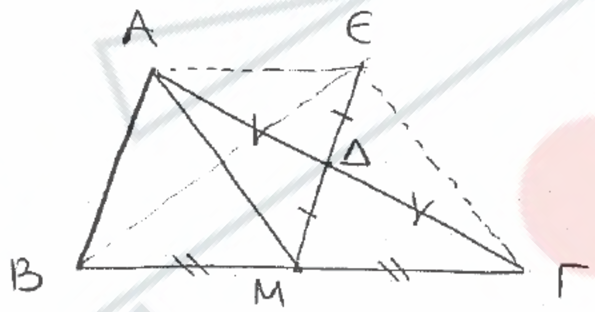
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Στην προέκταση της διαμέσου ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ θεωρούμε σημείο Ε ώστε ΜΔ=ΔΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)

β) Η ΒΕ διέρχεται από το μέσο της διαμέσου ΑΜ. (Μονάδες 13)



α) ΑΜΓΕ ▱ αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται στο Δ.

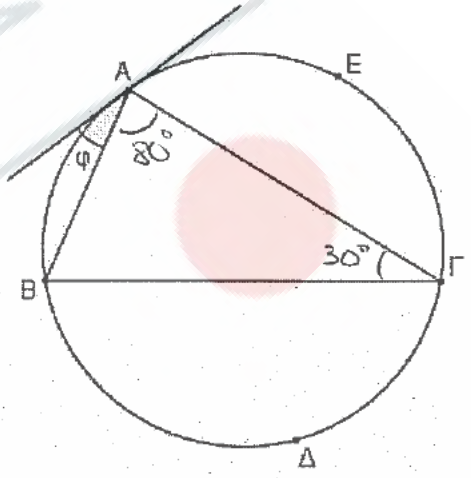
β) Αφού ΑΜΓΕ ▱ θα έχω ΑΕ=∥ΜΓ άρα και ΑΕ=∥ΒΜ. Τότε ΑΕΜΒ ▱, όπου οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Άρα η ΒΕ διέρχεται από το μέσο της ΑΜ.

ΘΕΜΑ 2

Στο ακόλουθο σχήμα, η εφαπτομένη του κύκλου στην κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζει γωνία φ=30° με την πλευρά ΑΒ. Αν το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{ΒΔΓ}$ είναι 160°,

α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 18)

β) να βρείτε το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{ΑΕΓ}$. (Μονάδες 7)



α) $\hat{Α}$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο $\overset{\frown}{ΒΔΓ} = 160°$

άρα: $\hat{Α} = \frac{160°}{2} = 80°$

$\hat{Γ} = \hat{φ} = 30°$ ως γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης

$\hat{Β} = 180° - 80° - 30° = 70°$

β) $\hat{Β} = 70°$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο $\overset{\frown}{ΑΕΓ}$, άρα: $\overset{\frown}{ΑΕΓ} = 140°$.

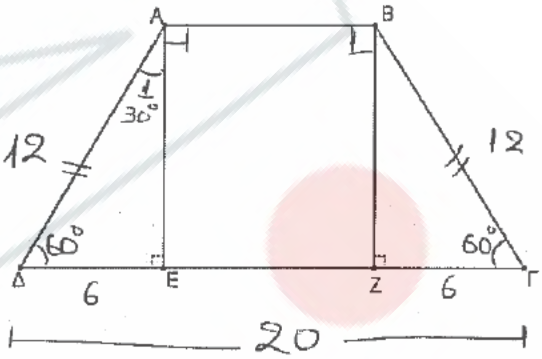
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60°$, ΑΔ=12 και ΓΔ=20.

Φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ.

α) Να αποδείξετε ότι ΔΕ=ΓΖ και ΑΒ=ΕΖ. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τραπεζίου. (Μονάδες 13)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ΑΔΕ}$ με $\overset{\triangle}{ΒΓΖ}$ έχω:

1) ορθογώνια

2) ΑΔ = ΒΓ = 12

3) $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 60°$

άρα ισχύει υποτ.+οξ. γωνία άρα $\overset{\triangle}{ΑΔΕ} = \overset{\triangle}{ΒΓΖ}$

άρα: ΔΕ = ΓΖ

ΑΕΖΒ ορθογώνιο αφού έχει 3 ορθές γωνίες, άρα: ΑΒ = ΕΖ.

β)

$\underline{\overset{\triangle}{ΑΔΕ}:}$ $\hat{\Delta} = 60°$, άρα $\hat{A}_1 = 30°$ άρα: $ΔΕ = \frac{ΑΔ}{2} = \frac{12}{2} = 6$

Τότε: ΕΖ = ΑΒ = ΔΓ − ΔΕ − ΖΓ = 20 − 6 − 6 = 8

περίμετρος = ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ =

= 8 + 12 + 20 + 12 = 52.

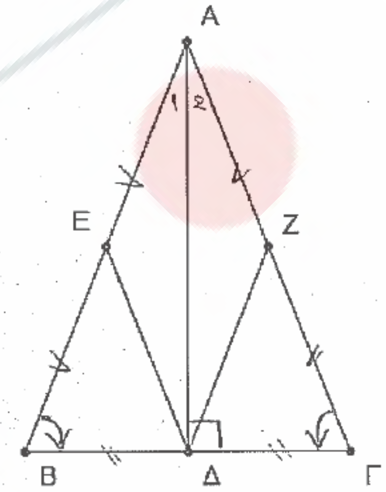
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ), το ύψος του ΑΔ και τα μέσα Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξτε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΖ είναι ίσα. (Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο ΑΖΔΕ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)



α) Συγκρίνω $\overset{\Delta}{B\Delta E}$ με $\overset{\Delta}{\Delta Z\Gamma}$ έχω:

1) ΒΔ = ΔΓ αφού ΑΔ ύψος θα είναι και διάμεσος

2) $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ αφού $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ ισοσκελές

3) ΒΕ = ΓΖ ως μισά ίσων πλευρών

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\overset{\Delta}{B\Delta E} = \overset{\Delta}{\Delta Z\Gamma}$

β) άρα: ΔΕ = ΔΖ.

$\overset{\Delta}{AB\Gamma}$: Ζ μέσο ΑΓ, Δ μέσο ΒΓ $\Big\}$ άρα $Z\Delta =\parallel \frac{AB}{2}$

άρα ΖΔ =∥ ΑΕ άρα το ΑΖΔΕ ▱ και έχει ΔΕ=ΔΖ

άρα ΑΖΔΕ ρόμβος.

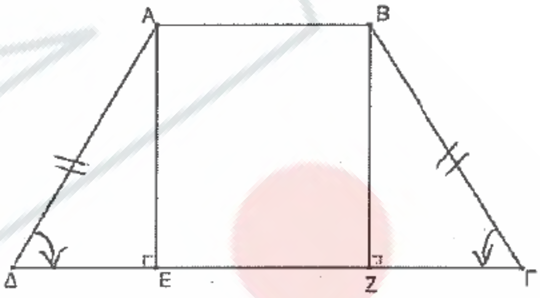
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ). Φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΔΕ=ΓΖ. (Μονάδες 12)

β) ΑΖ=ΒΕ. (Μονάδες 13)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ΑΔΕ}$ με $\overset{\triangle}{ΒΖΓ}$ εχω:

1) ορθογώνια

2) ΑΔ = ΒΓ αφού ΑΒΓΔ ισοσκ. τραπέζιο

3) $\hat{Δ} = \hat{Γ}$

αρα ισχυει υποτ. + οξ. γωνία αρα $\overset{\triangle}{ΑΔΕ} = \overset{\triangle}{ΒΖΓ}$

αρα: ΔΕ = ΓΖ.

β) ΑΒΖΕ ορθογώνιο αφού έχει 3 ορθές γωνίες, αρα εχει ισες διαγωνίους, δηλ. ΑΖ = ΒΕ.

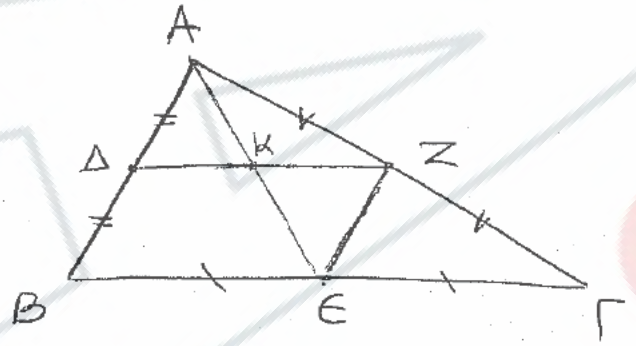
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΔΒΕΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) Η ευθεία ΔΖ διχοτομεί το τμήμα ΑΕ. (Μονάδες12)



α) $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: $\left.\begin{array}{l}\Delta \text{ μέσο } A\Delta \\ Z \text{ μέσο } A\Gamma\end{array}\right\}$ άρα: $\Delta Z =\parallel \frac{B\Gamma}{2}$

άρα $\Delta Z =\parallel BE$

άρα ΔBEZ παρ/μο.

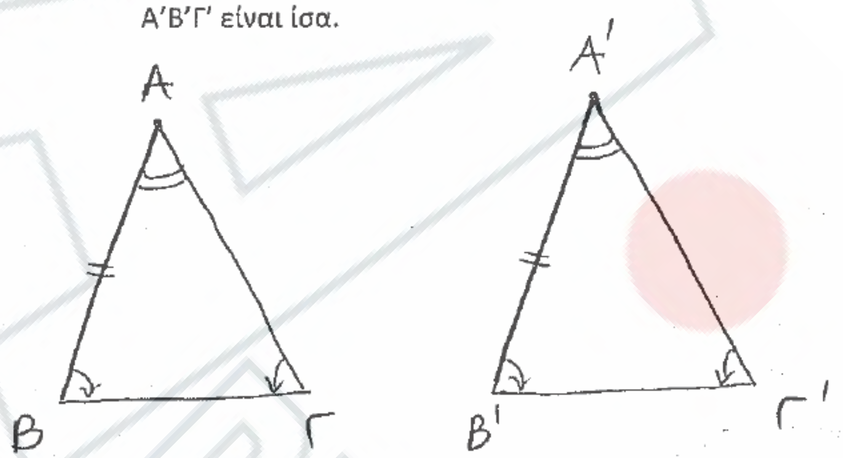
β) $\overset{\triangle}{ABE}$: $\left.\begin{array}{l}\Delta \text{ μέσο } AB \\ \Delta K \parallel BE \text{ (από α))}\end{array}\right\}$ άρα K μέσο AE δηλ. το ΔΖ διχοτομεί το ΑΕ.

ΘΕΜΑ 2

Έστω δυο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και Α'Β'Γ' (Α'Β'=Α'Γ').

α) Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει $AB = A'B'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$, τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$, τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ίσα. (Μονάδες 12)



α) Αφού είναι ισοσκελή και $AB = A'B'$, θα έχω: $AB = A'B' = A\Gamma = A'\Gamma'$.

Συγκρίνω $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ με $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$ έχω:

1) $AB = A'B'$ υπόθεση

2) $A\Gamma = A'\Gamma'$ —"—

3) $\hat{A} = \hat{A}'$ —"—

άρα ισχύει Π−Γ−Π άρα $\overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$.

β) Αφού είναι ισοσκελή και $A\Gamma = A'\Gamma'$, θα έχω: $A\Gamma = A'\Gamma' = AB = A'B'$ και αφού $\hat{B} = \hat{B}'$ θα έχω $\hat{B} = \hat{B}' = \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$.

Συγκρίνω $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ με $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$ έχω:

1) $A\Gamma = A'\Gamma'$ υπόθεση

2) $AB = A'B'$ —"—

3) $\hat{A} = \hat{A}'$ αφού $\hat{A} = 180^\circ - 2\hat{B}$, $\hat{A}' = 180^\circ - 2\hat{B}'$

άρα ισχύει Π−Γ−Π άρα $\overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$.

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που αντιστοιχούν στις πλευρές του ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.

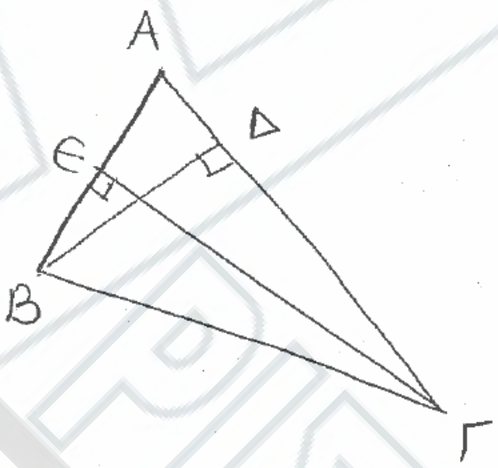
Να αποδείξετε ότι :

α) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ, τότε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Αν τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΓ=ΑΒ.

(Μονάδες 13)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ με $\overset{\triangle}{AE\Gamma}$ έχω:

1) ορθογώνια

2) $AB = A\Gamma$ αφού $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισοσκελές

3) $\hat{A}$ κοινή γωνία

άρα ισχύει Υποτ.+οξ. γωνία, άρα $\overset{\triangle}{AB\Delta} = \overset{\triangle}{AE\Gamma}$

άρα: $B\Delta = \Gamma E$.

β) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ με $\overset{\triangle}{AE\Gamma}$ έχω:

1) ορθογώνια

2) $B\Delta = \Gamma E$ υπόθεση

3) $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E$ ως συμπληρωματικές της $\hat{A}$

άρα ισχύει Υποτ.+οξ. γωνία, άρα $\overset{\triangle}{AB\Delta} = \overset{\triangle}{AE\Gamma}$

άρα: $AB = A\Gamma$.

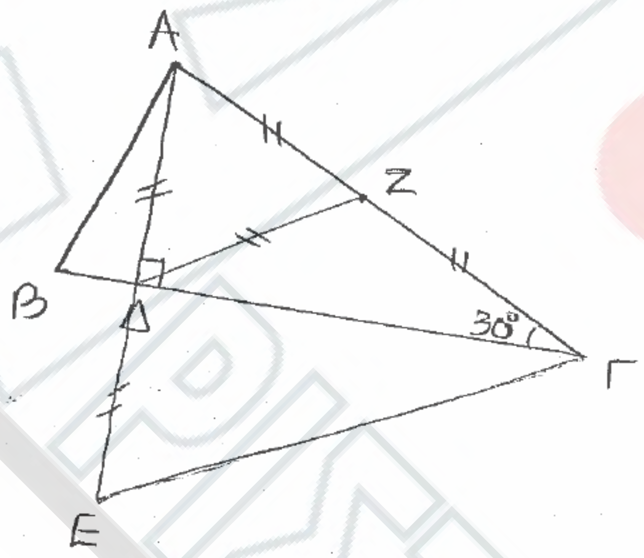
ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και γωνία $\hat{\Gamma} = 30^0$. Θεωρούμε το ύψος ΑΔ και το μέσο Ζ της πλευράς ΑΓ. Προεκτείνουμε το ύψος ΑΔ (προς το Δ) κατά ίσο τμήμα ΔΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 13)



α) $\overset{\Delta}{A\Delta\Gamma}$: εχω ΔΖ διάμεσο, αρα $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$.

β) $\overset{\Delta}{A\Delta\Gamma}$: εχω $\hat{\Gamma} = 30°$ άρα: $A\Delta = \frac{A\Gamma}{2}$.

Τότε: ΑΕ = ΑΓ άρα το $\overset{\Delta}{AE\Gamma}$ ισοσκελές με $E\hat{A}\Gamma = 60°$ (αφού στο $\overset{\Delta}{A\Delta\Gamma}$ εχω $\hat{\Gamma} = 30°$)

άρα $\overset{\Delta}{AE\Gamma}$ ισόπλευρο.

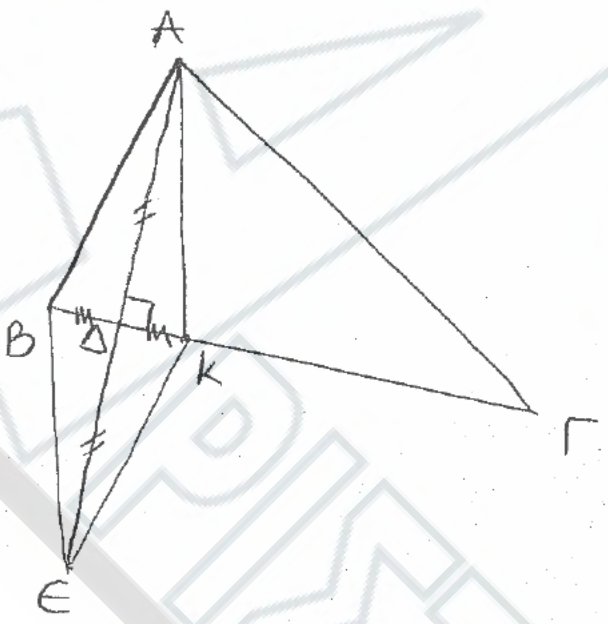
ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και το ύψος του ΑΔ. Προεκτείνουμε το ΑΔ (προς το Δ) κατά τμήμα ΔΕ=ΑΔ. Έστω Κ το συμμετρικό του Β ως προς το Δ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΚ είναι ρόμβος. (Μονάδες 13)



α) ΑΔ μεσοκάθετος του ΒΚ, άρα ΑΒ = ΑΚ άρα $\overset{\triangle}{ABK}$ ισοσκελές

β) ΑΒΕΚ ▱ αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται στο Δ και ΑΒ = ΑΚ, άρα ΑΒΕΚ ρόμβος.

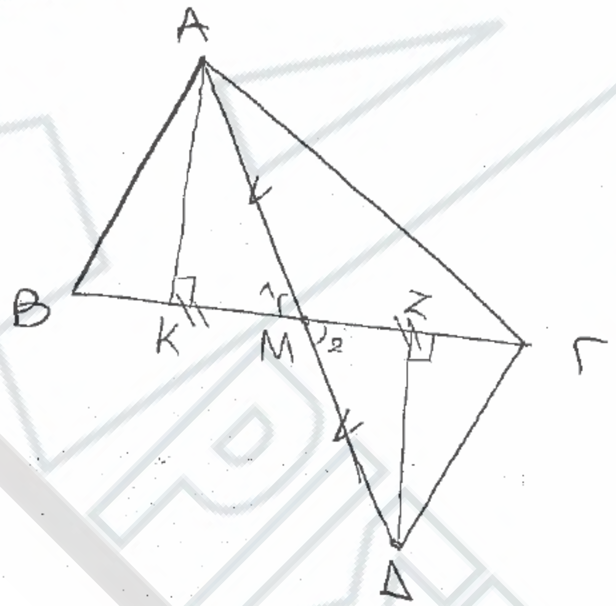
ΘΕΜΑ 2

Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά ίσο τμήμα ΜΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Τα σημεία Α και Δ ισαπέχουν από την πλευρά ΒΓ. (Μονάδες 13)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ABM}$ με $\overset{\triangle}{M\Gamma\Delta}$ έχω:

1) ΑΜ = ΜΔ υπόθεση

2) ΒΜ = ΜΓ -\\-

3) $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ ως κατακορυφήν

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\overset{\triangle}{ABM} = \overset{\triangle}{M\Gamma\Delta}$.

β) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{AKM}$ με $\overset{\triangle}{M\Delta Z}$ έχω:

1) ορθογώνια

2) ΑΜ = ΜΔ υπόθεση

3) $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ ως κατακορυφήν

άρα ισχύει Υποτ. + οξ. γωνία άρα $\overset{\triangle}{AKM} = \overset{\triangle}{M\Delta Z}$

άρα: ΑΚ = ΔΖ.

ΘΕΜΑ 2ο

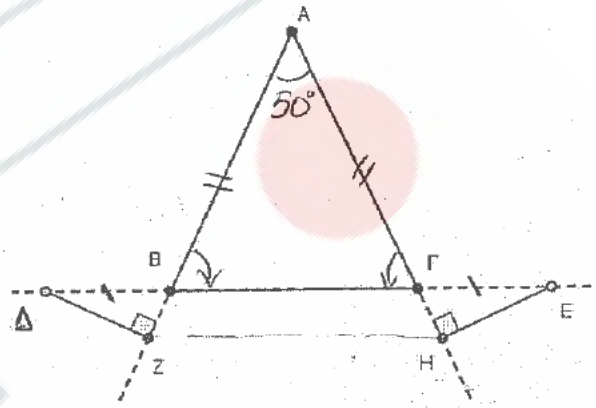
Θωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και σημεία Δ και Ε στην ευθεία ΒΓ τέτοια, ώστε ΒΔ=ΓΕ. Έστω ότι $ΔΖ \perp ΑΒ$ και $ΕΗ \perp ΑΓ$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΒΖ=ΓΗ. (Μονάδες 10)

ii. Το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Αν $\hat{A} = 50^0$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΖΗ. (Μονάδες 8)



α) i) Συγκρίνω $\overset{\Delta}{ΔΒΖ}$ με $\overset{\Delta}{ΓΕΗ}$ έχω:

1) ορθογώνια

2) ΔΒ = ΓΕ υπόθεση

3) $Δ\hat{Β}Ζ = Ε\hat{Γ}Η$ ως κατακορυφήν ίσων γωνιών

άρα ισχυει υποτ. + οξ. γωνία άρα $\overset{\Delta}{ΔΒΖ} = \overset{\Delta}{ΓΕΗ}$

άρα $\boxed{ΒΖ = ΓΗ}$. και ΒΖ = ΓΗ

ii) Τότε: ΑΖ = ΑΗ ως άθροισμα ίσων πλευρων

άρα $\overset{\Delta}{ΑΖΗ}$ ισοσκελές

β) $\overset{\Delta}{ΑΖΗ}$ ισοσκελές με $Α\hat{Ζ}Η = Α\hat{Η}Ζ = \frac{180° - 50°}{2} = \frac{130°}{2} = 65°$.

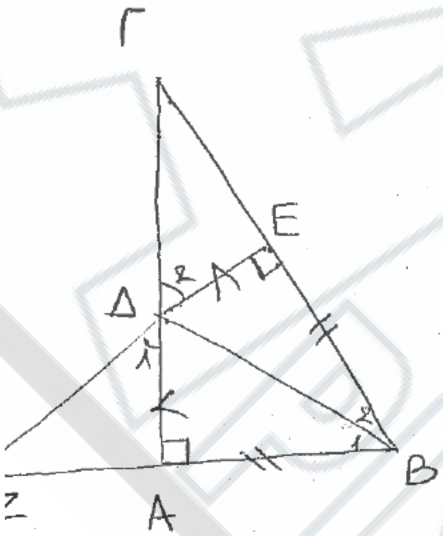
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^0$) και ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$, και έστω Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ (προς το Β).

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ=ΒΕ (Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΒ είναι ίσα. (Μονάδες 12)



α) Συγκρίνω $A\overset{\triangle}{\Delta}B$ με $\Delta\overset{\triangle}{E}B$

εχω: 1) ορθογώνια

2) ΔΒ κοινή πλευρά

3) $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ αφού ΔΒ διχοτό

αρα ισχυει υποτ.+οξ. γωνια

αρα $A\overset{\triangle}{\Delta}B = \Delta\overset{\triangle}{E}B$ αρα $\boxed{AB=BE}$

β) Συγκρίνω $Z\overset{\triangle}{\Delta}A$ με $\Delta\overset{\triangle}{E}\Gamma$ εχω:

1) ορθογώνια

2) $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ ως κατακορυφήν

3) ΔΑ=ΔΕ αφού Δ σημείο της διχοτόμου της $\hat{B}$

αρα ισχυει Γ-Π-Γ αρα $Z\overset{\triangle}{\Delta}A = \Delta\overset{\triangle}{E}\Gamma$ αρα $\boxed{ZA=\Gamma E}$

και $\boxed{\hat{Z} = \hat{\Gamma}}$

Συγκρίνω $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ με $Z\overset{\triangle}{E}B$ εχω:

1) ορθογώνια

2) ΑΒ = ΒΕ από α)

3) $\hat{B}$ κοινή γωνία

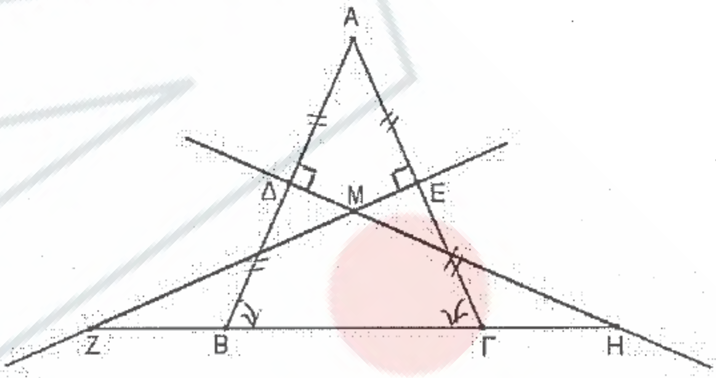
αρα ισχύει Γ-Π-Γ αρα $A\overset{\triangle}{B}\Gamma = Z\overset{\triangle}{E}B$.

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Οι μεσοκάθετες ευθείες των ίσων πλευρών του τέμνονται στο Μ και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση ΒΓ στα Ζ και Η.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΒΗ και ΕΖΓ. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΖΗ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ΔΒΗ}$ με $\overset{\triangle}{ΕΖΓ}$ έχω:

1) ορθογώνια

2) ΒΔ = ΕΓ ως μισά ίσων πλευρών

3) $\hat{Β} = \hat{Γ}$ αφού $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ ισοσκελές

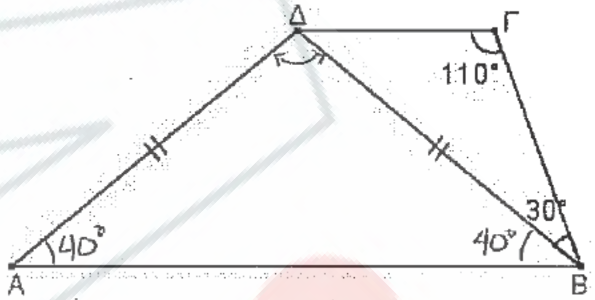
άρα ισχύει Γ-Π-Γ άρα $\overset{\triangle}{ΔΒΗ} = \overset{\triangle}{ΕΖΓ}$.

β) Αφού $\overset{\triangle}{ΔΒΗ} = \overset{\triangle}{ΕΖΓ}$ θα έχω $\hat{Ζ} = \hat{Η}$

άρα $\overset{\triangle}{ΜΖΗ}$ ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ στο οποίο η διαγώνιος ΒΔ είναι ίση με την πλευρά ΑΔ. Αν η γωνία $\hat{\Gamma} = 110°$ και η γωνία $\widehat{\Delta B \Gamma} = 30°$, να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{A\Delta B}$. (Μονάδες 25)



$A\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma} = 180°$ ως εντός και επί τ' αυτά

$A\hat{B}\Gamma + 110° = 180°$

$A\hat{B}\Gamma = 70°$ άρα: $\Delta\hat{B}A = 70° - 30° = 40°$

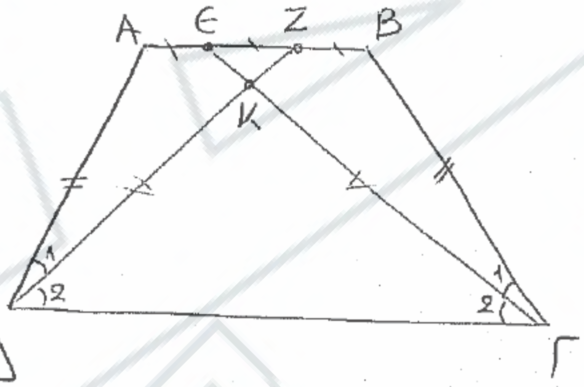
$\underline{A\hat{\Delta}B:}$ $\hat{\Delta} = 180° - 40° - 40° = 100°$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ και ΑΒ<ΓΔ. Θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ πάνω στην ΑΒ έτσι ώστε ΑΕ=ΕΖ=ΖΒ και έστω Κ το σημείο τομής των ΔΖ και ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΔΖ=ΓΕ (Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα ΕΚΖ και ΔΚΓ είναι ισοσκελή (Μονάδες 12)



α) Συγκρίνω $A\overset{\triangle}{\Delta}Z$ με $E\overset{\triangle}{B}\Gamma$ έχω:

1) ΑΔ = ΒΓ αφού ΑΒΓΔ ισοσκ. τραπέζιο

2) ΑΖ = ΕΒ ως άθροισμα ίσων τμημάτων

3) $\hat{A} = \hat{B}$ αφού ΑΒΓΔ ισοσκ. τραπέζιο

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $A\overset{\triangle}{\Delta}Z = E\overset{\triangle}{B}\Gamma$

άρα: $\boxed{\Delta Z = E\Gamma}$

β) Αφού $A\overset{\triangle}{\Delta}Z = E\overset{\triangle}{B}\Gamma$ θα έχω $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1$.

Άρα: $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}_2$ ως διαφορά ίσων γωνιών

άρα $\Delta\overset{\triangle}{K}\Gamma$ ισοσκελές.

Τότε: ΕΚ = ΖΚ ως διαφορά ίσων τμημάτων

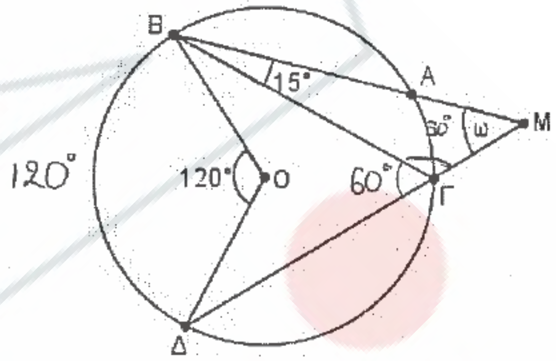
άρα $E\overset{\triangle}{K}Z$ ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 2

Στο ακόλουθο σχήμα η επίκεντρη γωνία $\mathrm{B\hat{O}\Delta}$ είναι 120° και η γωνία $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}$ είναι 15°.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία ΒΓΔ. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ω είναι 45°. (Μονάδες 13)



α) $\mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο $\overset{\frown}{\mathrm{B}\Delta}$ και $\mathrm{B\hat{O}\Delta} = 120°$ είναι επίκεντρη και βαίνει στο $\overset{\frown}{\mathrm{B}\Delta}$.

Άρα: $\mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta = \dfrac{\mathrm{B\hat{O}\Delta}}{2} = \dfrac{120°}{2} = 60°$.

β) $\overset{\frown}{\mathrm{B}\Delta} = 120°$ αφού η επίκεντρη $\mathrm{B\hat{O}\Delta} = 120°$.

$\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = 15°$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο $\overset{\frown}{\mathrm{A}\Gamma}$, άρα $\overset{\frown}{\mathrm{A}\Gamma} = 30°$.

1ος) $\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{M} = 180° - 60° = 120°$

άρα: $\underline{\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Gamma}$: $\hat{\mathrm{M}} = \hat{\omega} = 180° - 15° - 120° = 45°$

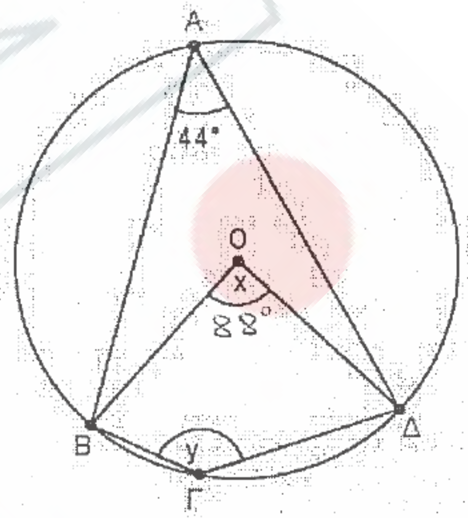
2ος) $\hat{\mathrm{M}} = \hat{\omega} = \dfrac{\overset{\frown}{\mathrm{B}\Delta} - \overset{\frown}{\mathrm{A}\Gamma}}{2} = \dfrac{120° - 30°}{2} = \dfrac{90°}{2} = 45°$.

ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο κέντρου Ο δίνονται οι χορδές ΑΒ και ΑΔ τέτοιες ώστε η γωνία $B\hat{A}\Delta$ να είναι 44°. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Γ του κύκλου και σχηματίζουμε το τετράπλευρο ΒΓΔΟ.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία x. (12 Μονάδες)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία y είναι 136°. (13 Μονάδες)



α) $\hat{A} = 44°$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο $\overset{\frown}{B\Gamma\Delta}$, άρα $\overset{\frown}{B\Gamma\Delta} = 88°$ άρα και η επίκεντρη $B\hat{O}\Delta = x = 88°$

β) $\overset{\frown}{BA\Delta} = 360° - 88° = 272°$

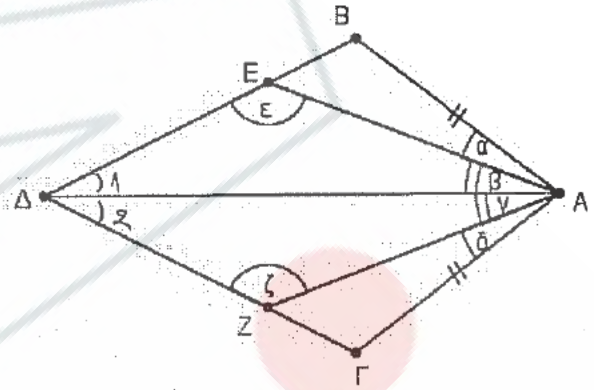
$B\hat{\Gamma}\Delta = \hat{y}$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο $\overset{\frown}{BA\Delta} = 272°$, άρα $\hat{y} = 136°$.

ΘΕΜΑ 2

Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{\alpha}=\hat{\delta}$, $\hat{\beta}=\hat{\gamma}$ και ΑΒ=ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα. (12 Μονάδες)

β) Οι γωνίες ε και ζ είναι ίσες. (13 Μονάδες)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ΑΒΔ}$ με $\overset{\triangle}{ΑΔΓ}$ έχω:

1) ΑΒ = ΑΓ υπόθεση

2) $Β\hat{Α}Δ = Δ\hat{Α}Γ$ ως άθροισμα ίσων γωνιών

3) ΔΑ κοινή πλευρά

άρα ισχύει Π–Γ–Π άρα $\overset{\triangle}{ΑΒΔ} = \overset{\triangle}{ΑΔΓ}$

β) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ΔΕΑ}$ με $\overset{\triangle}{ΔΖΑ}$ έχω:

1) ΔΑ κοινή πλευρά

2) $Ε\hat{Α}Δ = Δ\hat{Α}Ζ$ $(=\hat{\beta}=\hat{\gamma})$ υπόθεση

3) $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2$ αφού $\overset{\triangle}{ΑΒΔ} = \overset{\triangle}{ΑΔΓ}$

άρα ισχύει Γ–Π–Γ άρα $\overset{\triangle}{ΔΕΑ} = \overset{\triangle}{ΔΖΑ}$

άρα $Δ\hat{Ε}Α = Δ\hat{Ζ}Α$ δηλ. $\hat{\varepsilon} = \hat{\zeta}$.

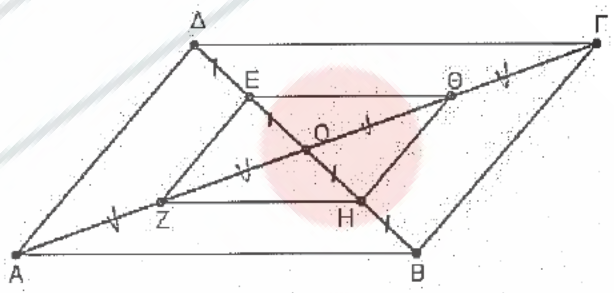
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο είναι το κέντρο του. Έστω Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των ΟΔ, ΟΑ, ΟΒ και ΟΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι :

α) Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

β) Αν η περίμετρος του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι 40, να βρείτε την περίμετρο του ΕΘΗΖ. (Μονάδες 15)



α) ΔΕ = ΕΟ = ΟΗ = ΗΒ και ΑΖ = ΖΟ = ΟΘ = ΓΘ αφού οι διαγώνιοι του # ΑΒΓΔ διχοτομούνται

Άρα: ΕΟ = ΟΗ και ΖΟ = ΟΘ άρα ΕΖΗΘ # γιατί οι διαγώνιοι του διχοτομούνται στο Ο.

β) $\overset{\triangle}{ΔΟΓ}$: Ε μέσο ΟΔ, Θ μέσο ΟΓ $\Big\}$ άρα $ΕΘ = \parallel \dfrac{ΔΓ}{2}$

άρα και $ΖΗ = \parallel \dfrac{ΑΒ}{2}$

$\overset{\triangle}{ΑΟΔ}$: Ε μέσο ΔΟ, Ζ μέσο ΑΟ $\Big\}$ άρα $ΖΕ = \parallel \dfrac{ΑΔ}{2}$

άρα και $ΘΗ = \parallel \dfrac{ΒΓ}{2}$

$$\text{περίμετρος } (ΕΘΗΖ) = ΕΘ + ΘΗ + ΗΖ + ΖΕ =$$

$$= \frac{ΔΓ}{2} + \frac{ΒΓ}{2} + \frac{ΑΒ}{2} + \frac{ΑΔ}{2} =$$

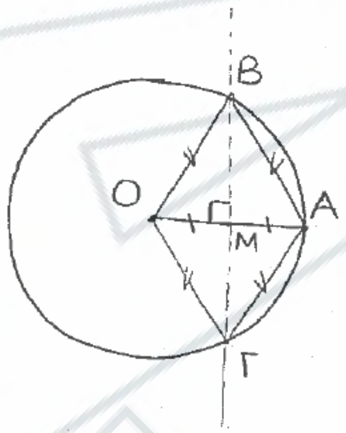
$$= \frac{ΔΓ + ΒΓ + ΑΒ + ΑΔ}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο κέντρου Ο, έστω ΟΑ μία ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της ΟΑ που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β και Γ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΟΒΑ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο ΟΒΑΓ είναι ρόμβος. (Μονάδες 12)



α) ΒΜ μεσοκάθετη του ΟΑ, άρα ΟΒ = ΑΒ.
Άρα: ΟΑ = ΟΒ = ΑΒ, δηλ. $\overset{\triangle}{OAB}$ ισόπλευρο.

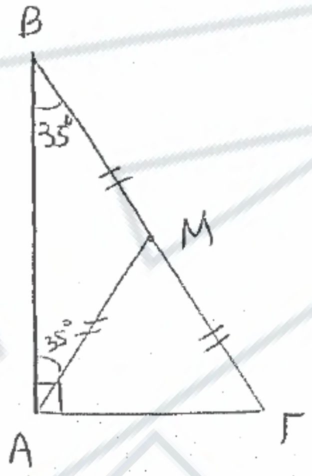
β) Όμοια: $\overset{\triangle}{OA\Gamma}$ ισόπλευρο.
Άρα: ΟΒ = ΑΓ και ΟΓ = ΑΒ άρα ΟΒΑΓ #
και ΟΒ = ΑΒ άρα ΟΒΑΓ ρόμβος.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$, $\hat{B} = 35^o$ και Μ το μέσο της ΒΓ.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία Γ. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΜΒ. (Μονάδες 15)



α) $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$: $\hat{Γ} = 90° - 35° = 55°$

β) $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$: εχω ΑΜ διάμεσο

αρα $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2} = ΒΜ = ΜΓ$

αρα $\overset{\triangle}{ΑΒΜ}$ ισοσκελές με

$Β\hat{Α}Μ = \hat{Β} = 35°$

$Α\hat{Μ}Β = 180° - 35° - 35° = 110°$

ΘΕΜΑ 2

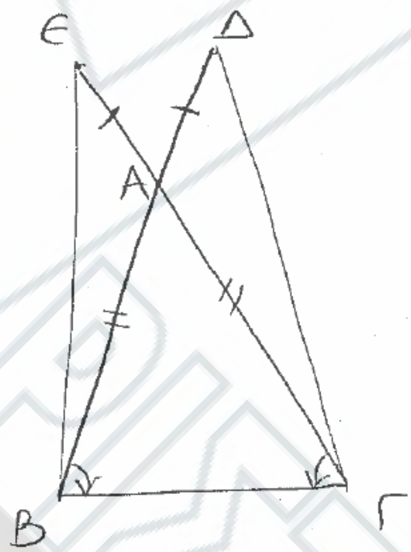
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ (προς το Α) θεωρούμε τα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΑΔ = ΑΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΕ = ΓΔ (Μονάδες 6)

β) ΒΔ = ΓΕ (Μονάδες 10)

γ) $\Delta\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}B$ (Μονάδες 9)



α) Συγκρίνω $B\hat{E}A$ με $\Delta\hat{A}\Gamma$ έχω:

1) ΑΒ = ΑΓ υπόθεση

2) ΕΑ = ΑΔ —//—

3) $E\hat{A}B = \Delta\hat{A}\Gamma$ ως κατακορυφην

άρα ισχυει Π-Γ-Π αρα $B\hat{E}A = \Delta\hat{A}\Gamma$ αρα ΒΕ = ΓΔ.

β) ΒΔ = ΓΕ ως άθροισμα ίσων τμημάτων.

γ) Συγκρίνω $\Delta\hat{B}\Gamma$ με $E\hat{\Gamma}B$ έχω:

1) ΔΒ = ΓΕ από β)

2) ΒΓ κοινή πλευρά

3) $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ υπόθεση

αρα ισχυει Π-Γ-Π αρα $\Delta\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}B$

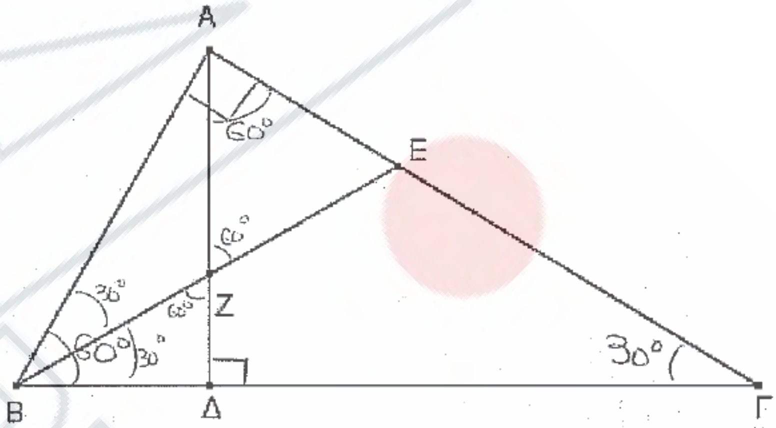
αρα: $\Delta\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}B$.

ΘΕΜΑ 2

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν $\hat{A}+\hat{\Gamma}=2\hat{B}$ και $\hat{A}=3\hat{\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία Β είναι 60^o. (Μονάδες 10)

β) Αν το ύψος του ΑΔ και η διχοτόμος του ΒΕ τέμνονται στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 15)



α) $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ$

$2\hat{B}+\hat{B}=180^\circ$

$3\hat{B}=180^\circ$

$\hat{B}=60^\circ$

Τότε: $\hat{A}+\hat{\Gamma}=120^\circ$

$3\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=120^\circ$

$4\hat{\Gamma}=120^\circ$

$\hat{\Gamma}=30^\circ$ αρα $\hat{A}=3\cdot 30^\circ=90^\circ$

β) $\underline{A\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma}$: $\Delta\hat{A}\Gamma=90^\circ-30^\circ=60^\circ$

$\underline{B\overset{\triangle}{Z}\Delta}$: $B\hat{Z}\Delta=90^\circ-30^\circ=60^\circ$ αρα και η κατακο-ρυφήν της $A\hat{Z}E=60^\circ$

$\underline{A\overset{\triangle}{Z}E}$: $A\hat{E}Z=180^\circ-60^\circ-60^\circ=60^\circ$

αρα $A\overset{\triangle}{Z}E$ ισόπλευρο.

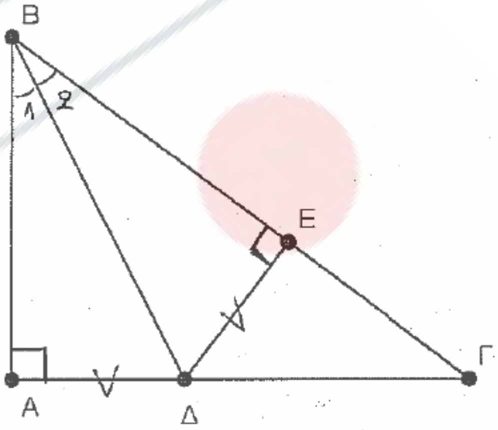
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Α. Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, η ΔΕ είναι κάθετη στην ΒΓ και η γωνία Γ είναι μικρότερη της γωνίας Β. Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ=ΔΕ (Μονάδες 8)

β) ΑΔ < ΔΓ (Μονάδες 9)

γ) ΑΓ>ΑΒ (Μονάδες 8)



α) Δ σημείο της διχοτόμου της $\hat{B}$, άρα ΔΑ = ΔΕ.

β) $\overset{\triangle}{ΔΕΓ}$: έχω ΔΓ υποτείνουσα, άρα: ΔΓ > ΔΕ

δηλ. ΔΓ > ΑΔ.

γ) Αφού $\hat{Γ} < \hat{B}$ τότε: ΑΒ < ΑΓ.

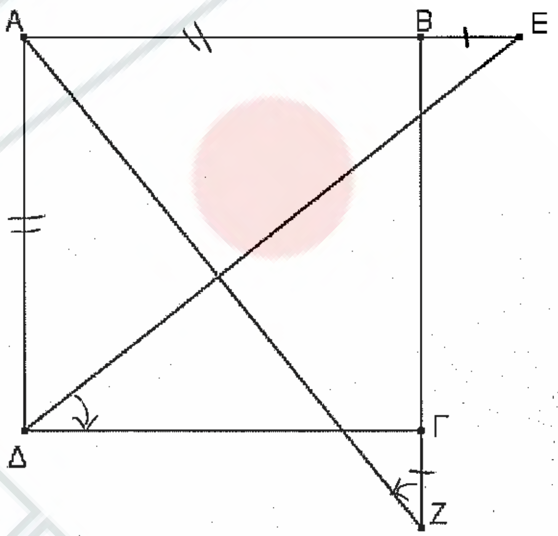
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των ΑΒ (προς το Β) και ΒΓ (προς το Γ) αντίστοιχα, ώστε ΒΕ=ΓΖ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΕΔ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Οι γωνίες ΕΔΓ και ΑΖΒ είναι ίσες. (Μονάδες 13)



α) Συγκρίνω $A\hat{B}Z$ με $A\hat{\Delta}E$ έχω:

1) ορθογώνια

2) $AB = A\Delta$ αφού ΑΒΓΔ τετράγωνο

3) $AE = BZ$ ως άθροισμα ίσων τμημάτων

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $A\hat{B}Z = A\hat{\Delta}E$

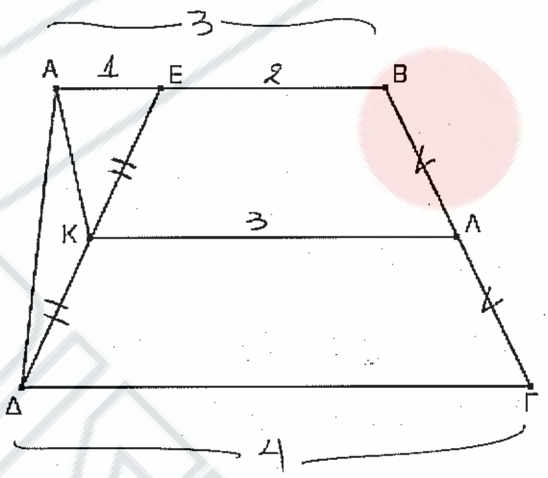
β) Αφού $A\hat{B}Z = A\hat{\Delta}E$ θα έχω $A\hat{Z}B = \underbrace{A\hat{E}\Delta = E\hat{\Delta}\Gamma}_{\text{ως εντός εναλλάξ}}$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ=3, ΓΔ=4. Θεωρούμε σημείο Ε στην ΑΒ ώστε ΑΕ=1. Στο τραπέζιο ΕΒΓΔ θεωρούμε τα Κ και Λ, μέσα των ΕΔ και ΒΓ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο ΚΛ του τραπεζίου ΕΒΓΔ. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)



α) $ΚΛ = \frac{ΕΒ + ΔΓ}{2} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

β) $ΚΛ \parallel ΕΒ \parallel ΔΓ$ άρα $ΚΛ =\parallel ΑΒ$ άρα ΑΒΛΚ ▱.

ΘΕΜΑ 2

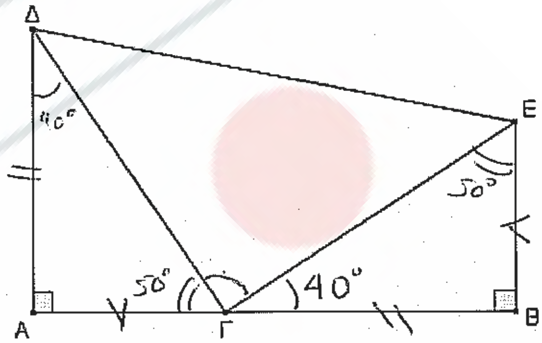
Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες $\hat{A}, \hat{B}$ είναι ορθές και επιπλέον ΑΔ=ΒΓ και ΑΓ=ΒΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Αν η γωνία $E\hat{\Gamma}B = 40^o$ τότε το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

(Μονάδες 12)



α) Συγκρίνω $A\hat{\Gamma}\Delta$ με $B\hat{E}\Gamma$ έχω:

1) ορθογώνια

2) ΑΔ = ΓΒ υπόθεση

3) ΑΓ = ΒΕ —\\—

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $A\hat{\Gamma}\Delta = B\hat{E}\Gamma$.

β) $\Gamma\hat{E}B$: $\Gamma\hat{E}B = 90° - 40° = 50°$

Αφού $A\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{E}\Gamma$ θα έχω $A\hat{\Delta}\Gamma = E\hat{\Gamma}B = 40°$

και $A\hat{\Gamma}\Delta = \Gamma\hat{E}B = 50°$

και ΔΓ = ΓΕ.

Τότε: $\Delta\hat{\Gamma}E = 180° - 50° - 40° = 90°$

Άρα: $\Delta\hat{\Gamma}E$ ορθογώνιο ισοσκελές.

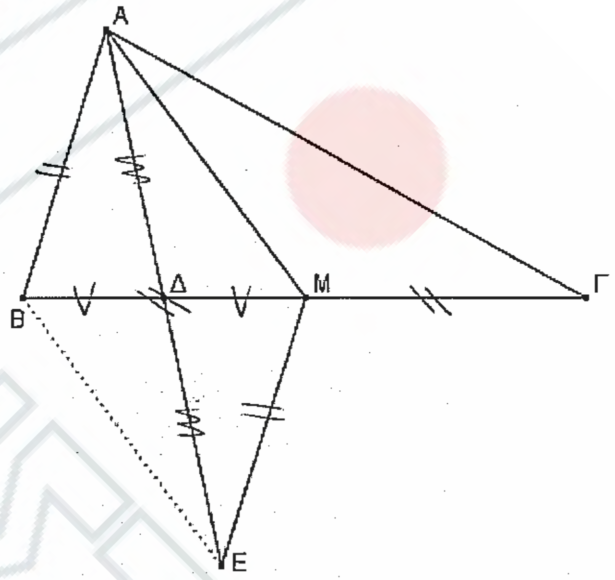
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει ΒΓ=2ΑΒ και έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Αν η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΜ και Ε σημείο στην προέκτασή της ώστε ΑΔ=ΔΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΕΜ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)

β) ΜΕ=ΜΓ (Μονάδες 13)



α) ΑΒΕΜ ▱ αφού οι διαγώνιοι του διχοτομούνται στο Δ.

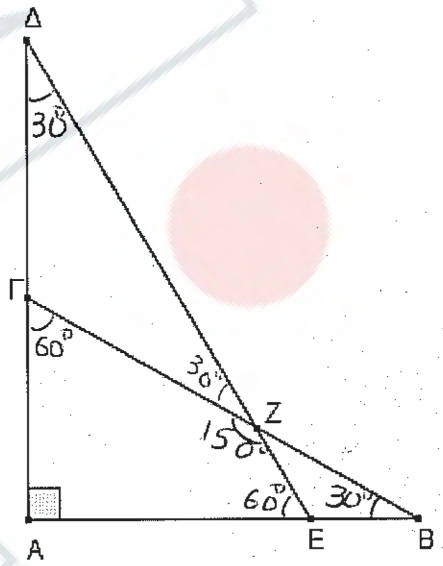
β) Αφού ΑΒΕΜ ▱ θα έχω $ME = AB = \frac{B\Gamma}{2} = BM = M\Gamma$

ΘΕΜΑ 2

Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ (γωνία Α ορθή) του παρακάτω σχήματος ισχύει $\hat{B} = \hat{\Delta} = 30^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΕΖΓ. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΖΔ και ΕΒΖ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 12)



α) $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$: $\hat{\Gamma} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

$A\overset{\triangle}{E}\Delta$: $\hat{E} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

$AEZ\Gamma$: $\hat{Z} = 360^\circ - 60^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$

β) $\Gamma\hat{Z}\Delta = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ = \hat{\Delta}$ αρα $\Gamma\overset{\triangle}{\Delta}Z$ ισοσκελές

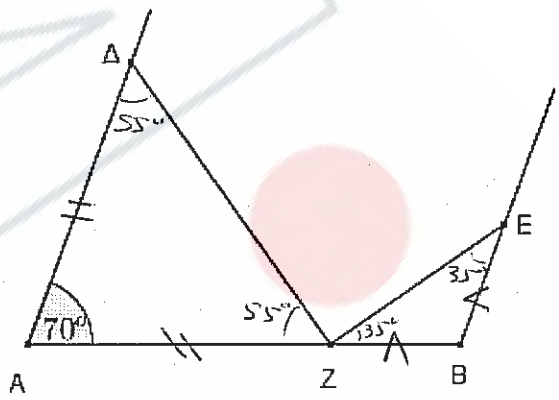
$E\hat{Z}B = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ = \hat{B}$ αρα $E\overset{\triangle}{Z}B$ —\\—

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα, οι ΑΔ και ΒΕ είναι παράλληλες. Επιπλέον ισχύουν ΑΔ=ΑΖ , ΒΕ=ΒΖ και $\hat{A} = 70^{o}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΑΔΖ και ΒΖΕ. (Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{Z}E = 90^{o}$. (Μονάδες 9)



α) ΑΔ = ΑΖ άρα $\overset{\triangle}{A\Delta Z}$ ισοσκελές με

$A\hat{\Delta}Z = A\hat{Z}\Delta = \frac{180^{o}-70^{o}}{2} = \frac{110^{o}}{2} = 55^{o}$

$\hat{B} + \hat{A} = 180^{o}$ ως εντός και επί τ' αυτά

$\hat{B} + 70^{o} = 180^{o}$

$\hat{B} = 110^{o}$

ΒΖ = ΒΕ άρα $\overset{\triangle}{ZBE}$ ισοσκελές με

$E\hat{Z}B = Z\hat{E}B = \frac{180^{o}-110^{o}}{2} = \frac{70^{o}}{2} = 35^{o}$

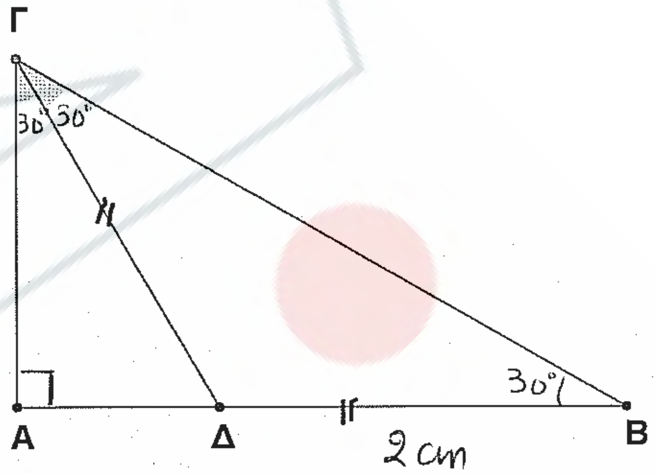
β) $\Delta\hat{Z}E = 180^{o} - 55^{o} - 35^{o} = 90^{o}$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (με $\hat{A}=90^0$) και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, τέτοιο ώστε ΓΔ=ΔΒ=2cm. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B}=30^0$. (Μονάδες 12)

β) AB=3cm (Μονάδες 13)



α) $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: $\hat{B}+\hat{\Gamma}=90^\circ$

$\frac{\hat{\Gamma}}{2}+\hat{\Gamma}=90^\circ$

$\frac{3\hat{\Gamma}}{2}=90^\circ$

$3\hat{\Gamma}=180^\circ$

$\hat{\Gamma}=60^\circ$

άρα $\hat{B}=\frac{60^\circ}{2}=30^\circ$

$A\overset{\triangle}{\Delta}B$ ισοσκελές με $\hat{B}=\Delta\hat{\Gamma}B=\frac{\hat{\Gamma}}{2}$.

β) $\overset{\triangle}{A\Gamma\Delta}$: $A\hat{\Gamma}\Delta=30^\circ$ άρα: $A\Delta=\frac{\Delta\Gamma}{2}=\frac{\Delta B}{2}=\frac{2}{2}=1cm$

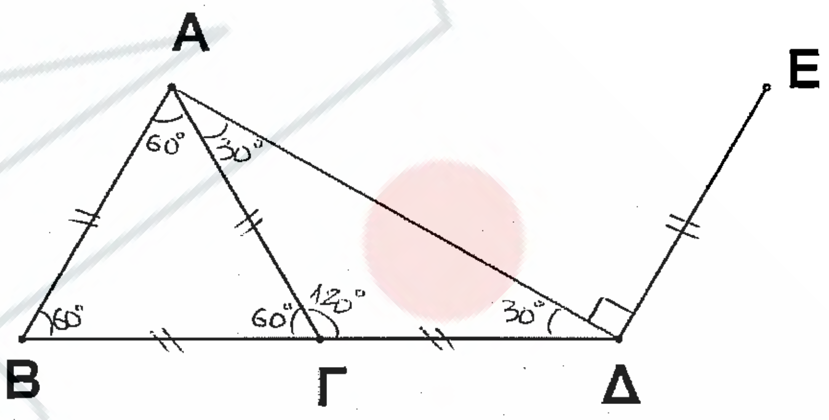
Άρα: $AB=A\Delta+\Delta B=1+2=3cm$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ . Στην προέκταση της ΒΓ (προς το μέρος του Γ) θεωρούμε τμήμα ΓΔ=ΒΓ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην ΑΔ στο σημείο της Δ , τέτοιο ώστε ΔΕ=ΒΓ. (Α και Ε στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ΒΔ).

α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΔ. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι ΑΒΔΕ παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)



α) $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισόπλευρο, άρα $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60°$

$A\hat{\Gamma}\Delta = 180° - 60° = 120°$

$A\overset{\triangle}{\Gamma}\Delta$ ισοσκελές με $\Gamma\hat{A}\Delta = A\hat{\Delta}\Gamma = \frac{180° - 120°}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$

Τότε: $B\hat{A}\Delta = 60° + 30° = 90°$.

β) $\hat{B} + \Gamma\hat{\Delta}E = 60° + 30° + 90° = 180°$ δηλ. εντός και επί τ'αυτά γωνίες παραπληρωματικές άρα $AB \parallel \Delta E$ και $AB = \Delta E$

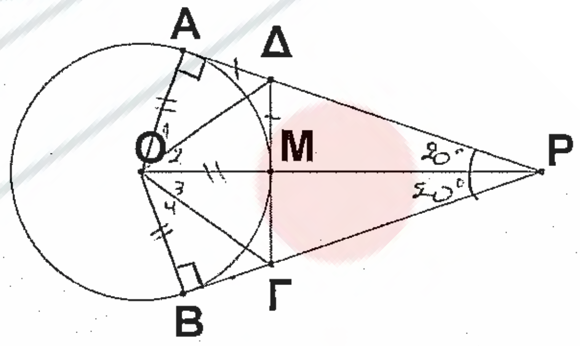
άρα ΑΒΔΕ $\#$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος κέντρου Ο, και από ένα σημείο Ρ εκτός αυτού φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Το τμήμα ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ και η εφαπτομένη του κύκλου στο Μ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΡΔΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

β) Αν η γωνία ΑΡΒ είναι 40^0 να υπολογίσετε τη γωνία ΑΟΒ. (Μονάδες 12)



α) Συγκρίνω $O\hat{A}\Delta$ με $O\hat{B}\Gamma$ έχω:

1) ορθογώνια

2) ΟΑ = ΟΒ ακτίνες

3) $\hat{O}_1 = \hat{O}_4$ ως μισά ίσων γωνιών αφού η διάκεντρος διχοτομεί τη γωνία των ακτίνων

άρα ισχύει Γ-Π-Γ άρα $O\hat{A}\Delta = O\hat{B}\Gamma$

άρα ΑΔ = ΒΓ.

Τότε ΡΔ = ΡΓ ως διαφορά ίσων τμημάτων (αφού ΡΑ = ΡΒ ως εφαπτόμενες από το Ρ.

Άρα $P\hat{\Delta}\Gamma$ ισοσκελές.

β) $\hat{A} + \hat{B} = 90° + 90° = 180°$ άρα ΟΑΡΒ εγγράψιμο. Τότε $A\hat{P}B = 40°$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο $\overset{\frown}{AOB} = 80°$. Τότε: $\overset{\frown}{APB} = 360° - 80° = 280°$. Τότε $A\hat{O}B = \frac{280°}{2} = 140°$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει στο $\overset{\frown}{APB} = 280°$.

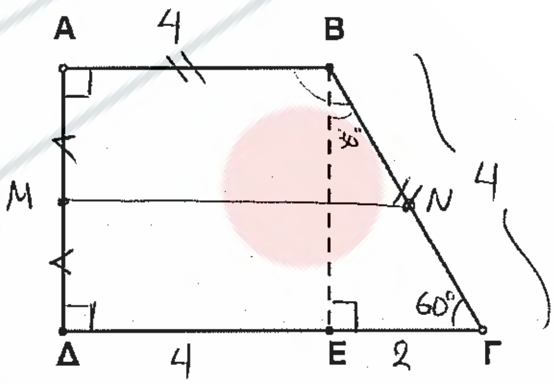
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) , με ΑΒ=ΒΓ=4, $\hat{A}=90^0$ και $\hat{\Gamma}=60^0$. Δίνεται επίσης το ύψος ΒΕ από τη κορυφή Β.

α) Να υπολογίσετε τις άλλες δυο γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε 2ΕΓ=ΒΓ. (Μονάδες 9)

γ) Αν Μ,Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΜΝ. (Μονάδες 8)



α) $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB \perp A\Delta$ άρα $\Gamma\Delta \perp A\Delta$, δηλ. $\hat{\Delta}=90°$

$\hat{B}+\hat{\Gamma}=180°$ ως εντός και επί τ'αυτά

$\hat{B}+60°=180°$

$\hat{B}=120°$

β) $E\hat{B}\Gamma$: έχω $E\hat{B}\Gamma = 90°-60°=30°$ άρα: $E\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$

$2E\Gamma = B\Gamma$.

γ) ΜΝ διάμεσος του ΑΒΓΔ, άρα:

$MN = \frac{\Delta\Gamma + AB}{2} = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5.$

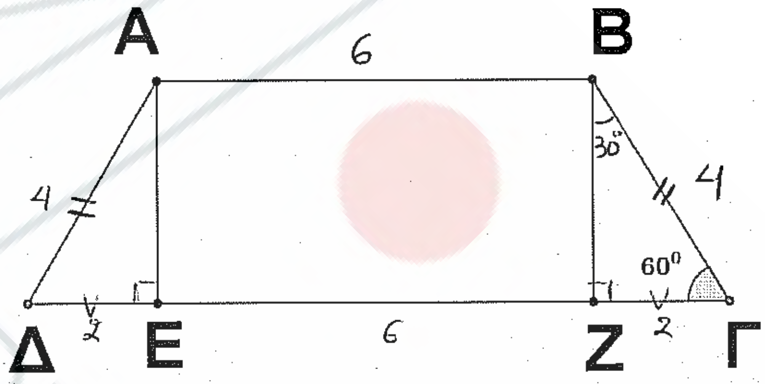
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) , με ΑΒ=6, ΒΓ=4 και $\hat{\Gamma}=60^0$. Δίνονται επίσης τα ύψη ΑΕ και ΒΖ από τις κορυφές Α και Β αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε τα τρίγωνα ΑΕΔ, ΒΖΓ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του ΑΒΓΔ. (Μονάδες 9)



α) $\hat{\Delta}=\hat{\Gamma}=60^\circ$ αφού ΑΒΓΔ ισοσκ. τραπέζιο
$\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ$ ως εντός και επί τ' αυτά
$\hat{B}+60^\circ=180^\circ$
$\hat{B}=120^\circ$ άρα και $\hat{A}=120^\circ$.

β) Συγκρίνω $A\hat{E}\Delta$ με $B\hat{Z}\Gamma$ έχω:
1) $A\Delta=B\Gamma=4$ υπόθεση
2) $\hat{\Delta}=\hat{\Gamma}=60^\circ$ -\\-
3) ορθογώνια
άρα ισχύει Υποτ.+οξ. γωνία άρα $A\hat{E}\Delta=B\hat{Z}\Gamma$

γ) $Z\hat{B}\Gamma=90^\circ-60^\circ=30^\circ$ άρα $Z\Gamma=\frac{B\Gamma}{2}=\frac{4}{2}=2$

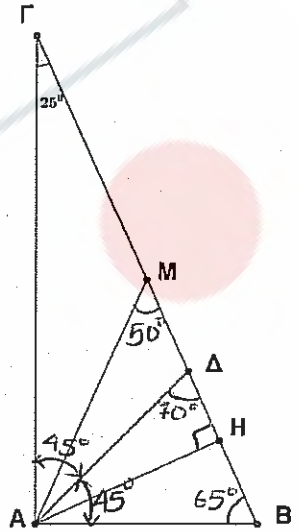
περιμετρος $=AB+B\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta A=6+4+10+4=$
$=24$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^0$ και $\hat{\Gamma} = 25^0$. Δίνονται επίσης η διάμεσος ΑΜ, το ύψος ΑΗ από την κορυφή Α και η διχοτόμος ΑΔ της γωνίας $\hat{A}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $A\hat{M}B$, $H\hat{A}B$, $A\hat{\Delta}B$. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι $M\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}H = 20^0$. (Μονάδες 10)



α) $\hat{B} = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$

$\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: έχω ΑΜ διάμεσο, άρα $AM = \frac{B\Gamma}{2} = BM$

άρα $\overset{\triangle}{AMB}$ ισοσκ. με $M\hat{A}B = \hat{B} = 65^\circ$

$\overset{\triangle}{AMB}$: $A\hat{M}B = 180^\circ - 65^\circ - 65^\circ = 50^\circ$

$\overset{\triangle}{AHB}$: $H\hat{A}B = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$

$\overset{\triangle}{A\Delta B}$: $A\hat{\Delta}B = 180^\circ - 45^\circ - 65^\circ = 70^\circ$

β) $\Delta\hat{A}H = \Delta\hat{A}B - H\hat{A}B = 45^\circ - 25^\circ = 20^\circ$

$M\hat{\Delta}A = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

$\overset{\triangle}{AM\Delta}$: $M\hat{A}\Delta = 180^\circ - 110^\circ - 50^\circ = 20^\circ$

Άρα: $\Delta\hat{A}H = M\hat{A}\Delta = 20^\circ$

ΘΕΜΑ 2

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{A}+\hat{\Gamma}=120^0$ και $\hat{A}=3\hat{\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του. (Μονάδες 15)

β) Αν η πλευρά ΒΓ=2cm να βρείτε το μήκος της ΑΒ. (Μονάδες 10)

α) $\underbrace{\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}}=180^\circ$

$120^\circ+\hat{B}=180^\circ$

$\hat{B}=60^\circ$

$\hat{A}+\hat{\Gamma}=120^\circ$

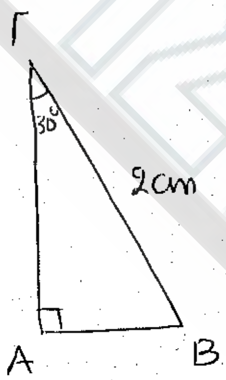
$3\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=120^\circ$

$4\hat{\Gamma}=120^\circ$

$\hat{\Gamma}=30^\circ$ τότε: $\hat{A}=3\cdot 30^\circ=90^\circ$

δηλ. $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ορθογώνιο

β)



$\underline{\overset{\triangle}{AB\Gamma}}$: $\hat{\Gamma}=30^\circ$, άρα: $AB=\frac{B\Gamma}{2}=\frac{2}{2}=1c$

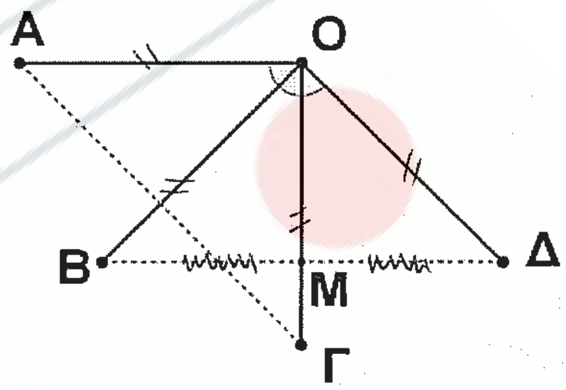
ΘΕΜΑ 2

Αν $A\hat{O}B = B\hat{O}\Gamma = \Gamma\hat{O}\Delta$ και ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=ΟΔ, να αποδείξετε ότι:

α) ΑΓ=ΒΔ . (Μονάδες 10)

β) το Μ είναι μέσον της ΒΔ, όπου Μ το σημείο τομής των τμημάτων ΟΓ και ΒΔ.

(Μονάδες 15)



α) Συγκρίνω $O\hat{A}\Gamma$ με $O\hat{B}\Delta$ έχω:

1) ΟΑ = ΟΒ υπόθεση

2) ΟΓ = ΟΔ —\\—

3) $A\hat{O}\Gamma = B\hat{O}\Delta$ ως άθροισμα ίσων γωνιών

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $O\hat{A}\Gamma = O\hat{B}\Delta$

άρα: ΑΓ=ΒΔ.

β) $O\hat{B}\Delta$ ισοσκελές με ΟΓ διχοτόμο, άρα ΟΓ ύψος και διάμεσος, δηλ. Μ μέσο ΒΔ.

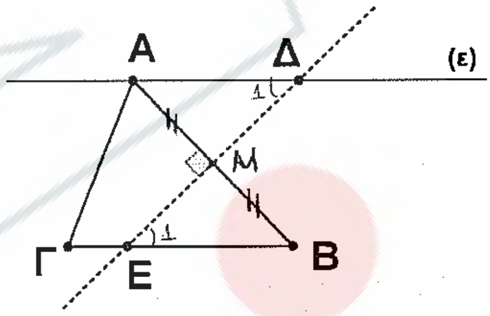
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΓΒ. Φέρουμε από τη κορυφή Α ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΒ τέμνει την (ε) στο Δ και την ΒΓ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι ΔΑ=ΔΒ και ΕΑ=ΕΒ. (Μονάδες 6)

β) Αν Μ το μέσο του ΑΒ, να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΕΜΒ. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)



α) ΔΕ μεσοκάθετος του ΑΒ άρα ΔΑ = ΔΒ.
ΔΕ —\\— του ΑΒ άρα ΕΑ = ΕΒ.

β) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{A\hat{M}\Delta}$ με $\overset{\triangle}{E\hat{M}B}$ έχω:
1) ορθογώνια
2) ΑΜ = ΜΒ αφού Μ μέσο ΑΒ
3) $\hat{E}_1 = \hat{\Delta}_1$ ως εντός εναλλάξ
άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\overset{\triangle}{A\hat{M}\Delta} = \overset{\triangle}{M\hat{E}B}$.

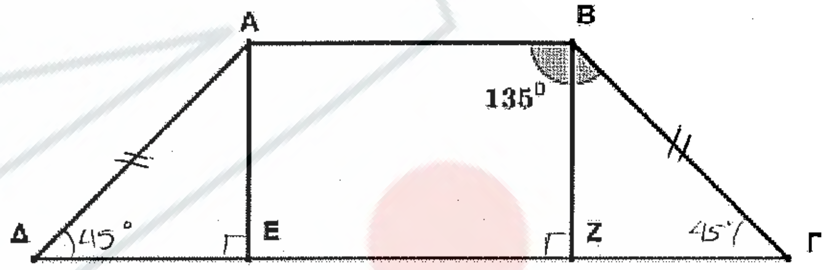
γ) Αφού $\overset{\triangle}{A\hat{M}\Delta} = \overset{\triangle}{M\hat{E}B}$ έχω ΑΔ = ΕΒ
Δηλ. ΑΔ =// ΕΒ δηλ ΑΔΒΕ # και έχει ⊥ διαγώνιους, άρα είναι ρόμβος.

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΓΔ>ΑΒ και $\hat{B} = 135^o$. Από τις κορυφές Α και Β φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ΑΕ=ΕΔ=ΒΖ=ΓΖ (Μονάδες 15)



α) $\hat{A} = \hat{B} = 135^\circ$ αφού ΑΒΓΔ ισοσκ. τραπέζιο

$\hat{\Gamma} + \hat{B} = 180^\circ$ ως εντός και επί τ' αυτά

$\hat{\Gamma} + 135^\circ = 180^\circ$

$\hat{\Gamma} = 45^\circ$ τότε και $\hat{\Delta} = 45^\circ$.

β) $\Delta\hat{A}E = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ άρα $A\hat{\Delta}E$ ισοσκ.

με ΑΕ = ΔΕ

όμοια: ΒΖ = ΖΓ

άρα: $\underbrace{AE = BZ}_{\text{ύψη μεταξύ παραλλήλων}} = \Delta E = Z\Gamma$

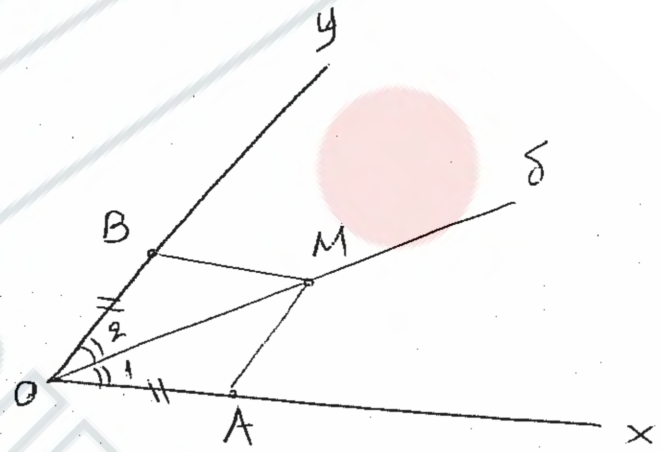
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γωνία xOy και η διχοτόμος της Οδ. Θεωρούμε σημείο Μ της Οδ και σημεία Α και Β στις ημιευθείες Οx και Οy αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΟΑ=ΟΒ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΜΑ=ΜΒ. (Μονάδες 15)

β) Η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{M}B$. (Μονάδες 10)



α) Συγκρίνω $O\overset{\triangle}{M}B$ με $O\overset{\triangle}{M}A$ έχω:

1) $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ αφού Οδ διχοτόμος

2) $OB = OA$ υπόθεση

3) OM κοινή πλευρά

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $O\overset{\triangle}{M}B = O\overset{\triangle}{M}A$

άρα: $MA = MB$.

β) Αφού $O\overset{\triangle}{M}B = O\overset{\triangle}{M}A$ άρα έχω $O\hat{M}B = O\hat{M}A$

άρα $B\hat{M}\delta = A\hat{M}\delta$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.

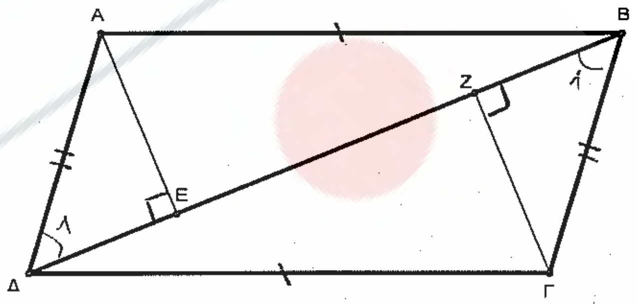
ΘΕΜΑ 2

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ > ΒΓ φέρουμε από τις κορυφές Α και Γ καθέτους στη διαγώνιο ΒΔ, οι οποίες την τέμνουν σε διαφορετικά σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΕ=ΓΖ. (Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



α) Συγκρίνω $A\overset{\triangle}{\Delta}E$ με $B\overset{\triangle}{\Gamma}Z$ έχω:

1) ορθογώνια

2) ΑΔ = ΒΓ αφού ΑΒΓΔ ▱

3) $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$ ως εντός εναλλάξ

άρα ισχύει Υποτ. + οξ. γωνία άρα $A\overset{\triangle}{\Delta}E = B\overset{\triangle}{\Gamma}Z$

άρα ΑΕ = ΓΖ.

β) ΑΕ // ΓΖ γιατί είναι ⊥ στη ΒΔ.

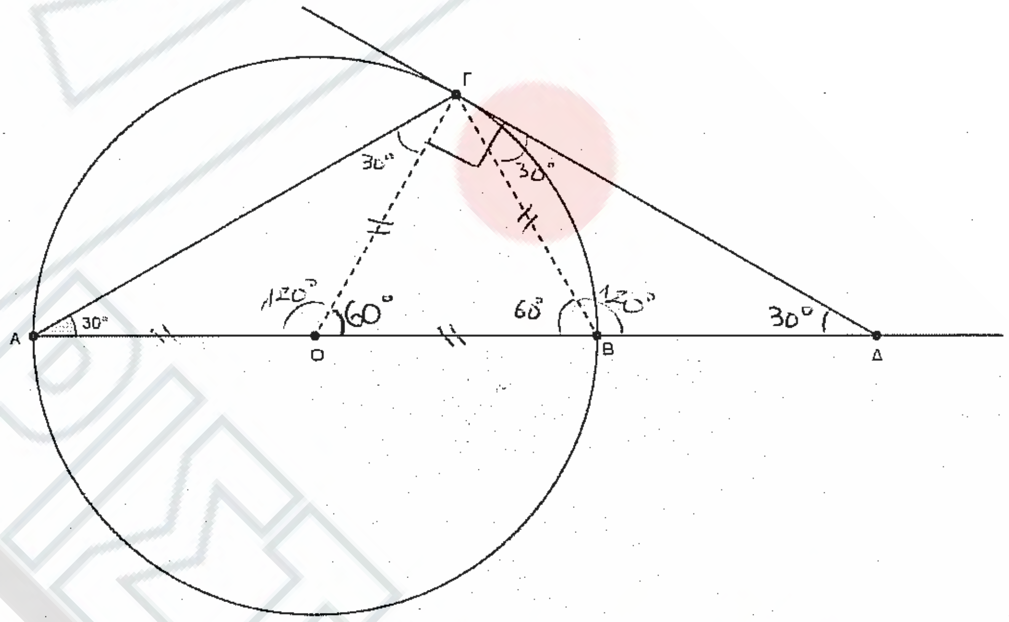
Δηλ. έχω ΑΕ =// ΓΖ άρα ΑΕΓΖ ▱.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος (Ο, R) διαμέτρου ΑΒ, και χορδή ΑΓ τέτοια ώστε $B\hat{A}\Gamma = 30°$. Στο σημείο Γ φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου ΑΒ (προς το Β) στο σημείο Δ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΟΓΔ. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΟΓ και ΓΒΔ είναι ίσα. (Μονάδες 13)



α) $\Gamma\hat{O}B = 60°$ αφού είναι επίκεντρη και βαίνει στο $\overset{\frown}{B\Gamma}$, ενώ η εγγεγραμμένη $\hat{A} = 30°$.

$O\Gamma \perp \Gamma\Delta$ άρα $O\hat{\Gamma}\Delta = 90°$.

$\overset{\triangle}{O\Gamma\Delta}$: $\hat{\Delta} = 180° - 90° - 60° = 30°$

β) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{AO\Gamma}$ με $\overset{\triangle}{\Gamma B\Delta}$ έχω:

1) $O\Gamma = B\Gamma$ αφού $\overset{\triangle}{OB\Gamma}$ ισόπλευρο (ως ισοσκελές με $\hat{O} = 60°$

2) $A\hat{\Gamma}O = B\hat{\Gamma}\Delta = 30°$

3) $A\hat{O}\Gamma = \Gamma\hat{B}\Delta = 120°$

άρα ισχύει Γ-Π-Γ άρα $\overset{\triangle}{AO\Gamma} = \overset{\triangle}{\Gamma B\Delta}$.

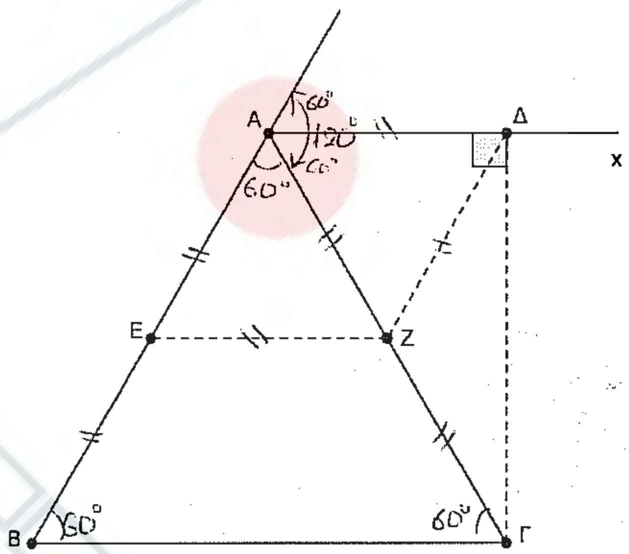
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο Αx της γωνίας $\hat{A}$ και από το σημείο Γ την κάθετο ΓΔ στην Αx. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΖΔ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 13)

β) το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ρόμβος. (Μονάδες 12)



α) $\overset{\triangle}{A\Delta Z}$: έχω ΔΖ διάμεσο, άρα $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2} = AZ$

και $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$ άρα $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = 120^\circ$ άρα

$\Delta\hat{A}Z = 60^\circ$.

Δηλ. στο ισοσκελές $\overset{\triangle}{AZ\Delta}$ έχω $\Delta\hat{A}Z = 60^\circ$ άρα

$\overset{\triangle}{AZ\Delta}$ ισόπλευρο.

β) $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: Ε μέσο ΑΒ, Ζ μέσο ΑΓ $\Big\}$ άρα: $EZ \mathrel{=\!\!\parallel} \frac{B\Gamma}{2}$

δηλ. $EZ = AZ$

δηλ. $EZ = A\Delta$ και $AE = \Delta Z$

άρα ΑΔΖΕ # και αφού

$AE = A\Delta$ θα είναι ρόμβος

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=80^\circ$ και $\hat{B}=20^\circ+\hat{\Gamma}$, και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. (Μονάδες 12)

β) Φέρουμε από το Δ ευθεία παράλληλη στην ΑΒ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να υπολογίσετε τις γωνίες $A\hat{\Delta}E$, $E\hat{\Delta}\Gamma$. (Μονάδες 13)

α) $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ$

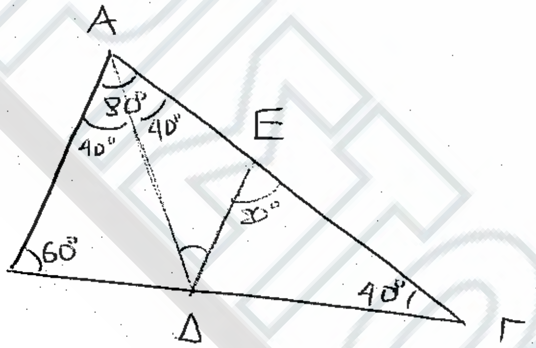
$80^\circ+20^\circ+\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=180^\circ$

$100^\circ+2\hat{\Gamma}=180^\circ$

$2\hat{\Gamma}=80^\circ$

$\hat{\Gamma}=40^\circ$ άρα: $\hat{B}=20^\circ+40^\circ=60^\circ$.

β)



$A\hat{\Delta}E=B\hat{A}\Delta=40^\circ$ ως εντός εναλλάξ

$\Delta\hat{E}\Gamma=\hat{A}=80^\circ$ ως εντός εκτός και επί τ' αυτά

$\overset{\triangle}{\Delta E\Gamma}$: $E\hat{\Delta}\Gamma=180^\circ-80^\circ-40^\circ=60^\circ$.

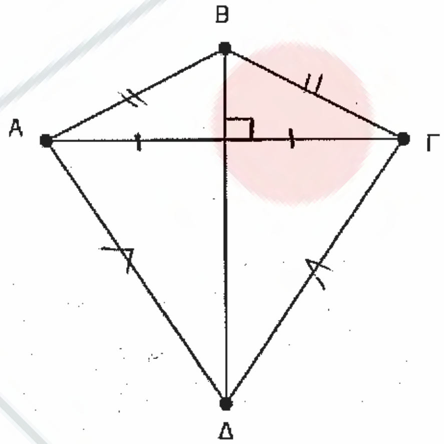
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΒΑ=ΒΓ και ΔΑ=ΔΓ. Οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ του τετραπλεύρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η ΒΔ είναι διχοτόμος των γωνιών Β και Δ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 12)

β) Η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ. (Μονάδες 13)



α) Τα σημεία Β, Δ ισαπέχουν από τα άκρα του ΑΓ, άρα ανήκουν στη μεσοκάθετο αυτού, δηλ. ΒΔ μεσοκάθετος του ΑΓ. Άρα στα ισοσκελή τρίγωνα $A\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{\Delta}\Gamma$ η ΒΔ θα είναι και διχοτόμος των $\hat{B}$, $\hat{\Delta}$.

β) α)

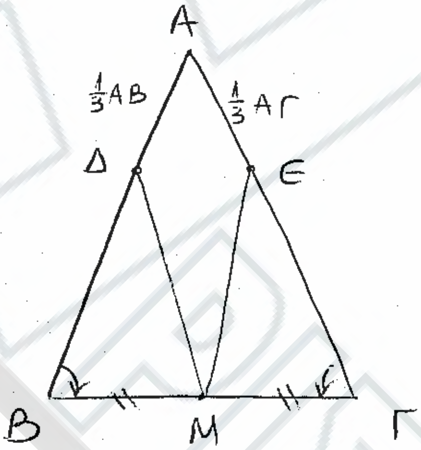
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και στις ίσες πλευρές ΑΒ,ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα ΑΔ=$\frac{1}{3}$ ΑΒ και ΑΕ=$\frac{1}{3}$ ΑΓ. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 5)

β) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

γ) το τρίγωνο ΔΕΜ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)



α) $A\Delta = \frac{1}{3}AB$, άρα: $B\Delta = \frac{2}{3}AB$

$AE = \frac{1}{3}A\Gamma$, άρα: $E\Gamma = \frac{2}{3}A\Gamma$

άρα: $B\Delta = E\Gamma$.

β) Συγκρίνω $B\overset{\Delta}{\Delta}M$ με $M\overset{\Delta}{E}\Gamma$ έχω:

1) $BM = M\Gamma$ αφού Μ μέσο ΒΓ

2) $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ αφού $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$ ισοσκελές

3) $B\Delta = E\Gamma$ από α)

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $B\overset{\Delta}{\Delta}M = M\overset{\Delta}{E}\Gamma$.

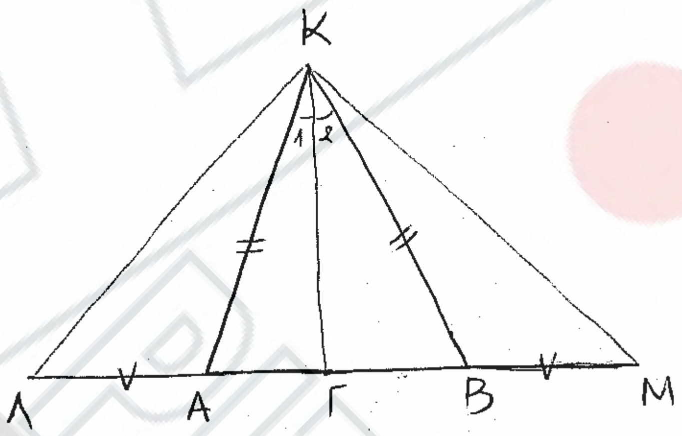
γ) Αφού $B\overset{\Delta}{\Delta}M = M\overset{\Delta}{E}\Gamma$ άρα $M\Delta = ME$ άρα $\Delta\overset{\Delta}{E}M$ ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΚΑΒ (ΚΑ=ΚΒ) και ΚΓ διχοτόμος της γωνίας $\hat{K}$. Στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) παίρνουμε σημείο Μ, έτσι ώστε ΑΛ=ΒΜ. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές (Μονάδες 12)

β) η ΚΓ είναι διάμεσος του τριγώνου ΚΛΜ (Μονάδες 13)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{\Lambda A K}$ με $\overset{\triangle}{B M K}$ έχω:

1) ΚΑ = ΚΒ υπόθεση

2) ΑΛ = ΒΜ -"-

3) $K\hat{A}\Lambda = K\hat{B}M$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\overset{\triangle}{\Lambda A K} = \overset{\triangle}{B M K}$

άρα ΚΛ = ΚΜ, δηλ. $\overset{\triangle}{K \Lambda M}$ ισοσκελές

β) Στο ισοσκελές $\overset{\triangle}{K A B}$ έχω ΚΓ διχοτόμο, άρα ΚΓ ύψος και διάμεσος, δηλ. Γ μέσο ΑΒ. Τότε: ΛΓ = ΜΓ ως άθροισμα ίσων τμημάτων, άρα Γ μέσο ΜΛ. Δηλ ΚΓ διάμεσος του $\overset{\triangle}{K \Lambda M}$.

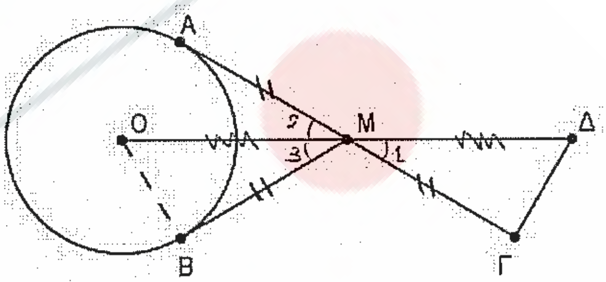
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται κύκλος (O,R) και τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ. Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα ΜΓ=ΜΑ και την ΟΜ κατά τμήμα ΜΔ=ΟΜ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΜΓΔ είναι ίσα, και να γράψετε τα ίσα στοιχεία τους.

(Μονάδες 13)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί ΟΑ//ΓΔ. (Μονάδες 12)



α) ΜΑ = ΜΒ ως εφαπτόμενες από το Μ

ΜΑ = ΜΓ υποθεση

αρα: ΜΑ = ΜΒ = ΜΓ

Συγκρίνω $O\hat{M}B$ με $M\hat{\Gamma}\Delta$ εχω:

1) ΜΒ = ΜΓ

2) ΟΜ = ΜΔ υπόθεση

3) $\hat{M}_1 = \hat{M}_3$ αφού $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ ως κατακορυφην και $\hat{M}_2 = \hat{M}$

αφού ΟΜ διχοτόμος της $A\hat{M}B$

αρα ισχύει Π-Γ-Π αρα $O\hat{M}B = M\hat{\Gamma}\Delta$

αρα: ΟΒ = ΓΔ και $O\hat{B}M = M\hat{\Gamma}\Delta$ και $\hat{O} = \hat{\Delta}$.

β) ΟΑΔΓ # αφού οι διαγώνιοι του διχοτομου-νται στο Μ, αρα ΟΑ // ΓΔ.

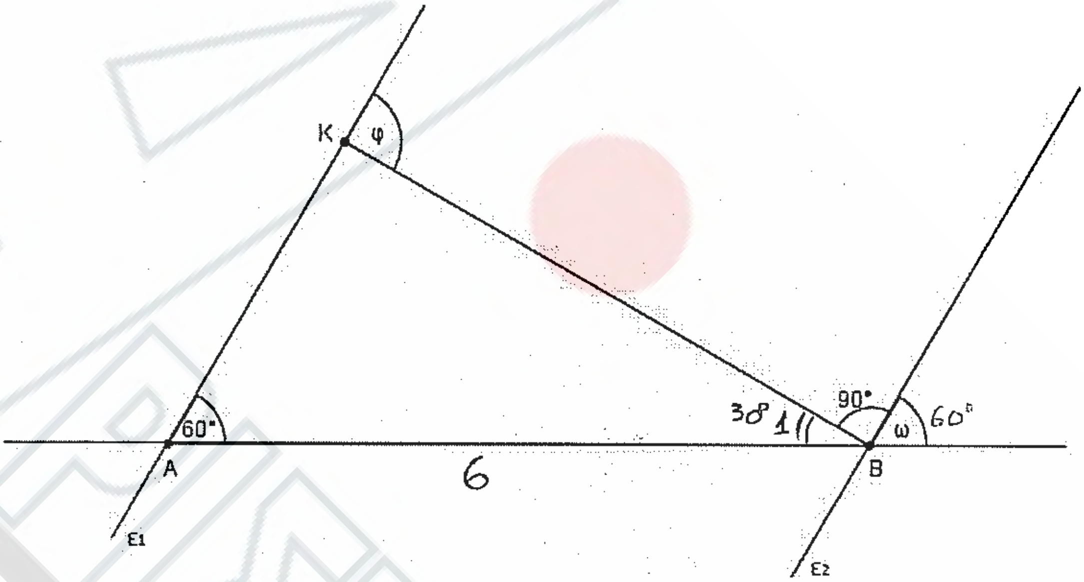
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και ΑΒ=6.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω. (Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ΑΒΚ ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΚ, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)



α) $\hat{\omega} = 60^\circ$ ως εντός-εκτός και επί τ' αυτά

β) $\hat{B}_1 = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

$\overset{\triangle}{ABK}$: $\hat{K} = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$

Τότε: $\hat{\varphi} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Άρα: $\overset{\triangle}{ABK}$ είναι ορθογώνιο.

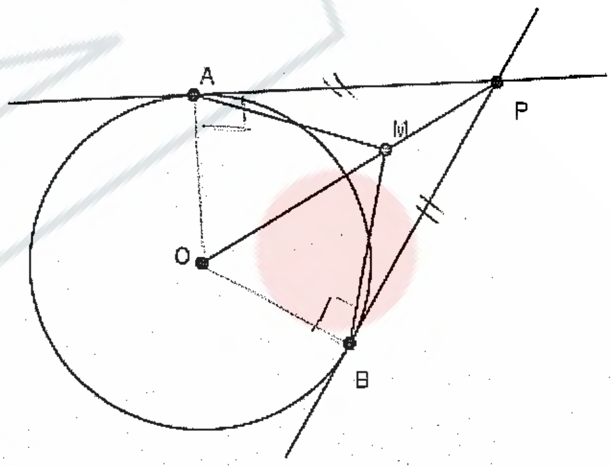
γ) $\overset{\triangle}{ABK}$: έχω $\hat{B}_1 = 30^\circ$, άρα $AK = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

ΘΕΜΑ 2

Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου (Ο,ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Αν Μ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΟΡ, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΡΑΜ και ΡΜΒ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) οι γωνίες $\widehat{MAO}$ και $\widehat{MBO}$ είναι ίσες. (Μονάδες 13)



α) Συγκρίνω $P\hat{A}M$ με $P\hat{B}M$ έχω:

1) $PA = PB$ ως εφαπτόμενες από το P

2) PM κοινή πλευρά

3) $A\hat{P}M = B\hat{P}M$ αφού η PO είναι διχοτόμος της γωνίας των εφαπτομένων

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $P\hat{A}M = P\hat{B}M$.

β) $OA \perp PA$ και $OB \perp PB$

Αφού $P\hat{A}M = P\hat{B}M$ θα έχω $P\hat{A}M = P\hat{B}M$

Άρα: $M\hat{A}O = M\hat{B}O$ ως συμπληρωματικές ίσων γωνιών.

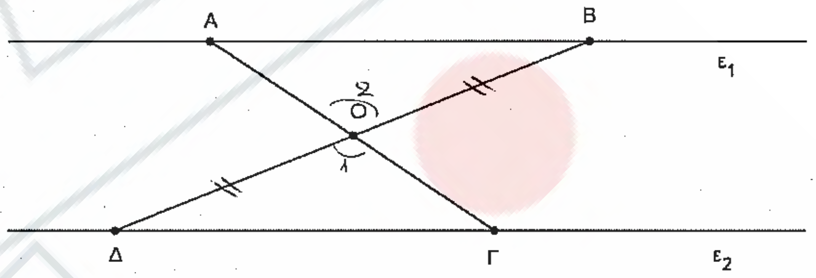
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και το σημείο Ο είναι το μέσο της ΒΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ίσα και να γράψετε τα ίσα στοιχεία τους. (Μονάδες 12)

β) το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)



α) Συγκρίνω $A\hat{O}B$ με $\Gamma\hat{O}\Delta$ έχω:

1) $\Delta O = BO$ αφού Ο μέσο ΔΒ

2) $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ ως κατακορυφήν

3) $\hat{\Delta} = \hat{B}$ ως εντος εναλλάξ

αρα ισχύει Γ-Π-Γ αρα $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$.

β) Αφου $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$ θα έχω $AB = \Gamma\Delta$ και $AB // \Gamma\Delta$

αρα ΑΒΓΔ #.

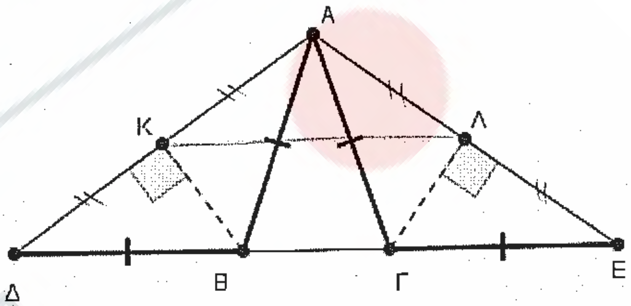
ΘΕΜΑ 4

Στο ακόλουθο σχήμα ισχύουν ΑΒ=ΒΔ=ΑΓ=ΓΕ=5, $ΒΚ \perp ΑΔ$ και $ΓΛ \perp ΑΕ$.

α) Να προσδιορίσετε, ως προς τις πλευρές, το είδος των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΕ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα. (Μονάδες 10)

γ) Αν η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα ΚΛ. (Μονάδες 9)



α) ΑΒ = ΑΔ και ΑΓ = ΓΕ, άρα $Α\overset{\triangle}{Δ}Β$ και $Α\overset{\triangle}{Γ}Ε$ ισοσκελή.

β) $Α\overset{\triangle}{Δ}Β$ ισοσκελές με ΚΒ ύψος, άρα ΚΒ διάμεσος και διχοτόμος, δηλ. Κ μέσο ΑΔ.

Ομοίως: Λ μέσο ΑΕ.

γ) $Α\overset{\triangle}{Δ}Ε$: $\left.\begin{array}{l}\text{Κ μέσο ΑΔ}\\ \text{Λ μέσο ΑΕ}\end{array}\right\}$ άρα $ΚΛ = \parallel \frac{ΔΕ}{2}$

δηλ. $ΚΛ = \frac{ΔΒ+ΒΓ+ΓΕ}{2} = \frac{ΑΒ+ΒΓ+ΑΓ}{2} =$

$= \frac{\text{περίμετρος}_{ΑΒΓ}}{2} = \frac{12}{2} = 6.$

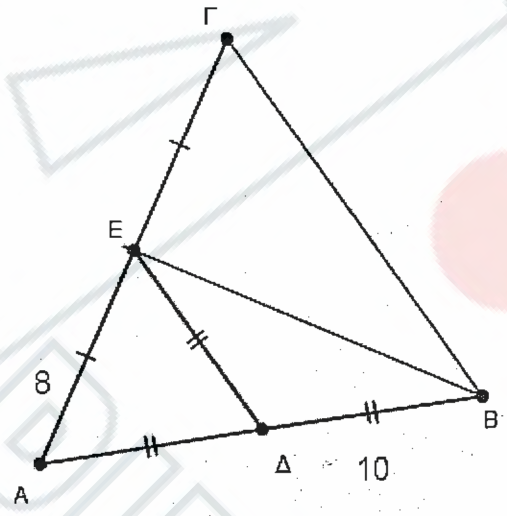
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν ΑΔ=ΕΔ=ΔΒ με ΑΕ=8 και ΔΒ=10.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)



α) $A\overset{\Delta}{E}B$: έχω ΕΔ διάμεσο με $E\Delta = \frac{AB}{2}$, άρα $A\overset{\Delta}{E}B$ ορθογώνιο με ΑΒ υποτείνουσα.

β) $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$: Ε μέσο ΑΓ, Δ μέσο ΑΒ } άρα: $\Delta E = // \frac{B\Gamma}{2}$

$B\Gamma = 2\Delta E = 2 \cdot 10 = 20 = AB$

άρα $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$ ισοσκελές

γ) περίμετρος $= AB + B\Gamma + A\Gamma = 20 + 20 + 16 = 56$.

ΘΕΜΑ 2

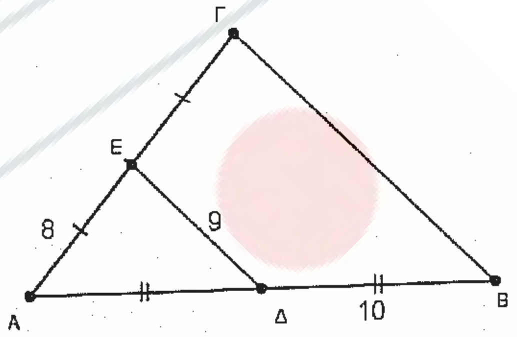
Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ΑΕ=8 , ΕΔ=9 και ΔΒ=10 .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 8)

γ) Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου ΑΒΓ και του τετραπλεύρου ΔΕΓΒ.

(Μονάδες 9)



α) $\underline{\hat{ΑΒΓ}}$: Ε μέσο ΑΓ, Δ μέσο ΑΒ $\Big\}$ άρα: $ΔΕ =\parallel \frac{ΒΓ}{2}$

άρα ΔΕΓΒ τραπέζιο.

β) $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΒΓ = 2ΔΕ = 2\cdot 9 = 18$.

γ) $\text{περίμετρος}_{\hat{ΑΒΓ}} = ΑΒ+ΒΓ+ΑΓ = 20+18+16 = 54$

$\text{περίμετρος}_{ΔΕΓΒ} = ΔΕ+ΕΓ+ΓΒ+ΔΒ =$

$= 9+8+18+10 = 45$.

Άρα: $\text{περίμετρος}_{\hat{ΑΒΓ}} > \text{περίμετρος}_{ΔΕΓΒ}$.

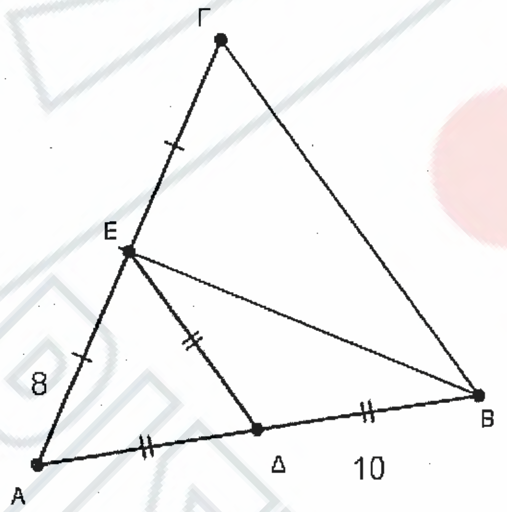
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ . Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν ΑΔ=ΕΔ=ΔΒ με ΑΕ=8 και ΔΒ=10 .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι ΒΓ=20. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)



α) $\overset{\triangle}{AEB}$: έχω τη διαμεσο $E\Delta = \frac{AB}{2}$, άρα $\overset{\triangle}{AEB}$ ορθογώνιο με ΑΒ υποτείνουσα.

β) $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: $\left.\begin{array}{l} E \text{ μέσο } A\Gamma \\ \Delta \text{ μέσο } AB \end{array}\right\}$ άρα: $\Delta E = \parallel \frac{B\Gamma}{2}$

$B\Gamma = 2\Delta E = 2 \cdot 10 = 20$

γ) περίμετρος $= AB + B\Gamma + A\Gamma = 20 + 20 + 16 = 56$.

ΘΕΜΑ 2

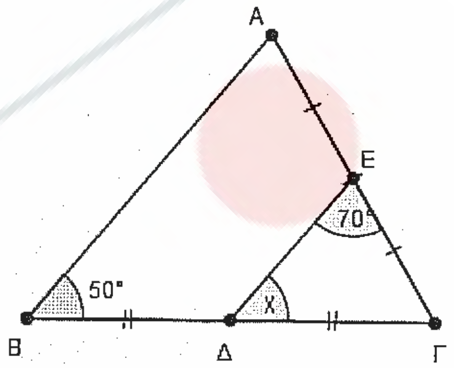
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{B} = 50^0$. Έστω ότι τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\widehat{\Delta E\Gamma} = 70^0$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί $\Delta E // AB$. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε

I. τη γωνία $\hat{x}$. (Μονάδες 8)

II. τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)



α) $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$: $\left.\begin{array}{l}\Delta \text{ μέσο } B\Gamma \\ E \text{ μέσο } A\Gamma\end{array}\right\}$ άρα $\Delta E =\parallel \frac{AB}{2}$.

β) i) $\hat{x} = \hat{B} = 50^\circ$ ως εντός-εκτός και επί τ' αυτά

ii) $\overset{\Delta}{\Delta E\Gamma}$: $\hat{\Gamma} = 180^\circ - 70^\circ - 50^\circ = 60^\circ$

$\overset{\Delta}{AB\Gamma}$: $\hat{A} = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ$.

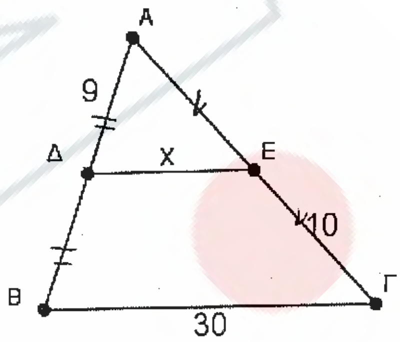
ΘΕΜΑ 2

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με Δ και Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ΑΔ=9 , ΕΓ=10 και ΒΓ=30 .

α) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος x του τμήματος ΔΕ. (Μονάδες 8)



α) περιμετρος = ΑΒ + ΑΓ + ΒΓ = 18 + 20 + 30 = 58

β) $\underline{\hat{ΑΒΓ}}$: Δ μέσο ΑΒ, Ε μέσο ΑΓ } αρα: ΔΕ =// $\frac{ΒΓ}{2}$

αρα: ΔΕΓΒ τραπεζιο

γ) $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{30}{2} = 15.$

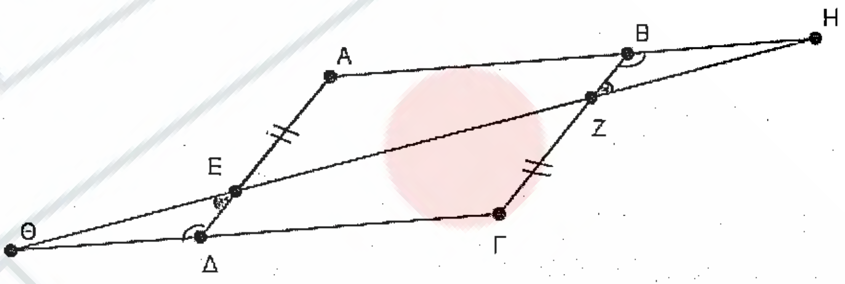
ΘΕΜΑ 2

Στις πλευρές ΑΔ και ΒΓ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θεωρούμε σημεία Ε και Ζ, τέτοια ώστε ΑΕ=ΓΖ . Αν η ευθεία ΖΕ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Η και Θ, να αποδείξετε ότι:

α) $H\hat{B}Z = E\hat{\Delta}\Theta$ (Μονάδες 8)

β) $B\hat{Z}H = \Delta\hat{E}\Theta$ (Μονάδες 8)

γ) ΒΗ=ΘΔ (Μονάδες 9)



α) $H\hat{B}Z = E\hat{\Delta}\Theta$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών. β) $B\hat{Z}H = \Delta\hat{E}\Theta$ αφού οι κατακορυφήν τους είναι ίσες, ως εντός εναλλάξ

γ) Συγκρίνω $B\hat{H}Z$ με $\Delta\hat{E}\Theta$ έχω:

1) ΔΕ = ΒΖ ως διαφορά ίσων τμημάτων

2) $Z\hat{B}H = E\hat{\Delta}\Theta$ από α)

3) $B\hat{Z}H = \Delta\hat{E}\Theta$ από β)

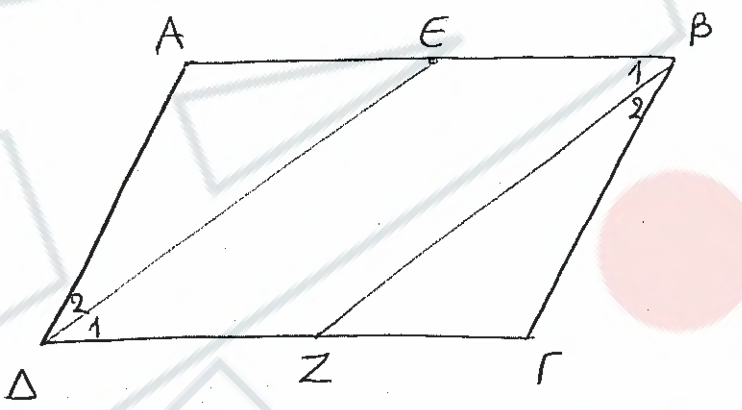
άρα ισχύει Γ-Π-Γ άρα $B\hat{H}Z = \Delta\hat{E}\Theta$ άρα ΒΗ = ΘΔ.

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ . Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\hat{\Delta}$ και $\hat{B}$ τέμνουν τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΓΖ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ΑΕΔ}$ με $\overset{\triangle}{ΒΓΖ}$ έχω:

1) ΑΔ = ΒΓ αφού ΑΒΓΔ #

2) $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ -‖- -‖-

3) $\hat{\Delta}_2 = \hat{B}_2$ ως μισά ίσων γωνιών

άρα ισχύει Γ-Π-Γ άρα $\overset{\triangle}{ΑΕΔ} = \overset{\triangle}{ΒΓΖ}$.

β) Αφού $\overset{\triangle}{ΑΕΔ} = \overset{\triangle}{ΒΓΖ}$ θα έχω ΑΕ = ΓΖ και $\boxed{ΔΕ = ΒΖ}$. Τότε και $\boxed{ΕΒ = ΔΖ}$ ως διαφορά ίσων τμημάτων. Άρα: ΔΕΒΖ #.

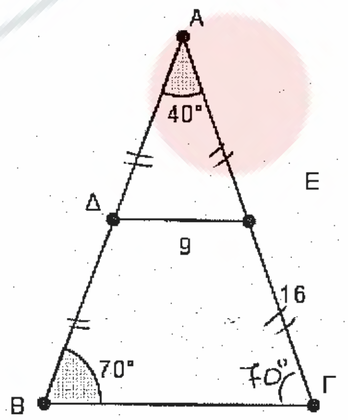
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 40^0$ και $\hat{B} = 70^0$. Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ με $ΔΕ = 9$ και $ΕΓ = 16$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι ΒΓ=18. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)



α) $\hat{Γ} = 180° - 70° - 40° = 70°$ άρα $A\hat{B}Γ$ ισοσκελές με $AB = AΓ$

β) $\frac{AΔ}{AB} = \frac{AE}{AΓ} = \frac{ΔE}{BΓ} = \frac{1}{2}$ (από Θ. Θαλή)

$BΓ = 2ΔE$

$BΓ = 2 \cdot 9$

$BΓ = 18.$

γ) περίμετρος $= AB + AΓ + BΓ = 32 + 32 + 18 =$

$= 82.$

ΘΕΜΑ 2

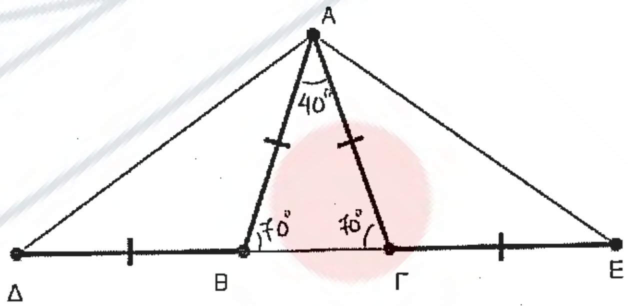
Στο παρακάτω σχήμα ισχύουν ΔΒ=ΒΑ=ΑΓ=ΓΕ και $\widehat{BA\Gamma} = 40^0$.

Να αποδείξετε ότι

α) $\widehat{AB\Delta} = \widehat{A\Gamma E} = 110^0$. (Μονάδες 10)

β) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

γ) το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)



α) $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \dfrac{180^\circ - 40^\circ}{2} = \dfrac{140^\circ}{2} = 70^\circ$

$A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

β) Συγκρίνω $A\overset{\Delta}{B}\Delta$ με $A\overset{\Delta}{\Gamma}E$ έχω:

1) $AB = A\Gamma$ υπόθεση

2) $\Delta B = \Gamma E$ —״—

3) $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E = 110^\circ$

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $A\overset{\Delta}{B}\Delta = A\overset{\Delta}{\Gamma}E$.

γ) Αφού $A\overset{\Delta}{B}\Delta = A\overset{\Delta}{\Gamma}E$ θα έχω $A\Delta = AE$ άρα $A\overset{\Delta}{\Delta}E$ ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 2

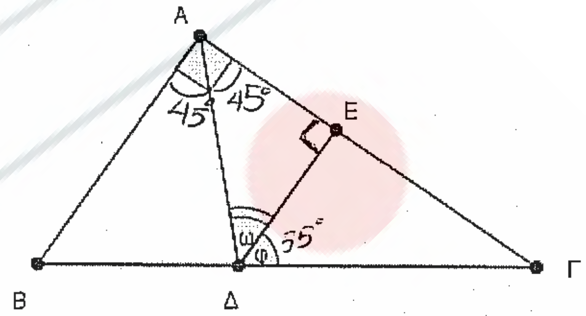
Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^0$). Έστω ότι η ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνία Α και η $\Delta E//AB$. Αν η γωνία $\hat{B}=20^0+\hat{\Gamma}$,

α) να υπολογίσετε:

I. τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)

II. τις γωνίες $\hat{\varphi}$ και $\hat{\omega}$. (Μονάδες 10)

β) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)



α) i) $\hat{B}+\hat{\Gamma}=90^\circ$

$20^\circ+\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=90^\circ$

$2\hat{\Gamma}=70^\circ$

$\hat{\Gamma}=35^\circ$ αρα $\hat{B}=20^\circ+35^\circ=55^\circ$.

ii) $\hat{\varphi}=\hat{B}=55^\circ$ ως εντός - εκτός και επί τ' αυτά

$\Delta E \parallel AB$ και αφού $AB\perp A\Gamma$ αρα $\Delta E\perp A\Gamma$

άρα στο $A\hat{\Delta}E$: $\hat{\omega}=90^\circ-45^\circ=45^\circ$.

β) Αφού $\Delta\hat{A}E=A\hat{\Delta}E=45^\circ$ το $A\hat{\Delta}E$ ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 2

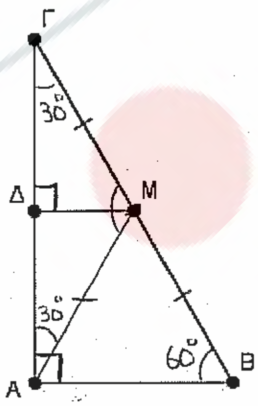
Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) με γωνία $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΒ , η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Δ.

α) Να υπολογίσετε

I. τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 7)

II. τις γωνίες του τριγώνου ΑΜΓ. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ. (Μονάδες 9)



α) i) $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90°$

$2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90°$

$3\hat{\Gamma} = 90°$

$\hat{\Gamma} = 30°$ άρα $\hat{B} = 2 \cdot 30° = 60°$

ii) $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: η ΑΜ διάμεσος, άρα $AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma = MB$

άρα $\overset{\triangle}{AM\Gamma}$ ισοσκελές με $\Gamma\hat{A}M = \hat{\Gamma} = 30°$

Τότε: $A\hat{M}\Gamma = 180° - 30° - 30° = 120°$

β) $AB \perp A\Gamma$ και $AB \parallel M\Delta$ άρα $M\Delta \perp A\Gamma$.

Στο $\overset{\triangle}{AM\Gamma}$ που είναι ισοσκελές έχω ΜΔ ύψος άρα ΜΔ διάμεσος και διχοτόμος, δηλ. ΜΔ μεσοκάθετος του ΑΓ.

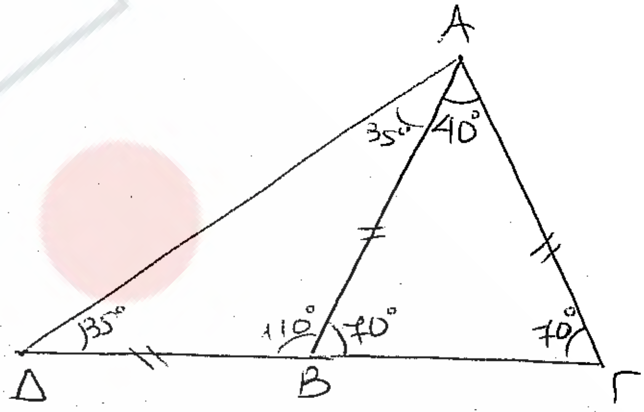
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με γωνία κορυφής $\hat{A} = 40^0$. Στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) παίρνουμε τμήμα ΒΔ τέτοιο ώστε $B\Delta = AB$.

Να υπολογίσετε

α) τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 10)

β) τη γωνία $\widehat{\Delta A \Gamma}$. (Μονάδες 15)



α) $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \dfrac{180^\circ - 40^\circ}{2} = \dfrac{140^\circ}{2} = 70^\circ$

β) $A\hat{B}\Delta = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

$\hat{\Delta} = \Delta\hat{A}B = \dfrac{180^\circ - 110^\circ}{2} = \dfrac{70^\circ}{2} = 35^\circ$

$\Delta\hat{A}\Gamma = 35^\circ + 40^\circ = 75^\circ$.

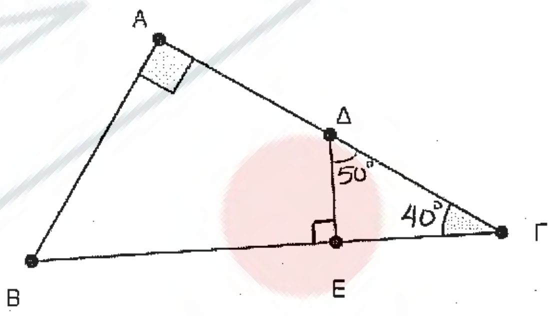
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) με $\hat{\Gamma} = 40^0$. Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΓ και $\Delta E \perp B\Gamma$.

Να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ. (Μονάδες 10)

β) τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΔΕΒ. (Μονάδες 15)



α) $\underline{\overset{\triangle}{\Delta E \Gamma}}$: $E\hat{\Delta}\Gamma = 90° - 40° = 50°$

β) $A\hat{\Delta}E = 180° - 50° = 130°$

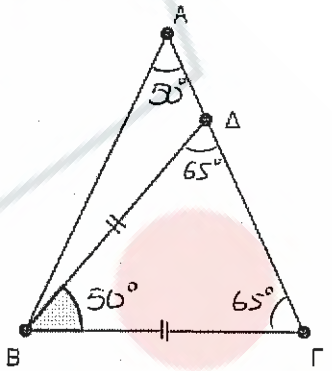
$\hat{B} = 360° - 90° - 90° - 130° = 50°$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ισοσκελές ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με γωνία $\hat{A} = 50^0$. Έστω Δ είναι σημείο της πλευράς ΑΓ, τέτοιο ώστε ΒΔ=ΒΓ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\widehat{\Delta B\Gamma}$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{A}$. (Μονάδες 13)



α) $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \dfrac{180^\circ - 50^\circ}{2} = \dfrac{130^\circ}{2} = 65^\circ$

β) $\hat{\Gamma} = B\hat{\Delta}\Gamma = 65^\circ$

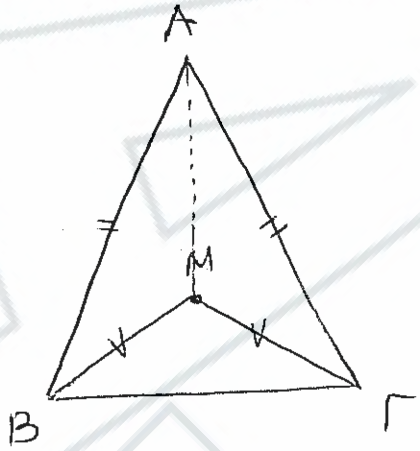
άρα: $\Delta\hat{B}\Gamma = 180^\circ - 65^\circ - 65^\circ = 50^\circ$

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και σημείο Μ εσωτερικό του τριγώνου, τέτοιο ώστε ΜΒ=ΜΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΑΜΓ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Η ευθεία ΑΜ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{B M \Gamma}$. (Μονάδες 13)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{AMB}$ με $\overset{\triangle}{AM\Gamma}$ έχω:

1) ΑΜ κοινή πλευρά

2) ΑΒ = ΑΓ υπόθεση

3) ΜΒ = ΜΓ -׀׀-

άρα ισχύει Π-Π-Π άρα $\overset{\triangle}{AMB} = \overset{\triangle}{AM\Gamma}$.

β) Αφού $\overset{\triangle}{AMB} = \overset{\triangle}{AM\Gamma}$ θα έχω $A\hat{M}B = A\hat{M}\Gamma$

άρα ΑΜ διχοτόμος της $B\hat{M}\Gamma$.

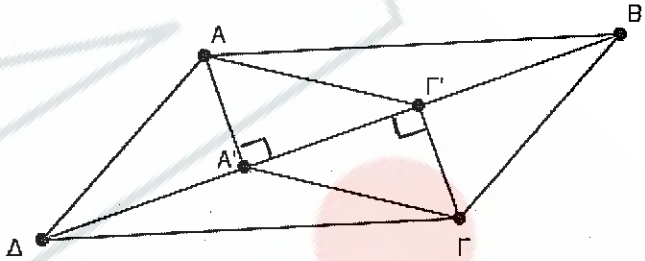
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Α΄, Γ΄ οι προβολές των κορυφών Α και Γ στη διαγώνιο ΒΔ. Αν τα σημεία Α΄ και Γ΄ δεν ταυτίζονται , να αποδείξετε ότι:

α) ΑΑ΄// ΓΓ΄ (Μονάδες 8)

β) ΑΑ΄=ΓΓ΄ (Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο ΑΓ΄ΓΑ΄ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)



α) ΑΑ' // ΓΓ' γιατί είναι ⊥ στη ΒΔ.

β) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{AA'\Delta}$ με $\overset{\triangle}{B\Gamma\Gamma'}$ έχω:

1) ορθογώνια

2) ΑΔ = ΒΓ αφού ΑΒΓΔ #

3) $A\hat{\Delta}A' = \Gamma'\hat{B}\Gamma$ ως εντός εναλλάξ

άρα ισχύει υποτ. + οξ. γωνία άρα $\overset{\triangle}{AA'\Delta} = \overset{\triangle}{B\Gamma\Gamma'}$

άρα ΑΑ' = ΓΓ'.

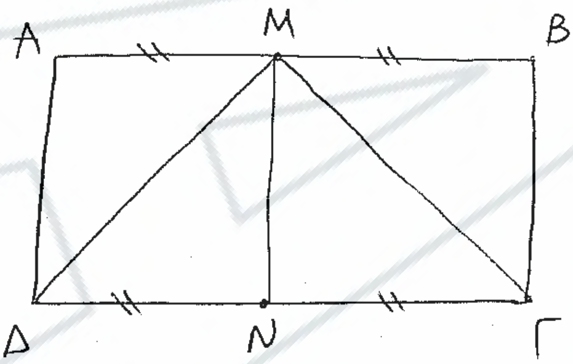
γ) Αφού ΑΑ' = // ΓΓ' θα έχω ΑΑ'ΓΓ' #.

ΘΕΜΑ 2

Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ, αν Μ και Ν είναι τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) ΜΔ=ΜΓ. (Μονάδες 12)

β) Η ευθεία ΜΝ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΓΔ. (Μονάδες 13)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ΑΔΜ}$ με $\overset{\triangle}{ΜΒΓ}$ έχω:

1) ορθογώνια

2) ΑΜ = ΜΒ αφού Μ μέσο ΑΒ

3) ΑΔ = ΒΓ αφού ΑΒΓΔ ορθογώνιο

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\overset{\triangle}{ΑΔΜ} = \overset{\triangle}{ΜΒΓ}$

άρα: ΜΔ = ΜΓ.

β) Αφού ΜΔ = ΜΓ θα έχω $\overset{\triangle}{ΜΔΓ}$ ισοσκελές με ΜΝ διάμεσο, άρα ΜΔ ύψος και διχοτόμος

Δηλ. ΜΝ μεσοκάθετος του ΔΓ.

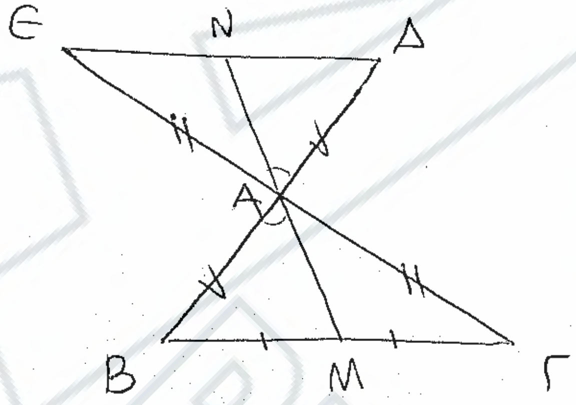
ΘΕΜΑ 2

Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα τμήματα ΑΔ=ΑΒ και ΑΕ=ΑΓ.

Να αποδείξετε ότι

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Η προέκταση της διαμέσου ΑΜ προς το μέρος της κορυφής Α διχοτομεί την πλευρά ΕΔ του τριγώνου ΔΑΕ. (Μονάδες 13)



α) Συγκρίνω $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ με $A\overset{\triangle}{\Delta}E$ εχω:

1) $AB = A\Delta$ υπόθεση

2) $A\Gamma = AE$ —\\—

3) $B\hat{A}\Gamma = E\hat{A}\Delta$ ως κατακορυφήν

αρα ισχύει Π–Γ–Π αρα $A\overset{\triangle}{B}\Gamma = A\overset{\triangle}{\Delta}E$

β) Συγκρίνω $A\overset{\triangle}{B}M$ με $A\overset{\triangle}{\Delta}N$ εχω:

1) $AB = A\Delta$ υπόθεση

2) $\hat{B} = \hat{\Delta}$ από α)

3) $B\hat{A}M = \Delta\hat{A}N$ ως κατακορυφήν

άρα ισχύει Γ–Π–Γ αρα $A\overset{\triangle}{B}M = A\overset{\triangle}{\Delta}N$ αρα $\boxed{\Delta N = MB}$

Όμοια: έχω $A\hat{E}N = A\hat{M}\Gamma$ αρα: $\boxed{EN = M\Gamma}$

Άρα: $\Delta N = EN$ δηλ. Ν μέσο του ΕΔ.

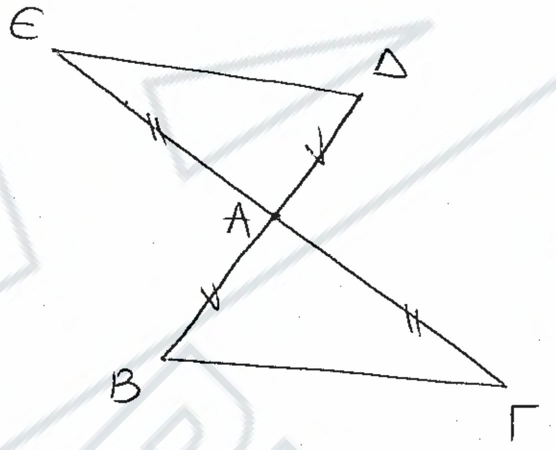
ΘΕΜΑ 2

Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ (προς το Α) και ΓΑ (προς το Α) τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα τμήματα ΑΔ=ΑΒ και ΑΕ=ΑΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) ΕΔ//ΒΓ (Μονάδες 13)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ με $\overset{\triangle}{A\Delta E}$ έχω:

1) ΑΒ = ΑΔ υπόθεση

2) ΑΓ = ΑΕ —ιι—

3) $B\hat{A}\Gamma = E\hat{A}\Delta$ ως κατακορυφήν

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{A\Delta E}$

β) Αφού $\overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{A\Delta E}$ θα έχω $\hat{B} = \hat{\Delta}$ δηλ. σχηματίζουν εντός εναλλάξ γωνίες ίσες

άρα ΒΓ $\parallel$ ΔΕ.

ΘΕΜΑ 2

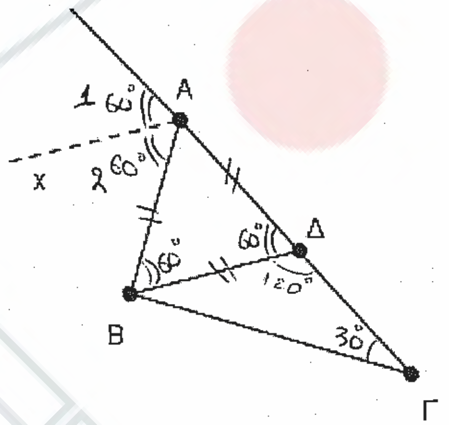
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ . Έστω Αχ η διχοτόμος της εξωτερικής του γωνίας $\widehat{A_{\varepsilon\xi}} = 120^0$.Από την κορυφή Β φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Αχ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)

ii. $\Delta\Gamma = A\Gamma - AB$ (Μονάδες 5)

β) Αν η γωνία $\widehat{B\Delta A}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΓ. (Μονάδες 10)



α) i) $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 60^\circ$

$A\hat{B}\Delta = \hat{A}_2 = 60^\circ$ ως εντός εναλλάξ

$A\hat{\Delta}B = \hat{A}_1 = 60^\circ$ ως εντός - εκτός και επί ταυτά

άρα: $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Delta}B = 60^\circ$ άρα $A\overset{\Delta}{B}\Delta$ ισόπλευρο.

ii) $\Delta\Gamma = A\Gamma - \Delta A = A\Gamma - AB$.

β) $B\hat{\Delta}A = 2\hat{\Gamma}$

$60^\circ = 2\hat{\Gamma}$

$\hat{\Gamma} = 30^\circ$

$B\hat{\Delta}\Gamma = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

<u>$B\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma$</u>: $\Delta\hat{B}\Gamma = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ$.

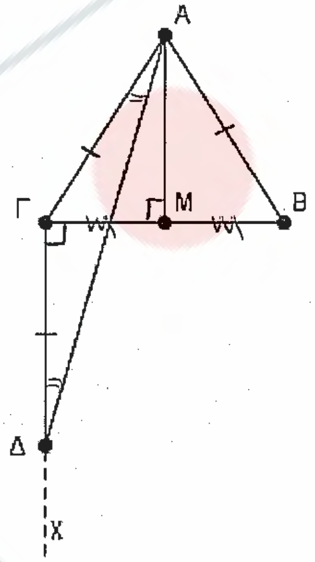
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και η διάμεσός του ΑΜ. Φέρουμε ημιευθεία $\Gamma\chi \perp B\Gamma$ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα ΓΔ= ΑΒ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία $\widehat{\Delta A\Gamma}$ είναι ίση με τη γωνία $\widehat{\Gamma\Delta A}$. (Μονάδες 12)

β) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{MA\Gamma}$. (Μονάδες 13)



α) ΓΔ = ΑΒ = ΑΓ (αφού $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισοσκελές)
αρα $\overset{\triangle}{A\Gamma\Delta}$ ισοσκελές με $\Delta\hat{A}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}A$

β) ΓΔ // ΑΜ αφού είναι ⊥ στη ΒΓ
αρα $\Gamma\hat{\Delta}A = \Delta\hat{A}M$ ως εντός εναλλάξ
και $\Gamma\hat{\Delta}A = \Delta\hat{A}\Gamma$ από α)
αρα: $\Delta\hat{A}M = \Delta\hat{A}\Gamma$ αρα ΑΔ διχοτόμος της $M\hat{A}\Gamma$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$). Έστω Δ σημείο της πλευράς ΑΓ τέτοιο ώστε, η διχοτόμος ΔΕ της γωνίας $\widehat{A\Delta B}$ να είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ.

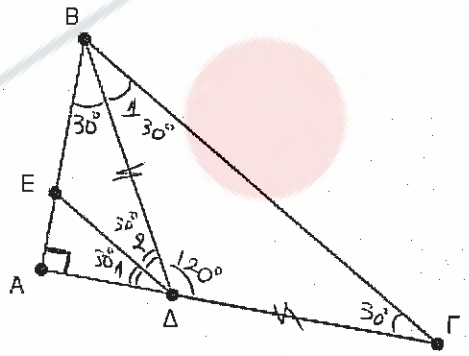
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) Αν $\widehat{A\Delta B} = 60^0$,

I. να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$. (Μονάδες 8)

II. να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 2AB$ (Μονάδες 7)



α) $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_2$ ως εντός εναλλάξ

$\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_1$ ως εντός εκτός και επί τ' αυτά

όμως $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ αφού ΔΕ διχοτόμος

άρα $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}$ άρα $B\hat{\Delta}\Gamma$ ισοσκελές

β) i) $A\hat{\Delta}B = 60°$ τότε $B\hat{\Delta}\Gamma = 120°$

όμως: $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma} = \dfrac{180° - 120°}{2} = \dfrac{60°}{2} = 30°$

ii) $\underline{A\hat{B}\Gamma}$: έχω $\hat{\Gamma} = 30°$, άρα $AB = \dfrac{B\Gamma}{2}$

$2AB = B\Gamma$.

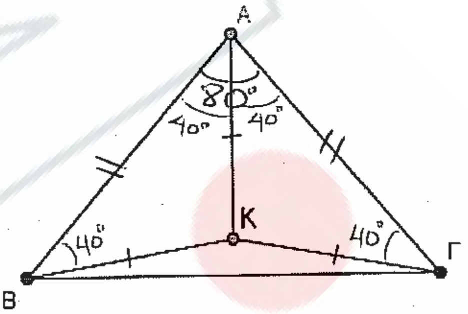
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και $\hat{A} = 80^0$. Έστω Κ σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$, τέτοιο ώστε ΚΒ=ΚΑ=ΚΓ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΚΑ και ΓΚΑ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{AB K}$ και $\widehat{A\Gamma K}$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{BK\Gamma}$. (Μονάδες 7)



α) Συγκρίνω $B\overset{\triangle}{K}A$ με $\Gamma\overset{\triangle}{K}A$ έχω:

1) ΑΚ κοινή πλευρά

2) ΒΚ = ΓΚ υπόθεση

3) ΑΒ = ΑΓ —"—

άρα ισχύει Π−Π−Π άρα $B\overset{\triangle}{K}A = \Gamma\overset{\triangle}{K}A$.

β) $A\overset{\triangle}{B}K$ ισοσκελές με $A\hat{B}K = B\hat{A}K = 40^\circ$

$A\overset{\triangle}{\Gamma}K$ —"— με $A\hat{\Gamma}K = \Gamma\hat{A}K = 40^\circ$.

γ) $A\hat{K}B = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ$

$A\hat{K}\Gamma = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ$

$B\hat{K}\Gamma = 360^\circ - 100^\circ - 100^\circ = 160^\circ$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) . Στην προέκταση της πλευράς ΒΓ και προς τα δυο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα έτσι ώστε ΒΔ= ΓΕ.

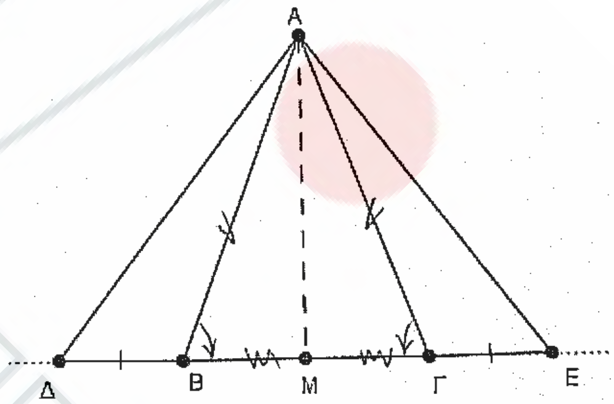
Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{B_{εξ}} = \widehat{Γ_{εξ}}$ (Μονάδες 6)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

γ) Η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ είναι και διάμεσος του τριγώνου ΑΔΕ.

(Μονάδες 7)



α) $\hat{B}εξ = \hat{Γ}εξ$ ως παραπληρωματικές της $\hat{B}$ και $\hat{Γ}$ που είναι ίσες.

β) Συγκρίνω $A\hat{Δ}B$ με $A\hat{E}Γ$ έχω:

1) ΑΒ = ΑΓ υπόθεση

2) ΔΒ = ΓΕ —"—

3) $\hat{B}εξ = \hat{Γ}εξ$ από α)

άρα ισχύει Π - Γ - Π άρα $A\hat{Δ}B = A\hat{E}Γ$.

γ) ΔΜ = ΜΕ ως άθροισμα ίσων τμημάτων

άρα ΑΜ διάμεσος του $A\hat{Δ}E$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και Κ εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο ώστε ΚΒ=ΚΓ.

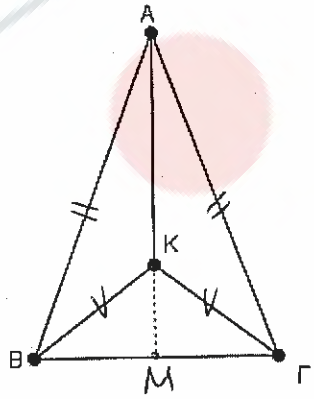
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$. (Μονάδες 6)

γ) Η προέκταση της ΑΚ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{BK\Gamma}$ του τριγώνου ΒΚΓ.

(Μονάδες 7)



α) Συγκρίνω $B\hat{A}K$ με $K\hat{A}\Gamma$ έχω:

1) ΑΒ = ΑΓ υπόθεση

2) ΒΚ = ΓΚ —\\—

3) ΑΚ κοινή πλευρά

άρα ισχύει Π-Π-Π άρα $B\hat{A}K = K\hat{A}\Gamma$.

β) Αφού $B\hat{A}K = K\hat{A}\Gamma$ άρα έχω $B\hat{A}K = K\hat{A}\Gamma$ δηλ. ΑΚ διχοτόμος της $B\hat{A}\Gamma$.

γ) Αφού $B\hat{A}K = K\hat{A}\Gamma$ θα έχω $A\hat{K}B = A\hat{K}\Gamma$.

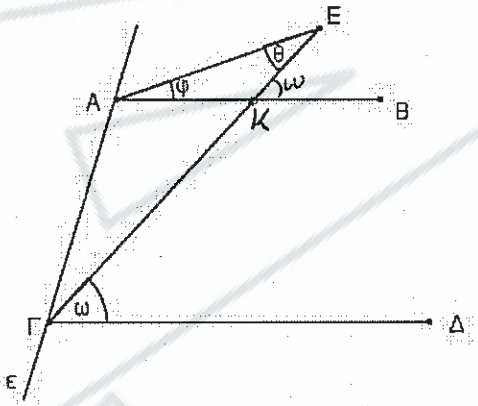
Τότε: $B\hat{K}M = M\hat{K}\Gamma$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών άρα η ΑΜ διχοτομεί τη $B\hat{K}\Gamma$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ευθεία ε του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα ΑΒ και ΓΔ καθώς και ένα τυχαίο σημείο Ε βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το Ε είναι εκτός των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ τότε: $\widehat{\omega} = \widehat{\varphi} + \widehat{\theta}$



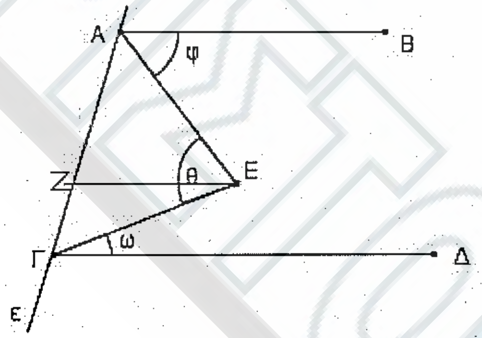
$\widehat{EKB} = \hat{\omega}$ ως εντός-εκτός και επί τ' αυτά.
Τότε $\widehat{EKB}$ είναι εξωτερική του $\widehat{AKE}$, άρα:
$\widehat{EKB} = \hat{\omega} = \hat{\varphi} + \hat{\theta}$

(Μονάδες 10)

β) Αν το Ε είναι ανάμεσα στα τμήματα ΑΒ και ΓΔ και ΕΖ//ΑΒ, τότε να αποδείξετε ότι

(θα πρέπει να λέει ΑΒ∥ΓΔ;)

$\hat{\theta} = \hat{\omega} + \hat{\varphi}$



(Μονάδες 15)

$\widehat{AEZ} = \hat{\varphi}$ ως εντός εναλλάξ
$\widehat{ZEΓ} = \hat{\omega}$ —\\— —\\—
Τότε: $\hat{\theta} = \widehat{AEZ} + \widehat{ZEΓ} = \hat{\varphi} + \hat{\omega}$.

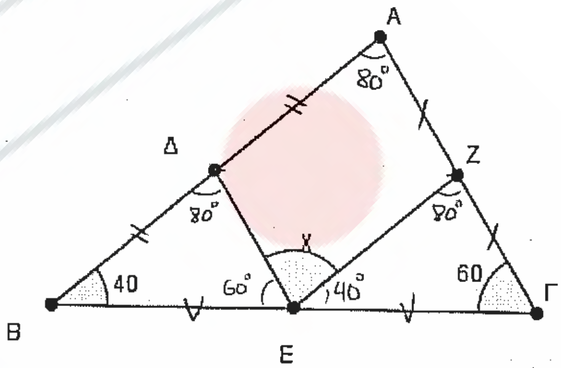
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 40^0$ και $\hat{\Gamma} = 60^0$. Επιπλέον, τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $\widehat{B\Delta E} = \widehat{EZ\Gamma} = 80^0$. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\Delta EZ}$. (Μονάδες 8)



α) $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: $\hat{A} = 180° - 40° - 60° = 80°$

β) $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: Δ μέσο ΑΒ, Ε μέσο ΒΓ, άρα $\Delta E =\parallel \frac{A\Gamma}{2}$

Τότε: $B\hat{\Delta}E = \hat{A} = 80°$ ως εντός-εκτός και επί τ' αυτά

$\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: Ε μέσο ΒΓ, Ζ μέσο ΑΓ, άρα $EZ =\parallel \frac{AB}{2}$

Τότε: $E\hat{Z}\Gamma = \hat{A} = 80°$ ως εντός-εκτός και επί τ' αυτά.

γ) $\overset{\triangle}{B\Delta E}$: $\Delta\hat{E}B = 180° - 80° - 40° = 60°$

$\overset{\triangle}{EZ\Gamma}$: $Z\hat{E}\Gamma = 180° - 80° - 60° = 40°$

Τότε: $\Delta\hat{E}Z = 180° - 60° - 40° = 80°$.

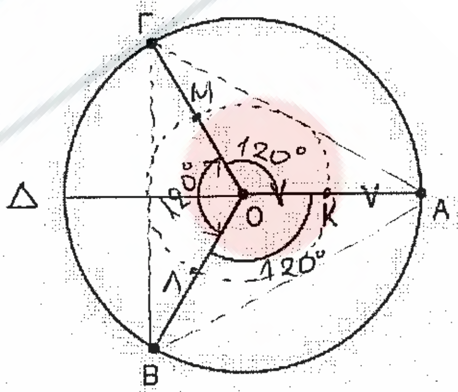
ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε τρεις διαδοχικές ίσες γωνίες ΑΟΒ, ΒΟΓ και ΓΟΑ .

α) Να αποδείξετε ότι η προέκταση της ακτίνας ΑΟ διχοτομεί τη γωνία ΒΟΓ. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του. (Μονάδες 8)

γ) Αν με κέντρο Ο και ακτίνα ΟΚ όπου Κ το μέσο της ακτίνας ΟΑ, γράψουμε έναν άλλο κύκλο που θα τέμνει τις ακτίνες ΟΒ και ΟΓ στα σημεία Λ και Μ αντίστοιχα, τότε τα τόξα ΚΜ και ΑΒ είναι ίσα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)



α) $A\hat{O}\Gamma + \Gamma\hat{O}B + A\hat{O}B = 360^\circ$

$3A\hat{O}\Gamma = 360^\circ$

$A\hat{O}\Gamma = 120^\circ$

$A\hat{O}\Gamma + \Gamma\hat{O}\Delta = 180^\circ$

$120^\circ + \Gamma\hat{O}\Delta = 180^\circ$

$\Gamma\hat{O}\Delta = 60^\circ$

<u>όμοια</u>: $\Delta\hat{O}B = 60^\circ$

δηλ. η ΟΔ διχοτομεί τη $\Gamma\hat{O}B$.

β) Αφού οι επίκεντρες γωνίες $A\hat{O}\Gamma = \Gamma\hat{O}B = B\hat{O}A = 12$0°

τα τόξα θα είναι $\overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{BA} = 120^\circ$.

Αφού τα τόξα είναι ίσα θα έχω ίσες τις χορδές

δηλ. $A\Gamma = B\Gamma = BA$. Άρα $A\hat{B}\Gamma$ ισόπλευρο.

γ) Όχι, γιατί οι κύκλοι δεν είναι ίσοι.

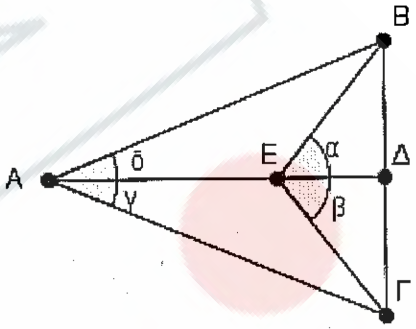
ΘΕΜΑ 2

Αν για το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) του σχήματος ισχύουν $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ και $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$, να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΓΕΒ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ. (Μονάδες 9)



α) Συγκρίνω $A\overset{\triangle}{E}B$ με $A\overset{\triangle}{E}\Gamma$ έχω:

1) ΑΕ κοινή πλευρά

2) $B\hat{A}E = E\hat{A}\Gamma$ υπόθεση

3) $A\hat{E}B = A\hat{E}\Gamma$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $A\overset{\triangle}{E}B = A\overset{\triangle}{E}\Gamma$.

β) Αφού $A\overset{\triangle}{E}B = A\overset{\triangle}{E}\Gamma$ θα έχω ΕΒ = ΕΓ άρα $\Gamma\overset{\triangle}{E}B$ ισοσκελές.

γ) 1ος Στο $E\overset{\triangle}{B}\Gamma$ που είναι ισοσκελές έχω ΕΔ διχοτόμο άρα ΕΔ διάμεσος και ύψος, δηλ. ΑΔ μεσοκάθετος του ΒΓ.

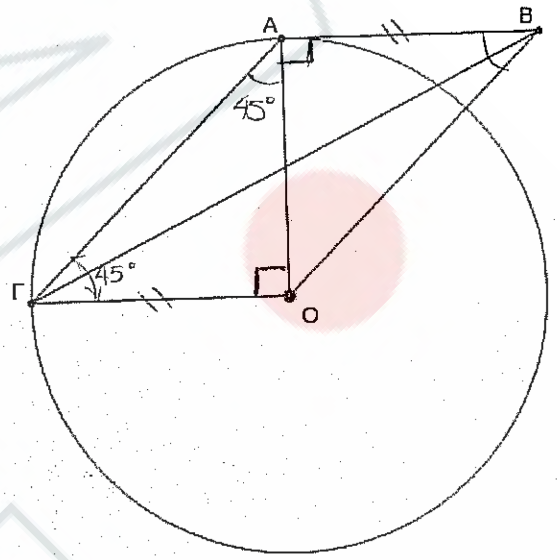
2ος Αφού $A\overset{\triangle}{E}B = A\overset{\triangle}{E}\Gamma$ θα έχω ΑΒ = ΑΓ, δηλ. το Α ισαπέχει από τα άκρα του ΒΓ άρα ανήκει στη μεσοκάθετο αυτού.

ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε κάθετες ακτίνες ΟΑ , ΟΓ και εφαπτόμενο στον κύκλο τμήμα ΑΒ με $AB = O\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΟ και ΒΓ διχοτομούνται. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΟΓ. (Μονάδες 15)



α) $OA \perp AB$ και $OA \perp O\Gamma$ αρα $AB \parallel O\Gamma$ και $AB = O\Gamma$, αρα ΑΒΟΓ ▱, αρα οι διαγώνιοι του ΟΑ και ΒΓ διχοτομούνται.

β) $OA = O\Gamma =$ ακτίνες, αρα $A\hat{O}\Gamma$ ορθογώνιο και ισοσκελές, άρα $\Gamma\hat{A}O = A\hat{\Gamma}O = 45^\circ$.

Τότε και $A\hat{B}O = 45^\circ$

$\Gamma\hat{A}B = \Gamma\hat{A}O + O\hat{A}B = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$

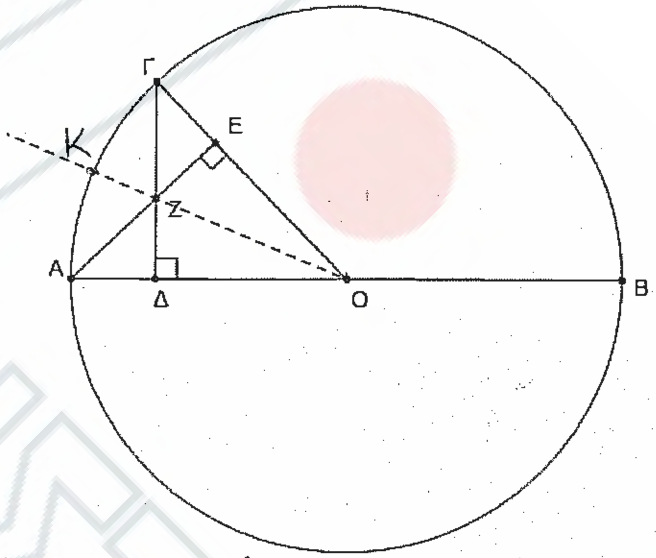
Τότε και $\Gamma\hat{O}B = 135^\circ$.

ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν ΑΕ κάθετο στην ΟΓ και ΓΔ κάθετο στην ΑΟ να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\Delta O E}$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

β) Η ΟΖ διχοτομεί τη γωνία $A\hat{O}\Gamma$ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου ΑΓ. (Μονάδες 12)



α) Συγκρίνω $O\overset{\Delta}{A}E$ με $O\overset{\Delta}{\Gamma}\Delta$ έχω:

1) ορθογώνια
2) ΟΑ = ΟΓ ακτίνες
3) $\hat{O}$ κοινή γωνία

άρα ισχύει υποτ.+οξ. γωνία, άρα $O\hat{A}E = O\hat{\Gamma}\Delta$

άρα ΟΔ = ΟΕ δηλ. $O\overset{\Delta}{\Delta}E$ ισοσκελές.

β) Συγκρίνω $O\overset{\Delta}{Z}E$ με $O\overset{\Delta}{\Delta}Z$ έχω:

1) ορθογώνια
2) ΟΖ κοινή πλευρά
3) ΟΔ = ΟΕ από α)

άρα ισχύει υποτ.+καθ. πλευρά άρα $O\overset{\Delta}{Z}E = O\overset{\Delta}{\Delta}Z$

άρα $Z\hat{O}E = Z\hat{O}\Delta$ δηλ. ΖΟ διχοτόμος της $A\hat{O}\Gamma$

και αφού $Z\hat{O}E = Z\hat{O}\Delta$ θα έχω $\overset{\frown}{\Gamma K} = \overset{\frown}{AK}$, δηλ.

Κ μέσο $\overset{\frown}{A\Gamma}$.

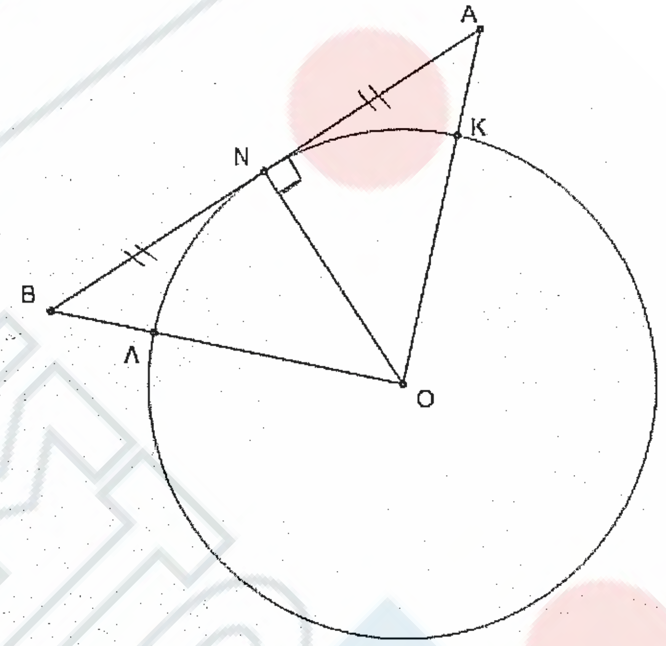
ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Σε σημείο Ν του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενή του, και εκατέρωθεν του Ν θεωρούμε σημεία Α και Β, τέτοια ώστε ΝΑ=ΝΒ. Οι ΟΑ και ΟΒ τέμνουν τον κύκλο στα Κ και Λ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AOB}$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

β) Το σημείο Ν είναι μέσο του τόξου ΚΛ. (Μονάδες 12)



α) $ON \perp AB$

Συγκρίνω $\overset{\triangle}{BNO}$ με $\overset{\triangle}{AON}$ έχω:

1) ορθογώνια

2) NO κοινή πλευρά

3) NA = NB υπόθεση

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\overset{\triangle}{BNO} = \overset{\triangle}{AON}$ άρα OA=OB,

δηλ. $\overset{\triangle}{OAB}$ ισοσκελές

β) Αφού $\overset{\triangle}{BNO} = \overset{\triangle}{AON}$ θα έχω $N\hat{O}B = N\hat{O}A$

άρα $\overset{\frown}{ΛN} = \overset{\frown}{NK}$, δηλ. N μέσο $\overset{\frown}{ΛK}$.

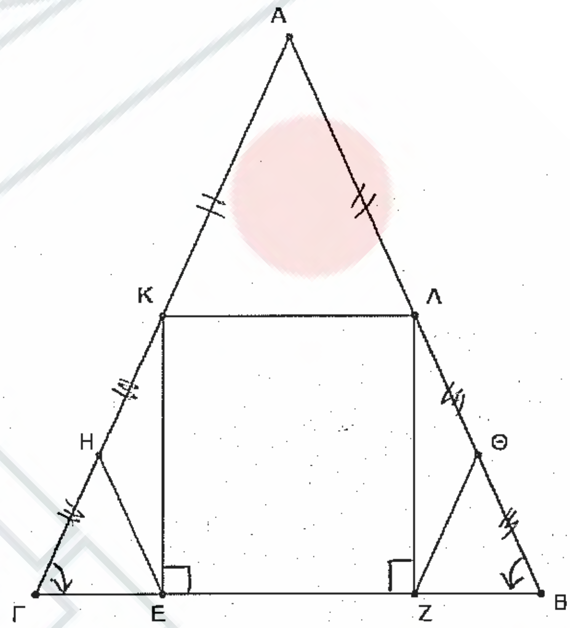
ΘΕΜΑ 2

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ. Από τα μέσα Κ και Λ των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΚΕ και ΛΖ στην πλευρά ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{K E \Gamma}}$ και $\overset{\Delta}{\mathrm{\Lambda Z B}}$ είναι ίσα. (Μονάδες 15)

β) ΕΗ=ΖΘ, όπου Η , Θ τα μέσα των τμημάτων ΚΓ, ΛΒ αντίστοιχα. (Μονάδες 10)



α) Συγκρίνω $\overset{\Delta}{\mathrm{K E \Gamma}}$ με $\overset{\Delta}{\mathrm{\Lambda Z B}}$ έχω:
1) ορθογώνια
2) ΚΓ=ΛΒ ως μισά ίσων πλευρών
3) $\hat{\Gamma} = \hat{B}$ αφού $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ ισοσκελές
άρα ισχύει υποτ+οξ. γωνία άρα $\overset{\Delta}{\mathrm{K E \Gamma}} = \overset{\Delta}{\mathrm{\Lambda Z B}}$

β) $\overset{\Delta}{\mathrm{K E \Gamma}}$: ΗΕ διάμεσος, άρα $HE = \frac{K\Gamma}{2}$

$\overset{\Delta}{\mathrm{\Lambda Z B}}$: ΖΘ διάμεσος, άρα $Z\Theta = \frac{\Lambda B}{2}$

όμως ΚΓ=ΛΒ ως μισά ίσων πλευρών

άρα: ΗΕ=ΖΘ.

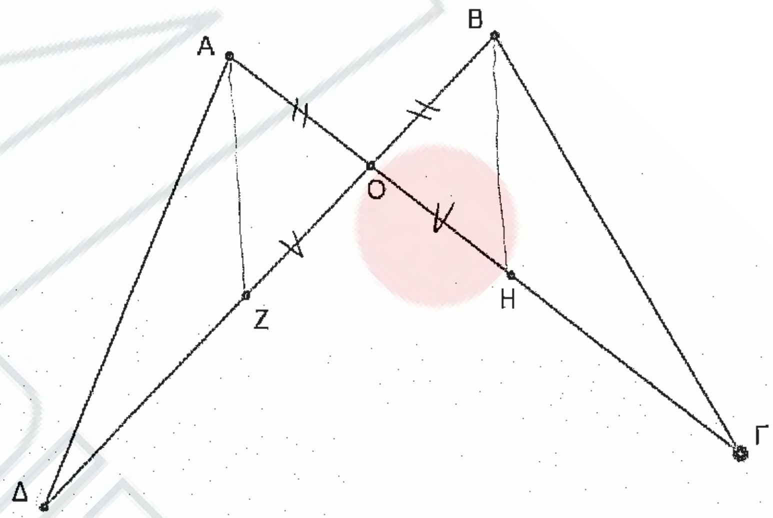
ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα τμήματα ΑΓ=ΒΔ που τέμνονται στο σημείο Ο έτσι ώστε ΟΑ=ΟΒ, και τα σημεία Η και Ζ στα τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΟΗ=ΟΖ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες $\hat{\text{ΑΔΟ}}$ και $\hat{\text{ΒΓΟ}}$ είναι ίσες. (Μονάδες 12)

β) ΑΖ=ΒΗ . (Μονάδες 13)



α) Συγκρίνω $O\hat{A}\Delta$ με $O\hat{B}\Gamma$ έχω:

1) ΟΑ = ΟΒ υπόθεση

2) $A\hat{O}\Delta = B\hat{O}\Gamma$ ως κατακορυφήν

3) ΟΔ = ΟΓ αφού ΔΖ = ΗΓ ως διαφορά ίσων τμημάτων

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $O\hat{A}\Delta = O\hat{B}\Gamma$

άρα: $A\hat{\Delta}O = B\hat{\Gamma}O$.

β) Συγκρίνω $O\hat{A}Z$ με $O\hat{B}H$ έχω:

1) ΟΑ = ΟΒ υπόθεση

2) ΟΖ = ΟΗ -"-

3) $A\hat{O}Z = B\hat{O}H$ ως κατακορυφήν

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $O\hat{A}Z = O\hat{B}H$

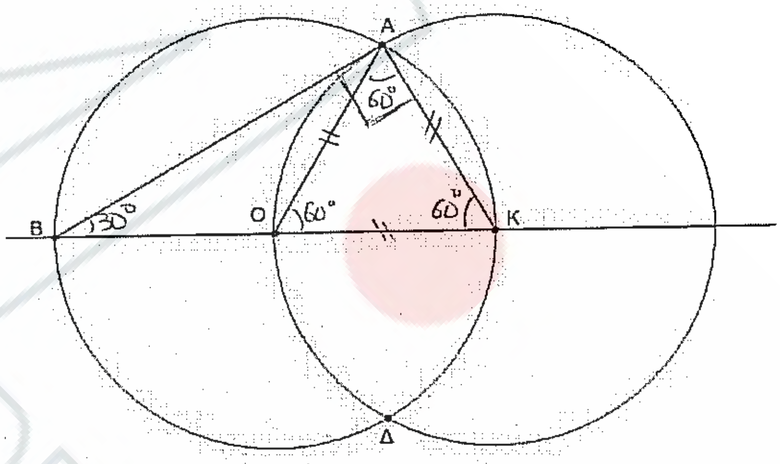
άρα ΑΖ = ΒΗ.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δυο ίσοι κύκλοι (Ο,ρ) και (Κ,ρ) με ΟΚ=ρ, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α και Δ.

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΚ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)

β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΚ. (Μονάδες 15)



α) ΟΑ = ΚΑ = ΟΚ = ρ άρα $\overset{\triangle}{OAK}$ ισόπλευρο.

β) άρα όλες οι γωνίες του είναι 60°.

$B\hat{A}K = 90°$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.

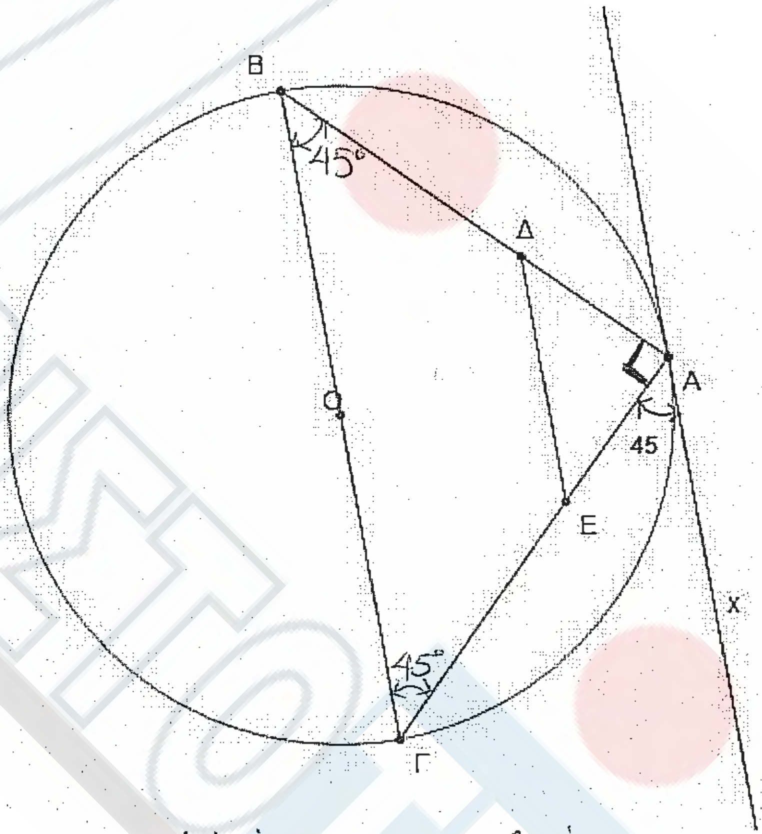
$\underline{A\overset{\triangle}{B}K}$: $\hat{B} = 90° - 60° = 30°$.

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε κύκλο διαμέτρου ΒΓ. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του Α ώστε να σχηματίζει με τη χορδή ΑΓ γωνία 45°. Φέρουμε επίσης μια παράλληλη ευθεία στη ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΓ. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του. (Μονάδες 15)



α) $B\hat{A}\Gamma = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.
$\hat{B} = \Gamma\hat{A}x = 45^\circ$ ως γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης
$\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: $\hat{\Gamma} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

β) $\Delta E \parallel B\Gamma$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$ άρα ΔΕΓΒ ισοσκελές τραπέζιο.
$\hat{\Delta} + \hat{B} = 180^\circ$ ως εντός και επί τ' αυτά
$\hat{\Delta} + 45^\circ = 180^\circ$
$\hat{\Delta} = 135^\circ = \hat{E}$.

ΘΕΜΑ 2

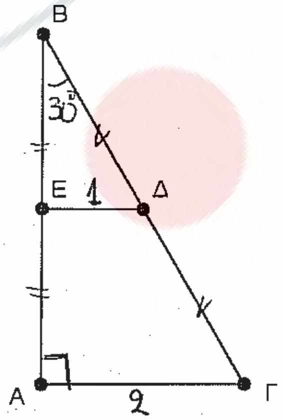
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$ και $\hat{B} = 30^o$. Αν τα σημεία Ε και Δ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα με ΕΔ=1, να υπολογίσετε τα τμήματα:

α) ΑΓ…… (Μονάδες 8)

β) ΒΓ….. (Μονάδες 9)

γ) ΑΔ….. (Μονάδες 8)

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



α) $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: Ε μέσο ΒΑ, Δ μέσο ΒΓ $\}$ άρα $E\Delta = \parallel \frac{A\Gamma}{2}$

$A\Gamma = 2E\Delta = 2 \cdot 1 = 2$

β) $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: $\hat{B} = 30^\circ$ άρα $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2A\Gamma = 2 \cdot 2 = 4.$

γ) $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: ΑΔ διάμεσος, άρα $A\Delta = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{4}{2} = 2$

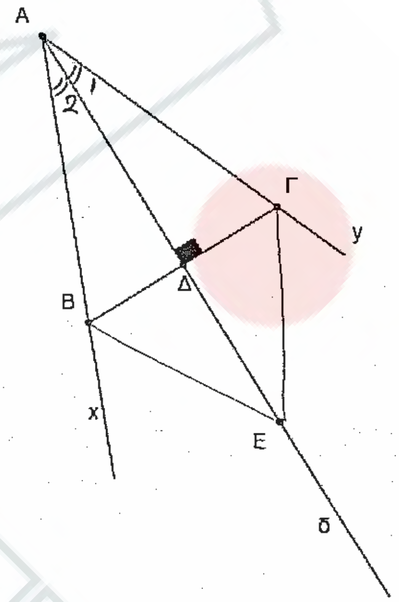
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γωνία xΑy και η διχοτόμος της Αδ. Από τυχαίο σημείο Β της Αx φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την Αδ στο Δ και την Αy στο Γ.

Να αποδείξετε ότι :

α) Τα τμήματα ΑΒ και ΑΓ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Το τυχαίο σημείο Ε της Αδ ισαπέχει από τα Β και Γ. (Μονάδες 13)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ με $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$ έχω:

1) ορθογώνια

2) ΑΔ κοινή πλευρά

3) $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ αφού ΑΔ διχοτόμος

αρα ισχύει Γ-Π-Γ αρα $\overset{\triangle}{AB\Delta} = \overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$

αρα: $AB = A\Gamma$.

β) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ABE}$ με $\overset{\triangle}{A\Gamma E}$ έχω:

1) $AB = A\Gamma$ από α)

2) ΑΕ κοινή πλευρά

3) $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ αφού ΑΔ διχοτόμος

αρα ισχυει Π-Γ-Π αρα $\overset{\triangle}{ABE} = \overset{\triangle}{A\Gamma E}$

αρα: $BE = \Gamma E$.

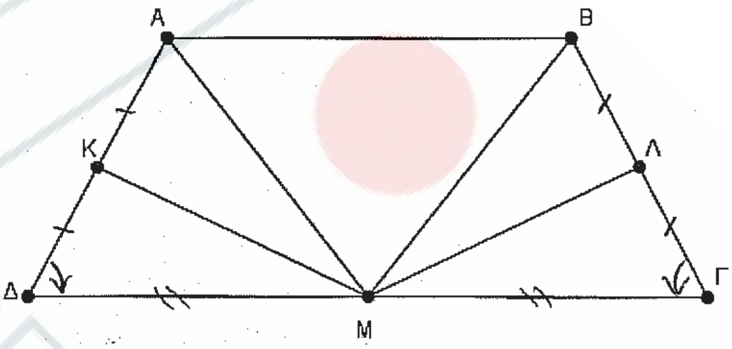
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ, το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΔΓ και τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα ΚΜ και ΛΜ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Τα τμήματα ΑΜ και ΒΜ είναι ίσα. (Μονάδες 13)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ΔΚΜ}$ με $\overset{\triangle}{ΜΛΓ}$ έχω:

1) ΔΜ = ΜΓ υπόθεση

2) ΔΚ = ΛΓ ως μισά ίσων πλευρών

3) $\hat{Δ} = \hat{Γ}$ αφού ΑΒΓΔ ισοσκ. τραπέζιο

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\overset{\triangle}{ΔΚΜ} = \overset{\triangle}{ΜΛΓ}$

άρα ΚΜ = ΛΜ.

β) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ΑΜΚ}$ με $\overset{\triangle}{ΜΒΛ}$ έχω:

1) ΚΑ = ΒΛ ως μισά ίσων πλευρών

2) ΚΜ = ΛΜ από α)

3) $Α\hat{Κ}Μ = Β\hat{Λ}Μ$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\overset{\triangle}{ΑΜΚ} = \overset{\triangle}{ΜΒΛ}$

άρα ΑΜ = ΒΜ.

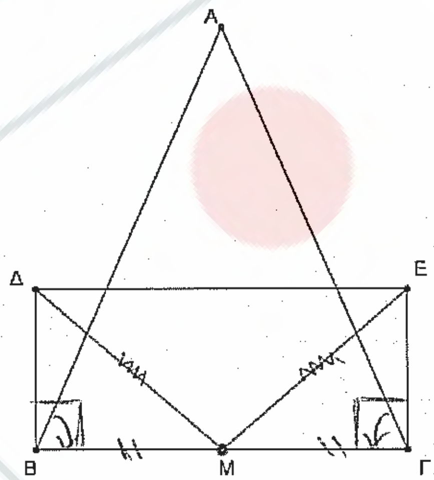
ΘΕΜΑ 2

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Στα σημεία Β και Γ φέρουμε κάθετες στη ΒΓ προς το ίδιο μέρος, και θεωρούμε σε αυτές σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, τέτοια ώστε $M\Delta = ME$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο ΒΔΕΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{B\Delta M}$ με $\overset{\triangle}{ME\Gamma}$ έχω:

1) ορθογώνια

2) ΒΜ = ΜΓ υπόθεση

3) ΜΔ = ΜΕ —//—

άρα ισχύει υποτ. + καθ. πλευρά

άρα $\overset{\triangle}{B\Delta M} = \overset{\triangle}{ME\Gamma}$ άρα: ΒΔ = ΓΕ.

β) ΒΔ // ΓΕ αφού είναι ⊥ στη ΒΓ, δηλ.

έχω ΒΔ =// ΓΕ άρα ΒΔΕΓ παραλληλόγραμμο με $\hat{B} = 90^\circ$

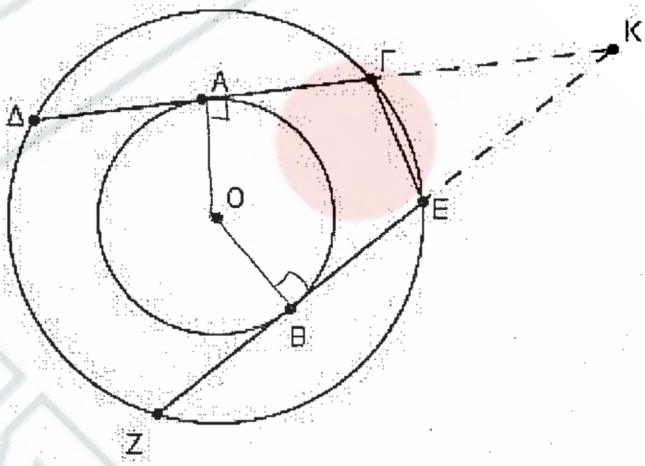
άρα ΒΔΕΓ ορθογώνιο.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο Ο και ακτίνες ρ και R (ρ<R). Οι χορδές ΔΓ και ΖΕ του κύκλου (Ο,R) εφάπτονται του κύκλου (Ο, ρ) στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι ΔΓ=ΖΕ. (12 Μονάδες)

β) Αν οι ΔΓ και ΖΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΕΓ είναι ισοσκελές. (13 Μονάδες)



α) ΟΑ = ΟΒ = ρ δηλ. τα αποστήματα των χορδών ΓΔ και ΖΕ είναι ίσα, άρα ΓΔ = ΖΕ.

β) ΑΓ = ΒΕ ως μισά ίσων τμημάτων, αφού τα αποστήματα διχοτομούν τις χορδές. Τότε: ΚΓ = ΚΕ ως διαφορά ίσων τμημάτων άρα $\overset{\triangle}{\text{ΚΓΕ}}$ ισοσκελές.

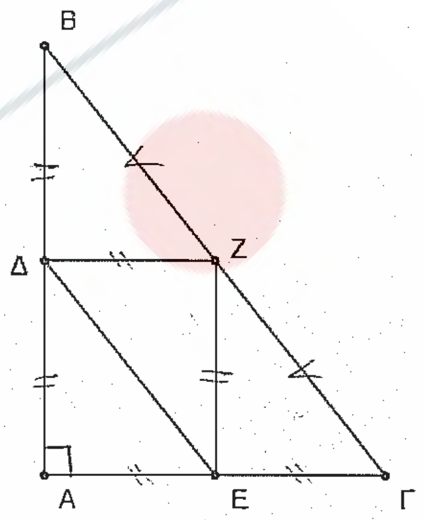
ΘΕΜΑ 2

Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) θεωρούμε τα μέσα Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο ΕΔΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 13)



α) $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: Δ μέσο ΑΒ, Ζ μέσο ΒΓ } άρα $\Delta Z \overset{\parallel}{=} \frac{A\Gamma}{2}$

άρα $\Delta Z \overset{\parallel}{=} AE$

άρα ΑΕΖΔ παραλληλόγραμμο με $\hat{A} = 90^\circ$

άρα ΑΕΖΔ ορθογώνιο.

β) $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: Δ μέσο ΑΒ, Ε μέσο ΑΓ } άρα $\Delta E \overset{\parallel}{=} \frac{B\Gamma}{2}$

άρα ΔΕΓΒ τραπέζιο

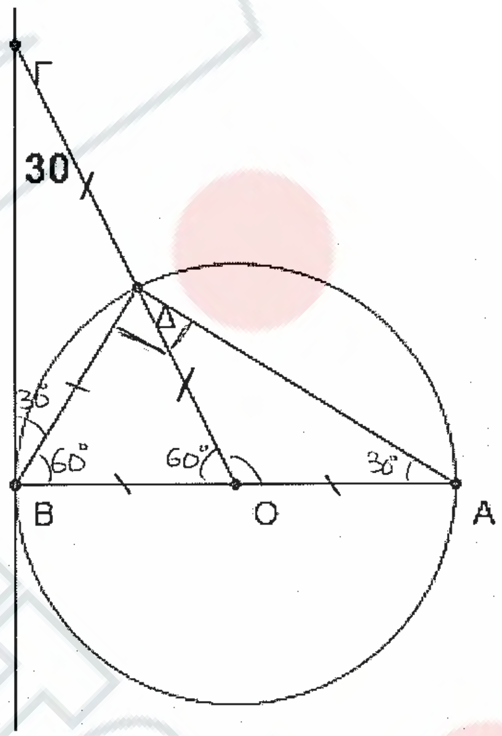
και ΔΒ=ΕΓ ως μισά ίσων πλευρών άρα ΔΕΓΒ ισοσκ. τραπέζιο.

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε κύκλο (Ο, ρ) και διάμετρό του ΑΒ. Στην εφαπτομένη του κύκλου στο Β θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο ώστε, η γωνία ΒΓΟ να είναι ίση με 30°. Αν η ΟΓ τέμνει τον κύκλο στο Δ να αποδείξετε ότι:

α) $ΟΓ = 2ΟΑ$. (Μονάδες 12)

β) $ΒΓ = ΑΔ$. (Μονάδες 13)



α) $ΓΒ \perp ΟΒ$ άρα $Ο\hat{Β}Γ$ ορθογώνιο με $\hat{Γ} = 30°$, άρα $ΟΒ = \frac{ΟΓ}{2} \Leftrightarrow ΟΓ = 2ΟΒ \Leftrightarrow ΟΓ = 2ΟΑ$.

β) Αφού $ΟΓ = 2ΟΑ$ θα έχω $ΟΓ = 2ΟΔ$, δηλ. Δ μέσο ΟΓ.

Αφού στο $Β\hat{Γ}Ο$ έχω $\hat{Γ} = 30°$, η $Δ\hat{Ο}Β = 60°$ άρα $Ο\hat{Δ}Β$ ισόπλευρο.

$Δ\hat{Ο}Α = 180° - 60° = 120°$

άρα: $Ο\hat{Δ}Α = \hat{Α} = \frac{180° - 120°}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$

Συγκρίνω $Ο\overset{\triangle}{Β}Γ$ με $Α\overset{\triangle}{Δ}Β$ έχω

1) ορθογώνια (αφού $Β\hat{Δ}Α = 90°$ ως εγγεγραμ. βαίνει σε ημικύκλιο)

2) $\hat{Γ} = \hat{Α} = 30°$

3) $ΟΒ = ΒΔ$

άρα $Ο\overset{\triangle}{Β}Γ = Α\overset{\triangle}{Δ}Β$ άρα: $ΒΓ = ΑΔ$.

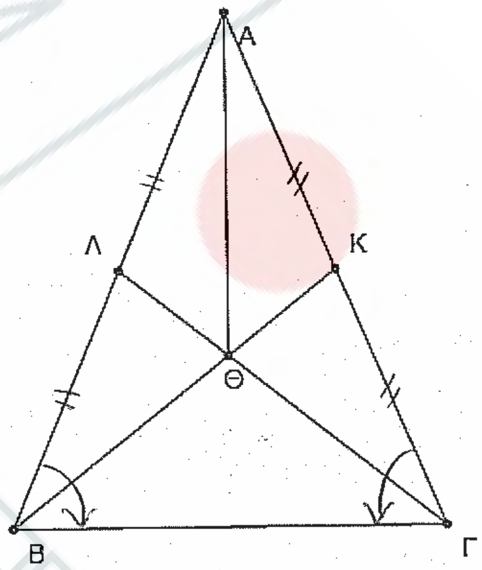
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και τις διαμέσους του ΒΚ και ΓΛ, οι οποίοι τέμνονται στο σημείο Θ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι διάμεσοι ΒΚ και ΓΛ είναι ίσες. (Μονάδες 12)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΘ και ΑΓΘ είναι ίσα (Μονάδες 13)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{BK\Gamma}$ με $\overset{\triangle}{B\Lambda\Gamma}$ εχω:

1) ΒΓ κοινή πλευρά

2) ΚΓ = ΒΛ ως μισά ισων πλευρών

3) $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ αφού $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισοσκελές

αρα ισχυει Π-Γ-Π αρα $\overset{\triangle}{BK\Gamma} = \overset{\triangle}{B\Lambda\Gamma}$

αρα: ΒΚ = ΓΛ.

β) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{AB\Theta}$ με $\overset{\triangle}{A\Theta\Gamma}$ εχω

1) ΑΘ κοινή πλευρά

2) ΑΒ = ΑΓ υπόθεση

3) ΒΘ = ΘΓ αφού $B\Theta = \frac{2}{3} BK$ και $\Theta\Gamma = \frac{2}{3}\Gamma\Lambda$

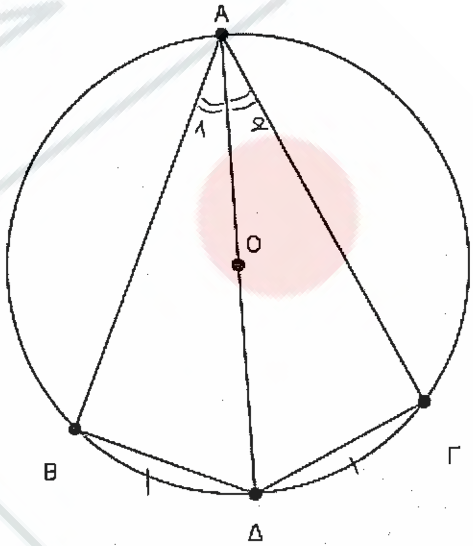
αρα ισχύει Π-Π-Π αρα $\overset{\triangle}{AB\Theta} = \overset{\triangle}{A\Theta\Gamma}$.

ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Αν η διάμετρος ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τόξα ΒΔ και ΔΓ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 15)



α) $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ειναι εγγεγραμμένες και βαίνουν στο $\overset{\frown}{ΒΔ}$ και $\overset{\frown}{ΔΓ}$ αντιστοιχα. Άρα: $\overset{\frown}{ΒΔ} = \overset{\frown}{ΔΓ}$.

β) Συγκρίνω $Α\hat{Β}Δ$ με $Α\hat{Γ}Δ$ εχω:

1) ΑΔ κοινή πλευρά

2) $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ αφού ΑΔ διχοτόμος

3) $Α\hat{Β}Δ = Α\hat{Γ}Δ = 90°$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν σε ημικύκλιο

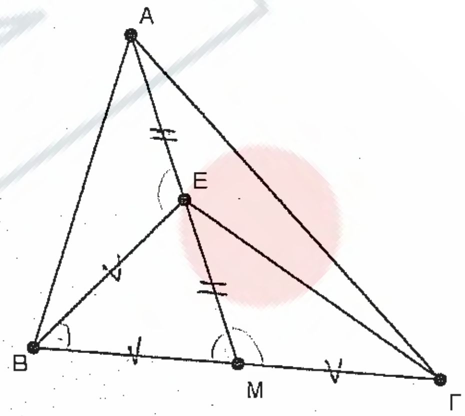
αρα ισχυει Υποτ+οξ. γωνία άρα $Α\hat{Β}Δ = Α\hat{Γ}Δ$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της διαμέσου του ΑΜ. Αν ΒΓ = 2 ΒΕ να αποδείξετε ότι:

α) $A\hat{E}B = E\hat{M}\Gamma$ (Μονάδες 12)

β) ΑΒ = ΕΓ . (Μονάδες 13)



α) Αφού $B\Gamma = 2BE$ τότε $BM = M\Gamma = BE$.

$A\hat{E}B$ εξωτερική του $B\overset{\triangle}{E}M$ άρα: $A\hat{E}B = E\hat{B}M + E\hat{M}B$

$E\hat{M}\Gamma$ —״— του $B\overset{\triangle}{E}M$ άρα: $E\hat{M}\Gamma = E\hat{B}M + B\hat{E}M$

όμως $E\hat{M}B = B\hat{E}M$ αφού $E\overset{\triangle}{B}M$ ισοσκελές

άρα: $A\hat{E}B = E\hat{M}\Gamma$

β) Συγκρίνω $A\overset{\triangle}{B}E$ με $M\overset{\triangle}{E}\Gamma$ έχω:

1) $AE = EM$ αφού Ε μέσο ΑΜ

2) $BE = M\Gamma$ υπόθεση

3) $A\hat{E}B = E\hat{M}\Gamma$ από α)

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $A\overset{\triangle}{B}E = M\overset{\triangle}{E}\Gamma$

άρα: $AB = E\Gamma$.

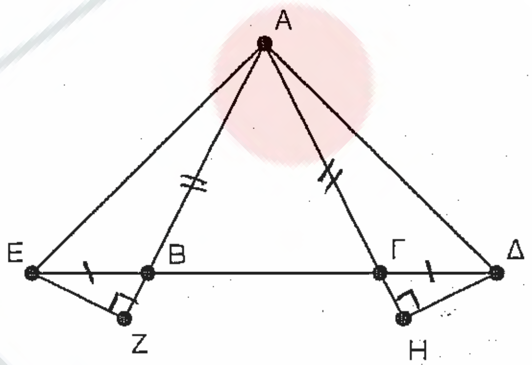
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε ΓΔ = ΒΕ. Από το Δ φέρουμε ΔΗ κάθετη στην ευθεία ΑΓ και από το Ε φέρουμε ΕΖ κάθετη στην ευθεία ΑΒ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ = ΑΕ (Μονάδες 12)

β) ΕΖ = ΔΗ (Μονάδες 13)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{AEB}$ με $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$ έχω:

1) ΑΒ = ΑΓ υπόθεση

2) ΒΕ = ΓΔ —\\—

3) $A\hat{B}E = A\hat{\Gamma}\Delta$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών

άρα ισχυει Π-Γ-Π άρα $\overset{\triangle}{AEB} = \overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$

άρα ΑΔ = ΑΕ.

β) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{EZB}$ με $\overset{\triangle}{\Gamma H\Delta}$ έχω:

1) ΕΒ = ΓΔ υπόθεση

2) ορθογώνια

3) $E\hat{B}Z = \Delta\hat{\Gamma}H$ ως κατακορυφιν ισων γωνιών

άρα ισχυει Υποτ.+οξ. γωνία άρα $\overset{\triangle}{EZB} = \overset{\triangle}{\Gamma H\Delta}$

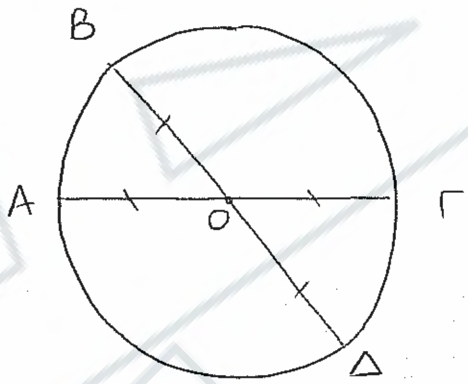
άρα ΕΖ = ΔΗ.

ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε τις διαμέτρους του ΑΓ και ΒΔ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)

β) Ποια σχέση πρέπει να έχουν οι διάμετροι ΑΓ και ΒΔ ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)



α) ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ = ακτίνες
δηλ. οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ διχοτομούνται
και είναι ίσες, άρα ΑΒΓΔ ορθογώνιο.

β) Θα πρέπει ΑΓ ⊥ ΒΔ για να είναι τετράγωνο.

ΘΕΜΑ 2

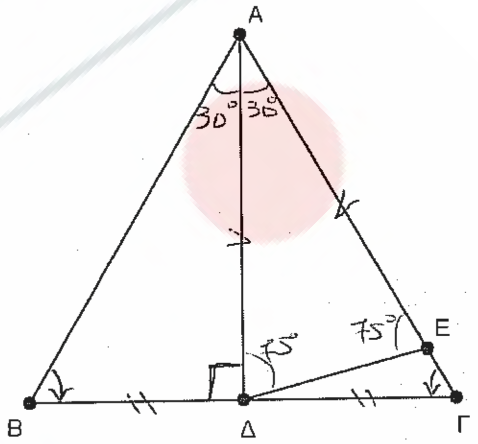
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και η διάμεσός του ΑΔ τέτοια ώστε $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = 30^o$.

Θεωρούμε σημείο Ε στην ΑΓ τέτοιο ώστε ΑΔ = ΑΕ.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία ΕΔΓ. (Μονάδες 8)



α) Στο ισοσκελές $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ έχω ΑΔ διάμεσο,
άρα ΑΔ ύψος και διχοτόμος,
δηλ. $\Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}B = 30°$. Δηλ. $\hat{A} = 60°$, άρα
$\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ ισόπλευρο.

β) ΑΔ = ΑΕ δηλ. $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta E}}$ ισοσκελές με
$A\hat{\Delta}E = A\hat{E}\Delta = \frac{180°-30°}{2} = \frac{150°}{2} = 75°$

γ) $E\hat{\Delta}\Gamma = 90° - 75° = 15°$

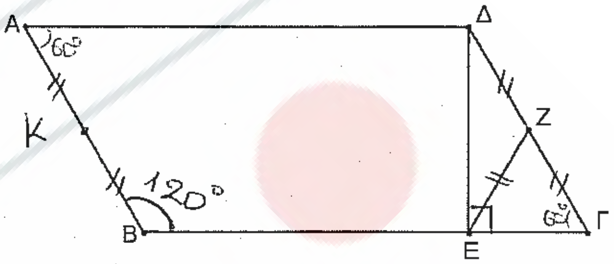
ΘΕΜΑ 2

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\hat{B} = 120^0$ και $\Delta E \perp B\Gamma$. Έστω ΕΖ η διάμεσος του τριγώνου ΔΕΓ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Α και Γ του παραλληλογράμμου. (Μονάδες 8)

β) Αν Κ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ, να αποδείξετε ότι ΕΖ=ΑΚ. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία ΕΖΓ. (Μονάδες 8)



α) $\hat{A} + \hat{B} = 180°$ ως εντός και επί τ' αυτά

$\hat{A} + 120° = 180°$

$\hat{A} = 60°$

Τότε και $\hat{\Gamma} = \hat{A} = 60°$

β) $\overset{\triangle}{\Delta E \Gamma}$: έχω ΕΖ διάμεσο, άρα $EZ = \frac{\Delta\Gamma}{2} = \Delta Z = AK$

ως μισά ίσων πλευρών

γ) ΕΖ = ΖΓ άρα $\overset{\triangle}{EZ\Gamma}$ ισοσκελές με $\hat{\Gamma} = 60°$,

άρα $\overset{\triangle}{EZ\Gamma}$ ισόπλευρο.

ΘΕΜΑ 2

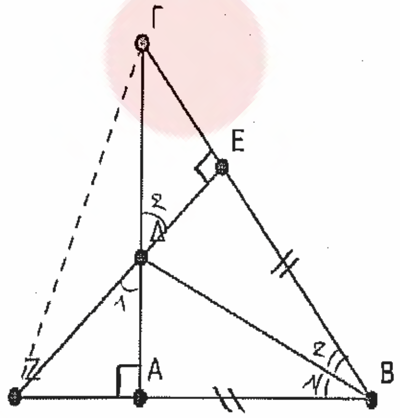
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A=90^0$) και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε

$\Delta E \perp B\Gamma$ που τέμνει την προέκταση της ΑΒ (προς το Α) στο Ζ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΕ=ΑΒ, (Μονάδες 12)

β) το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)



α) Συγκρίνω $A\hat{\Delta}B$ με $\Delta\hat{E}B$ έχω:
1) ορθογώνια
2) ΔΒ κοινή πλευρά
3) $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ αφού ΔΒ διχοτόμος
άρα ισχύει Υποτ. + οξ. γωνία άρα $A\hat{\Delta}B = \Delta\hat{E}B$
άρα $\boxed{BE = AB}$.

β) Συγκρίνω $Z\hat{A}\Delta$ με $\Gamma\hat{\Delta}E$ έχω:
1) ορθογώνια
2) $\Delta A = \Delta E$ αφού Δ σημείο της διχοτόμου
3) $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ ως κατακορυφήν
άρα ισχύει Γ-Π-Γ άρα $Z\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}E$
άρα $\boxed{ZA = \Gamma E}$.
Τότε: $ZB = \Gamma B$ ως άθροισμα ίσων τμημάτων, άρα $B\hat{\Gamma}Z$ ισοσκελές.

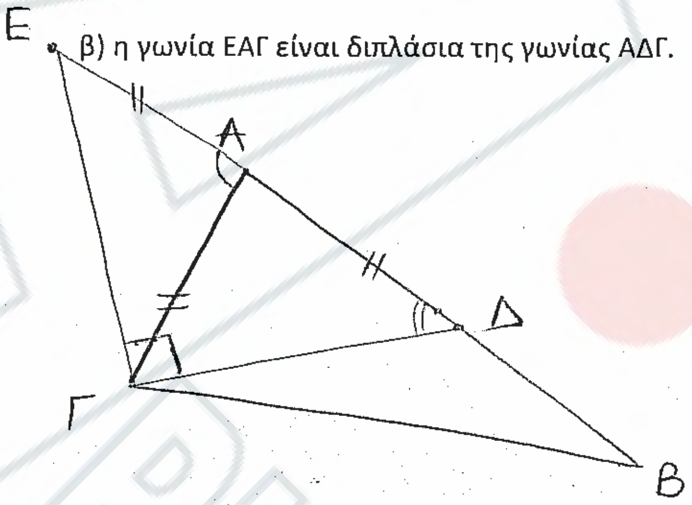
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε $ΑΓ < ΑΒ$. Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $ΑΔ = ΑΓ$ και στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $ΑΕ = ΑΓ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $ΔΓ \perp ΕΓ$, (Μονάδες 12)

β) η γωνία ΕΑΓ είναι διπλάσια της γωνίας ΑΔΓ. (Μονάδες 13)



α) $\underline{\overset{\triangle}{ΕΓΔ}}$: έχω $ΓΑ = \frac{ΕΔ}{2}$, άρα $\overset{\triangle}{ΕΓΔ}$ ορθογώνιο με ΕΔ υποτείνουσα, δηλ. $Ε\hat{Γ}Δ = 90°$, δηλ. $ΕΓ \perp ΓΔ$.

β) $\overset{\triangle}{ΑΓΔ}$ ισοσκελές με $Α\hat{Γ}Δ = Α\hat{Δ}Γ$

$Ε\hat{Α}Γ$ εξωτερική του $\overset{\triangle}{ΑΔΓ}$, άρα: $Ε\hat{Α}Γ = Α\hat{Γ}Δ + Α\hat{Δ}Γ = 2\,Α\hat{Δ}Γ$.

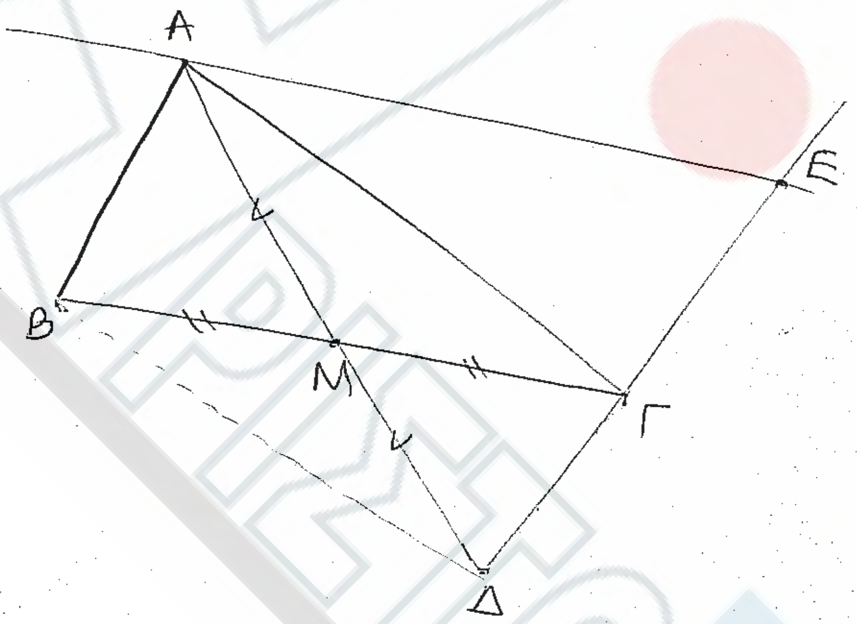
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και Μ το μέσο της ΒΓ. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα ΜΔ=ΜΑ. Από το Α φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 12)

β) $\mathrm{BM} = \frac{\mathrm{AE}}{2}$ (Μονάδες 13)



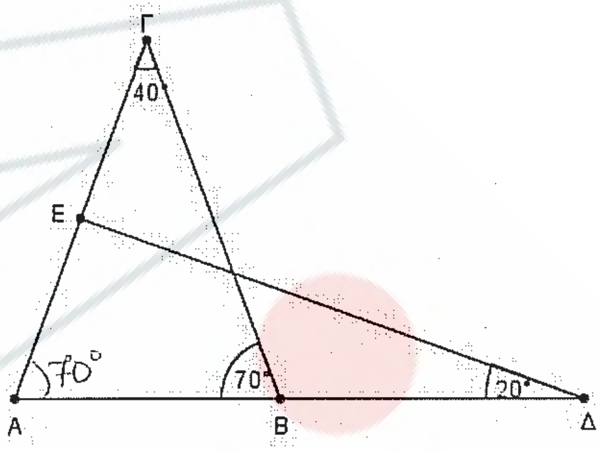
ΑΒΔΓ είναι ▱ αφού οι διαγώνιοι του διχοτομούνται στο Μ.
ΑΒ // ΔΓ άρα και ΑΒ // ΓΕ και ΑΕ // ΒΓ
άρα ΑΒΓΕ ▱ με ΒΓ = ΑΕ
δηλ. $2\mathrm{BM} = \mathrm{AE}$
$\mathrm{BM} = \frac{\mathrm{AE}}{2}$

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, (Μονάδες 12)

β) η γωνία ΑΕΔ είναι ορθή. (Μονάδες 13)



α) $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$: $\hat{Α} = 180° - 70° - 40° = 70° = \hat{Β}$

άρα $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ ισοσκελές

β) $\overset{\triangle}{ΑΕΔ}$: $Α\hat{Ε}Δ = 180° - 70° - 20° = 90°$

ΘΕΜΑ 2

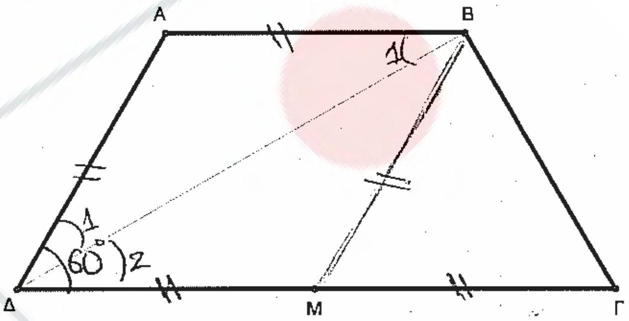
Στο τραπέζιο του παρακάτω σχήματος έχουμε ΑΒ=ΑΔ=$\frac{ΓΔ}{2}$, $\hat{Δ}=60°$ και Μ το μέσο της πλευράς ΓΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) η ΔΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Δ}$, (Μονάδες 9)

β) η ΒΜ χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

(Μονάδες 16)



α) ΑΔ = ΑΒ άρα $A\hat{Δ}B$ ισοσκελές με $\hat{B}_1 = \hat{Δ}_1$
και $\hat{B}_1 = \hat{Δ}_2$ ως εντός εναλλάξ
άρα: $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2$ δηλ. ΔΒ διχοτόμος της $\hat{Δ}$

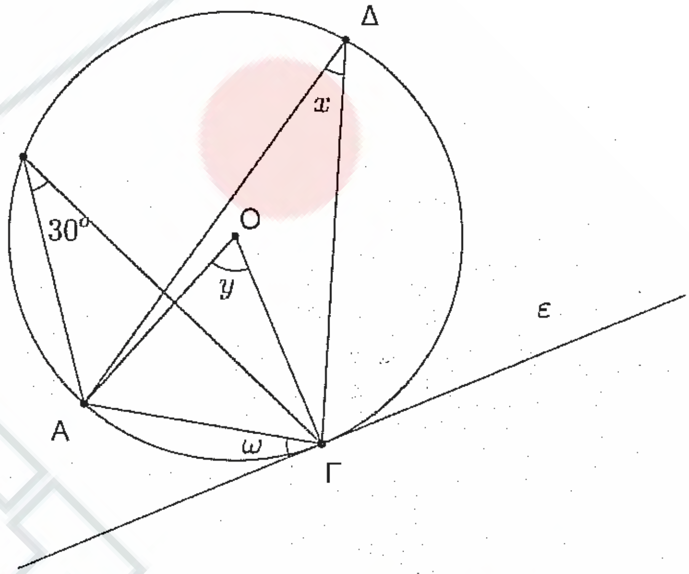
β) $AB = \frac{ΓΔ}{2} = ΔM = MΓ$, δηλ. ΑΒ=∥ΔΜ άρα ΑΒΜΔ ∥ και έχω ΑΒ = ΑΔ άρα είναι ρόμβος.
ΒΜ = ΜΓ = ΑΔ και $B\hat{M}Γ = \hat{Δ} = 60°$ ως εντός εκτός και επί τ' αυτά άρα $B\hat{M}Γ$ ισόπλευρο.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου (Ο,ρ) στο σημείο Γ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες x,y και ω δικαιολογώντας σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΟΑΓ ως προς τις πλευρές. (Μονάδες 10)



α) $\hat{x} = A\hat{B}\Gamma = 30°$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο $\overset{\frown}{A\Gamma}$.

$\hat{y} = 60°$ αφού είναι επίκεντρη και βαίνει στο $\overset{\frown}{A\Gamma}$.

$\hat{\omega} = A\hat{B}\Gamma = 30°$ ως γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης

β) $OA = O\Gamma = \rho$ και $A\hat{O}\Gamma = y = 60°$ άρα $O\overset{\triangle}{A}\Gamma$ ισόπλευρο

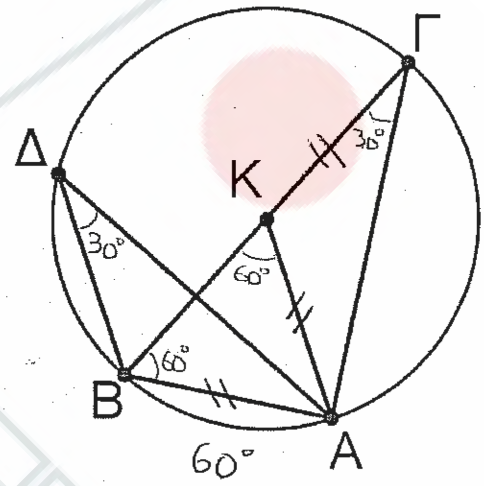
ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος κέντρου Κ, μια διάμετρός του ΒΓ και σημείο Α του κύκλου τέτοιο ώστε ΒΑ=ΚΓ. Αν Δ τυχαίο σημείο του κύκλου διαφορετικό των Β και Γ,

α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΚΑ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 7)

β) να υπολογίσετε την γωνία $B\hat{\Delta}A$. (Μονάδες 9)

γ) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ . (Μονάδες 9)



α) $BA = K\Gamma = BK = KA = \rho$ αρα $B\hat{K}A$ ισόπλευρο.

β) $B\hat{K}A = 60°$ ειναι επίκεντρη και βαίνει στο $\overset{\frown}{BA}$,
αρα $\overset{\frown}{BA} = 60°$
$B\hat{\Delta}A = 30°$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει στο $\overset{\frown}{BA} = 60°$

γ) $K\hat{B}A = 60°$ αφού $B\hat{K}A$ ισόπλευρο
$B\hat{\Gamma}A = 30°$ ως εγγεγραμμενη που βαίνει στο $\overset{\frown}{BA} = 60°$
$B\hat{A}\Gamma = 90°$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.

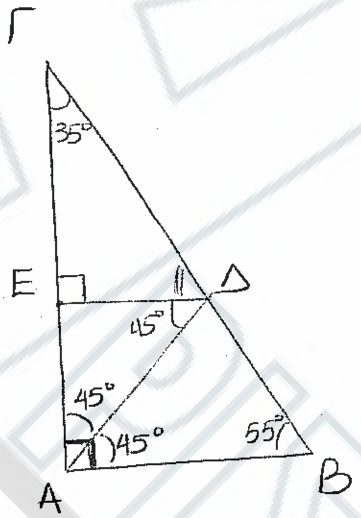
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α. Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΑΔΕ. (Μονάδες 9)

γ) Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι 20 μοίρες μεγαλύτερη της γωνίας $\hat{\Gamma}$, να υπολογίσετε τη γωνία $E\hat{\Delta}\Gamma$. (Μονάδες 7)



α) ΕΔ // ΑΒ και ΑΒ ⊥ ΑΓ άρα: ΕΔ ⊥ ΑΓ, άρα $E\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$ ορθογώνιο.

β) $\underline{A\overset{\triangle}{E}\Delta}$: $A\hat{\Delta}E = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

γ) $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$

$20^\circ + \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$

$2\hat{\Gamma} = 70^\circ$

$\hat{\Gamma} = 35^\circ$ άρα $\hat{B} = 20^\circ + 35^\circ = 55^\circ$

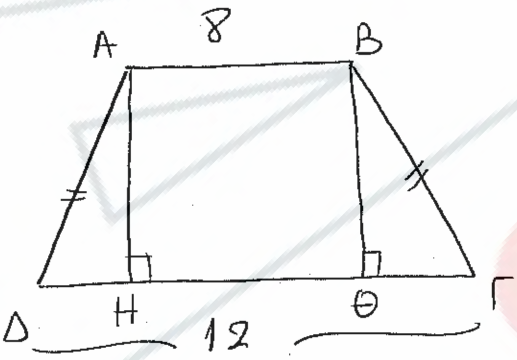
$\underline{E\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma}$: $E\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ=8 και ΔΓ=12. Αν ΑΗ και ΒΘ τα ύψη του τραπεζίου,

α) να αποδείξετε ότι ΔΗ = ΘΓ. (Μονάδες 12)

β) να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραπεζίου. (Μονάδες 13)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{A\Delta H}$ με $\overset{\triangle}{B\Theta\Gamma}$ εχω:

1) ορθογώνια

2) ΑΔ = ΒΓ υπόθεση

3) $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ -//-

αρα ισχυα υποτ.+οξ. γωνια αρα $\overset{\triangle}{A\Delta H} = \overset{\triangle}{B\Theta\Gamma}$

αρα: ΔΗ = ΘΓ.

β) ΕΖ διάμεσος, αρα $EZ = \frac{AB+\Gamma\Delta}{2} = \frac{8+12}{2} = \frac{20}{2} = 10.$

ΘΕΜΑ 2

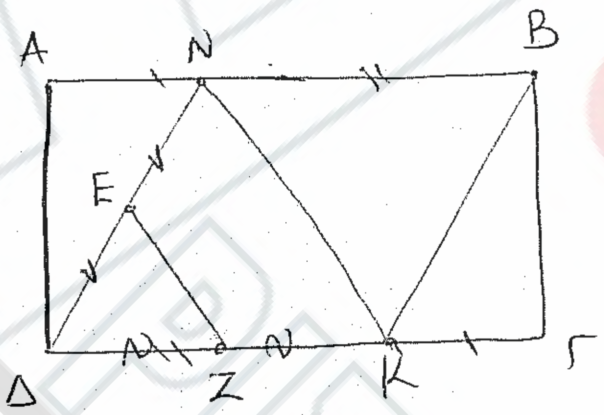
Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ν και Κ των ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΑΝ = ΚΓ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ είναι ίσα , (Μονάδες 8)

ii. το τετράπλευρο ΝΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Αν Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΝΔ και ΔΚ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΝΚΖΕ είναι τραπέζιο . (Μονάδες 9)



α) i) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ΑΝΔ}$ με $\overset{\triangle}{ΒΓΚ}$ έχω:

1) ορθογώνια

2) ΑΔ = ΒΓ αφού ΑΒΓΔ ορθογώνιο

3) ΑΝ = ΚΓ υπόθεση

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\overset{\triangle}{ΑΝΔ} = \overset{\triangle}{ΒΓΚ}$

ii) ΝΒ =// ΔΚ ως διαφορά ίσων τμημάτων

άρα ΝΒΚΔ #.

β) $\overset{\triangle}{ΔΝΚ}$: Ε μέσο ΔΝ, Ζ μέσο ΔΚ $\Big\}$ άρα $ΕΖ =\parallel \frac{NK}{2}$

άρα ΝΚΖΕ τραπέζιο.

ΘΕΜΑ 2

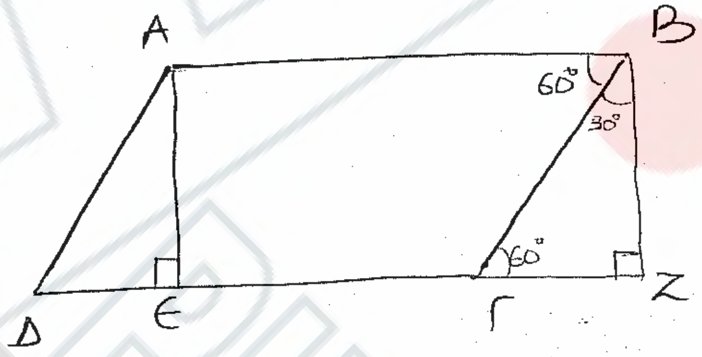
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{B} = 60^{o}$. Φέρουμε τα ύψη ΑΕ και ΒΖ του παραλληλογράμμου που αντιστοιχούν στην ευθεία ΔΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $ΓΖ = \frac{ΑΔ}{2}$, (Μονάδες 8)

β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ίσο με το τρίγωνο ΒΓΖ, (Μονάδες 9)

γ) το τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)



α) $B\hat{Γ}Z = \hat{B} = 60°$ ως εντός εναλλάξ
$Γ\hat{B}Z = 90° - 60° = 30°$
$B\overset{\triangle}{Γ}Z$: $Γ\hat{B}Z = 30°$, άρα $ΓZ = \frac{ΓB}{2} = \frac{AΔ}{2}$.

β) Συγκρίνω $A\overset{\triangle}{Δ}E$ με $B\overset{\triangle}{Γ}Z$ έχω
1) ορθογώνια
2) ΑΔ = ΒΓ αφού ΑΒΓΔ #
3) $\hat{Δ} = \hat{B} = 60°$ —//—
άρα ισχύει Υποτ. + οξ. γωνία άρα $A\overset{\triangle}{Δ}E = B\overset{\triangle}{Γ}Z$

γ) Αφού $A\overset{\triangle}{Δ}E = B\overset{\triangle}{Γ}Z$ έχω ΑΕ = ΒΖ και ΑΕ // ΒΖ (αφού είναι ⊥ στη ΔΓ) άρα ΑΒΖΕ # και έχει $\hat{E} = 90°$ άρα είναι ορθογώνιο.

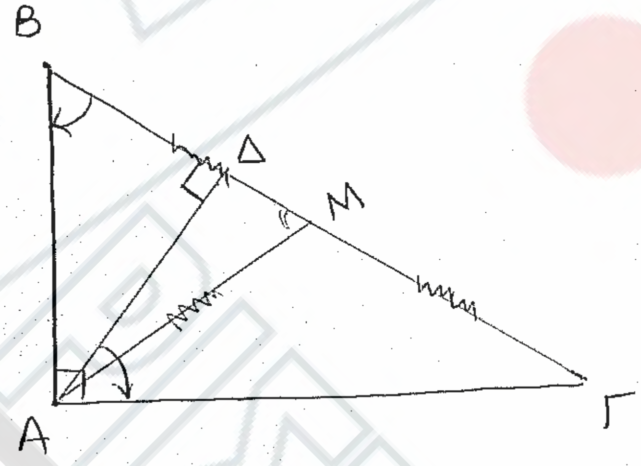
ΘΕΜΑ 2

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$ και $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος του ΑΔ και την διάμεσο ΑΜ στην πλευρά ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) οι γωνίες $\hat{B}$ και $\Gamma\hat{A}\Delta$ είναι ίσες, (Μονάδες 12)

β) $A\hat{M}\Delta = 2 \cdot \hat{\Gamma}$. (Μονάδες 13)



α) $\hat{B} = \Gamma\hat{A}\Delta$ ως συμπληρωματικές της $\hat{\Gamma}$

β) $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: ΑΜ διάμεσος, άρα $AM = \frac{B\Gamma}{2} = BM = M\Gamma$

άρα $\overset{\triangle}{AM\Gamma}$ ισοσκελές με $M\hat{A}\Gamma = \hat{\Gamma}$.

$A\hat{M}\Delta$ είναι εξωτερική του $\overset{\triangle}{AM\Gamma}$, άρα

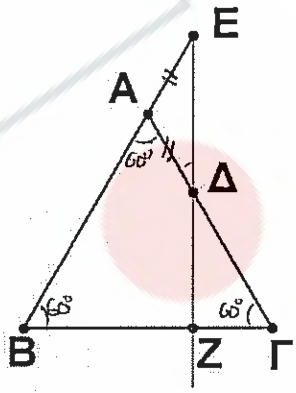
$A\hat{M}\Delta = M\hat{A}\Gamma + \hat{\Gamma} = 2\hat{\Gamma}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε σημείο Ε στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς ΑΓ, ώστε ΑΕ=ΑΔ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 10)

β) Αν Ζ είναι το σημείο τομής της προέκτασης της ΕΔ (προς το Δ) με την ΒΓ, να αποδείξετε ότι η ΕΖ είναι κάθετη στην ΒΓ. (Μονάδες 15)



α) $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ ισόπλευρο, άρα έχει όλες τις γωνίες 60°.

$Ε\hat{Α}Δ = 180° - 60° = 120°$

ΑΕ = ΑΔ άρα $\overset{\triangle}{ΑΔΕ}$ ισοσκελές με

$Α\hat{Ε}Δ = Α\hat{Δ}Ε = \frac{180° - 120°}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$

β) $Ζ\hat{Δ}Γ = Α\hat{Δ}Ε = 30°$ ως κατακορυφήν

$\underline{\overset{\triangle}{ΖΔΓ}}$: $Δ\hat{Ζ}Γ = 180° - 30° - 60° = 90°$

άρα: ΕΖ ⊥ ΒΓ.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το χάρτη μίας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Αx και Αy παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία Β και Γ βρίσκονται δύο πλατάνια.

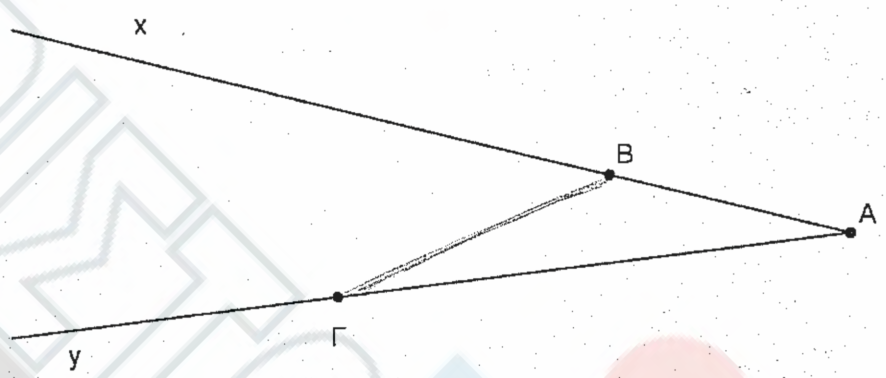
Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:

α) ισαπέχει από τα δύο πλατάνια. (Μονάδες 9)

β) ισαπέχει από τα δύο ποτάμια. (Μονάδες 9)

γ) ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια. (Μονάδες 7)

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.



α) Στη μεσοκάθετο του ΒΓ.
β) Στη διχοτόμο της $x\hat{A}y$.
γ) Στο σημείο τομής της μεσοκαθέτου του ΒΓ και της διχοτόμου της $x\hat{A}y$.

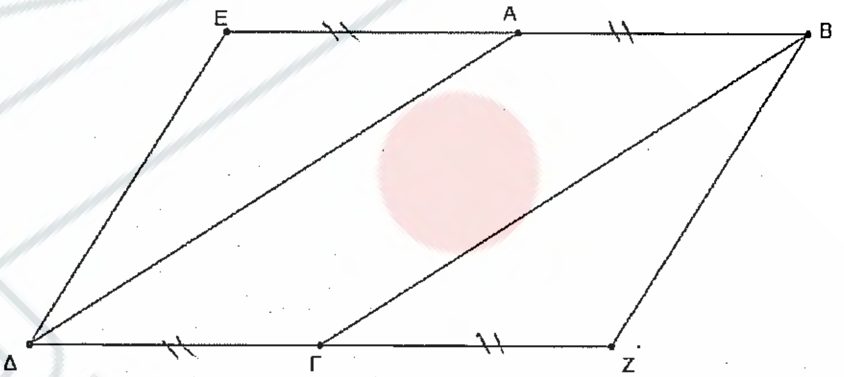
ΘΕΜΑ 2

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ (προς το Α) και την πλευρά ΔΓ (προς το Γ) κατά τμήματα $\mathrm{AE}=\mathrm{AB}$ και $\Gamma\mathrm{Z}=\Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{BZ}=\mathrm{E}\Delta$ (Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)



α) ΕΒ =// ΔΖ ως άθροισμα ίσων τμημάτων
άρα ΔΕΒΖ #, άρα ΒΖ = ΕΔ.

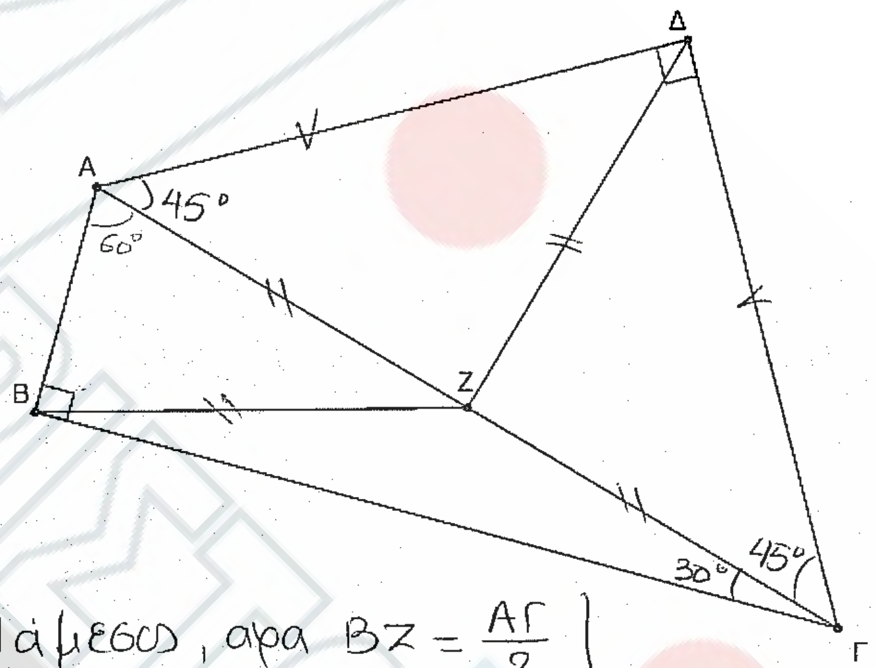
β) από α).

ΘΕΜΑ 2

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ με $\hat{\mathrm{B}} = 90^o$ και Ζ το μέσο του ΑΓ. Με υποτείνουσα το ΑΓ κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta\Gamma}}$ με $\hat{\Delta} = 90^o$.

α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{BZ} = \Delta\mathrm{Z}$. (Μονάδες 13)

β) Αν $\mathrm{A\hat{\Gamma}B} = 30^o$, να υπολογίσετε τις γωνίες ΒΑΔ και ΒΓΔ. (Μονάδες 12)



α) $\underline{\overset{\Delta}{AB\Gamma}}$: BZ διάμεσος, άρα $BZ = \frac{A\Gamma}{2}$

$\underline{\overset{\Delta}{A\Delta\Gamma}}$: ΔΖ διάμεσος, άρα $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$

άρα: $BZ = \Delta Z$

β) $\overset{\Delta}{A\Delta\Gamma}$ ορθογώνιο ισοσκελές, άρα $\Delta\hat{A}Z = \Delta\hat{\Gamma}Z = 45^o$

άρα: $B\hat{\Gamma}\Delta = 30^o + 45^o = 75^o$.

$\underline{\overset{\Delta}{AB\Gamma}}$: $B\hat{A}Z = 90^o - 30^o = 60^o$

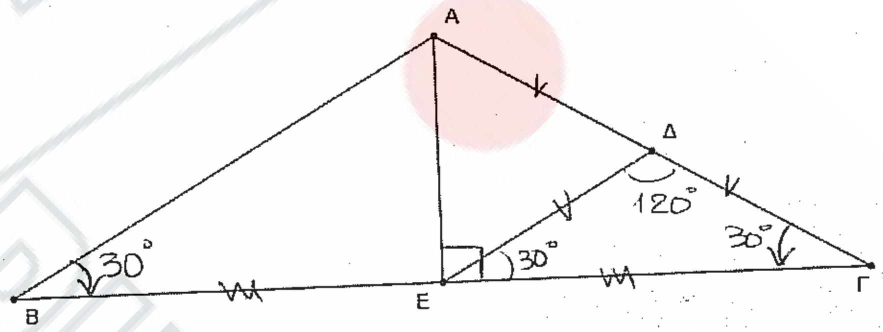
$B\hat{A}\Delta = 60^o + 45^o = 105^o$.

ΘΕΜΑ 2

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$, και γωνία $\hat{Β}$ ίση με 30^{o}. Θεωρούμε Δ και Ε τα μέσα των ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΕΔΓ}$ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του. (Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΔΕ}$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 9)



α) ΑΕ διάμεσος στο ισοσκελές $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$, άρα ΑΕ ύψος και διχοτόμος

$\overset{\triangle}{ΑΕΓ}$: ΕΔ διάμεσος, άρα $ΕΔ = \frac{ΑΓ}{2} = ΔΓ$ άρα

$\overset{\triangle}{ΕΔΓ}$ ισοσκελές

$\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$: $\hat{Γ} = \hat{Β} = 30°$ και $Δ\hat{Ε}Γ = \hat{Γ} = 30°$

άρα στο $\overset{\triangle}{ΕΔΓ}$: $Ε\hat{Δ}Γ = 180° - 30° - 30° = 120°$

β) $Α\hat{Δ}Ε = 180° - 120° = 60°$

δηλ. στο ισοσκελές $\overset{\triangle}{ΑΕΔ}$ έχω $Α\hat{Δ}Ε = 60°$

άρα $\overset{\triangle}{ΑΕΔ}$ ισόπλευρο.

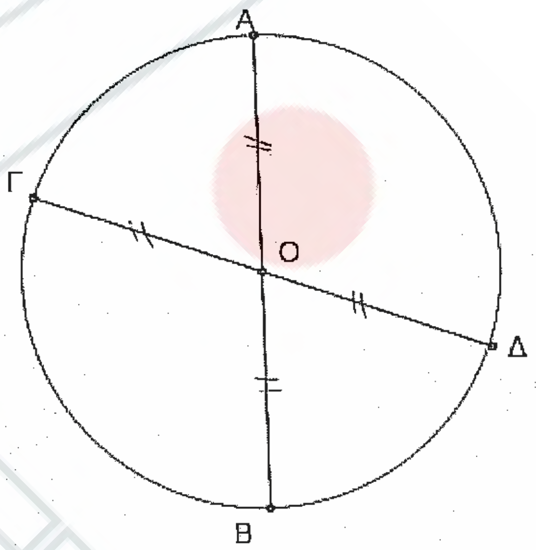
ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε δυο διαμέτρους του ΑΒ και ΓΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι χορδές ΑΓ και ΒΔ του κύκλου είναι ίσες. (Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο ΑΓΒΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 12)



α) $\Gamma\hat{O}A = B\hat{O}\Delta$ ως κατακορυφήν, αρα $\overset{\frown}{\Gamma A} = \overset{\frown}{B\Delta}$,

αρα $\boxed{\Gamma A = B\Delta}$

β) $\Gamma\hat{O}B = A\hat{O}\Delta$ ως κατακορυφήν, αρα $\overset{\frown}{\Gamma B} = \overset{\frown}{A\Delta}$,

αρα $\boxed{\Gamma B = A\Delta}$

Αρα: ΑΓΒΔ # και εχει ισες διαγωνιους

αρα ειναι ορθογώνιο.

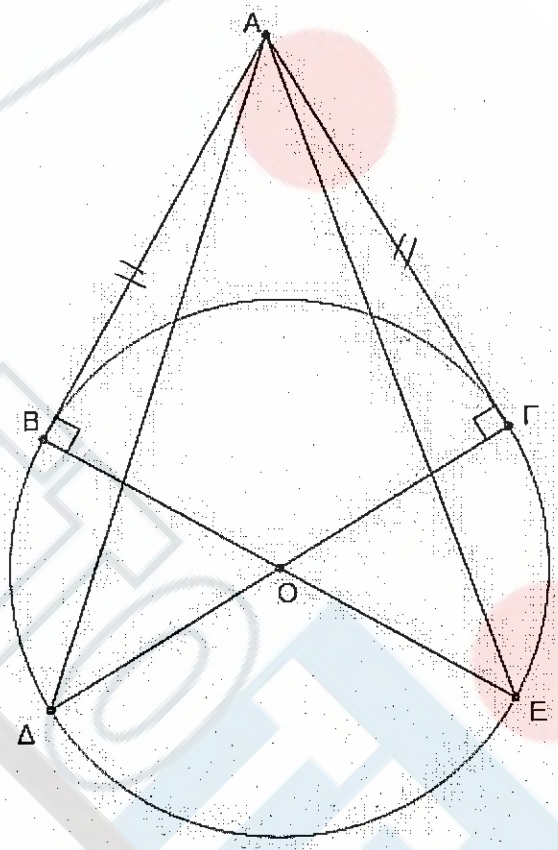
ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Από σημείο Α εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ. Τα σημεία Ε και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των Β και Γ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 12)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ABE}$ με $\overset{\triangle}{A\Gamma\Delta}$ έχω:

1) ορθογώνια

2) $AB = A\Gamma$ ως εφαπτόμενες από το A

3) $BE = \Gamma\Delta = 2\rho$

άρα ισχύει Π–Γ–Π άρα $\overset{\triangle}{ABE} = \overset{\triangle}{A\Gamma\Delta}$.

β) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ με $\overset{\triangle}{A\Gamma E}$ έχω:

1) $A\Delta = AE$ από α)

2) $AB = A\Gamma$ ως εφαπτόμενες από το A

3) $B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}E$ ως διαφορά ίσων γωνιών

άρα ισχύει Π–Γ–Π άρα $\overset{\triangle}{AB\Delta} = \overset{\triangle}{A\Gamma E}$.

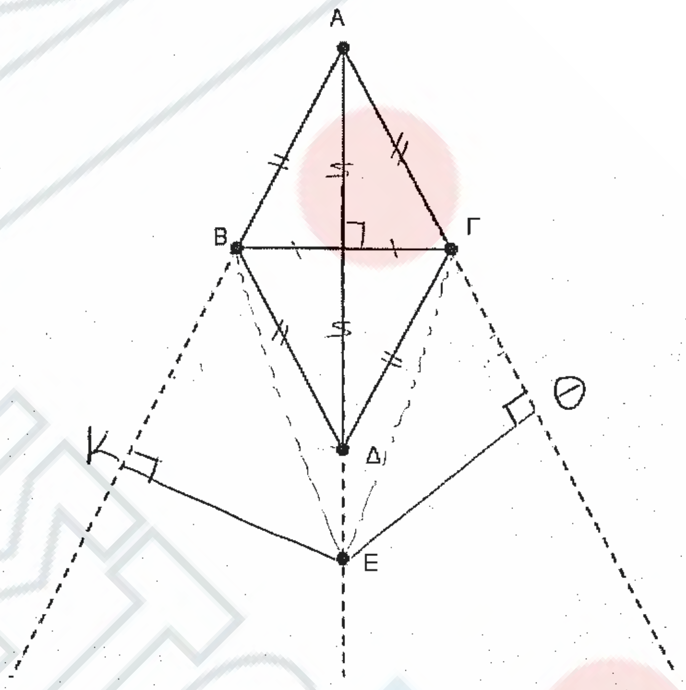
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ρόμβος ΑΒΔΓ. Στην προέκταση της διαγωνίου ΑΔ (προς το Δ) παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο Ε ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ (προς το μέρος των Β και Γ αντίστοιχα). (Μονάδες 10)

β) Το σημείο Ε ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ. (Μονάδες 15)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{AEK}$ με $\overset{\triangle}{AE\Theta}$ έχω:

1) ορθογώνια

2) $K\hat{A}E = E\hat{A}\Theta$ αφού ΑΒΓΔ ρόμβος και ΑΔ διαγώνιος

3) ΑΕ κοινή πλευρά

άρα ισχύει υποτ. + οξ. γωνία άρα $\overset{\triangle}{AEK} = \overset{\triangle}{AE\Theta}$

άρα ΚΕ = ΘΕ.

β) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{KBE}$ με $\overset{\triangle}{E\Theta\Gamma}$ έχω:

1) ορθογώνια

2) ΚΕ = ΘΕ από α)

3) ΚΒ = ΓΘ ως διαφορά ίσων πλευρών

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\overset{\triangle}{KBE} = \overset{\triangle}{E\Theta\Gamma}$

άρα ΒΕ = ΓΕ.

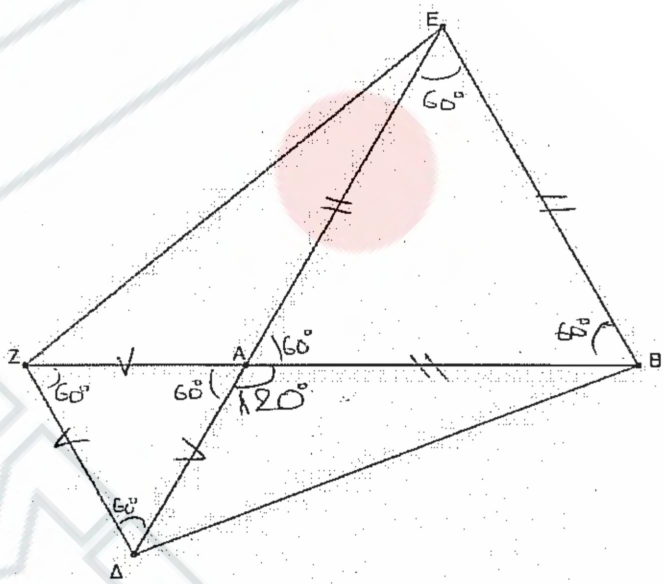
ΘΕΜΑ 2

Έστω τρίγωνο ΑΒΔ με $\hat{A} = 120^o$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AEB}$ και $\overset{\triangle}{AZ\Delta}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΔ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο ΒΔΖΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 13)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{AEZ}$ με $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ έχω:

1) $A\Delta = AZ$ αφού $\overset{\triangle}{A\Delta Z}$ ισόπλευρο

2) $AE = AB$ αφού $\overset{\triangle}{AEB}$ —||—

3) $\Delta\hat{A}B = Z\hat{A}E$ ως κατακορυφήν

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\overset{\triangle}{AEZ} = \overset{\triangle}{AB\Delta}$.

β) $\Delta\hat{Z}A = Z\hat{B}E = 60^\circ$ δηλ. έχω εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, άρα $Z\Delta \parallel EB$ και $ZB = \Delta E$ ως άθροισμα ίσων τμημάτων, άρα ΖΔΒΕ ισοσκ. τραπέζιο.

ΘΕΜΑ 2

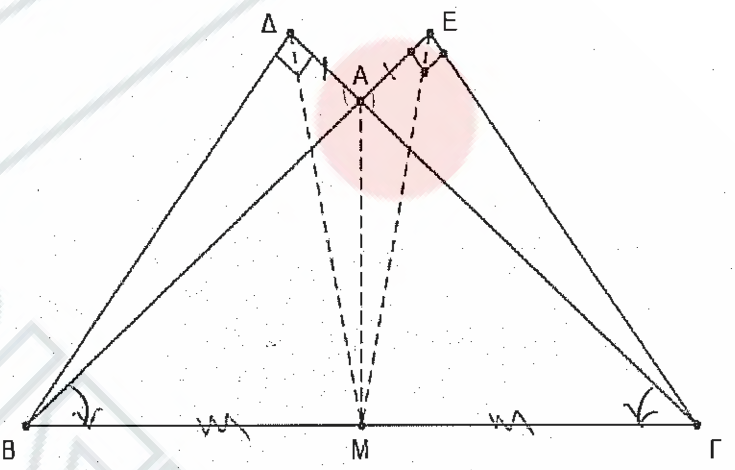
Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ ($\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$). Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ προς το Α φέρνουμε τμήματα ΒΔ και ΓΕ κάθετα στις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{B\Delta} = \mathrm{\Gamma E}$. (Μονάδες 10)

β) Αν Μ το μέσο της ΒΓ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{M\Delta} = \mathrm{ME}$. (Μονάδες 8)

ii. Να αποδείξετε ότι η ΑΜ διχοτομεί τη γωνία $\mathrm{\Delta\hat{M}E}$ (Μονάδες 7)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{A\Delta B}$ με $\overset{\triangle}{AE\Gamma}$ έχω:

1) ορθογώνια

2) ΑΒ = ΑΓ υπόθεση

3) $\Delta\hat{A}B = E\hat{A}\Gamma$ ως κατακορυφήν

άρα ισχύει υποτ. + οξ. γωνία άρα $\overset{\triangle}{A\Delta B} = \overset{\triangle}{AE\Gamma}$

άρα ΔΒ = ΓΕ.

β) i) $\underline{\overset{\triangle}{\Delta B\Gamma}}$: ΔΜ διάμεσος, άρα $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2}$

$\underline{\overset{\triangle}{BE\Gamma}}$: ΜΕ διάμεσος, άρα $ME = \frac{B\Gamma}{2}$

άρα: ΔΜ=ΜΕ

ii) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{\Delta AM}$ με $\overset{\triangle}{MAE}$ έχω:

1) ΔΑ = ΑΕ αφού $\overset{\triangle}{A\Delta B} = \overset{\triangle}{AE\Gamma}$

2) ΜΔ = ΜΕ από i)

3) ΜΑ κοινή πλευρά

άρα ισχύει Π-Π-Π άρα $\overset{\triangle}{\Delta AM} = \overset{\triangle}{MAE}$

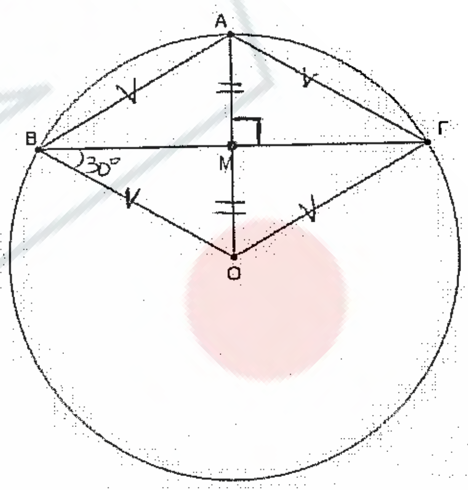
άρα: $\Delta\hat{M}A = E\hat{M}A$, δηλ. ΑΜ διχοτόμος της $\Delta\hat{M}E$.

ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε την ακτίνα ΟΑ και τη χορδή ΒΓ κάθετη στην ΟΑ στο μέσο της Μ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΟΒ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΓΟΒ. (Μονάδες 15)



α) BM μεσοκάθετος του OA, άρα $BA = BO$
MΓ —||— του OA, άρα $ΓA = ΓO$
όμως $BO = ΓO = ρ$

άρα έχω $BA = ΓA = ΓO = BO$
δηλ. $BA = ΓO$ και $ΓA = BO$ άρα το AΓOB #
και έχει $OB = OΓ = ρ$ άρα ρόμβος.

β) Στο $O\hat{B}M$ έχω $OM = \frac{OB}{2}$ άρα $O\hat{B}M = 30°$,
τότε $A\hat{B}O = 60°$ (αφού οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του)
Τότε και $A\hat{Γ}O = 60°$.
$B\hat{A}Γ + A\hat{Γ}O = 180°$ ως εντός και επί τ' αυτά
$B\hat{A}Γ + 60° = 180°$
$B\hat{A}Γ = 120°$
Τότε και $B\hat{O}Γ = 120°$.

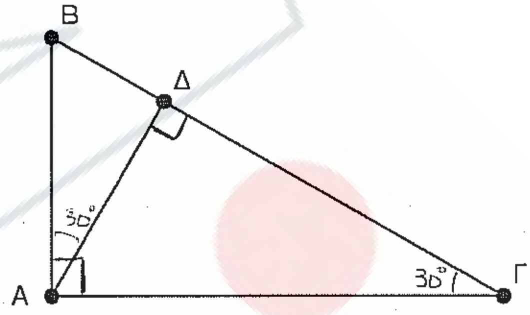
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή, $2\hat{\Gamma}=\hat{B}$ και ΑΔ το ύψος του.

α) Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογιστεί η γωνία ΒΑΔ. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι: $B\Delta=\dfrac{AB}{2}$. (Μονάδες 9)



α) $\hat{B}+\hat{\Gamma}=90^\circ$

$2\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=90^\circ$

$3\hat{\Gamma}=90^\circ$

$\hat{\Gamma}=30^\circ$ άρα $\hat{B}=2\cdot 30^\circ=60^\circ$.

β) $\underline{A\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma}$: $\hat{\Gamma}=30^\circ$ άρα $\Delta\hat{A}\Gamma=60^\circ$, άρα $B\hat{A}\Delta=30^\circ$.

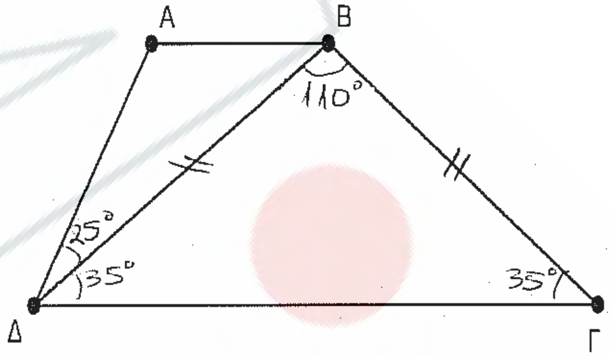
γ) $\underline{A\overset{\triangle}{B}\Delta}$: έχω $B\hat{A}\Delta=30^\circ$ άρα $B\Delta=\dfrac{AB}{2}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ και ΒΔ = ΒΓ. Αν $\Delta\hat{B}\Gamma = 110^o$ και $A\hat{\Delta}B = 25^o$ να υπολογίσετε:

α) Τη γωνία Γ. (Μονάδες 11)

β) Τη γωνία Α. (Μονάδες 14)



α) ΔΒ = ΒΓ άρα $\Delta\hat{B}\Gamma$ ισοσκελές με

$\hat{\Gamma} = B\hat{\Delta}\Gamma = \frac{180^\circ - 110^\circ}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$.

β) $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^\circ$ ως εντός και επί τ' αυτά

$\hat{A} + 60^\circ = 180^\circ$

$\hat{A} = 120^\circ$.

ΘΕΜΑ 2

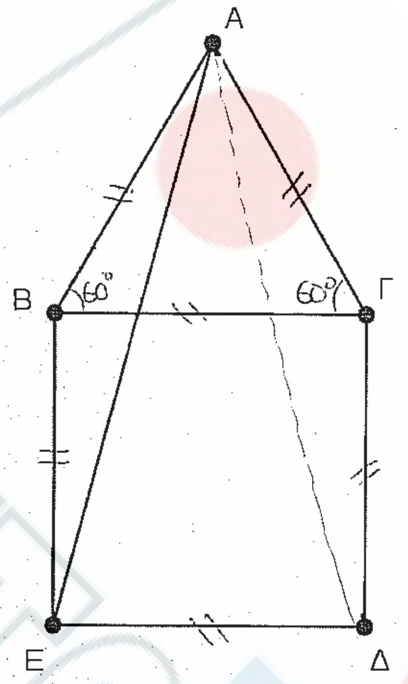
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο ΒΓΔΕ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες

i. $A\hat{B}E$ (Μονάδες 8)

ii. $B\hat{E}A$ (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)



α) i) $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισόπλευρο, άρα όλες οι γωνίες του είναι $60°$.

$A\hat{B}E = 60° + 90° = 150°$.

ii) $AB = BE$ άρα $\overset{\triangle}{ABE}$ ισοσκελές με

$B\hat{E}A = B\hat{A}E = \frac{180° - 150°}{2} = \frac{30°}{2} = 15°$

β) $A\hat{E}\Delta = 90° - 15° = 75°$

Όμοια: $A\hat{\Delta}E = 90° - 15° = 75°$

άρα $A\hat{E}\Delta = A\hat{\Delta}E$

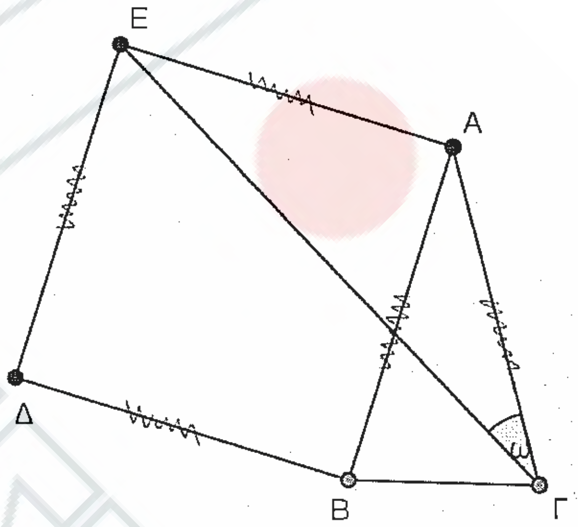
άρα $\overset{\triangle}{A\Delta E}$ ισοσκελές

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο ΑΒΔΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) $2\cdot \mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{A} = 90^o - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$. (Μονάδες 15)



α) ΑΓ=ΑΒ υπόθεση και ΑΒ = ΑΕ αφού ΑΒΔΕ τετράγωνο

άρα: ΑΓ = ΑΕ άρα $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{E}$ ισοσκελές

β) $\underline{\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Gamma}$: $\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{A} = \Gamma\hat{\mathrm{E}}\mathrm{A} = \dfrac{180^\circ - \mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Gamma}{2} = \dfrac{180^\circ - (90^\circ + \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma)}{2} =$

$= \dfrac{180^\circ - 90^\circ - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma}{2} = \dfrac{90^\circ - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma}{2}$

δηλ. $2\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{A} = 90^\circ - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$.

ΘΕΜΑ 2

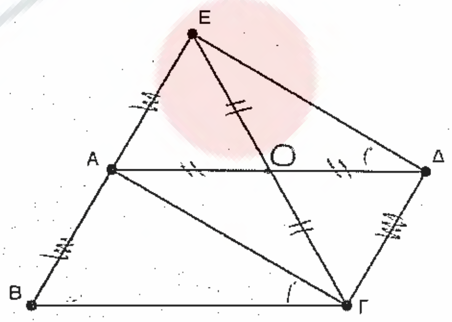
Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και το ΑΓΔΕ είναι ορθογώνιο.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο Α είναι μέσο του ΒΕ. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) $B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Delta}E$ (Μονάδες 8)



α) Αφού ΑΒΓΔ ▱ θα έχω ΑΒ = ΓΔ.
Αφού ΑΓΔΕ ορθογώνιο θα έχω ΑΕ = ΓΔ.
άρα: ΑΒ = ΑΕ δηλ. Α μέσο ΒΕ.

β) Ο μέσο το ΑΔ και ΕΓ, αφού οι διαγώνιοι του ορθογωνίου ΑΓΔΕ είναι ίσες και διχοτομούνται.

$\overset{\triangle}{BE\Gamma}$: Α μέσο ΒΕ, Ο μέσο ΕΓ $\Big\}$ άρα $OA \overset{=}{\parallel} \frac{B\Gamma}{2}$

$B\Gamma = 2OA = E\Gamma$ άρα $\overset{\triangle}{BE\Gamma}$ ισοσκελές

γ) $B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Delta}E$ ως οξείες γωνίες με // πλευρές.

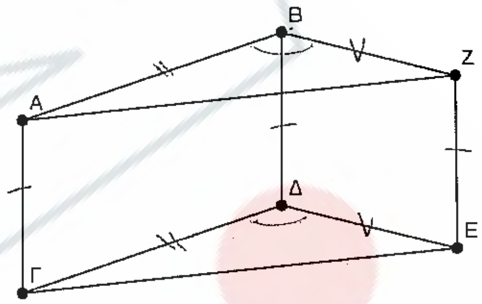
ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα παραλληλόγραμμα ΑΒΔΓ και ΒΔΕΖ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E}$. (Μονάδες 12)



α) ΑΓ =// ΒΔ και ΖΕ =// ΒΔ, άρα ΑΓ =// ΖΕ
άρα ΑΓΕΖ ▱.

β) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ABZ}$ με $\overset{\triangle}{\Gamma\Delta E}$ έχω:

1) ΑΒ = ΓΔ αφού ΑΒΔΓ ▱
2) ΒΖ = ΔΕ αφού ΒΖΕΔ ▱
3) ΑΖ = ΓΕ αφού ΑΓΕΖ ▱

άρα ισχύει Π-Π-Π άρα $\overset{\triangle}{ABZ} = \overset{\triangle}{\Gamma\Delta E}$
άρα $A\hat{B}Z = \Gamma\hat{\Delta}E$.

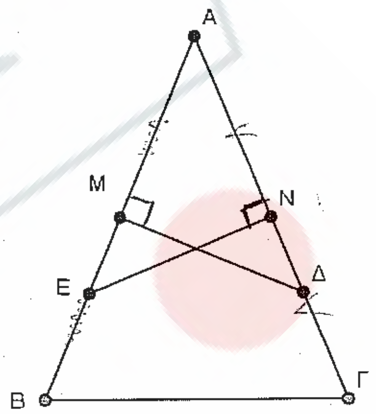
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΜΔ, ΝΕ οι μεσοκάθετοι των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν ΜΔ = ΝΕ τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Αν ΑΒ = ΑΓ τότε ΜΔ = ΝΕ (Μονάδες 13)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{AEN}$ με $\overset{\triangle}{A\Delta M}$ εχω:

1) ορθογώνια

2) ΜΔ = ΕΝ υπόθεση

3) $\hat{A}$ κοινή γωνία

αρα ισχυει Γ-Π-Γ αρα $\overset{\triangle}{AEN} = \overset{\triangle}{A\Delta M}$

αρα: ΑΜ = ΑΝ τότε και ΑΒ = ΑΓ αρα

$\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισοσκελές

β) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{AEN}$ με $\overset{\triangle}{A\Delta M}$ εχω:

1) ορθογώνια

2) $\hat{A}$ κοινή γωνία

3) ΑΜ = ΑΝ ως μισά ισων πλευρών

αρα ισχυει Γ-Π-Γ αρα $\overset{\triangle}{AEN} = \overset{\triangle}{A\Delta M}$

αρα: ΜΔ = ΝΕ.

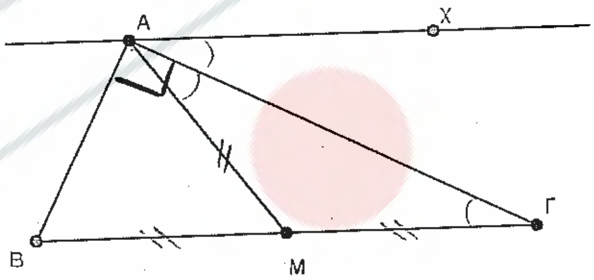
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και Μ το μέσο της ΒΓ. Φέρουμε ημιευθεία Αx παράλληλη στη ΒΓ (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΑΜ με το σημείο Γ).

Να αποδείξετε ότι:

α) $M\hat{A}\Gamma = M\hat{\Gamma}A$ (Μονάδες 12)

β) η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑx. (Μονάδες 13)



α) $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: έχω ΑΜ διάμεσο άρα $AM = \frac{B\Gamma}{2} = BM = M\Gamma$

άρα $\overset{\triangle}{AM\Gamma}$ ισοσκελές με $M\hat{A}\Gamma = M\hat{\Gamma}A$.

β) $\Gamma\hat{A}y = M\hat{\Gamma}A$ ως εντός εναλλάξ
$M\hat{A}\Gamma = M\hat{\Gamma}A$ από α)
$\Big\}$ άρα: $\Gamma\hat{A}y = M\hat{A}\Gamma$ δηλ. ΑΓ διχοτόμος της $M\hat{A}x$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

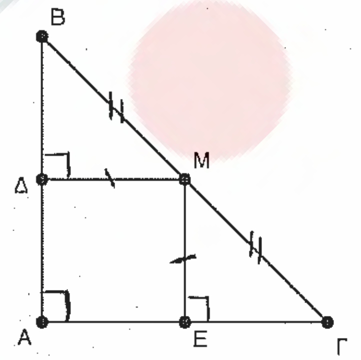
Να αποδείξετε ότι:

α) Αν ΜΔ = ΜΕ τότε:

i. τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

ii. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

β) Αν ΑΒ = ΑΓ τότε ΜΔ = ΜΕ. (Μονάδες 8)



α)i) Συγκρίνω $B\overset{\triangle}{Δ}M$ με $Γ\overset{\triangle}{E}M$ έχω:

1) ορθογώνια
2) ΜΔ = ΜΕ υπόθεση
3) ΒΜ = ΜΓ υπόθεση

άρα ισχύει Υποτ. + καθ. πλευρά άρα $B\overset{\triangle}{Δ}M = Γ\overset{\triangle}{E}M$

ii) άρα: $\hat{B} = \hat{Γ}$ δηλ. $A\overset{\triangle}{B}Γ$ ισοσκελές

β) Συγκρίνω $B\overset{\triangle}{Δ}M$ με $Γ\overset{\triangle}{E}M$ έχω:

1) ορθογώνια
2) $\hat{B} = \hat{Γ}$ αφού $A\overset{\triangle}{B}Γ$ ισοσκελές
3) ΒΜ = ΜΓ υπόθεση

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $B\overset{\triangle}{Δ}M = Γ\overset{\triangle}{E}M$

άρα: ΜΔ = ΜΕ.

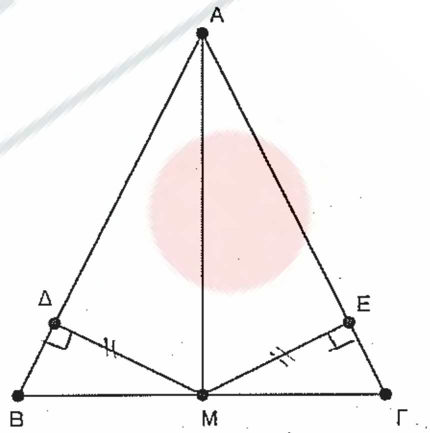
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από σημείο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν ΜΔ = ΜΕ, τότε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Αν ΑΒ = ΑΓ και Μ μέσο του ΒΓ, τότε ΜΔ = ΜΕ. (Μονάδες 12)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{AM\Delta}$ με $\overset{\triangle}{AME}$ έχω:

1) ορθογώνια
2) ΑΜ κοινή πλευρά
3) ΔΜ = ΕΜ υπόθεση

άρα ισχύει υποτ. + καθ. πλευρά άρα $\overset{\triangle}{AM\Delta} = \overset{\triangle}{AME}$

β) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{B\Delta M}$ με $\overset{\triangle}{ME\Gamma}$ έχω:

1) ορθογώνια
2) $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ αφού $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισοσκελές
3) ΒΜ = ΜΓ αφού Μ μέσο ΒΓ

άρα ισχύει υποτ. + οξ. γωνία άρα $\overset{\triangle}{B\Delta M} = \overset{\triangle}{ME\Gamma}$

άρα ΜΔ = ΜΕ.

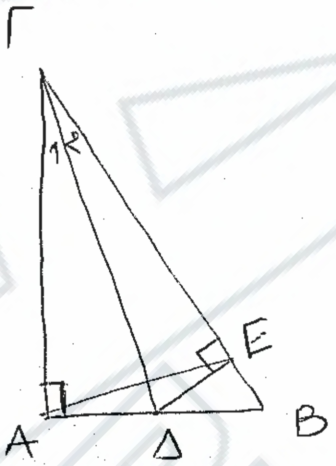
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) και η διχοτόμος της γωνίας του $\hat{\Gamma}$, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΔΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Η ευθεία ΓΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΕ. (Μονάδες 12)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$ με $\overset{\triangle}{\Delta\Gamma E}$ έχω:

1) ορθογώνια

2) ΓΔ κοινή πλευρά

3) $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$ αφού ΓΔ διχοτόμος

άρα ισχυει υποτ.+ οξ. γωνία, άρα $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma} = \overset{\triangle}{\Delta\Gamma E}$

β) Αφού $\overset{\triangle}{A\Gamma\Delta} = \overset{\triangle}{\Delta\Gamma E}$ θα εχω ΑΓ = ΓΕ, δηλ. $\overset{\triangle}{A\Gamma E}$ ισοσκελές με ΓΔ διχοτόμο της $\hat{\Gamma}$ άρα ΓΔ ύψος και διάμεσος, δηλ. μεσοκάθετος του ΑΕ.

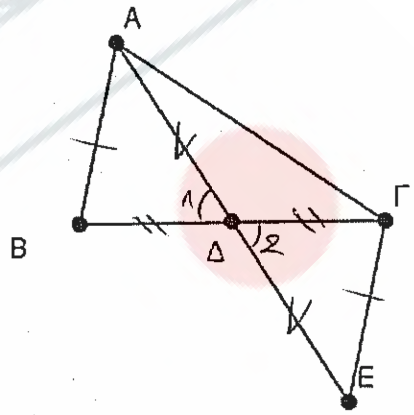
ΘΕΜΑ 2

Στο ακόλουθο σχήμα, η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και το Ε είναι σημείο στην προέκταση της ΑΔ, ώστε ΔΕ=ΑΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ=ΓΕ (Μονάδες 12)

β) $A\Delta < \frac{AB+A\Gamma}{2}$ (Μονάδες 13)



α) Συγκρίνω $A\overset{\Delta}{\Delta}B$ με $\Delta\overset{\Delta}{\Gamma}E$ έχω:

1) ΑΔ = ΔΕ υπόθεση

2) ΒΔ = ΔΓ —||—

3) $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ ως κατακορυφήν

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $A\overset{\Delta}{\Delta}B = \Delta\overset{\Delta}{\Gamma}E$

άρα ΑΒ = ΓΕ.

β) $\underline{A\overset{\Delta}{\Gamma}E}$: τριγωνική ανισότητα:

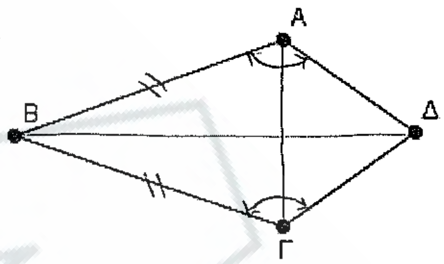
$$AE < A\Gamma + \Gamma E$$

$$2A\Delta < A\Gamma + AB$$

$$A\Delta < \frac{A\Gamma + AB}{2}.$$

ΘΕΜΑ 2

Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.



Να αποδείξτε ότι:

α) $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{B\Gamma A}$ (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ. (Μονάδες 7)

α) ΒΑ = ΒΓ άρα $B\hat{A}\Gamma$ ισοσκελές άρα $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$.

β) Αφού $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$ άρα $\Gamma\hat{A}\Delta = A\hat{\Gamma}\Delta$ ως διαφορά ίσων γωνιών, άρα $A\hat{\Gamma}\Delta$ ισοσκελές

γ) ΒΑ = ΒΓ και ΔΑ = ΔΓ, δηλ. τα σημεία Β, Δ ισαπέχουν από τα άκρα του ΑΓ άρα ανήκουν στη μεσοκάθετο αυτού.

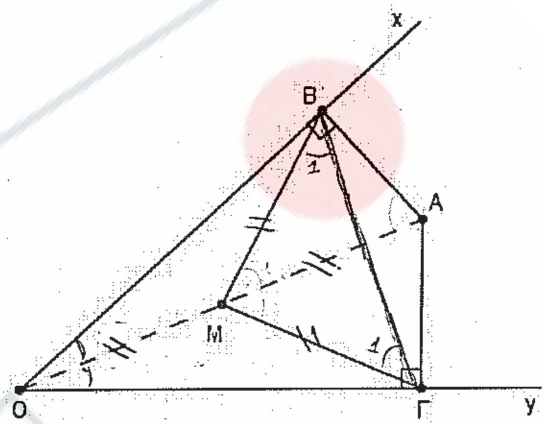
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο Α στο εσωτερικό της. Από το Α φέρνουμε τις κάθετες ΑΒ, ΑΓ προς τις πλευρές Οx , Oy της γωνίας αντίστοιχα, και ονομάζουμε Μ το μέσο του ΟΑ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) $B\hat{M}\Gamma = 2 \cdot x\hat{O}y$ (Μονάδες 15)



α) $\underline{O\hat{A}B}$: εχω ΒΜ διάμεσο, αρα $BM = \frac{OA}{2}$

$\underline{O\hat{A}\Gamma}$: εχω ΜΓ διάμεσο, αρα $M\Gamma = \frac{OA}{2}$

αρα ΒΜ = ΜΓ, άρα $B\hat{M}\Gamma$ ισοσκελές.

β) $O\hat{B}A + O\hat{\Gamma}A = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

άρα ΟΒΑΓ εγγράψιμο και εχω ΟΜ = ΒΜ = ΜΑ = ΜΓ

άρα το Μ θα είναι το κέντρο του κύκλου.

Τότε: $B\hat{O}\Gamma$ ειναι εγγεγραμμενη και $B\hat{M}\Gamma$ είναι επίκεντρη που βαινουν στο $\overset{\frown}{BA\Gamma}$.

Άρα: $B\hat{O}\Gamma = \frac{B\hat{M}\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\hat{M}\Gamma = 2B\hat{O}\Gamma$.

ΘΕΜΑ 2

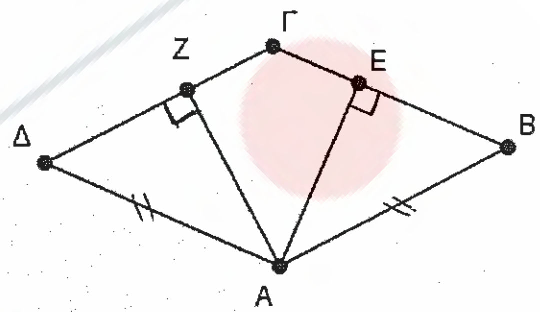
Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω ότι $AE \perp B\Gamma$ και $AZ \perp \Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, τότε ΑΖ=ΑΕ. (Μονάδες 12)

β) Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ισχύει ΑΖ=ΑΕ, τότε αυτό είναι ρόμβος.

(Μονάδες 13)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{A\Delta Z}$ με $\overset{\triangle}{AEB}$ έχω:

1) ορθογώνια

2) ΑΔ = ΑΒ αφού ΑΒΓΔ ρόμβος

3) $\hat{\Delta} = \hat{B}$ -//- -//- -//-

άρα ισχύει υποτ + οξ. γωνία άρα $\overset{\triangle}{A\Delta Z} = \overset{\triangle}{AEB}$

άρα ΑΖ = ΑΕ.

β) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{A\Delta Z}$ με $\overset{\triangle}{AEB}$ έχω:

1) ορθογώνια

2) ΑΖ = ΑΕ υπόθεση

3) $\hat{\Delta} = \hat{B}$ αφού ΑΒΓΔ # άρα $Z\hat{A}\Delta = E\hat{A}B$ ως συμπληρωματικές αυτών

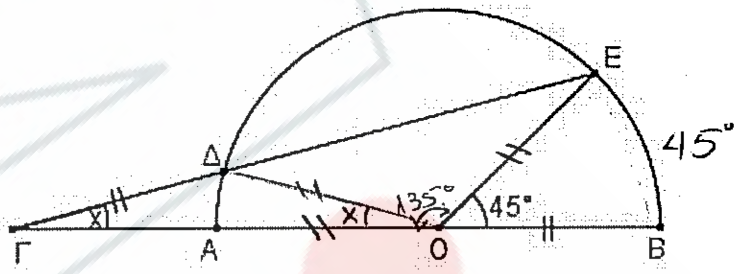
άρα ισχύει Γ-Π-Γ άρα $\overset{\triangle}{A\Delta Z} = \overset{\triangle}{AEB}$

άρα ΑΔ = ΑΒ.

Δηλ. στο # ΑΒΓΔ έχω ΑΔ = ΑΒ, άρα ρόμβος

ΘΕΜΑ 2

Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ προεκτείνουμε την ΑΒ προς το μέρος του Α και παίρνουμε ένα σημείο Γ. Θεωρούμε Ε ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος ΓΕ με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα ΓΔ ισούται με το ΟΒ και η γωνία $\widehat{BOE} = 45°$, να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\Delta\Gamma O} = x$. (Μονάδες 25)



$E\hat{O}B = 45^\circ$ είναι επίκεντρη, βαίνει στο $\overset{\frown}{EB}$, άρα $\overset{\frown}{EB} = 45^\circ$

$\Gamma\hat{O}E = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ είναι επίκεντρη, βαίνει στο $\overset{\frown}{A\Delta E}$, άρα $\overset{\frown}{A\Delta E} = 135^\circ$

$\Gamma\Delta = \Delta O$ άρα $\overset{\triangle}{\Gamma\Delta O}$ ισοσκελές με $\Delta\hat{\Gamma}A = \Delta\hat{O}A = x$

τότε το $\overset{\frown}{\Delta A} = x$ αφού η $\Delta\hat{O}A$ είναι επίκεντρη και βαίνει σ' αυτό.

$$\hat{\Gamma} = \frac{\overset{\frown}{BE} - \overset{\frown}{\Delta A}}{2}$$

$$x = \frac{45^\circ - x}{2}$$

$$2x = 45^\circ - x$$

$$3x = 45^\circ$$

$$x = 15^\circ.$$

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε δυο σημεία Α και Β τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία (ε), τέτοια ώστε η ευθεία ΑΒ δεν είναι κάθετη στην (ε) . Έστω Α΄ το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία (ε).

α) Αν η Α΄Β τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Ο, να αποδείξετε ότι:

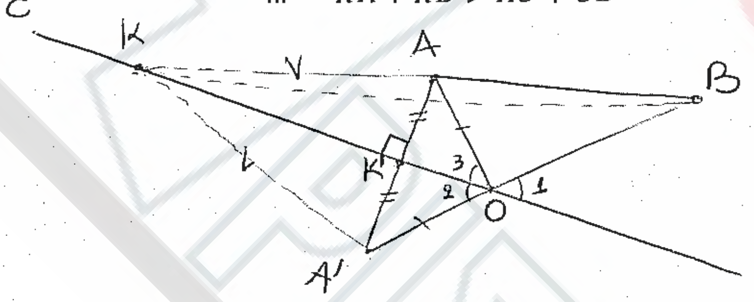
i. Η ευθεία (ε) διχοτομεί τη γωνία $\widehat{AOA'}$. (Μονάδες 6)

ii. Οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία (ε) (Μονάδες 6)

β) Αν Κ είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία (ε), να αποδείξετε ότι:

i. $KA = KA'$ (Μονάδες 6)

ii. $KA + KB > AO + OB$ (Μονάδες 7)



α) i) ΟΚ' μεσοκάθετος του ΑΑ' άρα ΟΑ=ΟΑ' άρα ΟΑΑ' ισοσκελές άρα ΚΟ και διχοτόμος δηλ. η ε διχοτομεί την $A\hat{O}A'$.

ii) $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ ως κατακορυφήν, $\hat{O}_3 = \hat{O}_2$ αφού ε διχοτόμος $\Big\}$ άρα $\hat{O}_1 = \hat{O}_3$

β) i) ΚΚ' μεσοκάθετος του ΑΑ' άρα ΚΑ=ΚΑ'

ii)

$KA + KB \overset{i)}{=} KA' + KB > A'B =$ (τριγωνική ανισότητα στο $A'\hat{K}B$)

$= A'O + OB =$

$= AO + OB$.

ΘΕΜΑ 4

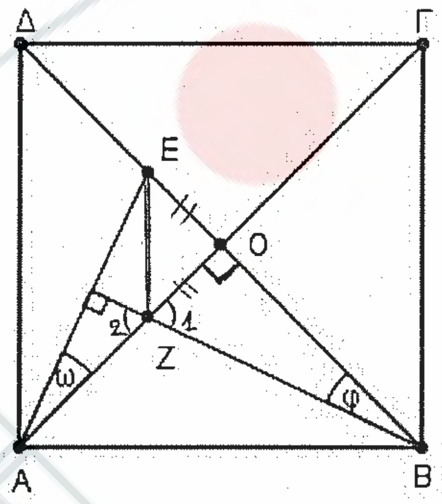
Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ ονομάζουμε Ο το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο Ε του τμήματος ΟΔ. Φέρνουμε την κάθετη από το Β στην ΑΕ, που τέμνει το τμήμα ΑΟ στο Ζ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες ω και φ του παρακάτω σχήματος είναι ίσες. (Μονάδες 6)

β) ΒΖ=ΑΕ και ΓΖ=ΒΕ (Μονάδες 12)

γ) Το τμήμα ΕΖ είναι κάθετο στο ΑΒ. (Μονάδες 7)



α) Οι διαγώνιοι του τετραγώνο τέμνονται $\perp$

άρα: $\varphi = 90° - \hat{Z}_1$

και $\omega = 90° - \hat{Z}_2$ άρα: $\varphi = \omega$.

όμως $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$ ως κατακορυφην

β) Συγκρίνω $A\hat{O}E$ με $B\hat{O}Z$ έχω:

1) ορθογώνια

2) $OA = OB$ ως μισά ίσων πλευρών

3) $\omega = \varphi$ από α)

άρα ισχυει Γ-Π-Γ άρα $A\hat{O}E = B\hat{O}Z$

άρα $AE = BZ$ και $OZ = OE$

Τότε: $ΓZ = BE$ ως άθροισμα ίσων τμηματων.

γ) Στο $A\hat{E}B$ έχω Z ορθόκεντρο, άρα EZ θα είναι το 3 ύψος του τριγώνου, άρα $EZ \perp AB$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ . Στο ΑΔ θεωρούμε σημείο Η τέτοιο ώστε ΗΑ=ΗΒ. Έστω ότι Ε είναι το σημείο τομής της ΒΗ με την ΑΓ. Φέρνουμε την ΑΖ κάθετη στην ΒΕ, η οποία τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Θ.

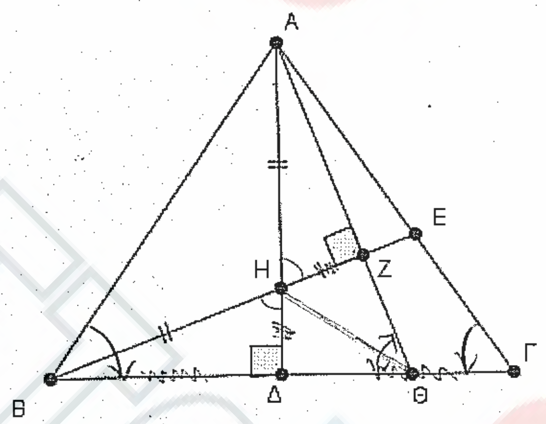
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΗΔΒ και ΗΖΑ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

ii. ΔΘ=ΘΖ. (Μονάδες 6)

iii. Η ευθεία ΘΗ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 6)

β) Ποιο από τα σημεία του σχήματος είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΗΒ ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)



α) i) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ΒΗΔ}$ με $\overset{\triangle}{ΗΑΖ}$ έχω:

1) ορθογώνια

2) ΑΗ = ΒΗ υπόθεση

3) $A\hat{H}Z = B\hat{H}\Delta$ ως κατακορυφήν

άρα ισχύει Υποτ. + οξ. γωνία άρα $\overset{\triangle}{ΒΗΔ} = \overset{\triangle}{ΗΑΖ}$

ii) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ΑΔΘ}$ με $\overset{\triangle}{ΒΘΔ}$ έχω:

1) ορθογώνια

2) $\hat{Θ}$ κοινή γωνία

3) ΑΔ = ΒΖ ως άθροισμα ίσων τμημάτων

άρα ισχύει Γ-Π-Γ άρα $\overset{\triangle}{ΑΔΘ} = \overset{\triangle}{ΒΘΔ}$ άρα ΔΘ = ΘΖ.

iii) Στο $\overset{\triangle}{ΑΒΘ}$ έχω Η ορθόκεντρο και αφού $\overset{\triangle}{ΑΔΘ} = \overset{\triangle}{ΒΘΔ}$ θα έχω ΘΑ = ΘΒ. Άρα: ΘΗ μεσοκάθετος του ΑΒ

β) Τα ύψη ΑΖ, ΒΔ τέμνονται στο Θ, άρα Θ βαρύκεντρο του $\overset{\triangle}{ΑΗΒ}$.

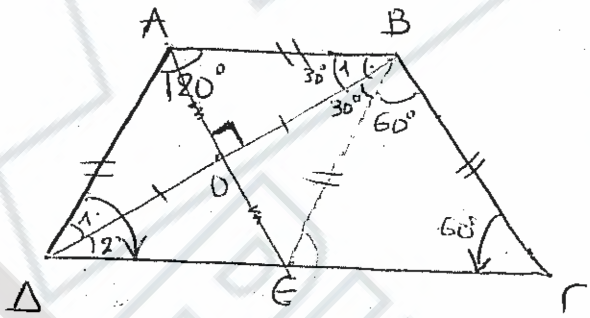
ΘΕΜΑ 4

Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) είναι ΑΒ=ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ. (Μονάδες 7)

β) Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου Ε, ώστε το τετράπλευρο ΑΒΕΔ να είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

γ) Αν επιπλέον είναι γωνία ΒΑΔ=120° και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο Ο, να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΕΟΒΓ. (Μονάδες 8)



α) $Α\Delta = ΑΒ$ άρα $Α\hat{\Delta}Β$ ισοσκελές, με $\hat{Β}_1 = \hat{\Delta}_1$
και $\hat{Β}_1 = \hat{\Delta}_2$ ως εντός εναλλάξ.
άρα: $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ δηλ. $Β\Delta$ διχοτόμος της $\hat{\Delta}$.

β) Θα πρέπει Ε να είναι μέσο του ΔΓ
γιατί τότε $Β\hat{Ε}\Gamma = \hat{\Delta}$ ως εντός εκτός και επί τ' αυτά
και $Β\hat{Ε}\Gamma = \hat{\Gamma}$ αφού $Ε\hat{Β}\Gamma$ ισοσκελές
με $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ (ισχύουν)

γ) Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του και τέμνονται $\perp$.
Άρα: $Β\hat{Ο}Ε = 90°$
$Α\hat{Β}Ε = 180° - 120° = 60°$ άρα $Ο\hat{Β}Ε = 30°$
$Α\hat{Β}\Gamma = 120° = \Delta\hat{Α}Β$ άρα $Ε\hat{Β}\Gamma = 120° - 30° - 30° = 60°$
άρα: $Ο\hat{Β}\Gamma = 30° + 60° = 90°$.
$\hat{\Gamma} = 180° - 120° = 60°$
$Ο\hat{Ε}\Gamma = 360° - 90° - 90° - 60° = 120°$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας Α (Δ, Ε σημεία της ευθείας ΒΓ). Φέρουμε ΒΖ κάθετη στην ΑΔ και ΒΗ κάθετη στην ΑΕ και θεωρούμε Μ το μέσο του ΔΓ.

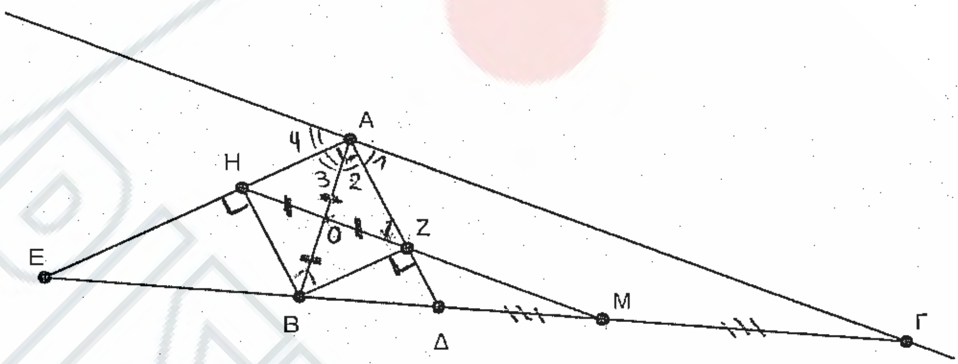
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΖΒΗ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 5)

β) Η γωνία ΗΖΑ είναι ίση με τη γωνία ΖΑΓ. (Μονάδες 6)

γ) Η ευθεία ΗΖ διέρχεται από το Μ. (Μονάδες 6)

δ) $\mathrm{MH} = \dfrac{\mathrm{AB}+\mathrm{A\Gamma}}{2}$. (Μονάδες 8)



α) $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_4 = 180^\circ$

$2\hat{A}_2 + 2\hat{A}_3 = 180^\circ$

$\hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 90^\circ$ δηλ. $H\hat{A}Z = 90^\circ$, αρα το ΑΖΒΗ ειναι ορθογώνιο αφού έχει 3 ορθές γωνίες.

β) Το ΑΖΒΗ ειναι ορθογώνιο και έχει ίσες διαγωνίους και διχοτομούνται, άρα ΟΑ=ΟΖ, δηλ. $O\hat{A}Z$ ισοσκελές αρα: $H\hat{Z}A = \hat{A}_2 = \hat{A}_1$.

γ) $H\hat{Z}A = \hat{A}_1$ δηλ. εχω εντος εναλλάξ γωνίες ίσες αρα ΗΖ // ΑΓ

$\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: Ο μεσο ΑΒ, Μ μεσο ΔΓ $\Big\{$ αρα $OM \,{=}\!\!/\!\!/\, \dfrac{A\Gamma}{2}$ $\Big\}$ αρα: Η, Ζ, Μ συνευθειακα

δ) $\dfrac{AB+A\Gamma}{2} \overset{\alpha)}{=} \dfrac{ZH+A\Gamma}{2} = \dfrac{ZH+2OM}{2} = \dfrac{2OH+2OM}{2} =$

$= \dfrac{\cancel{2}(OH+OM)}{\cancel{2}} = OH+OM = MH.$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας Α (Δ, Ε σημεία της ευθείας ΒΓ). Φέρουμε ΒΖ κάθετη στην ΑΔ και ΒΗ κάθετη στην ΑΕ και θεωρούμε Μ το μέσο του ΔΓ.

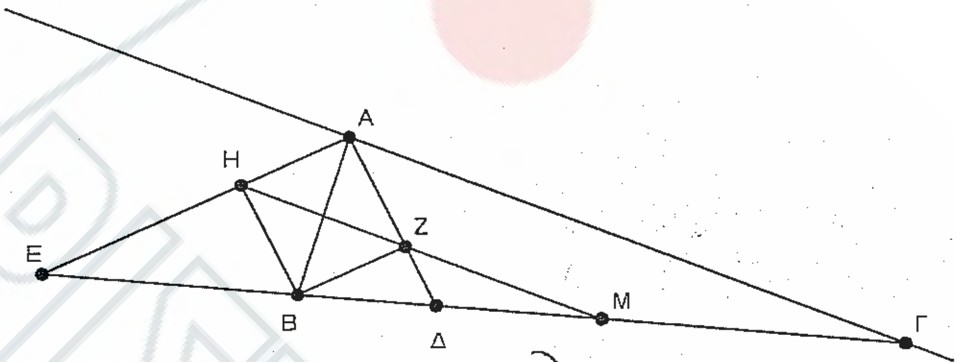
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΖΒΗ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 5)

β) Η γωνία ΗΖΑ είναι ίση με τη γωνία ΖΑΓ. (Μονάδες 6)

γ) Η ευθεία ΗΖ διέρχεται από το Μ. (Μονάδες 6)

δ) $\mathrm{MH} = \dfrac{\mathrm{AB} + \mathrm{A\Gamma}}{2}$. (Μονάδες 8)



(ίδιο με πίσω)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθή γωνία $x\hat{O}y=90^0$ και Α,Β σημεία των ημιευθειών Oy, Ox, με ΟΑ=ΟΒ. Η (ε) είναι ευθεία που διέρχεται από την κορυφή Ο και αφήνει τις ημιευθείες Ox, Oy στο ίδιο ημιεπίπεδο. Η κάθετος από το σημείο Α στην (ε) την τέμνει στο Δ και η κάθετος από το σημείο Β στην (ε) την τέμνει στο Ε.

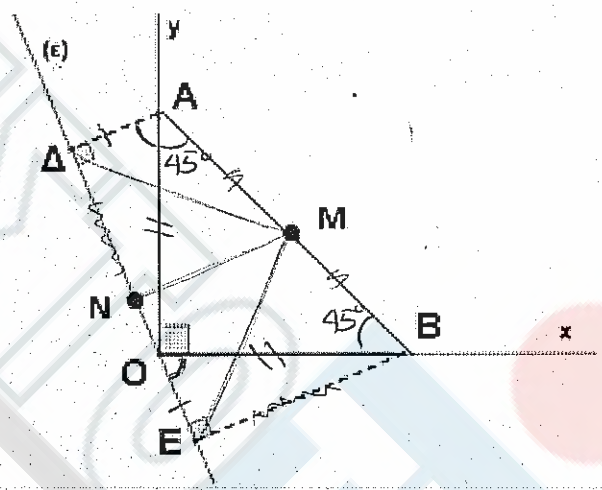
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΕΒ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

β) ΑΔ+ΒΕ=ΔΕ. (Μονάδες 7)

γ) $MN=\frac{ΔE}{2}$, όπου ΜΝ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των ΔΕ και ΑΒ. (Μονάδες 7)

δ) Το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ορθογώνιο ισοσκελές. (Μονάδες 4)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{OAΔ}$ με $\overset{\triangle}{OEB}$ έχω:
1) ορθογώνια
2) ΟΑ = ΟΒ υπόθεση
3) $Δ\hat{A}O = B\hat{O}E$ ως οξείες γωνίες με ⊥ πλευρές
άρα ισχύει υποτ + οξ. γωνία άρα $\overset{\triangle}{OAΔ} = \overset{\triangle}{OEB}$

β) ΑΔ + ΒΕ = ΟΕ + ΔΟ = ΔΕ.

γ) ΑΔ∥ΕΒ αφού είναι ⊥ στην ε άρα ΕΒΑΔ τραπέζιο
ΜΝ διάμεσος αυτού, άρα:
$MN = \frac{ΔA+EB}{2} \overset{β)}{=} \frac{ΔE}{2}$

δ) ΜΝ∥ΑΔ∥ΕΒ άρα ΜΝ ⊥ ε, δηλ. ΜΝ μεσοκάθετος του ΔΕ, άρα $\boxed{MΔ = ME}$ και $MN = \frac{ΔE}{2}$ άρα $Δ\hat{M}E$ ορθογώνιο με ΔΕ υποτείνουσα. Άρα $\overset{\triangle}{MΔE}$ ορθογώνιο ισοσκελ

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ΒΕ ,ΓΖ, τα ύψη από τις κορυφές Β, Γ αντίστοιχα και Η το ορθόκεντρο του τριγώνου. Επίσης δίνονται ταΜ, Ν, Κ, Λ μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΑΓ, ΓΗ, ΒΗ αντίστοιχα.

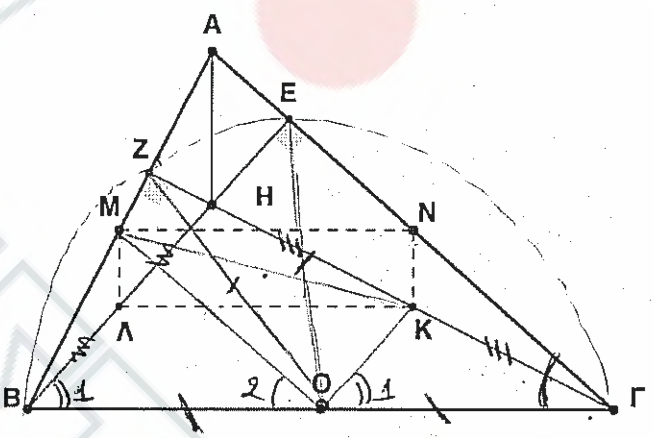
α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΜΝ=ΛΚ (Μονάδες 6)

ii. $NK = M\Lambda = \frac{AH}{2}$ (Μονάδες 6)

iii. Το τετράπλευρο ΜΝΚΛ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

β) Αν το Ο είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι το $M\hat{O}K = 90^0$. (Μονάδες 7)



α) i) $\underline{B\overset{\Delta}{H}\Gamma}$: Λ μέσο ΒΗ, Κ μέσο ΓΗ } άρα $K\Lambda =\parallel \frac{B\Gamma}{2}$

$\underline{A\overset{\Delta}{B}\Gamma}$: Μ μέσο ΑΒ, Ν μέσο ΑΓ } άρα $MN =\parallel \frac{B\Gamma}{2}$

άρα: ΚΛ = ΜΝ και ΚΛ // ΜΝ άρα: ΚΛΜΝ #

ii) άρα: ΚΝ = ΛΜ

$\underline{B\overset{\Delta}{H}A}$: Μ μέσο ΑΒ, Λ μέσο ΒΗ } άρα $M\Lambda =\parallel \frac{AH}{2}$

iii) στο i)

β) $M\hat{O}K = 180^\circ - \hat{O}_2 - \hat{O}_1 \xrightarrow[KO=\parallel \frac{BH}{2}]{MO=\parallel \frac{A\Gamma}{2}} 180^\circ - \underbrace{\hat{B}_1 - \hat{\Gamma}}$ $\underline{B\overset{\Delta}{E}\Gamma}$

$= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$

($\hat{O}_2 = \hat{\Gamma}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά
$\hat{O}_1 = \hat{B}_1$ −//− −//− −//−)

ΘΕΜΑ 4

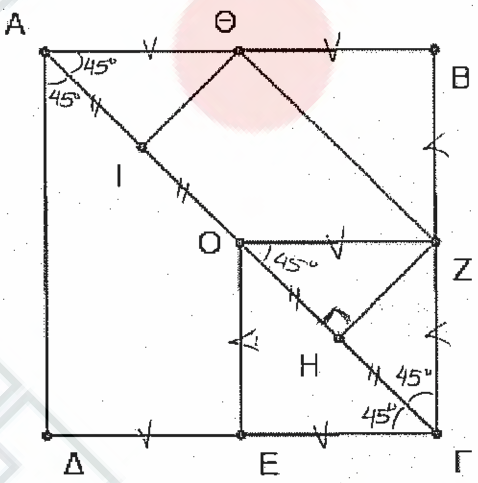
Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στη διαγώνιο ΑΓ θεωρούμε σημεία Ι, Ο, Η ώστε $AI = IO = OH = H\Gamma$. Αν Ε, Θ και Ζ τα μέσα των πλευρών ΔΓ, ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΟΖΓΕ είναι τετράγωνο. (Μονάδες 7)

β) $ZH = \frac{A\Gamma}{4}$. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΙΘΖΗ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, με $\Theta Z = 2\Theta I$.

(Μονάδες 10)



α) $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: Ο μέσο ΑΓ, Ζ μέσο ΒΓ, άρα $OZ =\parallel \frac{AB}{2} =\parallel E\Gamma$.

$\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$: Ο μέσο ΑΓ, Ε μέσο ΔΓ, άρα $OE =\parallel \frac{A\Delta}{2} =\parallel ZE$

άρα: ΟΕΓΖ # και $\hat{\Gamma} = 90°$ και $OZ = OE$

άρα ΟΕΓΖ τετράγωνο.

β) $\overset{\triangle}{OZ\Gamma}$: έχω ΖΗ διάμεσο, άρα $ZH = \frac{O\Gamma}{2} = \frac{\frac{A\Gamma}{2}}{2} = \frac{A\Gamma}{4}$.

γ) $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: Θ μέσο ΑΒ, Ζ μέσο ΒΓ, $\Theta Z =\parallel \frac{A\Gamma}{2} =\parallel HI$ άρα ΘΖΗΙ #

και $\hat{H} = 90°$ άρα ορθογώνιο

($H\hat{O}Z = 45°$ και $\overset{\triangle}{OZ\Gamma}$ ισοσκελές με ΖΗ ύψος + διάμεσο)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^o$), τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών του και το ύψος του ΑΚ. Έστω Θ είναι το σημείο τομής των ΑΖ και ΔΕ.

α) Να αποδείξετε ότι:

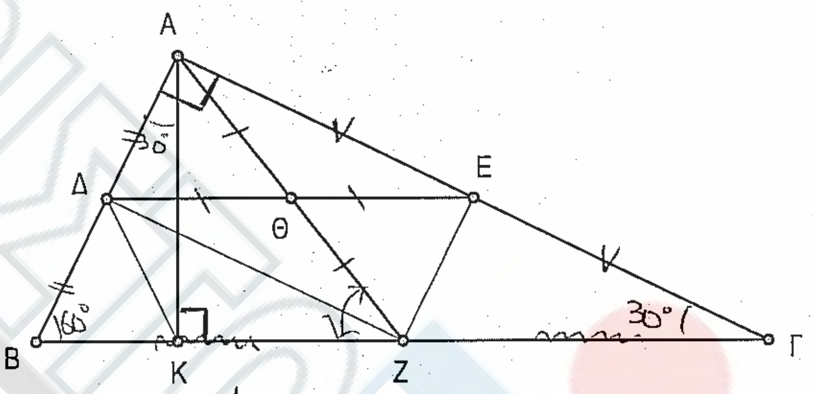
i. Το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

ii. $A\Theta=\Theta E=\frac{B\Gamma}{4}$ (Μονάδες 7)

γ) Αν επιπλέον είναι γωνία $\hat{\Gamma}=30^o$,

i. να βρείτε τη γωνία $\hat{AZB}$. (Μονάδες 5)

ii. να αποδείξετε ότι $BK=\frac{B\Gamma}{4}$. (Μονάδες 5)



α) i) $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: Ζ μέσο ΒΓ, Ε μέσο ΑΓ } άρα $ZE =\parallel \frac{AB}{2} =\parallel A\Delta$

άρα ΑΕΖΔ # με $\hat{A}=90^o$

άρα ορθογώνιο.

ii) Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου ΑΕΖΔ διχοτομούνται και είναι ίσες άρα: ΑΘ = ΘΕ.

$\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: Έχω ΑΖ διάμεσο άρα $AZ=\frac{B\Gamma}{2}$

$2A\Theta=\frac{B\Gamma}{2}$

$A\Theta=\frac{B\Gamma}{4}$.

β) i) $\hat{\Gamma}=30^o$ άρα $\hat{B}=60^o$ και $AZ=\frac{B\Gamma}{2}=BZ$ άρα

$\overset{\triangle}{ABZ}$ ισοσκελές με $\hat{AZB}=\hat{B}=60^o$.

ii) $\overset{\triangle}{ABK}$: $\hat{B}=60^o$ άρα $\hat{ABK}=30^o$, $BK=\frac{AB}{2}=\frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2}=\frac{B\Gamma}{4}$.

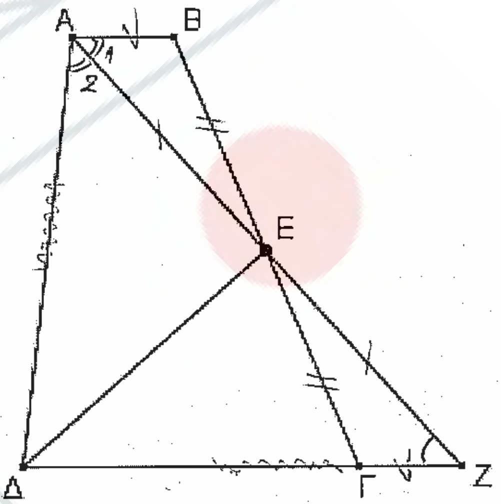
ΘΕΜΑ 4

Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) ισχύει ΑΒ+ΓΔ=ΑΔ. Αν η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει την ΒΓ στο Ε και την προέκταση της ΔΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔΑΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το Ε είναι το μέσο της ΒΓ (Μονάδες 10)

γ) Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ του τραπεζίου. (Μονάδες 8)



α) $\hat{Z} = \hat{A}_1$ ως εντος εναλλαξ
$\hat{A}_2 = \hat{A}_1$ αφου AZ διχοτομος } άρα $\hat{A}_2 = \hat{Z}$
αρα $A\overset{\triangle}{\Delta}Z$ ισοσκελεσ

β) $AB + \Gamma\Delta = A\Delta$
$AB + \Gamma\Delta = \Delta Z$
$AB = \Delta Z - \Gamma\Delta$
$AB = \Gamma Z$
Συγκρινω $A\overset{\triangle}{B}E$ με $E\overset{\triangle}{\Gamma}Z$ έχω:
1) $AB = \Gamma Z$
2) $\hat{A}_1 = \hat{Z}$ ως εντος εναλλαξ
3) $\hat{B} = E\hat{\Gamma}Z$ —"—
αρα ισχυει Γ-Π-Γ αρα $A\overset{\triangle}{B}E = E\overset{\triangle}{\Gamma}Z$
αρα $BE = E\Gamma$, δηλ. Ε μεσο ΒΓ.

γ) και $AE = EZ$
Αρα στο ισοσκελεσ $\Delta\hat{A}Z$ εχω ΔΕ διαμεσο
αρα ύψος + διχοτομεο.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τραπέζιο ΑΔΕΒ, με ΑΔ//ΒΕ, στο οποίο ισχύει ότι ΑΒ=ΑΔ+ΒΕ, και Ο το μέσον της ΔΕ. Θεωρούμε σημείο Ζ στην ΑΒ τέτοιο ώστε ΑΖ=ΑΔ και ΒΖ=ΒΕ .

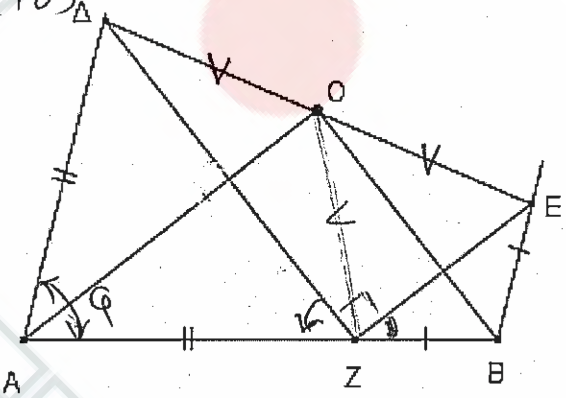
Αν γωνία $\Delta\hat{A}Z=\varphi$,

α) να εκφράσετε τη γωνία ΑΖΔ σε συνάρτηση με τη φ. (Μονάδες 8)

β) να εκφράσετε τη γωνία ΕΖΒ σε συνάρτηση με τη φ. (Μονάδες 8)

γ) να αποδείξετε ότι οι ΟΑ και ΟΒ είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων ΔΖ και ΖΕ αντίστοιχα. (Μονάδες 9)

* ΟΕ = ΟΖ και ΒΕ = ΒΖ
άρα ΟΒ μεσοκάθετος
του ΖΕ.



α) ΑΔ = ΑΖ άρα $A\hat{\Delta}Z$ ισοσκελές

με $A\hat{Z}\Delta = A\hat{\Delta}Z = \frac{180^\circ - \varphi}{2}$

β) ΖΒ = ΒΕ άρα $Z\hat{B}E$ ισοσκελές

με $E\hat{Z}B = Z\hat{E}B = \frac{180^\circ - \hat{B}}{2} = \frac{180^\circ - (180^\circ - \varphi)}{2} =$

$= \frac{\cancel{180^\circ} - \cancel{180^\circ} + \varphi}{2} = \frac{\varphi}{2}$

($\hat{B} + \hat{A} = 180^\circ$ ως εντός και επί τ' αυτά)

$\hat{B} + \varphi = 180^\circ$

$\hat{B} = 180^\circ - \varphi$

γ) $\Delta\hat{Z}E = 180^\circ - A\hat{Z}\Delta - B\hat{Z}E = 180^\circ - \frac{180^\circ - \varphi}{2} - \frac{\varphi}{2} =$

$= \frac{360^\circ - 180^\circ + \cancel{\varphi} - \cancel{\varphi}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

$\Delta\hat{Z}E$: έχω ΖΟ διάμεσο, άρα $ZO = \frac{\Delta E}{2} = \Delta O = OE$

ΑΔ = ΑΖ και ΟΔ = ΟΖ άρα ΑΟ μεσοκάθετος του ΔΖ

ΘΕΜΑ 4

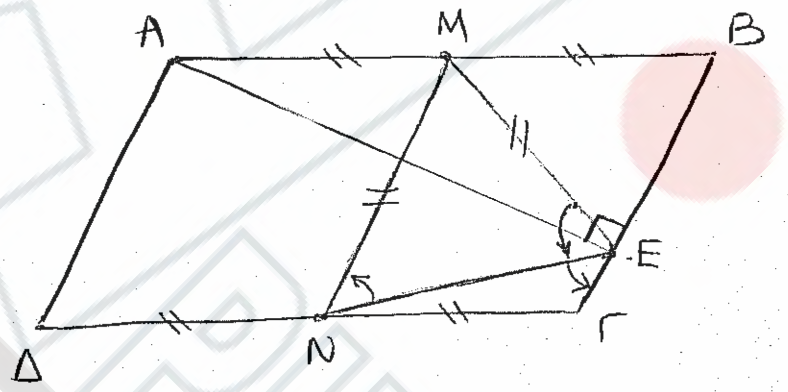
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 2 ΒΓ. Από την κορυφή Α φέρουμε την ΑΕ κάθετη στην ευθεία ΒΓ και Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ, ΔΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΜΒΓΝ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΜΕΓΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

γ) Η ΕΝ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{ΜΕΓ}$. (Μονάδες 8)



α) $ΑΒ = 2ΒΓ$ άρα $ΑΜ = ΜΒ = ΒΓ = ΝΓ = ΔΝ$
$ΜΒ =\parallel ΝΓ$ ως μισά ίσων πλευρών
άρα ΜΒΓΝ ▱ και έχει $ΜΒ = ΒΓ$ άρα ρόμβος.

β) $ΓΕ \parallel ΜΝ$ αφού ΜΒΓΝ ρόμβος
και $\overset{\triangle}{ΑΕΒ}$: έχω ΜΕ διάμεσο, άρα $ΜΕ = \frac{ΑΒ}{2} = ΜΒ = ΝΓ$
άρα το ΜΕΓΝ ισοσκ. τραπέζιο.

γ) $\hat{ΝΕΓ} = \hat{ΜΝΕ}$ ως εντός εναλλάξ
$ΜΝ = ΒΓ = ΜΕ$ άρα $\overset{\triangle}{ΜΝΕ}$ ισοσκελές, με $\hat{ΜΝΕ} = \hat{ΜΕΝ}$
άρα: $\hat{ΝΕΓ} = \hat{ΜΕΝ}$ άρα ΝΕ διχοτόμος της $\hat{ΓΕΜ}$.

ΘΕΜΑ 4

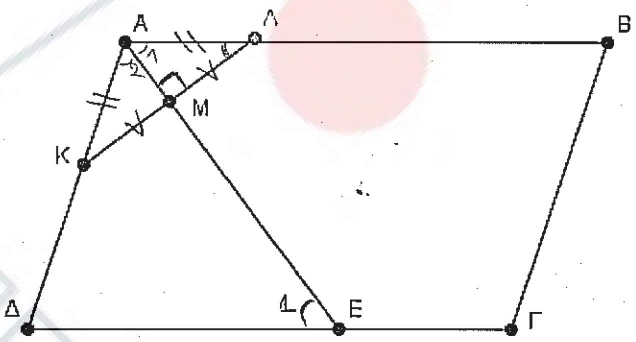
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με ΑΒ > ΑΔ. Θεωρούμε σημεία Κ, Λ, των ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα ώστε ΑΚ = ΑΛ. Έστω Μ το μέσο του ΚΛ και η προέκταση του ΑΜ (προς το Μ) τέμνει τη ΔΓ στο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ =ΔΕ. (Μονάδες 8)

β) ΒΓ + ΓΕ = ΑΒ. (Μονάδες 10)

γ) $\hat{B} = 2 \cdot A\hat{\Lambda}K$. (Μονάδες 7)



α) $\overset{\triangle}{AK\Lambda}$ ισοσκελές με ΑΜ διάμεσο, άρα ΑΜ ύψος + διχοτόμος

$\hat{E}_1 = \hat{A}_1$ ως εντός εναλλάξ

$\hat{A}_2 = \hat{A}_1$ αφού ΑΜ διχοτόμος

άρα $\hat{A}_2 = \hat{E}_1$ άρα $\overset{\triangle}{A\Delta E}$ ισοσκελές με ΑΔ = ΔΕ.

β) ΒΓ + ΓΕ = ΑΔ + ΓΕ = ΔΕ + ΓΕ = ΔΓ = ΑΒ.

γ) $\overset{\triangle}{A\Lambda M}$: $A\hat{\Lambda}K = 90^\circ - \hat{A}_1 = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2}$ ως εντός και επί τ' αυτά

$= \frac{\hat{B}}{2}$ δηλ. $2A\hat{\Lambda}K = \hat{B}$.

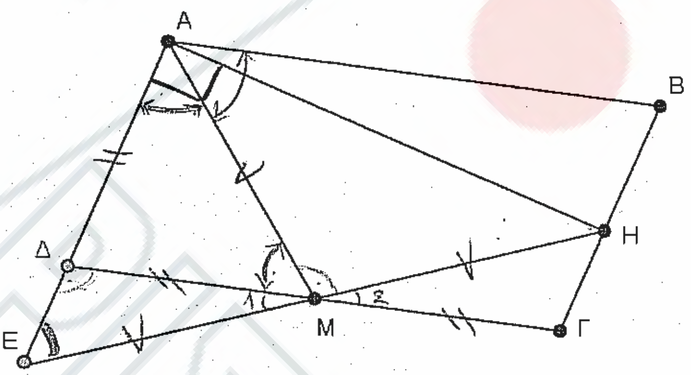
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 2 ΒΓ, τη γωνία Α αμβλεία και Μ το μέσο της ΓΔ . Φέρουμε κάθετη στην ΑΔ στο σημείο Α, η οποία τέμνει την ΒΓ στο Η. Αν η προέκταση της ΗΜ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ε, να αποδείξετε ότι:

α) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΑΒ. (Μονάδες 9)

β) Τα τμήματα ΕΗ, ΔΓ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)

γ) $\hat{E} = \Delta\hat{M}A$. (Μονάδες 8)



α) $\Delta A = \Delta M$ άρα $\overset{\triangle}{A\Delta M}$ ισοσκελές με $\Delta\hat{A}M = A\hat{M}\Delta$
$M\hat{A}B = A\hat{M}\Delta$ ως εντός εναλλάξ
άρα: $\Delta\hat{A}M = M\hat{A}B$, δηλ. ΑΜ διχοτόμος της $\Delta\hat{A}B$.

β) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{E\Delta M}$ με $\overset{\triangle}{MH\Gamma}$ έχω:
1) $M\Delta = M\Gamma$ υπόθεση
2) $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ ως κατακορυφήν
3) $E\hat{\Delta}M = \hat{\Gamma}$ ως εντός εναλλάξ
άρα ισχύει Γ-Π-Γ άρα $\overset{\triangle}{E\Delta M} = \overset{\triangle}{MH\Gamma}$
άρα $EM = MH$. Τότε ΕΗ και ΔΓ διχοτομούνται στο Μ.

γ) $\overset{\triangle}{AEH}$: έχω ΑΜ διάμεσο, άρα $AM = \frac{EH}{2} = EM$
άρα $\overset{\triangle}{AEM}$ ισοσκελές με $\hat{E} = \Delta\hat{A}M = \Delta\hat{M}A$.

ΘΕΜΑ 4

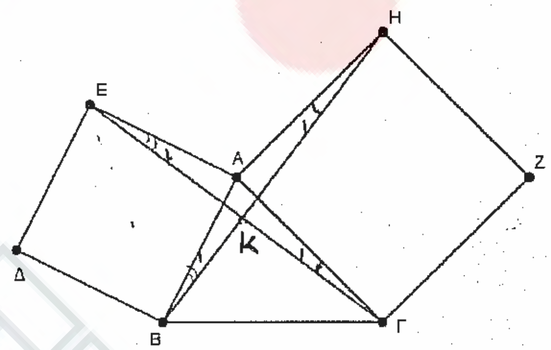
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και στο εξωτερικό του σχηματίζονται τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $E\hat{A}H = A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Gamma}B$ (Μονάδες 8)

β) ΕΓ = ΒΗ (Μονάδες 9)

γ) Η ΕΓ είναι κάθετη στη ΒΗ. (Μονάδες 8)



α) $E\hat{A}H = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - B\hat{A}\Gamma = 180^\circ - B\hat{A}\Gamma \overset{\overset{\triangle}{AB\Gamma}}{=}$

$= A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Gamma}B.$

β) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{EA\Gamma}$ με $\overset{\triangle}{ABH}$ έχω:

1) ΕΑ = ΑΒ αφού ΑΒΔΕ τετράγωνο

2) ΑΓ = ΑΗ —״— ΑΓΖΗ —״—

3) $E\hat{A}\Gamma = B\hat{A}H$ ως άθροισμα ίσων γωνιών

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\overset{\triangle}{EA\Gamma} = \overset{\triangle}{ABH}$

άρα ΕΓ = ΒΗ. και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{H}_1$ και $\hat{B}_1 = \hat{E}_1$

γ) $\underline{\overset{\triangle}{BK\Gamma}}$: $\hat{K} = 180^\circ - H\hat{B}\Gamma - E\hat{\Gamma}B =$

$= 180^\circ - (\hat{B} - \hat{B}_1) - (\hat{\Gamma} - \hat{\Gamma}_1) =$

$= \underbrace{180^\circ - \hat{B}}\, + \hat{B}_1 - \underbrace{\hat{\Gamma}}\, + \hat{\Gamma}_1 \overset{\overset{\triangle}{AB\Gamma}}{=}$

$= \hat{A} + \underbrace{\hat{E}_1 + \hat{\Gamma}_1} \overset{\overset{\triangle}{EA\Gamma}}{=}$

$= \hat{A} + (180^\circ - E\hat{A}\Gamma) =$

$= \hat{A} + 180^\circ - (90^\circ + \hat{A}) =$

$= \cancel{\hat{A}} + 180^\circ - 90^\circ - \cancel{\hat{A}} = 90^\circ$ άρα ΒΗ ⊥ ΕΓ.

ΘΕΜΑ 4

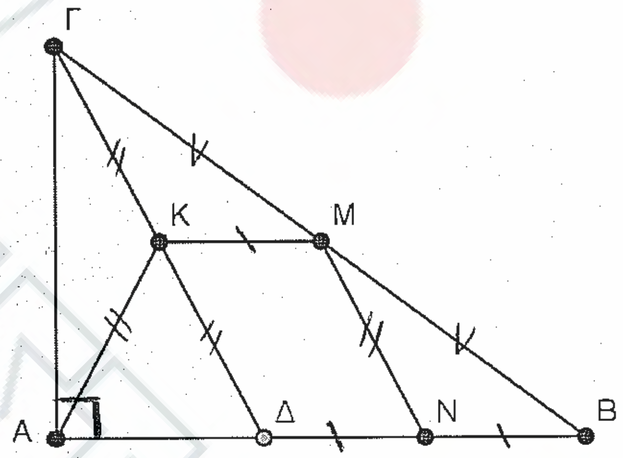
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή, και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Έστω Κ, Μ, Ν τα μέσα των ΓΔ, ΒΓ, ΒΔ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΚΜΝΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΑΚΜΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

γ) Η διάμεσος του τραπεζίου ΑΚΜΝ είναι ίση με $\frac{AB}{2}$. (Μονάδες 8)



α) $\overset{\triangle}{\Gamma\Delta B}$: Κ μεσο ΓΔ, Μ μεσο ΓΒ $\Big\}$ αρα $KM =\parallel \frac{\Delta B}{2} =\parallel \Delta N$

αρα ΚΜΝΔ #.

β) $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$: εχω ΑΚ διαμεσο, αρα $AK = \frac{\Gamma\Delta}{2}$

$\overset{\triangle}{\Gamma\Delta B}$: Ν μεσο ΒΔ, Μ μέσο ΓΒ $\Big\}$ αρα $MN =\parallel \frac{\Gamma\Delta}{2}$

$\Big\}$ αρα ΑΚΜΝ ισοσκ. τραπεζιο

γ) διαμεσος $= \frac{KM + AN}{2} = \frac{\cancel{KM} + AB - \cancel{NB}}{2} = \frac{AB}{2}$

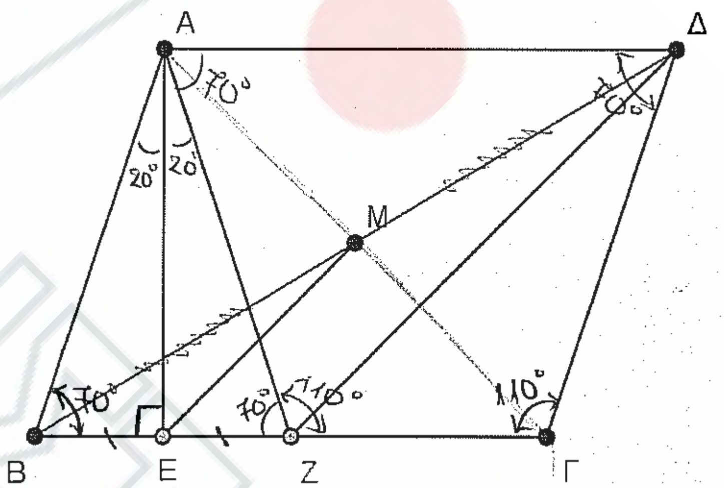
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με τη γωνία του Β να είναι ίση με 70^{o} και το ύψος του ΑΕ. Έστω Ζ σημείο της ΒΓ ώστε ΒΕ = ΕΖ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου ΑΖΓΔ (Μονάδες 9)

γ) Αν Μ το μέσο του ΒΔ, να αποδείξετε ότι $ΕΜ = \frac{ΑΓ}{2}$. (Μονάδες 8)



α) $ΑΔ \parallel ΖΓ$ και $\hat{Γ} = 180° - \hat{Β} = 180° - 70° = 110°$ ως εντός και επί τ'αυτά

$Β\hat{Α}Ε = 90° - 70° = 20°$

ΑΕ μεσοκάθετος του ΒΖ άρα ΑΒ = ΑΖ, άρα $Α\hat{Β}Ζ$ ισοσκελές και ΑΕ διχοτόμος άρα $Ε\hat{Α}Ζ = 20°$

και $Α\hat{Ζ}Ε = 70°$.

$Α\hat{Ζ}Γ = 180° - 70° = 110° = \hat{Γ}$

άρα ΑΔΓΖ ισοσκ. τραπέζιο.

β) $\hat{Δ} + \hat{Γ} = 180°$ ως εντός και επί τ'αυτά

$\hat{Δ} = 180° - 110° = 70°$ άρα και $Ζ\hat{Α}Δ = \hat{Δ} = 70°$.

γ) $\overset{\triangle}{ΒΖΔ}$: $\left.\begin{matrix} Μ \text{ μέσο } ΒΔ \\ Ε \text{ μέσο } ΒΖ \end{matrix}\right\}$ άρα $ΜΕ =\parallel \frac{ΔΖ}{2} = \frac{ΑΓ}{2}$

(αφού ΑΔΓΖ ισοσκ. τραπέζιο έχει ίσες διαγωνίους)

ΘΕΜΑ 4

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ με $\hat{A} = 90^o$ και $\hat{B} = 60^o$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Τα σημεία Μ και Κ είναι τα μέσα των ΒΖ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΓΛ είναι κάθετο στη διχοτόμο Βδ να αποδείξετε:

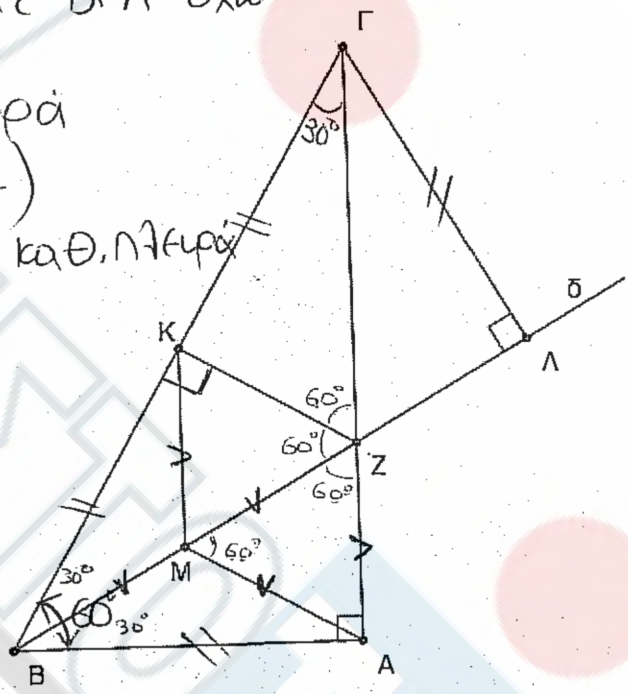
α) Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{BZ\Gamma}$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Το τετράπλευρο ΑΜΚΖ είναι ρόμβος. (Μονάδες 6)

γ) $\Gamma Z = 2ZA$ (Μονάδες 7)

δ) $B\Lambda = A\Gamma$ (Μονάδες 6)

δ) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{B\Lambda\Gamma}$ με $\overset{\triangle}{B\Gamma A}$ έχω
1) ορθογώνια
2) ΒΓ κοινή πλευρά
3) $BA = \Gamma\Lambda \left(= \frac{B\Gamma}{2}\right)$
άρα ισχύει υποτ.+καθ.πλευρά
άρα $\overset{\triangle}{B\Lambda\Gamma} = \overset{\triangle}{B\Gamma A}$
άρα: ΒΛ = ΑΓ.



α) $\underline{\overset{\triangle}{AB\Gamma}}$: $\hat{\Gamma} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ = \Gamma\hat{B}M$ άρα $\overset{\triangle}{B\Gamma Z}$ ισοσκελές

β) $\underline{\overset{\triangle}{ABZ}}$: $Z\hat{B}A = 30^\circ$ άρα $ZA = \frac{BZ}{2} = BM = ZM$

άρα $\overset{\triangle}{MZA}$ ισόπλευρο

$\underline{\overset{\triangle}{BKZ}}$: έχω ΚΜ διάμεσο άρα $KM = \frac{BZ}{2} = BM = MZ = ZA$

$\underline{\overset{\triangle}{B\Gamma Z}}$: $\left.\begin{matrix} K \text{ μέσο } B\Gamma \\ M \text{ μέσο } BZ \end{matrix}\right\}$ άρα $KM \overset{=}{\parallel} \frac{\Gamma Z}{2}$

άρα $KM \parallel ZA$ άρα ΚΜΑΖ #
και έχει ΜΑ = ΖΑ άρα ρόμβο
(αφού: $\overset{\triangle}{BAZ}$ έχω ΜΑ διάμεσο,
άρα $MA = \frac{BZ}{2}$)

γ) Έχω: ΓΖ = 2ΚΜ = 2ΖΑ.

ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ με $\hat{A}=120^o$. Φέρουμε ημιευθεία Αx κάθετη στην ΑΓ στο Α, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο Δ. Έστω Λ το μέσο του ΑΒ και Κ το μέσο του ΔΓ.

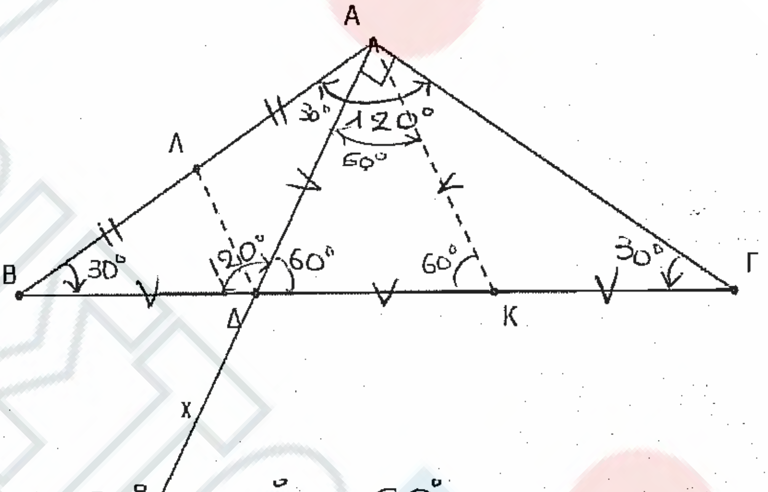
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{A\Delta B}$ είναι ισοσκελές (Μονάδες 8)

β) $\Delta\Gamma = 2B\Delta$ (Μονάδες 8)

γ) $\Lambda\Delta // AK$ (Μονάδες 5)

δ) ΑΚ=2ΛΔ (Μονάδες 4)



α) $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: $\hat{B}=\hat{\Gamma}=\frac{180^\circ-120^\circ}{2}=\frac{60^\circ}{2}=30^\circ$

$\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$: $\hat{\Delta}=90^\circ-30^\circ=60^\circ$

$A\hat{\Delta}B=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

$\overset{\triangle}{AB\Delta}$: $B\hat{A}\Delta=180^\circ-120^\circ-30^\circ=30^\circ=\hat{B}$

άρα $\overset{\triangle}{A\Delta B}$ ισοσκελές

β) $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$: έχω ΑΚ διάμεσο, άρα $AK=\frac{\Delta\Gamma}{2}=\Delta K$

άρα $\overset{\triangle}{A\Delta K}$ ισοσκελές με $\hat{\Delta}=60^\circ$, άρα

$\overset{\triangle}{A\Delta K}$ ισόπλευρο

$\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$: έχω $\hat{\Gamma}=30^\circ$, άρα $A\Delta=\frac{\Delta\Gamma}{2} \Leftrightarrow \Delta\Gamma=2A\Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta\Gamma=2\Delta B$

γ) $\overset{\triangle}{BAK}$: $\left.\begin{matrix}\Lambda \text{ μέσο } AB \\ \Delta \text{ μέσο } BK\end{matrix}\right\}$ άρα $\Lambda\Delta \parallel= \frac{AK}{2}$

δ) Τότε: $2\Lambda\Delta = AK$.

ΘΕΜΑ 4

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ με $\hat{\mathrm{A}} = 90^o$ και Δ, Ε και Ν τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ και ΔΕ αντίστοιχα. Στο τμήμα ΒΓ θεωρούμε σημεία Κ και Λ ώστε $\Delta\mathrm{K} = \mathrm{KB}$ και $\mathrm{E}\Lambda = \Lambda\Gamma$.

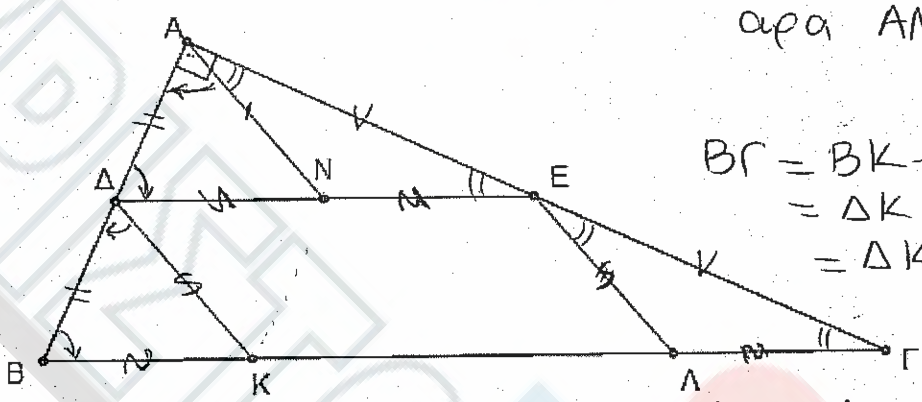
Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\hat{\mathrm{K}}\Lambda = 2\hat{\mathrm{B}}$ και $\mathrm{E}\hat{\Lambda}\mathrm{K} = 2\hat{\Gamma}$. (Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο ΔΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο με $\Delta\mathrm{E} = 2\Delta\mathrm{K}$.

(Μονάδες 8)

γ) $\mathrm{AN} = \Delta\mathrm{K} = \dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{4}$ (Μονάδες 7)



α) $\overset{\Delta}{BK\Delta}$ ισοσκ. αφού $\Delta K = BK$, άρα $\hat{B} = B\hat{\Delta}K$

$\Delta\hat{K}\Lambda$ εξωτερική του $\Delta\hat{B}K$,

άρα $\Delta\hat{K}\Lambda = \hat{B} + B\hat{\Delta}K = 2\hat{B}$

όμοια: $E\hat{\Lambda}K = 2\hat{\Gamma}$.

β) $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$: Δ μέσο ΑΒ, Ε μέσο ΑΓ $\}$ άρα $\Delta E =\parallel \dfrac{B\Gamma}{2}$, άρα $\boxed{\Delta E \parallel K\Lambda}$

$\Delta\hat{K}\Lambda + E\hat{\Lambda}K = 2\hat{B} + 2\hat{\Gamma} = 2(\hat{B} + \hat{\Gamma}) \overset{\overset{\Delta}{AB\Gamma}}{=} 2\cdot 90^\circ = 180^\circ$

δηλ. έχω εντός και επί τ' αυτά γωνίες παραπληρωματικές άρα $\boxed{\Delta K \parallel E\Lambda}$

Άρα ΔΚΛΕ #.

Συγκρίνω $A\hat{\Delta}N$ με $B\hat{\Delta}K$ έχω:

1) ΑΔ = ΔΒ υπόθεση

2) $\hat{B} = A\hat{\Delta}N$ ως εντός εκτός και επί τ' αυτά

3) $B\hat{\Delta}K = \Delta\hat{A}N$ αφού $\overset{\Delta}{BK\Delta}$ ισοσκελές και $\overset{\Delta}{A\Delta N}$ ισοσκελές

άρα ισχύει Γ-Π-Γ άρα $\overset{\Delta}{A\Delta N} = \overset{\Delta}{B\Delta K}$ άρα ΔΝ = ΔΚ *

* άρα ΔΕ = 2ΔΚ.

γ) $\overset{\Delta}{A\Delta E}$: έχω ΑΝ διάμεσ...

άρα $AN = \dfrac{\Delta E}{2} = \dfrac{2\Delta K}{2} = \Delta K$

$B\Gamma = BK + K\Lambda + \Lambda\Gamma =$
$= \Delta K + \Delta E + \Delta K =$
$= \Delta K + 2\Delta K + \Delta K =$
$= 4\Delta K.$

ΘΕΜΑ 4

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και διάμετρο ΑΒ. Φέρνουμε χορδή $\Gamma\Delta // AB$ με Κ το μέσο της. Από το Δ φέρνουμε το τμήμα ΔΕ κάθετο στη ΔΓ.

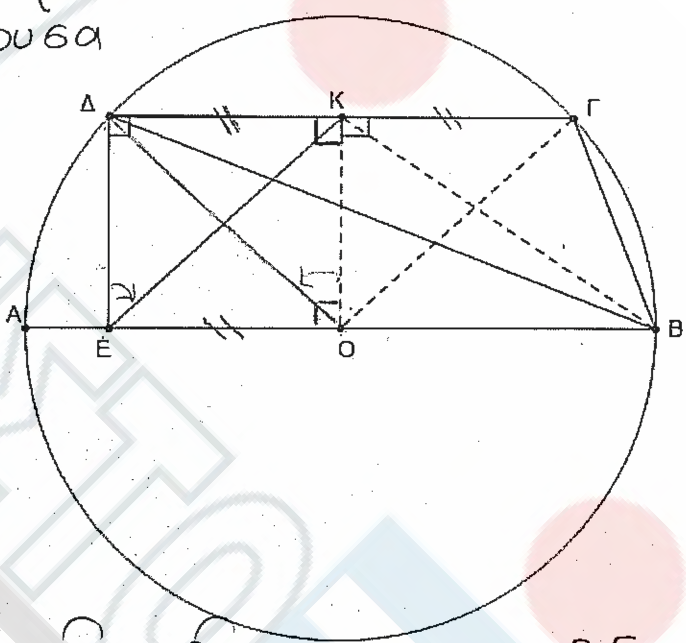
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΚΓΟΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) $\Delta\hat{E}K = \dfrac{\Delta\hat{O}\Gamma}{2}$. (Μονάδες 12)

γ) $KE < KB$. (Μονάδες 5)

γ) Έχω $KE = O\Delta = \rho$
και ΚΒ υποτείνουσα
στο $O\hat{B}K$, άρα
$KB > OB = \rho$
δηλ. $KB > KE$.



α) $\Gamma\Delta \parallel AB$ άρα $\overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{B\Gamma}$ άρα $A\Delta = B\Gamma$.
ΔΕΟΚ ορθογώνιο, αφού έχει 3 ορθές γωνίες
άρα: $EO = \Delta K = K\Gamma$.
Δηλ. έχω $EO = \parallel K\Gamma$ άρα ΚΓΟΕ ▱.

β) (Το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.)
Συγκρίνω $E\hat{\Delta}K$ με $O\hat{\Delta}K$ έχω:
1) ορθογώνια
2) ΔΚ κοινή πλευρά
3) $\Delta O = EK$ διαγώνιοι του ορθογωνίου ΔΚΟΕ
άρα ισχύει υποτ + καθ. πλευρά άρα $E\hat{\Delta}K = O\hat{\Delta}K$.
άρα: $\Delta\hat{E}K = \Delta\hat{O}K = \dfrac{\Delta\hat{O}\Gamma}{2}$ (αφού ΟΚ και διχοτόμος στο $\Delta\hat{O}\Gamma$ που είναι ισοσκ. αφού ΟΚ μεσοκάθετος του ΔΓ).

ΘΕΜΑ 4

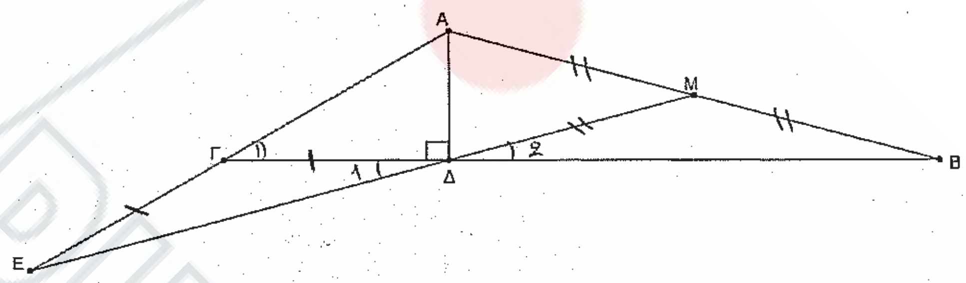
Έστω τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ $(AB > A\Gamma)$, ΑΔ το ύψος του και Μ το μέσο του ΑΒ. Η προέκταση της ΜΔ τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο σημείο Ε ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma E$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B} = \hat{E}$. (Μονάδες 8)

β) $\hat{\Gamma} = 2\hat{B} = A\hat{M}\Delta$. (Μονάδες 10)

γ) ΓΕ<ΑΓ. (Μονάδες 7)



α) $\overset{\Delta}{AB\Delta}$: έχω ΔΜ διάμεσο, άρα $\Delta M = \frac{AB}{2} = M\Delta$

άρα $\Delta\hat{M}B$ ισοσκελές με $\hat{B} = \hat{\Delta}_2$

$E\Gamma = \Gamma\Delta$ άρα $E\hat{\Gamma}\Delta$ ισοσκελές με $\hat{E} = \hat{\Delta}_1$

και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ ως κατακορυφήν

άρα: $\hat{B} = \hat{E}$.

β) $\hat{\Gamma}$ είναι εξωτερική του $E\hat{\Gamma}\Delta$, άρα

$\hat{\Gamma} = \hat{E} + \hat{\Delta}_1 = 2\hat{E} = 2\hat{B}$

$A\hat{M}\Delta$ είναι εξωτερική του $\Delta\hat{M}B$, άρα

$A\hat{M}\Delta = \hat{B} + \hat{\Delta}_2 = 2\hat{B}$.

γ) ΑΓ υποτείνουσα του $A\hat{\Delta}\Gamma$

άρα $A\Gamma > \Gamma\Delta$, άρα $A\Gamma > \Gamma E$.

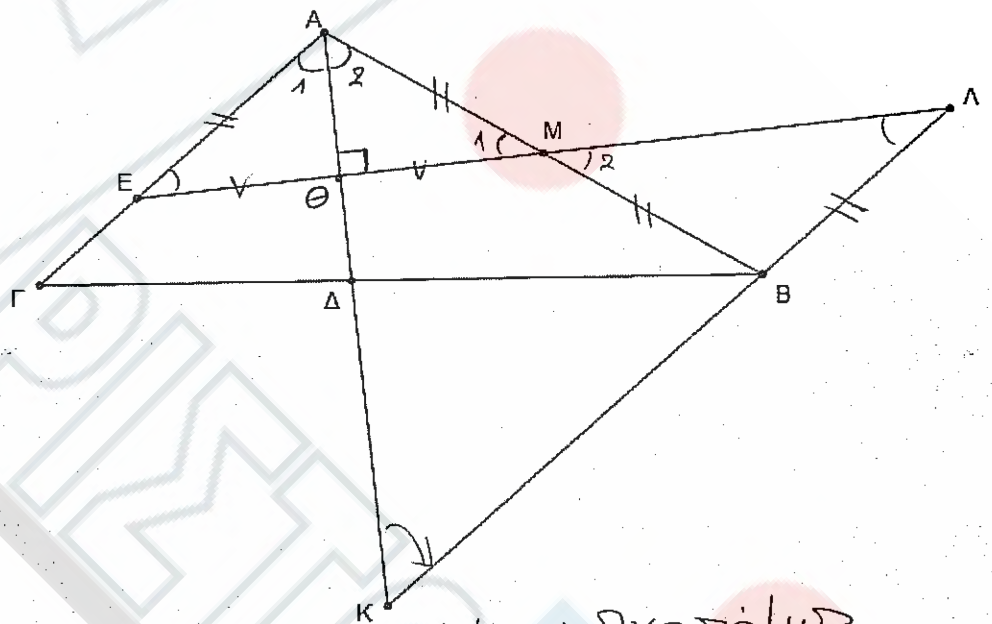
ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$, ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α και Μ το μέσον της ΑΒ. Η κάθετη από το Μ στην ΑΔ τέμνει το ΑΓ στο Ε. Η παράλληλη από το Β στο ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Κ και την προέκταση της ΕΜ στο Λ

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΜ, ΜΒΛ και ΑΒΚ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο ΑΛΒΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

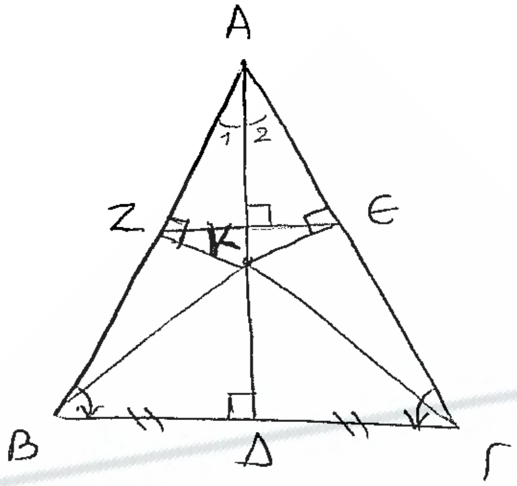


α) Στο $A\hat{E}M$ έχω ΑΘ ύψος + διχοτόμος,
άρα $A\hat{E}M$ ισοσκελές και ΑΘ διάμεσος.

$\hat{\Lambda} = \hat{E}$ ως εντός εναλλάξ
$\hat{M}_2 = \hat{M}_1$ ως κατακορυφήν
$\hat{E} = \hat{M}_1$ αφού $A\hat{E}M$ ισοσκελές
άρα: $\hat{\Lambda} = \hat{M}_2$
άρα $M\hat{B}\Lambda$ ισοσκελές

$\hat{K} = \hat{A}_1$ ως εντός εναλλάξ
$\hat{A}_2 = \hat{A}_1$ αφού ΑΔ διχοτόμος
άρα $\hat{K} = \hat{A}_2$
άρα $A\hat{K}B$ ισοσκελές

β) Συγκρίνω $A\hat{E}M$ με $M\hat{B}\Lambda$ έχω:
1) ΑΜ = ΜΒ υπόθεση
2) $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ ως κατακορυφήν
3) $E\hat{A}M = M\hat{B}\Lambda$ γιατί $E\hat{A}M = \frac{180° - 2\hat{E}}{2}$ και $M\hat{B}\Lambda = \frac{180° - 2\hat{\Lambda}}{2}$.
άρα ισχύει Γ-Π-Γ άρα $A\hat{E}M = M\hat{B}\Lambda$ άρα ΕΜ = ΜΛ.
Άρα: ΑΛΒΕ # αφού οι διαγώνιοι του διχοτομούνται.



α) i) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ABK}$ με $\overset{\triangle}{AK\Gamma}$ έχω:

1) ΑΚ κοινή πλευρά
2) ΑΒ = ΑΓ υπόθεση
3) $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ αφού ΑΔ διάμεσος, άρα ύψος + διχοτόμος στο ισοσκελές $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\overset{\triangle}{ABK} = \overset{\triangle}{AK\Gamma}$.

ii) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{AZK}$ με $\overset{\triangle}{AKE}$ έχω:

1) ορθογώνια
2) ΑΚ κοινή πλευρά
3) $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (όπως πάνω)

άρα ισχύει υποτ. + οξ. γωνία άρα $\overset{\triangle}{AZK} = \overset{\triangle}{AKE}$

άρα ΖΚ = ΚΕ, δηλ. $\overset{\triangle}{ZKE}$ ισοσκελές.

iii) (Αφού ΖΚ = ΚΕ και $\overset{\triangle}{AZK} = \overset{\triangle}{AKE}$ θα έχω ΑΖ = ΑΕ.
Τότε: ΒΖ = ΕΓ ως διαφορά ίσων τμημάτων)

Αφού ΑΖ = ΑΕ θα έχω $\overset{\triangle}{AZE}$ ισοσκελές με ΑΔ διχοτόμο, άρα ύψος + διάμεσο.
Τότε: ΖΕ // ΒΓ γιατί είναι ⊥ στη ΒΓ, άρα ΖΕΓΒ τραπέζιο με $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ άρα ΖΕΓΒ ισοσκ. τραπέζιο.

β) Αφού $B\hat{A}K = \Gamma\hat{A}K$ και $A\hat{B}K = A\hat{\Gamma}K$

θα έχω: $\left.\begin{array}{l} A\hat{K}B = 180^\circ - B\hat{A}K - A\hat{B}K \\ \text{και } A\hat{K}\Gamma = 180^\circ - \Gamma\hat{A}K - A\hat{\Gamma}K \end{array}\right\}$ άρα $A\hat{K}B = A\hat{K}\Gamma$ ως διαφορά ίσων γωνιών

ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ $(\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma})$ και ΑΔ διάμεσος. Στο τμήμα ΑΔ θεωρούμε τυχαίο σημείο Κ από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα ΚΖ και ΚΕ κάθετα στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\overset{\Delta}{\mathrm{ABK}}=\overset{\Delta}{\mathrm{A\Gamma K}}$. (Μονάδες 6)

ii. Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{ZKE}}$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

iii. Το τετράπλευρο ΖΕΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)

β) Ένας μαθητής στο (αi.) ερώτημα έδωσε την εξής απάντηση:

«Το τμήμα ΑΔ είναι διάμεσος στη βάση ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος του τριγώνου $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ *και μεσοκάθετος του ΒΓ. Οπότε και το τρίγωνο* $\overset{\Delta}{\mathrm{BK\Gamma}}$ *είναι ισοσκελές.*

Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{ABK}}$, $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Gamma K}}$ *έχουν*

1. $\mathrm{BK}=\mathrm{K\Gamma}$

2. $\mathrm{B\hat{A}K}=\mathrm{\Gamma\hat{A}K}$ *επειδή ΑΚ διχοτόμος της* $\hat{\mathrm{A}}$

3. $\mathrm{A\hat{B}K}=\mathrm{A\hat{\Gamma}K}$ *ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.*

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου Γωνία Πλευρά Γωνία.»

Ο καθηγητής είπε ότι η απάντησή του είναι ελλιπής. Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γωνία –Πλευρά- Γωνία διατηρώντας τις πλευρές ΒΚ και ΚΓ. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

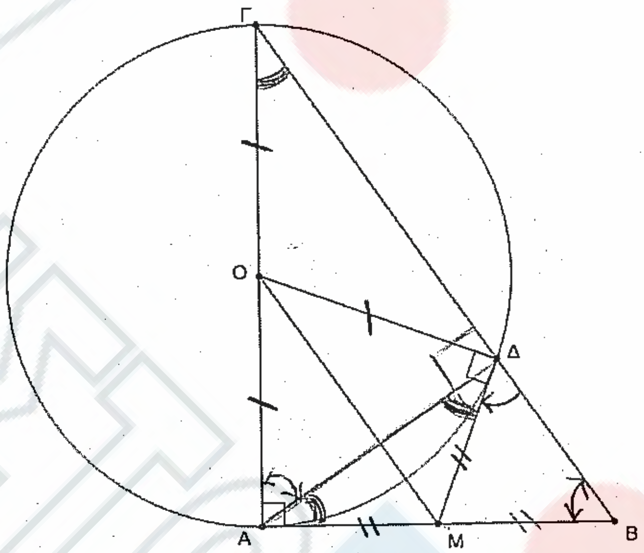
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΓΑΒ ($\hat{A} = 90^o$). Με διάμετρο την πλευρά του ΑΓ φέρουμε κύκλο που τέμνει την υποτείνουσα ΒΓ στο Δ. Απο το Δ φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα το οποίο τέμνει την ΑΒ στο Μ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma\hat{A}\Delta = \hat{B}$ (Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\Delta MB}$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) Το Μ είναι το μέσο του ΑΒ. (Μονάδες 7)



α) $\Gamma\hat{A}\Delta = 90^\circ - \Delta\hat{A}B$

$\overset{\Delta}{A\Delta B}$: $\hat{B} = 90^\circ - \Delta\hat{A}B$

άρα: $\Gamma\hat{A}\Delta = \hat{B}$ ως συμπληρωματικές της $\Delta\hat{A}B$.

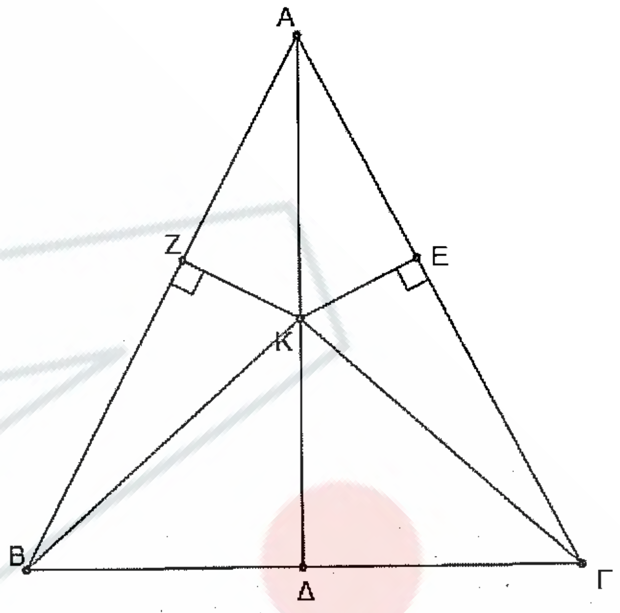
(αφού $A\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο)

β) $M\hat{\Delta}B = 90^\circ - \underline{A\hat{\Delta}M} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$ (ως γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης)

$\overset{\Delta}{AB\Gamma}$: $\hat{B} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$

άρα $\hat{B} = M\hat{\Delta}B$ άρα $M\hat{\Delta}B$ ισοσκελές με $M\Delta = MB$.

γ) $M\Delta = MB = MA = \frac{AB}{2}$ άρα Μ μέσο ΑΒ.


Α
Ζ
Ε
Κ
Β
Δ
Γ

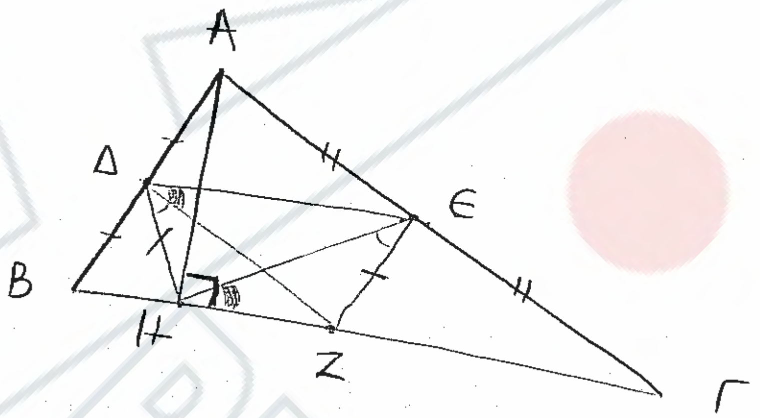
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και το ύψος του ΑΗ. Αν Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ,ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

α) το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

β) οι γωνίες ΗΔΖ και ΗΕΖ είναι ίσες . (Μονάδες 8)

γ) οι γωνίες ΕΔΖ και ΕΗΖ είναι ίσες. (Μονάδες 9)



α) $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$: Δ μέσο ΑΒ, Є μέσο ΑΓ } άρα ΔΗ =// $\frac{ΒΓ}{2}$

άρα ΔΕΖΗ τραπέζιο

$\overset{\triangle}{ΑΒΗ}$: έχω ΔΗ διάμεσο, άρα ΔΗ = $\frac{AB}{2}$

$\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$: Є μέσο ΑΓ, Ζ μέσο ΒΓ } άρα ΖЄ =// $\frac{AB}{2}$

άρα ΔΗ = ΖЄ δηλ. ΔЄΖΗ ισοσκ. τραπέζιο.

β) Συγκρίνω $Η\hat{Δ}Ζ$ με $Η\hat{Є}Ζ$ έχω:

1) ΗΔ = ΖЄ από α)

2) ΖΗ κοινή πλευρά

3) ΔΖ = ΗЄ ως διαγώνιοι ισοσκ. τραπεζίου

άρα ισχύει Π-Π-Π άρα $Η\hat{Δ}Ζ = Η\hat{Є}Ζ$ άρα $Η\hat{Δ}Ζ = Η\hat{Є}Ζ$

η $\hat{Δ} + \hat{Η} = 180°$ ως εντός και επί τ' αυτά

τότε: $\hat{Δ} + \hat{Ζ} = 180°$ άρα το ΔЄΖΗ εγγράψιμο

άρα: $Є\hat{Δ}Ζ = Є\hat{Η}Ζ$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο $\overset{\frown}{ΖЄ}$.

ΘΕΜΑ 4

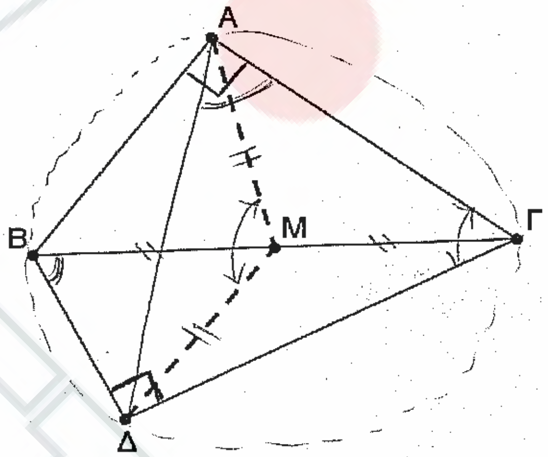
Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) και ΔΒΓ ($\hat{\Delta} = 90^o$) (όπου Α και Δ εκατέρωθεν της ΒΓ) και το μέσο Μ της ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

β) $A\hat{M}\Delta = 2A\hat{\Gamma}\Delta$ (Μονάδες 9)

γ) $\Gamma\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$ (Μονάδες 7)



α) $\overset{\Delta}{ABΓ}$: έχω ΑΜ διάμεσο, άρα $AM = \frac{BΓ}{2}$

$\overset{\Delta}{BΔΓ}$: έχω ΔΜ διάμεσο, άρα $ΔM = \frac{BΓ}{2}$

άρα ΑΜ = ΔΜ άρα $\overset{\Delta}{AMΔ}$ ισοσκελές

β) $B\hat{A}Γ + B\hat{Δ}Γ = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ άρα ΑΒΔΓ εγγράψιμο και ΜΑ = ΜΒ = ΜΔ = ΜΓ, άρα Μ κέντρο του κύκλου αυτού. Τότε: $A\hat{Γ}Δ = \frac{A\hat{M}Δ}{2}$ γιατί είναι εγγεγραμμένη και επίκεντρη που βαίνουν στο $\overset{\frown}{ABΔ}$.

γ) $Γ\hat{B}Δ = Γ\hat{A}Δ$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο $\overset{\frown}{ΓΔ}$.

ΘΕΜΑ 4

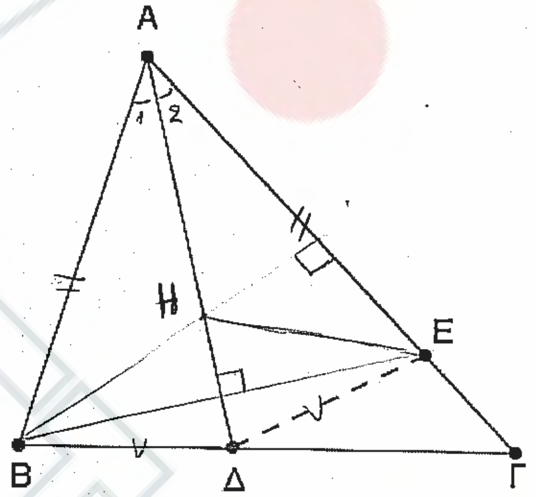
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΑΕ = ΑΒ.

Να αποδείξετε ότι :

α) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

β) η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΕ. (Μονάδες 9)

γ) αν το ύψος από την κορυφή Β του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την ΑΔ στο Η τότε η ευθεία ΕΗ είναι κάθετη στην ΑΒ. (Μονάδες 9)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ΑΒΔ}$ με $\overset{\triangle}{ΑΔΕ}$ έχω:

1) ΑΒ = ΑΕ υπόθεση

2) ΑΔ κοινή πλευρά

3) $Β\hat{Α}Δ = Δ\hat{Α}Ε$ αφού ΑΔ διχοτόμος

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\overset{\triangle}{ΑΒΔ} = \overset{\triangle}{ΑΔΕ}$

β) Αφού $\overset{\triangle}{ΑΒΔ} = \overset{\triangle}{ΑΔΕ}$ θα έχω ΑΒ = ΑΕ άρα $\overset{\triangle}{ΑΒΕ}$ ισοσκελές με ΑΔ διχοτόμο, άρα ΑΔ διάμεσο ύψος, δηλ. ΑΔ μεσοκάθετος του ΒΕ.

γ) Στο $\overset{\triangle}{ΑΒΕ}$ έχω Η το σημείο τομής των δύο υψών του τριγώνου, άρα Η ορθόκεντρο και αφού ΕΗ διέρχεται από το Η θα είναι το τρίτο ύψος του τριγώνου, άρα ΗΕ ⊥ ΑΒ.

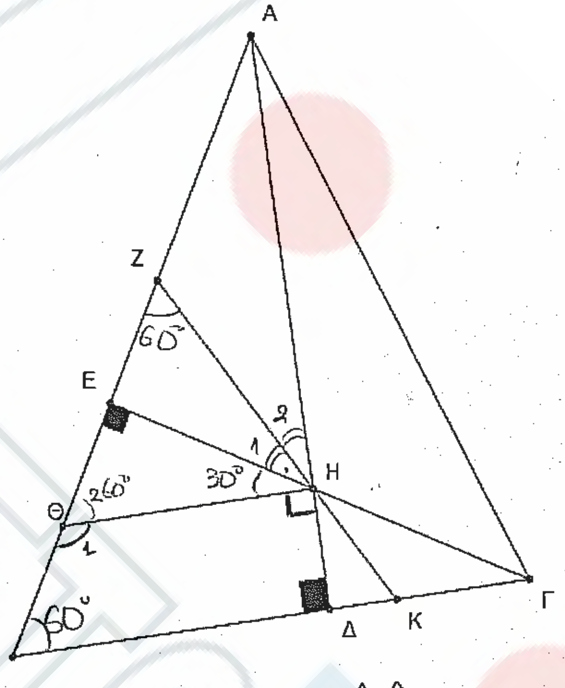
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία $Β=60^{o}$. Φέρνουμε τα ύψη ΑΔ και ΓΕ που τέμνονται στο Η. Φέρνουμε ΚΖ διχοτόμο της γωνίας ΕΗΑ και ΘΗ κάθετο στο ύψος ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) Για το τμήμα ΖΕ ισχύει ΖΗ=2ΕΖ. (Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο ΘΖΗ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΘΗΚΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)



α) ΘΗ // ΒΔ γιατί ειναι ⊥ στην ΑΔ.

$\hat{Θ}_1 = 180^{\circ} - 60^{\circ} = 120^{\circ}$ ως εντός και επι τ'αυτά

$\hat{Θ}_2 = 180^{\circ} - 120^{\circ} = 60^{\circ}$

ΘΕ̂Η: $Θ\hat{Η}Ε = 90^{\circ} - 60^{\circ} = 30^{\circ}$

$Α\hat{Η}Θ = 90^{\circ} - 30^{\circ} = 60^{\circ}$ αρα $\hat{Η}_1 = \hat{Η}_2 = 30^{\circ}$

ΕẐΗ: εχω $\hat{Η}_1 = 30^{\circ}$ αρα $ΖΕ = \frac{ΖΗ}{2} \Leftrightarrow ΖΗ = 2ΖΕ$.

β) $Ζ\hat{Η}Θ = 30^{\circ} + 30^{\circ} = 60^{\circ}$ και $\hat{Θ}_2 = 60^{\circ}$ αρα

$Θ\hat{Ζ}Η = 180^{\circ} - 60^{\circ} - 60^{\circ} = 60^{\circ}$ αρα $\overset{\triangle}{ΘΖΗ}$ ισόπλευρο.

γ) ΘΗ // ΒΔ και $Η\hat{Κ}Β = Ζ\hat{Η}Θ = 60^{\circ}$ ως εντος εκτος και επι τ'αυτά, αρα ΘΒΚΗ ισοσκ. τραπέζιο.

ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α, για την οποία ισχύει $A\Delta = \Delta\Gamma$.

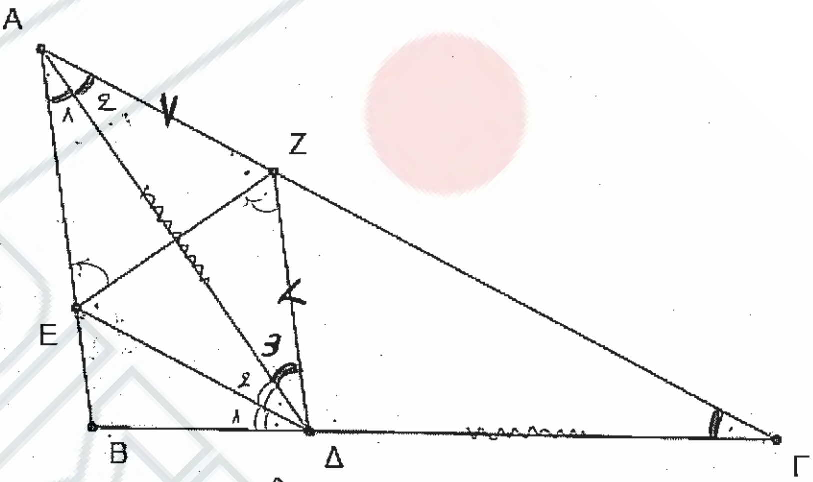
Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΔΒ και η ΔΖ παράλληλη στην ΑΒ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα ΕΔ και ΑΓ είναι παράλληλα. (Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Τα τμήματα ΑΔ και ΕΖ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)



α) ΑΔ = ΔΓ άρα: $A\hat{\Delta}\Gamma$ ισοσκελές με $\hat{\Gamma} = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2}$.

ΔΖ // ΑΒ άρα $\hat{\Delta}_3 = \hat{A}_1$ ως εντός εναλλάξ

$\hat{A}_2 = \hat{A}_1$ αφού ΑΔ διχοτόμος

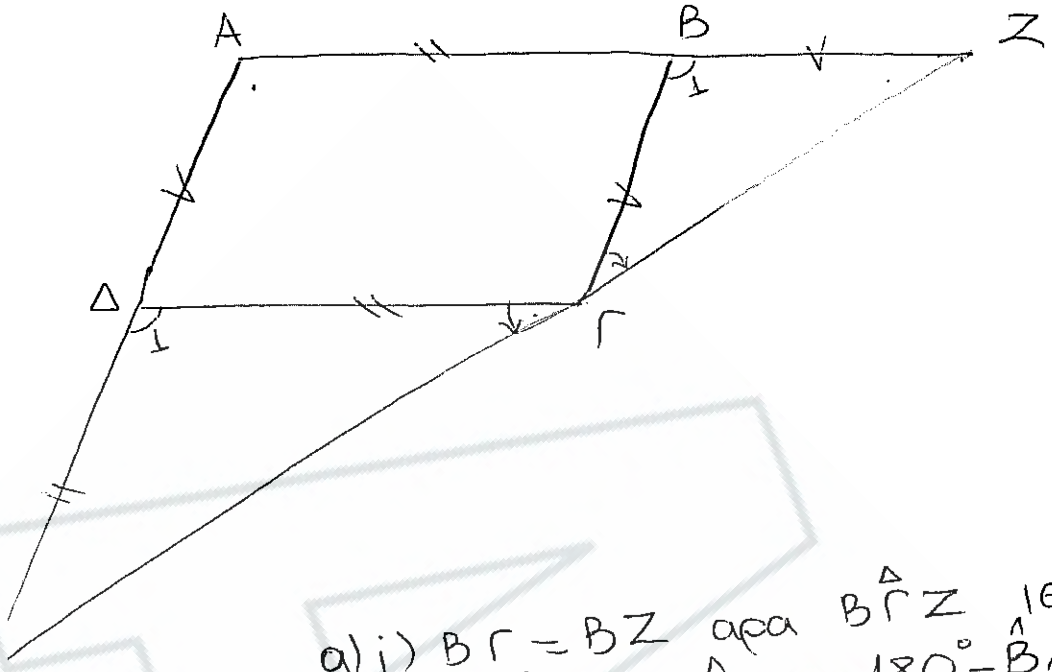
άρα: $\hat{\Delta}_3 = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2}$ άρα $A\hat{\Delta}Z$ ισοσκελές με $\boxed{AZ = \Delta Z}$

$\hat{\Delta}_1 = \frac{B\hat{\Delta}A}{2} \overset{\text{εξωτ. του } A\hat{\Delta}\Gamma}{=} \frac{\hat{A}_2 + \hat{\Gamma}}{2} = \frac{\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{A}}{2}}{2} = \frac{\hat{A}}{2} = \hat{\Gamma}$ δηλ. έχω εντός εκτός και επί τ' αυτά γωνίες ίσες άρα: ΔΕ // ΑΓ

β) Τότε: ΑΖΔΕ ▱ και έχει ΑΖ = ΔΖ άρα ρόμβος

και $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Delta}_1 = \frac{\hat{A}}{2} = \hat{A}_1$ άρα $E\hat{A}\Delta$ ισοσκελές

γ) Οι διαγώνιοι του ρόμβου ΑΖΔΕ διχοτομούνται



α) i) $BΓ = BZ$ άρα $\overset{\triangle}{BΓZ}$ ισοσκελές
με $B\hat{Γ}Z = B\hat{Z}Γ = \frac{180° - \hat{B}_1}{2} = \frac{\hat{B}}{2}$.

$ΔΓ = ΔΕ$ άρα $\overset{\triangle}{ΔΕΓ}$ ισοσκελές
με $Δ\hat{Γ}Ε = Δ\hat{Ε}Γ = \frac{180° - \hat{Δ}_1}{2} = \frac{\hat{Δ}}{2}$

όμως ΑΒΓΔ # άρα $\hat{B} = \hat{Δ}$

Τότε: $B\hat{Γ}Z = Δ\hat{Γ}Ε$.

ii) $Ε\hat{Γ}Z = \underbrace{Δ\hat{Γ}Ε} + \hat{Γ} + B\hat{Γ}Z \overset{α)}{=} B\hat{Z}Γ + \hat{Γ} + B\hat{Γ}Z =$
$= B\hat{Z}Γ + \hat{B}_1 + B\hat{Γ}Z \overset{\overset{\triangle}{BΓZ}}{=} 180°$ ($\hat{B}_1 = \hat{Γ}$ ως εντός εναλλάξ).

άρα Ε, Γ, Ζ συνευθειακά

β) $B\hat{Γ}Z = Δ\hat{Ε}Γ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά
δεν γίνεται γιατί δεν ξέρω ότι ΖΕ
είναι ευθεία.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και στην προέκταση της ΑΔ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΔΕ = ΔΓ ενώ στην προέκταση της ΑΒ θεωρούμε σημείο θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΒΖ = ΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $B\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{\Gamma}E$. (Μονάδες 10)

ii. τα σημεία Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

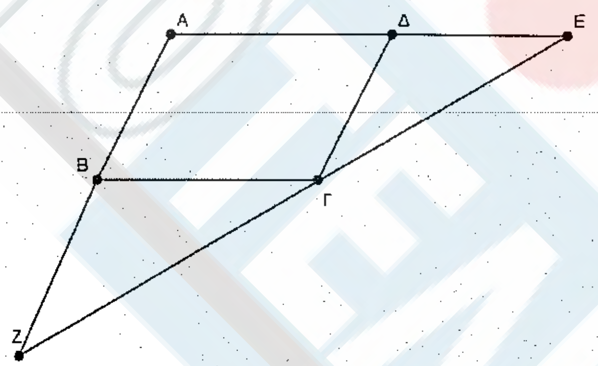
β) Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι τα σημεία Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά ανέπτυξε τον παρακάτω συλλογισμό. « Έχουμε:

$B\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{E}\Gamma$ (ως εντός εκτός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΖΕ) και

$B\hat{\Gamma}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}E$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ).

Όμως $\Delta\hat{\Gamma}E + \Gamma\hat{\Delta}E + \Delta\hat{E}\Gamma = 180^o$ (ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΔΕΓ). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα: $\Delta\hat{\Gamma}E + B\hat{\Gamma}\Delta + B\hat{\Gamma}Z = 180^o$. Οπότε τα σημεία Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά.»

Όμως ο καθηγητής υπέδειξε ένα λάθος στο συλλογισμό αυτό. Να βρείτε το λάθος στο συγκεκριμένο συλλογισμό. (Μονάδες 5)



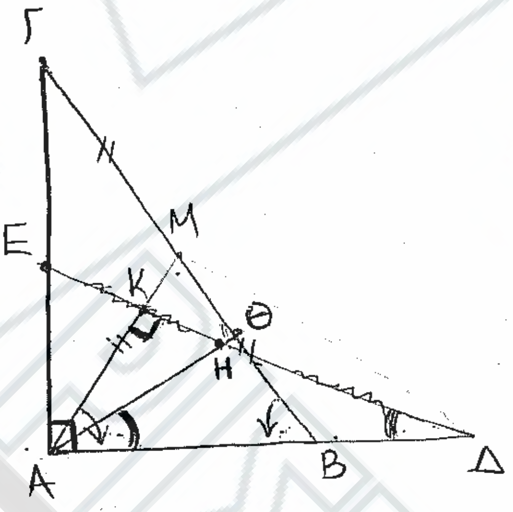
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή. Φέρουμε τη διάμεσό του ΑΜ και σε τυχαίο σημείο Κ αυτής φέρουμε κάθετη στην ΑΜ η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Αν Η είναι το μέσο του ΔΕ να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B} = B\hat{A}M$. (Μονάδες 8)

β) $A\hat{\Delta}H = \Delta\hat{A}H$. (Μονάδες 9)

γ) Η ευθεία ΑΗ τέμνει κάθετα τη ΒΓ. (Μονάδες 8)



α) $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$: έχω ΑΜ διάμεσο, άρα $AM = \frac{B\Gamma}{2} = BM = M\Gamma$

άρα $\overset{\Delta}{ABM}$ ισοσκελές, με $\hat{B} = B\hat{A}M$.

β) $\overset{\Delta}{AE\Delta}$: έχω ΑΗ διάμεσο, άρα $AH = \frac{E\Delta}{2} = H\Delta = EH$

άρα: $\overset{\Delta}{AH\Delta}$ ισοσκελές, με $A\hat{\Delta}H = \Delta\hat{A}H$.

γ) $A\hat{\Theta}M$ είναι εξωτερική του $\overset{\Delta}{A\Theta B}$, άρα

$A\hat{\Theta}M = \hat{B} + H\hat{A}B \overset{\alpha)\beta)}{=\!=} B\hat{A}M + A\hat{\Delta}H \overset{\hat{A}K\Delta}{=\!=} 90^\circ$

άρα $A\Theta \perp B\Gamma$.

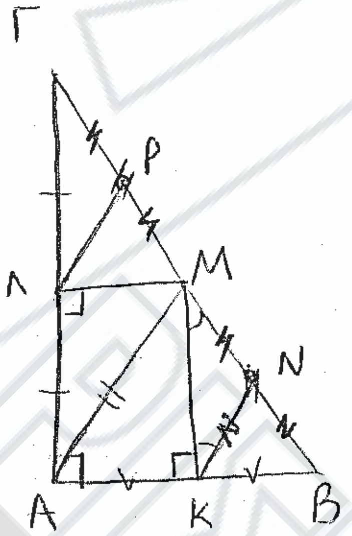
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και ΑΜ η διάμεσός του. Από το Μ φέρουμε ΜΚ κάθετη στην ΑΒ και ΜΛ κάθετη στην ΑΓ. Αν Ν, Ρ είναι τα μέσα των ΒΜ και ΓΜ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $N\hat{K}M = N\hat{M}K$ (Μονάδες 7)

β) Η ΜΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΝΜΑ. (Μονάδες 9)

γ) ΑΜ = ΚΝ + ΛΡ. (Μονάδες 9)



α) $\overset{\triangle}{MKB}$: έχω ΚΝ διάμεσο άρα $KN = \frac{MB}{2} = MN = BN$

άρα: $\overset{\triangle}{KMN}$ ισοσκελές με $N\hat{K}M = N\hat{M}K$

β) $\overset{\triangle}{AMB}$: $\left.\begin{array}{l} N \text{ μέσο } BM \\ K \text{ μέσο } AB \end{array}\right\}$ άρα $KN \overset{=}{\parallel} \frac{AM}{2}$

τότε: $N\hat{K}M = A\hat{M}K$ ως εντός εναλλάξ.

Άρα: $N\hat{M}K = A\hat{M}K$ δηλ. ΜΚ διχοτόμος της ΝΜΑ

γ) $\overset{\triangle}{A\Gamma M}$: $\left.\begin{array}{l} \Lambda \text{ μέσο } A\Gamma \\ P \text{ μέσο } M\Gamma \end{array}\right\}$ άρα $\Lambda P \overset{=}{\parallel} \frac{AM}{2}$

Τότε: $KN + \Lambda P = \frac{AM}{2} + \frac{AM}{2} = AM$.

ΘΕΜΑ 4

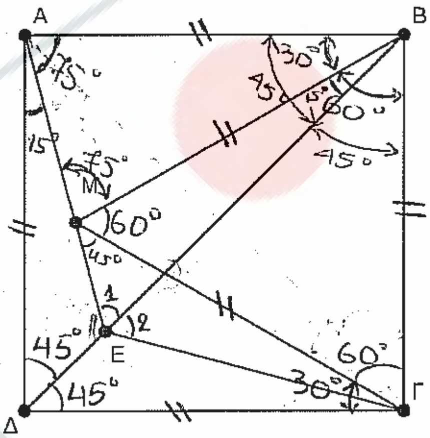
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και εντός αυτού ισόπλευρο τρίγωνο ΜΒΓ. Αν η προέκταση της ΑΜ τέμνει την ΒΔ στο σημείο Ε, να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\hat{A}E = 15^o$. (Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΔΕΓ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

γ) Η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΓΜ. (Μονάδες 9)

γ) $\Delta\hat{\Gamma}M = 30^\circ$ και
$\Delta\hat{\Gamma}E = 15^\circ$ άρα
$E\hat{\Gamma}M = 30^\circ - 15^\circ = 15^\circ$
Δηλ. ΓΕ διχοτόμος
της $\Delta\hat{\Gamma}M$.



α) Το $\overset{\triangle}{MB\Gamma}$ είναι ισόπλευρο, άρα έχει όλες τις γωνίες του 60°. Τότε: $A\hat{B}M = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$
$\overset{\triangle}{AMB}$ ισοσκελές, αφού $AB = BM$, με $A\hat{B}M = 30^\circ$
και $B\hat{A}M = A\hat{M}B = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$.
Τότε: $\Delta\hat{A}E = 90^\circ - 75^\circ = 15$.

β) $E\hat{M}\Gamma = 180^\circ - 75^\circ - 60^\circ = 45^\circ$
$\overset{\triangle}{MEB}$: $M\hat{E}B = 180^\circ - 105^\circ - 15^\circ = 60^\circ$
$\overset{\triangle}{A\Delta E}$: $A\hat{E}\Delta = 180^\circ - 45^\circ - 15^\circ = 120^\circ$
$M\hat{E}B = B\hat{E}\Gamma = 60^\circ$ (αφού ΑΕ = ΕΓ γιατί Ε σημείο της μεσοκαθέτου της ΑΓ)

$\Delta\hat{E}\Gamma = 360^\circ - 120^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
$\overset{\triangle}{\Delta E\Gamma}$: $E\hat{\Gamma}\Delta = 180^\circ - 120^\circ - 45^\circ = 15^\circ$
Συγκρίνω $\overset{\triangle}{A\Delta E}$ με $\overset{\triangle}{\Delta E\Gamma}$ έχω:
1) ΑΔ = ΔΓ αφού ΑΒΓΔ τετράγωνο
2) $E\hat{\Delta}A = E\hat{\Delta}\Gamma = 45^\circ$
3) $\Delta\hat{A}E = E\hat{\Gamma}\Delta = 15^\circ$

άρα ισχύει Γ-Π-Γ
άρα $\Delta\hat{A}E = \Delta\hat{E}\Gamma$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΕΒ, ΑΓΔ. Ονομάζουμε Ζ το σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων ΒΔ, ΓΕ.

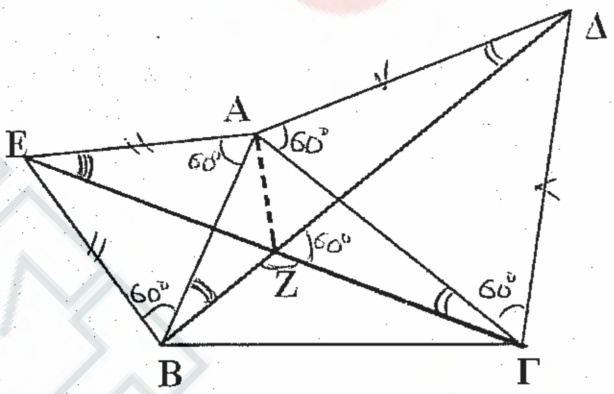
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΑΒΔ είναι ίσα και να γράψετε τα ζεύγη των ίσων γωνιών

(Μονάδες 10)

β) Τα τετράπλευρα ΑΖΓΔ, ΑΖΒΕ είναι εγγράψιμα. (Μονάδες 10)

γ) Η γωνία $B\hat{Z}\Gamma$ είναι 120^0. (Μονάδες 5)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{AE\Gamma}$ με $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ έχω:

1) $AE = AB$ αφού $\overset{\triangle}{AEB}$ ισόπλευρο

2) $A\Gamma = A\Delta$ αφού $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$ —||—

3) $E\hat{A}\Gamma = B\hat{A}\Delta$ ως αθροισμα ισων γωνιών

αρα ισχυει Π–Γ–Π αρα $\overset{\triangle}{AE\Gamma} = \overset{\triangle}{AB\Delta}$

άρα: $A\hat{E}\Gamma = A\hat{B}\Delta$ και $A\hat{\Delta}B = A\hat{\Gamma}E$.

β) Η ΑΖ φαίνεται από τις απεναντι κορυφές υπό ισες γωνίες, αρα ΑΖΓΔ εγγράψιμο.

Όμοια: ΑΖΒΕ εγγράψιμο.

γ) $\Delta\hat{Z}\Gamma = \Gamma\hat{A}\Delta = 60°$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ΓΔ.

$B\hat{Z}\Gamma = 180° - 60° = 120°$.

ΘΕΜΑ 4

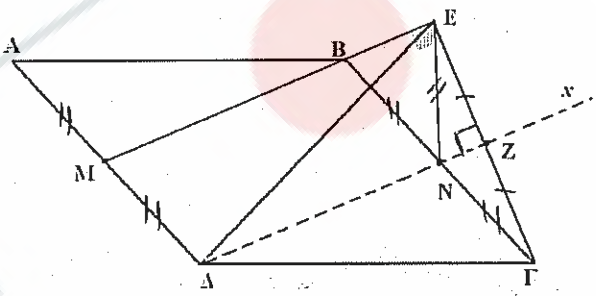
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Θεωρούμε το μέσο Μ της πλευράς ΑΔ και ΓΕ κάθετος από τη κορυφή Γ στην ευθεία ΜΒ (ΓΕ ⊥ ΜΒ) . Η παράλληλη από την κορυφή Δ στην ευθεία ΜΒ (Δx // ΜΒ) τέμνει τις ΒΓ και ΓΕ στα σημεία Ν , Ζ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΜΒΝΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

β) Το σημείο Ζ είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΓΕ. (Μονάδες 9)

γ) ΔΕ=ΔΓ. (Μονάδες 9)



α) Δx // MB και MB ⊥ ΓΕ άρα Δx ⊥ ΓΕ
Έχω MB // ΔΝ και ΜΔ // ΒΝ άρα ΜΒΝΔ #.

β) $\overset{\triangle}{B E \Gamma}$: έχω $NE = \frac{B\Gamma}{2}$ άρα $\overset{\triangle}{N E \Gamma}$ ισοσκελές με ΝΖ ύψος, άρα ΝΖ και διάμεσος, δηλ. Ζ μέσο του ΕΓ.

γ) ΔΖ μεσοκάθετος του ΕΓ, άρα ΔΕ = ΔΓ.

ΘΕΜΑ 4

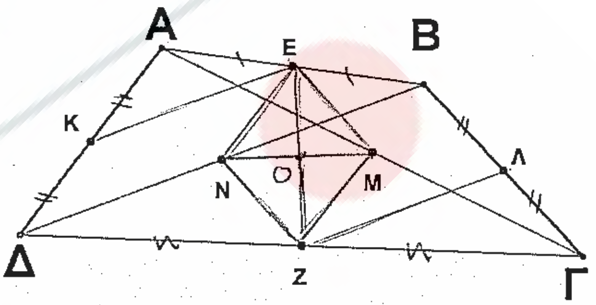
Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΔ=ΒΓ. Αν Ε,Λ,Ζ,Κ,Ν,Μ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΔΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΕΜΖΝ ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Η ΕΖ είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΜΝ. (Μονάδες 7)

γ) ΚΕ=ΖΛ (Μονάδες 5)

δ) Τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΛ, ΜΝ, ΕΖ διέρχονται από ίδιο σημείο. (Μονάδες 5)



α) $\overset{\Delta}{AB\Delta}$: Ε μέσο ΑΒ, Ν μέσο ΔΒ } άρα $NE = \parallel \frac{A\Delta}{2}$

$\overset{\Delta}{AB\Gamma}$: Ε μέσο ΑΒ, Μ μέσο ΑΓ } άρα $ME = \parallel \frac{B\Gamma}{2}$

όμως: ΑΔ = ΒΓ } άρα: ΜΕ = ΝΕ

$\overset{\Delta}{A\Delta\Gamma}$: Μ μέσο ΑΓ, Ζ μέσο ΔΓ } άρα $MZ = \parallel \frac{A\Delta}{2} \parallel NE$

$\overset{\Delta}{\Delta B\Gamma}$: Ν μέσο ΔΒ, Ζ μέσο ΔΓ } άρα $NZ = \parallel \frac{B\Gamma}{2} \parallel ME$

άρα ΜΕΝΖ # και ΜΕ=ΝΕ
άρα είναι ρόμβος.

β) Οι διαγώνιοι του ρόμβου ΜΕΝΖ διχοτομούνται και τέμνονται ⊥ άρα ΕΖ μεσοκάθετος του ΜΝ.

γ) $\overset{\Delta}{A\Delta B}$: Κ μέσο ΑΔ, Ε μέσο ΑΒ { $KE = \parallel \frac{\Delta B}{2}$

$\overset{\Delta}{\Delta B\Gamma}$: Ζ μέσο ΔΓ, Λ μέσο ΒΓ { $Z\Lambda = \parallel \frac{\Delta B}{2}$

άρα ΚΕ = ΖΛ.
και ΚΕ ∥ ΖΛ
άρα ΚΕΛΖ #

δ) και οι διαγώνιοι του διχοτομούνται άρα Ο μέσο ΚΛ, Ο μέσο ΕΖ, Ο μέσο ΝΜ, άρα συντρέχουν στο Ο.

ΘΕΜΑ 4

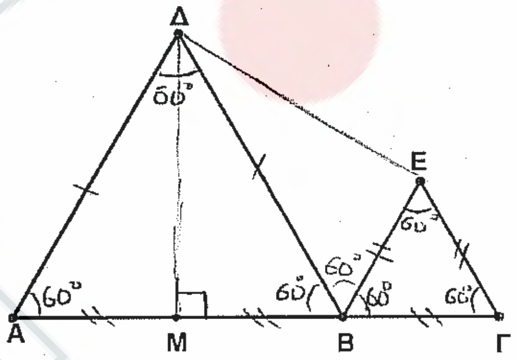
Έστω Α, Β, Γ συνευθειακά σημεία με ΑΒ=2ΒΓ. Θεωρούμε το μέσο Μ της ΑΒ. Προς το ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΔΒ, ΒΕΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι τραπέζιο (ΑΔ//ΒΕ). (Μονάδες 9)

β) Τα τρίγωνα ΔΜΒ, ΔΕΒ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΔΜΒΕ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 8)



α) $\hat{A} = E\hat{B}\Gamma = 60^\circ$ δηλ. εχω εντος εκτος και επί τ' αυτά ίσες αρα: ΑΔ//ΒΕ
αρα ΑΔΕΒ τραπεζιο.

β) Συγκρινω $\overset{\triangle}{\Delta M B}$ με $\overset{\triangle}{\Delta B E}$ εχω:
1) ΔΒ κοινη πλευρα
2) ΜΒ = ΒΕ υποθεση
3) $\Delta\hat{B}M = \Delta\hat{B}E = 60^\circ$
αρα ισχυει Π-Γ-Π αρα $\overset{\triangle}{\Delta \hat{M} B} = \overset{\triangle}{\Delta B E}$

γ) Αφού $\overset{\triangle}{\Delta \hat{M} B} = \overset{\triangle}{\Delta \hat{B} E}$ θα εχω $\Delta\hat{E}B = \hat{M} = 90^\circ$
(αφού ΔΜ διάμεσος + ύψος)
Τότε: $\hat{M} + \Delta\hat{E}B = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$
αρα ΔΜΒΕ εγγράψιμο.

ΘΕΜΑ 4

Έστω κύκλος (Ο, ρ) και Ε το μέσον του τόξου του ΒΓ. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στο κύκλο στο Ε. Οι προεκτάσεις των ΟΒ, ΟΓ τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα . Να αποδείξετε ότι :

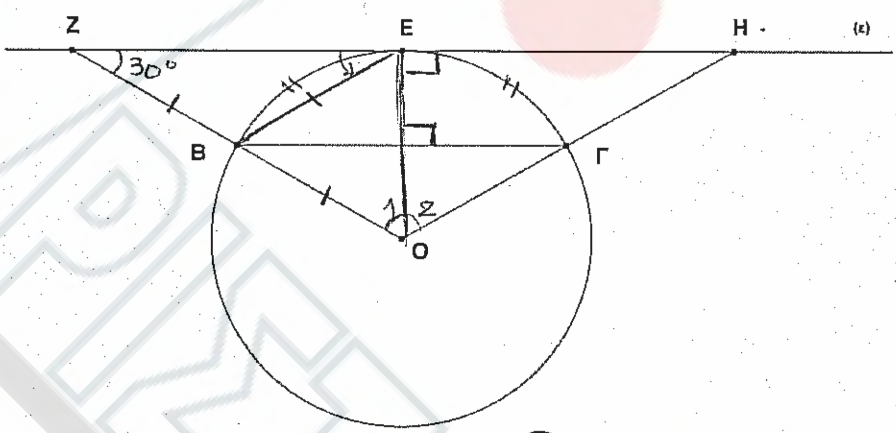
α) ΒΓ//ΖΗ (Μονάδες 5)

β) ΟΖ=ΟΗ (Μονάδες 5)

γ) Αν Β μέσον της ΟΖ

i. να αποδείξετε ότι $B\hat{E}Z = \dfrac{Z\hat{O}H}{4}$ (Μονάδες 8)

ii. να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΟΗ. (Μονάδες 7)



α) ΟΕ ⊥ ε και αφού $\widehat{BE} = \widehat{E\Gamma}$ θα έχω ΒΕ=ΕΓ και ΟΒ=ΟΓ δηλ. τα σημεία Ε, Ο ισαπέχουν από τα άκρα του ΒΓ άρα ανήκουν στη μεσοκάθετο αυτού δηλ. ΟΕ ⊥ ΒΓ. Άρα ΒΓ ∥ ε, δηλ. ΒΓ ∥ ΖΗ.

β) Συγκρίνω $O\overset{\triangle}{E}Z$ με $O\overset{\triangle}{E}H$ έχω:

1) ορθογώνια

2) ΟΕ κοινή πλευρά

3) $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ ως επίκεντρες που βαίνουν σε ίσα τόξα

άρα ισχύει Γ-Π-Γ άρα $O\overset{\triangle}{E}Z = O\overset{\triangle}{E}H$ άρα ΟΖ=ΟΗ.

γ) i) $O\overset{\triangle}{E}Z$: ΒΕ διάμεσος, άρα $BE = \dfrac{ZO}{2} = ZB = BO$

και $OE = \dfrac{OZ}{2}$ άρα: $\hat{Z} = 30°$ άρα και $B\hat{E}Z = 30°$

και $\hat{O}_1 = 60° = \hat{O}_2$. Δηλ. $Z\hat{O}H = 120°$

άρα: $B\hat{E}Z = \dfrac{Z\hat{O}H}{4}$.

ii) όμοια: $\hat{H} = 30°$.

ΘΕΜΑ 4

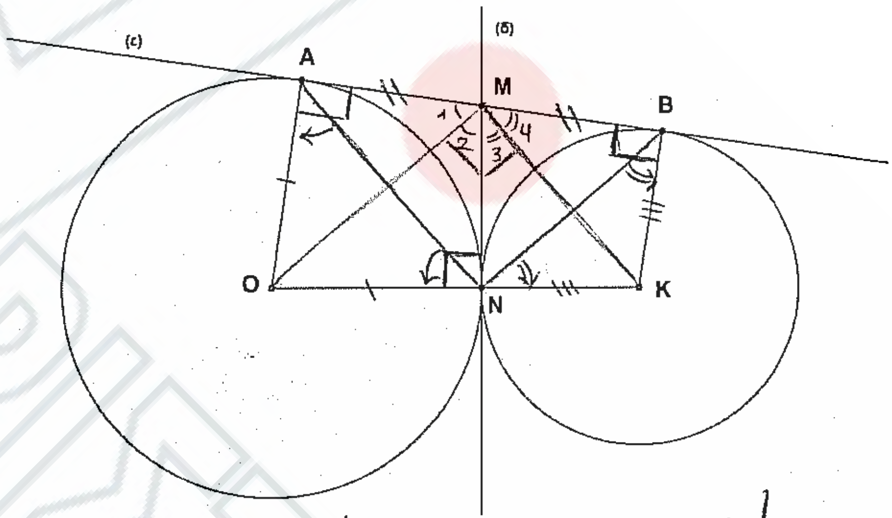
Δύο κύκλοι (O, ρ_1), (K, ρ_2) εφάπτονται εξωτερικά στο Ν. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία Α, Β αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο Ν τέμνει την (ε) στο Μ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το Μ είναι μέσον του ΑΒ. (Μονάδες 7)

β) $O\hat{M}K = 90^0$ (Μονάδες 9)

γ) $A\hat{N}B = 90^0$ (Μονάδες 9)



α) $MA = MN$ εφαπτόμενες από το Μ
$MB = MN$ —\\—

άρα $MA = MB$ δηλ. Μ μέσο ΑΒ.

β) $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ και $\hat{M}_3 = \hat{M}_4$ γιατί η διάκεντρος ΜΟ και ΜΚ διχοτομούν τις γωνίες των εφαπτομένων.

Τότε: $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 + \hat{M}_3 + \hat{M}_4 = 180°$

$2\hat{M}_2 + 2\hat{M}_3 = 180°$

$\hat{M}_2 + \hat{M}_3 = 90°$

δηλ. $O\hat{M}K = 90°$

γ) $A\hat{N}B$: έχω ΝΜ διάμεσο με $MN = AM = \frac{AB}{2}$

άρα $A\hat{N}B$ ορθογώνιο με ΑΒ υποτείνουσα, άρα $A\hat{N}B = 90°$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από το μέσο Μ του ΒΓ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο με το ΒΑ και ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο με το ΓΑ (τα σημεία Δ και Ε είναι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη ΒΓ και το σημείο Α). Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

β) Η περίμετρος του τριγώνου ΜΔΕ είναι ίση με την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 9)

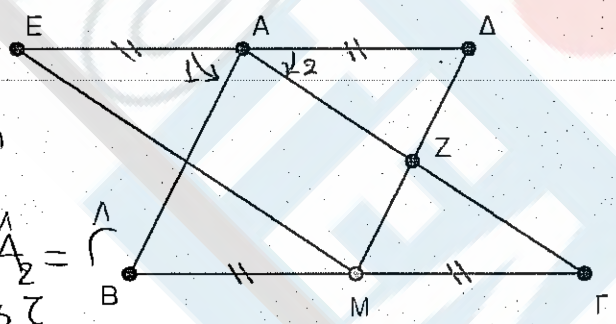
γ) Όταν ένας καθηγητής έθεσε το ερώτημα αν τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά στους μαθητές του, ένας από αυτούς έκανε το παρακάτω σχήμα και απάντησε ως εξής:

(εντός εναλλάξ των ΑΒ//ΜΔ που τέμνονται από ΑΖ)

$A\hat{\Delta}Z = E\hat{A}B$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΑΒ//ΜΔ που τέμνονται από ΔΕ)

Όμως (άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΖ). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε: $E\hat{A}B + B\hat{A}\Gamma + \Delta\hat{A}Z = 180^0$. Οπότε Δ,Ε,Α συνευθειακά.

Όμως ο καθηγητής είπε ότι υπάρχει λάθος στο συλλογισμό. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή; (Μονάδες 6)



α) ΑΒ∥= ΔΜ άρα ΑΒΜΔ #, και ΜΕ =∥ ΑΓ άρα ΕΑΓΜ #

Τότε $\hat{A}_1 = \hat{B}$ και $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma}$ ως εντός εναλλάξ.

$E\hat{A}\Delta = \hat{A}_1 + \hat{A} + \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{A} + \hat{\Gamma} \overset{AB\hat{\Gamma}}{=} 180^\circ$ άρα Ε, Α, Δ συνευθειακά

β) περίμετρος $M\hat{\Delta}E$ = ΜΕ + ΜΔ + ΕΔ = ΑΓ + ΑΒ + ΒΓ.

γ) ΑΒ // ΜΔ όμως δεν ξέρω ότι η ΕΑΔ είναι ευθεία άρα είναι λάθος ο ισχυρισμός.

ΘΕΜΑ 4

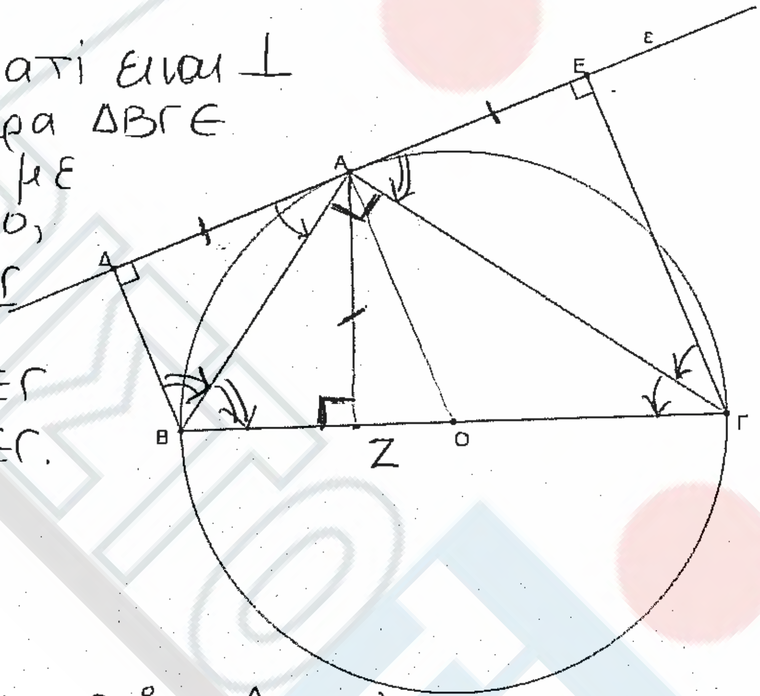
Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο, με διάμετρο ΒΓ. Από σημείο Α του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη (ε) του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$.

Από τα σημεία Β και Γ φέρουμε τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ κάθετα στην ευθεία (ε).

α) Να αποδείξετε ότι ΒΑ και ΓΑ είναι διχοτόμοι των γωνιών $\Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma$ και $\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{B}$ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

β) Αν ΑΖ είναι ύψος του τριγώνου $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$, να αποδείξετε ότι $\mathrm{A\Delta = AE = AZ}$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{B\Delta + \Gamma E = B\Gamma}$. (Μονάδες 9)



γ) ΔΒ//ΕΓ γιατί είναι ⊥ στην ε, άρα ΔΒΓΕ τραπέζιο με ΑΟ διάμεσο,

άρα: $OA = \frac{\Delta B + E\Gamma}{2}$

$2OA = \Delta B + E\Gamma$

$B\Gamma = \Delta B + E\Gamma$.

α) $\overset{\Delta}{\Delta BA}$: $\Delta\hat{B}A = 90^\circ - \Delta\hat{A}B$

$A\hat{B}\Gamma = E\hat{A}\Gamma$ (ως γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης)

και: $E\hat{A}\Gamma = 90^\circ - \Delta\hat{A}B$

άρα: $\Delta\hat{B}A = A\hat{B}\Gamma$, δηλ. ΒΑ διχοτόμος της $\Delta\hat{B}\Gamma$.

Όμοια: έχω ΓΑ διχοτόμος της $E\hat{\Gamma}B$.

β) Συγκρίνω $\overset{\Delta}{A\Delta B}$ με $\overset{\Delta}{ABZ}$ έχω:

1) ορθογώνια

2) ΒΑ κοινή πλευρά

3) $\Delta\hat{B}A = A\hat{B}Z$ από α)

άρα ισχύει υποτ + οξ. γωνία άρα $\overset{\Delta}{A\Delta B} = \overset{\Delta}{ABZ}$

άρα: ΑΔ = ΑΖ. Όμοια: ΑΖ = ΑΕ.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με $\hat{\Gamma} = 120^0$. Έστω ότι ΑΕ και ΑΖ είναι οι αποστάσεις του σημείου Α στις πλευρές ΓΔ και ΓΒ αντίστοιχα.

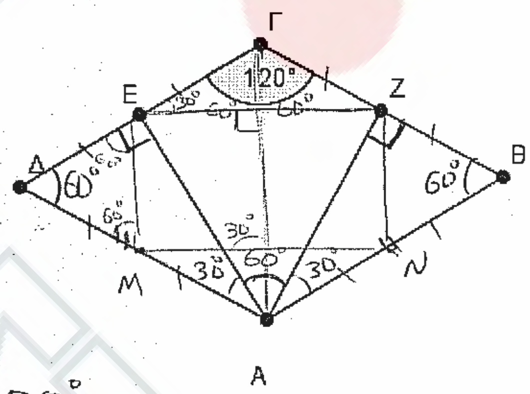
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΓΔ και ΓΒ αντίστοιχα.

(Μονάδες 8)

ii. $A\Gamma \perp EZ$. (Μονάδες 8)

β) Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΜΝΖ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)



α) i) $\hat{\Delta} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ ως εντός και επί τ' αυτά

$\hat{\Delta} + 120^\circ = 180^\circ$

$\hat{\Delta} = 60^\circ = \hat{B}$

$E\hat{A}Z = 360^\circ - 90^\circ - 120^\circ - 90^\circ = 60^\circ$

$\Delta\hat{\Gamma}A = 60^\circ$ και $\Delta\hat{A}\Gamma = 60^\circ$ άρα $\overset{\triangle}{\Delta A \Gamma}$ ισόπλευρο

με ΕΑ ύψος, άρα διάμεσος + διχοτόμος

δηλ. Ε μέσο ΔΓ. Όμοια Ζ μέσο ΒΓ.

ii) $\overset{\triangle}{\Gamma\Delta B}$: Ε μέσο ΔΓ, Ζ μέσο ΓΒ } άρα $EZ =\parallel \frac{\Delta B}{2}$ και $A\Gamma \perp \Delta B$ } άρα: $EZ \perp A$

β) $\overset{\triangle}{\Delta B A}$: Μ μέσο ΔΑ, Ν μέσο ΑΒ } άρα $MN =\parallel \frac{\Delta B}{2} =\parallel EZ$

άρα ΜΕΖΝ #

$\Delta\hat{E}M = 60^\circ$ και $\Gamma\hat{E}Z = 30^\circ$ } άρα $E\hat{M}Z = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$

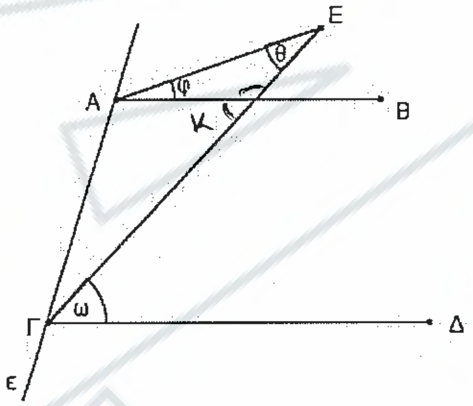
άρα: ΜΕΖΝ ορθογώνιο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ευθεία ε του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα ΑΒ και ΓΔ καθώς και ένα τυχαίο σημείο Ε βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το Ε είναι εκτός των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ τότε: $\hat{\omega} = \hat{\varphi} + \hat{\theta}$



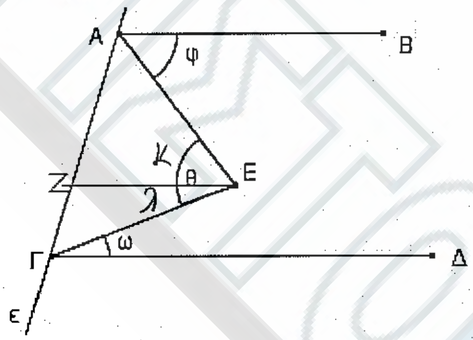
$\begin{cases} \hat{K} = \hat{\omega} \text{ ως εντός εναλλάξ} \\ \hat{K} = \hat{\varphi} + \hat{\theta} \text{ (είναι εξωτερική του τριγώνου)} \end{cases}$

άρα: $\hat{\omega} = \hat{\varphi} + \hat{\theta}$.

(Μονάδες 10)

β) Αν το Ε είναι ανάμεσα στα τμήματα ΑΒ και ΓΔ και ΕΖ//ΑΒ, τότε να αποδείξετε ότι

$\hat{\theta} = \hat{\omega} + \hat{\varphi}$



(Μονάδες 15)

$\hat{K} = \hat{\varphi}$ ως εντός εναλλάξ

$\hat{\lambda} = \hat{\omega}$ -״-

Τότε: $\hat{\theta} = \hat{K} + \hat{\lambda} = \hat{\varphi} + \hat{\omega}$.

ΘΕΜΑ 4

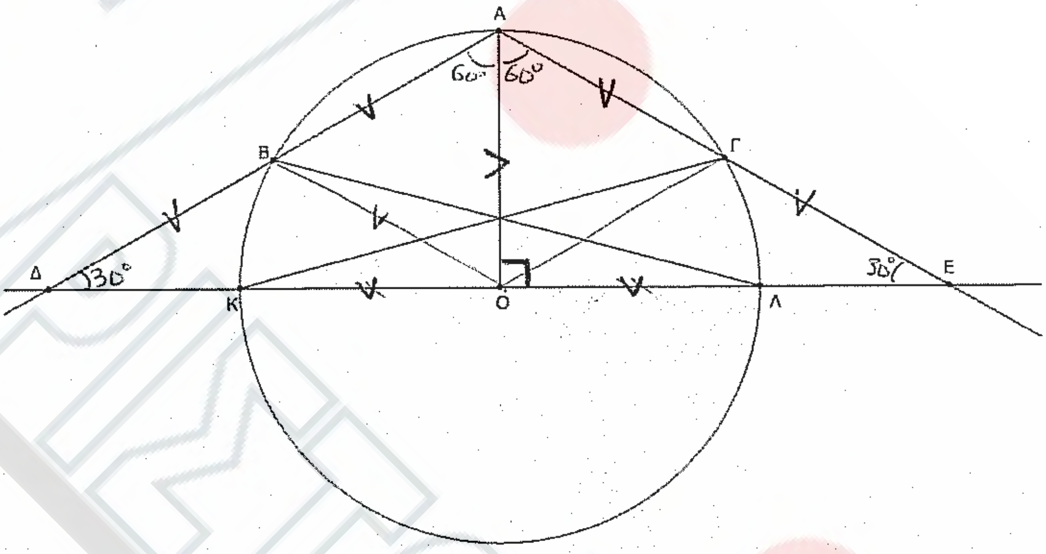
Έστω κύκλος με κέντρο Ο και διάμετρο ΚΛ. Έστω Α σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα ΟΑ να είναι κάθετη στην ΚΛ. Φέρουμε τις χορδές $AB = A\Gamma = \rho$. Έστω Δ και Ε τα σημεία τομής των προεκτάσεων των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα με την ευθεία της διαμέτρου ΚΛ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία ΒΑΓ είναι 120^o. (Μονάδες 7)

β) Τα σημεία Β και Γ είναι μέσα των ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα. (Μονάδες 9)

γ) $K\Gamma = \Lambda B$. (Μονάδες 9)



α) $OA = AB = OB = \rho$ άρα $O\overset{\triangle}{A}B$ ισόπλευρο

άρα $B\hat{A}O = 60^o$.

$OA = A\Gamma = O\Gamma = \rho$ άρα $O\overset{\triangle}{A}\Gamma$ ισόπλευρο

άρα $O\hat{A}\Gamma = 60^o$.

Άρα: $B\hat{A}\Gamma = 60^o + 60^o = 120^o$.

β) $\underline{O\overset{\triangle}{A}\Delta}$: $O\hat{A}B = 60^o$, άρα $\hat{\Delta} = 30^o$ άρα $OA = \frac{A\Delta}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A\Delta = 2OA = 2\rho$ και $AB = \rho$ άρα $\Delta B = \rho$

δηλ. Β μέσο του ΑΔ.

<u>Όμοια:</u> Γ μέσο του ΑΕ.

γ) Συγκρίνω $\Delta\overset{\triangle}{B}\Lambda$ με $K\overset{\triangle}{E}\Gamma$ έχω:

1) $\Delta B = \Gamma E$ από β)

2) $\hat{\Delta} = \hat{E} = 30^o$

3) $\Delta\Lambda = KE$ ως άθροισμα ίσων τμημάτων

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\Delta\overset{\triangle}{B}\Lambda = K\overset{\triangle}{E}\Gamma$

άρα $K\Gamma = \Lambda B$.

ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ με διάμεσο ΑΜ τέτοια ώστε ΑΜ=ΑΒ. Φέρουμε το ύψος του ΑΚ και το προεκτείνουμε (προς το Κ) κατά τμήμα $\mathrm{K\Delta} = \mathrm{AK}$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά τμήμα ΜΕ=ΑΜ.

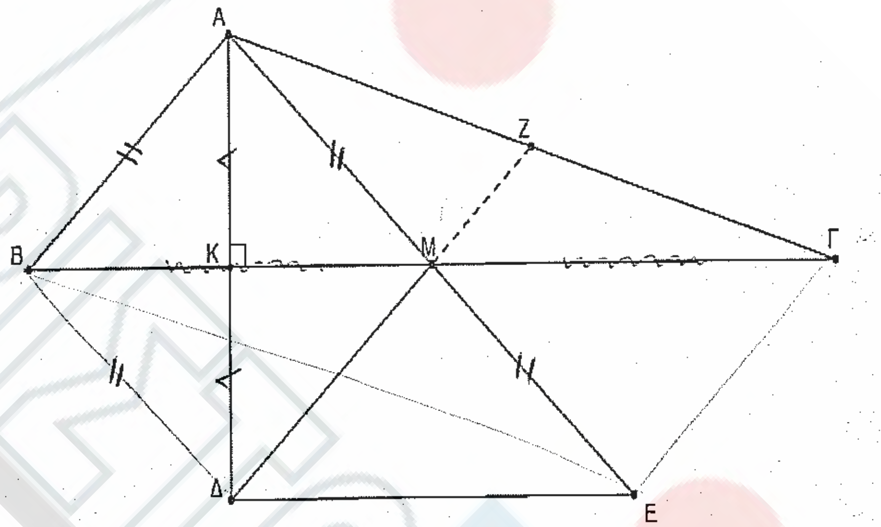
Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\mathrm{E} \perp \mathrm{A}\Delta$ και $\Delta\mathrm{E} = 2\mathrm{KM}$ (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

γ) Το τετράπλευρο ΑΒΔΜ είναι ρόμβος. (Μονάδες 6)

δ) Η προέκταση της ΔΜ τέμνει το ΑΓ στο μέσον του Ζ. (Μονάδες 6)



α) $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta E}}$: Κ μέσο ΑΔ, Μ μέσο ΑΕ, άρα $\mathrm{KM} =\!\!\parallel \frac{\Delta \mathrm{E}}{2}$ και $\mathrm{KM} \perp \mathrm{A}\Delta$, άρα $\Delta\mathrm{E} \perp \mathrm{A}\Delta$.

β) ΑΒΕΓ # αφού οι διαγώνιοι του διχοτομούνται.

γ) ΒΚ μεσοκάθετος του ΑΔ άρα ΒΑ = ΒΔ = ΑΜ
ΜΚ —\\— του ΑΔ άρα ΑΜ = ΜΔ = ΑΒ
άρα το ΑΒΜΔ είναι # και ΑΒ = ΑΜ
άρα ρόμβος.

δ) $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$: Μ μέσο ΒΓ, ΜΖ // ΔΜ, άρα Ζ μέσο ΑΓ.

ΘΕΜΑ 4

Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ επιπλέον ισχύει ΑΒ>ΑΔ, να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

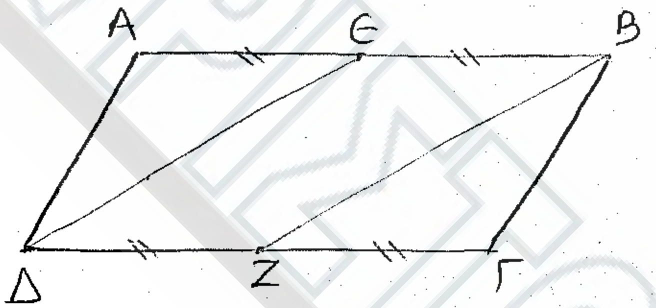
Ισχυρισμός 2: Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα.

Ισχυρισμός 3: Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ισοσκελή.

α) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε. (Μονάδες 16)

β) Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)



α) ① ΕΒ =// ΔΖ ως μισά ίσων πλευρών άρα ΔΕΒΖ ▱.

② Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ΑΔΕ}$ με $\overset{\triangle}{ΒΓΖ}$ έχω:

1) ΑΕ = ΖΓ ως μισά ίσων πλευρών

2) ΑΔ = ΒΓ αφού ΑΒΓΔ ▱

3) $\hat{Α} = \hat{Γ}$ —//—

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\overset{\triangle}{ΑΔΕ} = \overset{\triangle}{ΒΓΖ}$.

③ Για να είναι ισοσκελή πρέπει ΖΓ = ΒΓ δηλ. ΔΓ = 2ΒΓ.

ΘΕΜΑ 4

Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ επιπλέον ισχύει ΑΒ>ΑΔ, να εξετάσετε αν είναι αληθείς ή όχι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

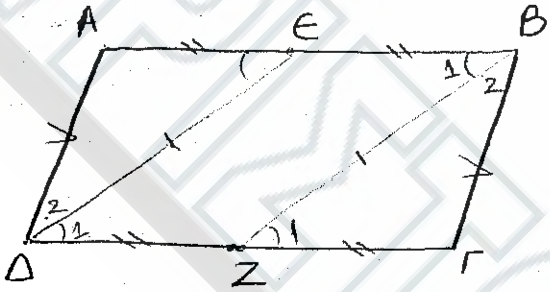
Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: $\widehat{\mathrm{A E \Delta}} = \widehat{\mathrm{B Z \Gamma}}$.

Ισχυρισμός 3: Οι ΔΕ και ΒΖ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\widehat{\Delta}$και$\widehat{\mathrm{B}}$.

α) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε. (Μονάδες 16)

β) Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, ναβρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)



α) ① ΕΒ =∥ ΔΖ άρα το ΔΕΒΖ ▱

② $\hat{A}\hat{E}\Delta = B\hat{Z}\Gamma$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.

③ $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$ αφού ΔΕΒΖ ▱ και $\hat{\Delta} = \hat{B}$ αφού ΑΒΓΔ ▱ } άρα $\hat{\Delta}_2 = \hat{B}_2$ ως διαφορά ίσων γωνιών

β) όμως $\hat{\Delta}_1 = \hat{Z}_1$ ως εντός εκτός και επί τ' αυτά
για να είναι διχοτόμος θα πρέπει
$\hat{Z}_1 = \hat{B}_2$ δηλ. $Z\hat{B}\Gamma$ ισοσκελές
με ΖΓ = ΒΓ δηλ. ΔΓ = 2ΒΓ.

ΘΕΜΑ 4

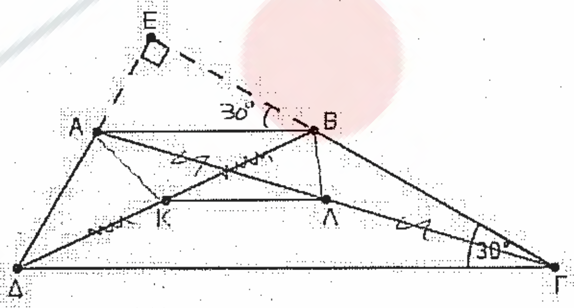
Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με τη γωνία Γ ίση με 30° και έστω Κ, Λ τα μέσα των διαγωνίων του. Οι μη παράλληλες πλευρές του ΔΑ και ΓΒ προεκτεινόμενες τέμνονται κάθετα στο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ=2ΑΕ (Μονάδες 10)

β) ΚΛ=ΑΔ (Μονάδες 10)

γ) Σε ποια περίπτωση το ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)



α) $E\hat{B}A = \hat{\Gamma} = 30°$ ως εντός εκτός και επί τ' αυτά

$A\hat{E}B$: έχω $E\hat{B}A = 30°$ άρα $AE = \frac{AB}{2}$

$2AE = AB$.

β) $\Delta\hat{E}\Gamma$: έχω $\hat{\Gamma} = 30°$ άρα $\Delta E = \frac{\Delta\Gamma}{2} \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 2\Delta E$

$K\Lambda = \frac{\Delta\Gamma - AB}{2} = \frac{2\Delta E - 2AE}{2} = \frac{\cancel{2}(\Delta E - AE)}{\cancel{2}} = \Delta A.$

γ) Αν το ΑΒΓΔ έχει τη βάση ΔΓ = 3ΑΒ, γιατί

τότε: $K\Lambda = \frac{\Delta\Gamma - AB}{2} = \frac{3AB - AB}{2} = \frac{2AB}{2} = AB$

δηλ. ΚΛ=∥ΑΒ άρα ΑΒΛΚ ▱.

ΘΕΜΑ 4

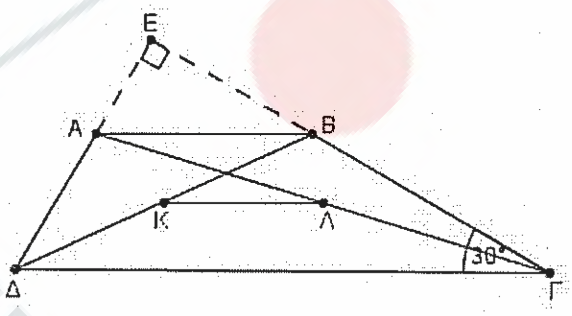
Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με τη γωνία Γ ίση με 30° και έστω Κ, Λ τα μέσα των διαγωνίων του. Οι μη παράλληλες πλευρές του ΔΑ και ΓΒ προεκτεινόμενες τέμνονται κάθετα στο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ=2ΑΕ (Μονάδες 10)

β) ΚΛ=ΑΔ (Μονάδες 10)

γ) Σε ποια περίπτωση το ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)



(ίδιο με πίσω).

ΘΕΜΑ 4

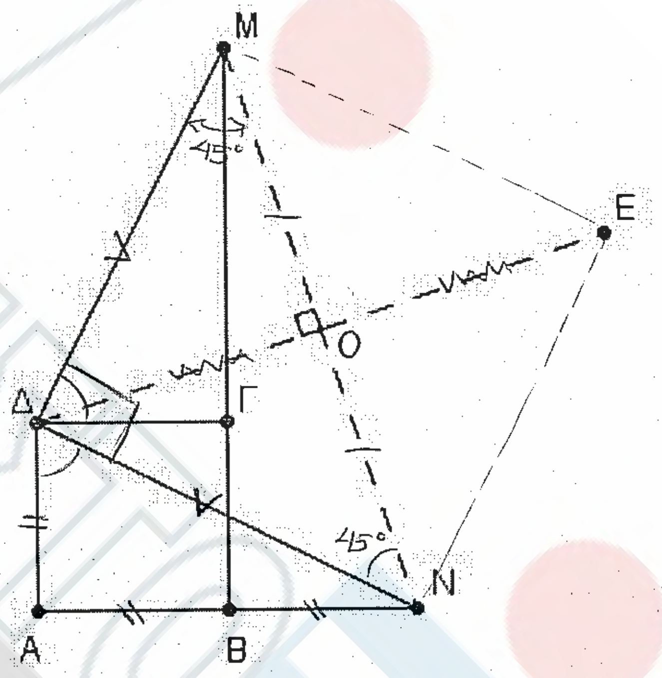
Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα ΒΝ=ΑΒ και την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα ΓΜ=ΑΝ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΔΝ=ΔΜ (Μονάδες 7)

ii. ΔΝ⊥ΔΜ (Μονάδες 10)

β) Αν Ε το συμμετρικό σημείο του Δ ως προς την ευθεία ΜΝ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΜΕΝ είναι τετράγωνο. (Μονάδες 8)



α) i) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{AΔN}$ με $\overset{\triangle}{ΔMΓ}$ έχω:

1) ορθογώνια

2) ΑΔ = ΔΓ αφού ΑΒΓΔ τετράγωνο

3) ΓΜ = ΑΝ υπόθεση

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\overset{\triangle}{AΔN} = \overset{\triangle}{ΔMΓ}$ άρα: ΔΝ = ΔΜ.

ii) Αφού $\overset{\triangle}{AΔN} = \overset{\triangle}{ΔMΓ}$ θα έχω $M\hat{Δ}Γ = N\hat{Δ}A$

Τότε: $M\hat{Δ}N = \underline{M\hat{Δ}Γ} + Γ\hat{Δ}N = N\hat{Δ}A + Γ\hat{Δ}N = 90°$

άρα: ΔΝ ⊥ ΔΜ.

β) $M\overset{\triangle}{Δ}N$ είναι ορθογώνιο ισοσκελές, άρα ΔΟ θα είναι και διάμεσος δηλ. Ο μέσο ΜΝ και μέσο ΔΕ.
Άρα οι διαγώνιοι του ΔΜΕΝ διχοτομούνται άρα είναι # και τέμνονται κάθετα, άρα είναι ρόμβος και έχει $M\hat{Δ}N = 90°$ άρα είναι τετράγωνο.

ΘΕΜΑ 4

Έστω ότι ο κύκλος (Ο, ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου ΡΓΕ στα σημεία Α, Δ και Β.

α) Να αποδείξετε ότι:

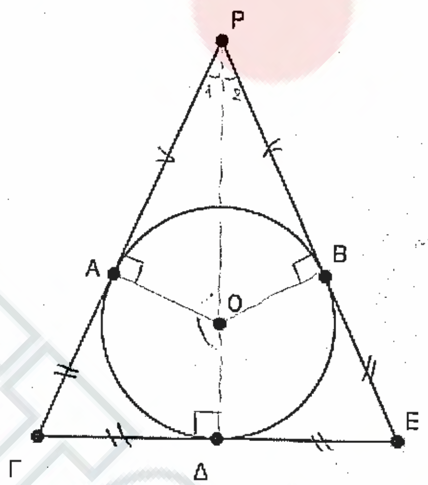
I. $P\Gamma = \Gamma\Delta + AP$ (Μονάδες 6)

II. $P\Gamma - \Gamma\Delta = PE - \Delta E$ (Μονάδες 8)

β) Αν ΑΓ=ΒΕ, να αποδείξετε ότι

I. Το τρίγωνο ΡΓΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

II. Τα σημεία Ρ, Ο και Δ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 5)



α) i) $P\Gamma = PA + A\Gamma = PA + \Gamma\Delta$

(αφού $A\Gamma = \Gamma\Delta$ ως εφαπτόμενες από το Γ).

ii) $P\Gamma = PA + \Gamma\Delta$

$P\Gamma - \Gamma\Delta = PA$ (αφού $PA = PB$ ως εφαπτόμενες από το Ρ)

$P\Gamma - \Gamma\Delta = PB$

$P\Gamma - \Gamma\Delta = PE - BE$ (αφού $BE = \Delta E$ ως εφαπτόμενες από το Ε).

$P\Gamma - \Gamma\Delta = PE - \Delta E$

β) i) $P\Gamma - \Gamma\Delta = PE - \Delta E$

$P\Gamma - \cancel{\Gamma A} = PE - \cancel{BE}$

$P\Gamma = PE$ άρα $\overset{\triangle}{P\Gamma E}$ ισοσκελές

ii) $A\hat{O}\Delta$ είναι εξωτερική του $P\hat{O}A$:

$A\hat{O}\Delta = 90^\circ + \hat{P}_1$

Τότε: $A\hat{O}\Delta + A\hat{O}P = 90^\circ + \underbrace{\hat{P}_1 + A\hat{O}P} \overset{P\hat{O}A}{=\!=} 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

άρα: $P\hat{O}\Delta = 180^\circ$. δηλ. Ρ, Ο, Δ συνευθειακά

ΘΕΜΑ 4

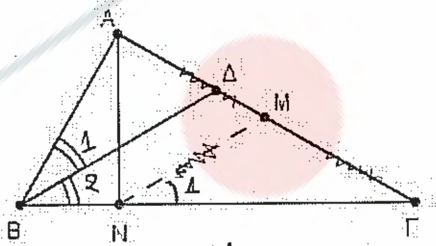
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$, και η διχοτόμος ΒΔ της γωνίας $\hat{B}$. Από το μέσο Μ της ΑΓ φέρνουμε παράλληλη στη διχοτόμο ΒΔ που τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Ν.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

α) Το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) ΑΝ⊥ΒΓ (Μονάδες 10)



α) $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ τότε: $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{\Gamma}$

άρα $B\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$ ισοσκελές

β) $\hat{N}_1 = \hat{B}_2$ ως εντός εκτός και επί τ' αυτά
$\hat{\Gamma} = \hat{B}_2$ από α)

άρα: $\hat{\Gamma} = \hat{N}_1$ άρα $M\hat{N}\Gamma$ ισοσκελές

γ) $A\overset{\triangle}{N}\Gamma$: έχω $MN = \frac{A\Gamma}{2}$ άρα $A\overset{\triangle}{N}\Gamma$ ορθογώνιο με ΑΓ υποτείνουσα, άρα ΑΝ⊥ΒΓ.

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) και το ύψος του ΑΗ. Έστω Δ και Ε τα συμμετρικά σημεία του Η ως προς τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

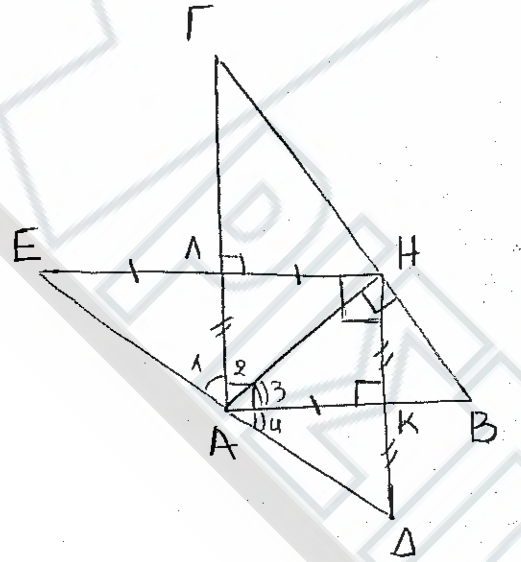
α) Να αποδείξετε ότι:

I. ΑΗ=ΑΔ=ΑΕ. (Μονάδες 6)

II. Το τρίγωνο ΕΗΔ είναι ορθογώνιο (Μονάδες 6)

III. Τα σημεία Ε, Α και Δ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 6)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΗΔ είναι ίσα; Αν ναι, να το αποδείξετε. Αν όχι, κάτω από ποιες αρχικές προϋποθέσεις θα μπορούσε να είναι ίσα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)



α) i) Α σημείο της μεσοκαθέτου του ΗΔ και του ΗΕ.
Τότε: ΑΗ = ΑΔ και ΑΗ = ΑΕ
Άρα: ΑΗ = ΑΔ = ΑΕ.

ii) ΑΛΗΚ ορθογώνιο αφού έχει 3 ορθές γωνίες, άρα $\Lambda\hat{H}K = 90^\circ$. Άρα $\overset{\triangle}{EHΔ}$ ορθογώνιο.

iii) $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ και $\hat{A}_3 = \hat{A}_4$ αφού θα έχω ΑΛ και ΑΚ και διχοτόμο.

Τότε: $E\hat{A}Δ = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_4 = 2\hat{A}_2 + 2\hat{A}_3 =$
$= 2(\hat{A}_2 + \hat{A}_3) = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$

άρα Ε, Α, Δ συνευθειακοί.

β) Το $\overset{\triangle}{ABΓ}$ δεν είναι ίσο με $\overset{\triangle}{EHΔ}$.
Θα ήταν εάν το $\overset{\triangle}{ABΓ}$ ορθογώνιο και ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 4

Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε τα ίσα τόξα ΑΒ και ΑΓ, το καθένα ίσο με 120°. Έστω Δ και Ε τα μέσα των τόξων ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

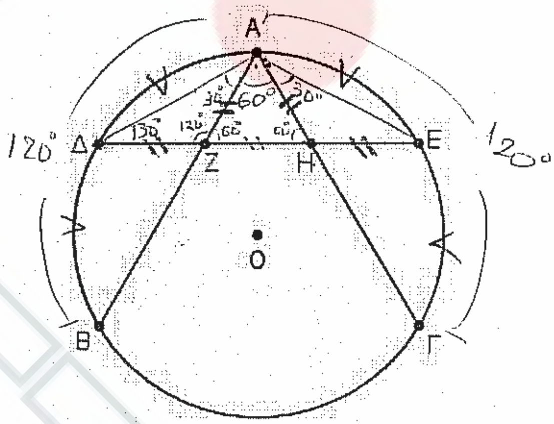
α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΕ είναι ίσα και να υπολογίσετε τις γωνίες τους.

(Μονάδες 10)

γ) Η χορδή ΔΕ τριχοτομείται από τις χορδές ΑΒ και ΑΓ.

(Μονάδες 7)



* με ΖΗ = ΑΗ = ΑΖ $= \frac{ΔΗ}{2}$

άρα Ζ μέσο ΔΗ.

Άρα: ΔΖ = ΖΗ = Η

α) Αφού $\widehat{ΑΒ} = \widehat{ΑΓ}$ θα έχω ΑΒ = ΑΓ, άρα $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ ισοσκελές

β) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ΑΔΖ}$ με $\overset{\triangle}{ΑΗΕ}$ έχω:

1) ΑΔ = ΑΕ αφού $\widehat{ΑΔ} = \widehat{ΑΕ} = 60°$

2) $Δ\hat{Α}Β = Γ\hat{Α}Ε$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν σε ίσα τόξα.

3) $Α\hat{Δ}Ε = Α\hat{Ε}Δ$

άρα ισχύει Γ-Π-Γ άρα $\overset{\triangle}{ΑΔΖ} = \overset{\triangle}{ΑΗΕ}$

$Δ\hat{Α}Ζ = \frac{\widehat{ΔΒ}}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$

$Α\hat{Δ}Ζ = \frac{\widehat{ΑΕ}}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$

$Α\hat{Ζ}Δ = 180° - 30° - 30° = 120°$.

Ομοίως: $Η\hat{Α}Ε = 30°$, $Η\hat{Ε}Α = 30°$, $Α\hat{Η}Ε = 120°$.

γ) Αφού $\overset{\triangle}{ΑΔΖ} = \overset{\triangle}{ΑΗΕ}$ θα έχω $\boxed{ΔΖ = ΗΕ}$.

$\widehat{ΒΓ} = 360° - 120° - 120° = 120°$ άρα η εγγεγραμμένη γωνί

$Β\hat{Α}Γ = \frac{120°}{2} = 60°$. Τότε: $\overset{\triangle}{ΑΔΗ}$ ορθογώνιο με $Α\hat{Δ}Ζ = 30°$

άρα: ΑΗ = ΔΗ/2 Άρα $\overset{\triangle}{ΑΖΗ}$ ισόπλευρο *

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις Π1 και Π2:

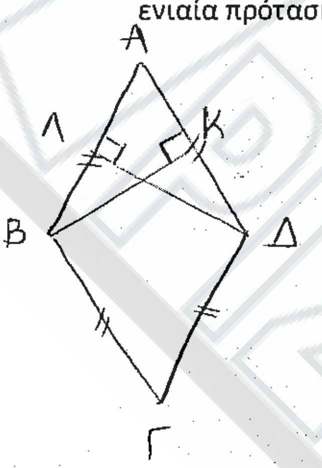
Π1: Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

Π2: Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.

α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις Π1 και Π2 αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 20)

β) Στην περίπτωση που και οι δύο προτάσεις ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως μια ενιαία πρόταση. (Μονάδες 5)

α)



Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ΑΒΚ}$ με $\overset{\triangle}{ΑΛΔ}$ έχω:
1) ορθογώνια
2) $\hat{Α}$ κοινή γωνία
3) ΑΒ = ΑΔ αφού ΑΒΓΔ ρόμβος
άρα ισχυει Υποτ. + οξ. γωνια
άρα $\overset{\triangle}{ΑΒΚ} = \overset{\triangle}{ΑΛΔ}$ άρα: ΒΚ = ΔΛ.

Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ΑΒΚ}$ με $\overset{\triangle}{ΑΛΔ}$ έχω:
1) ορθογώνια
2) $\hat{Α}$ κοινή γωνία
3) ΚΒ = ΛΔ υπόθεση
άρα ισχυει Γ-Π-Γ άρα $\overset{\triangle}{ΑΒΚ} = \overset{\triangle}{ΑΛΔ}$ άρα ΑΒ = ΑΔ.
Άρα το # ΑΒΓΔ έχει ΑΒ = ΑΔ, άρα είναι ρόμβος.

β) Δίνεται # ΑΒΓΔ, οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες αν και μόνο αν είναι ρόμβος.

ΘΕΜΑ 4

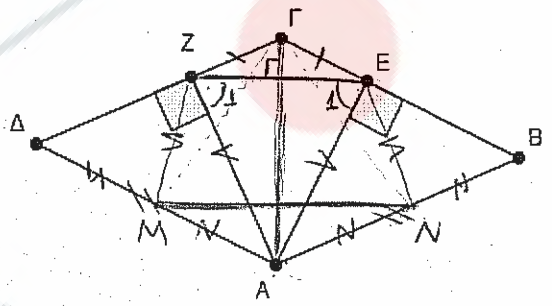
Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος είναι ρόμβος. Θεωρούμε $AZ \perp \Gamma\Delta$ και $AE \perp \Gamma B$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Η ευθεία ΑΓ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΖΕ. (Μονάδες 9)

γ) Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΜΝΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{A\Delta Z}$ με $\overset{\triangle}{AEB}$ έχω:
1) ορθογώνια
2) ΑΔ = ΑΒ αφού ΑΒΓΔ ρόμβος
3) $\hat{\Delta} = \hat{B}$ —"— —"—
άρα ισχύει υποτ.+οξ. γωνία, άρα $\overset{\triangle}{A\Delta Z} = \overset{\triangle}{AEB}$,
άρα ΑΖ = ΑΕ, άρα $\overset{\triangle}{AZE}$ ισοσκελές.

β) ΑΖ = ΑΕ από α) και ΖΓ = ΓΕ ως διαφορά ίσων τμημάτων, δηλ. τα σημεία Α, Γ ισαπέχουν από τα άκρα του ΖΕ. Άρα ΑΓ μεσοκάθετος του ΖΕ.

γ) Όμοια: έχω ΓΑ μεσοκάθετος της ΜΝ
(αφού ΓΜ = ΓΝ με σύγκριση του $A\hat{M}\Gamma = A\hat{\Gamma}N$)
Τότε: ΖΕ // ΜΝ αφού είναι $\perp$ στην ΓΑ.
Άρα: ΖΜΝΕ τραπέζιο.

$\overset{\triangle}{\Delta ZA}$: ΖΜ διάμεσος, άρα $ZM = \frac{\Delta A}{2}$
$\overset{\triangle}{AEB}$: ΕΝ διάμεσος, άρα $EN = \frac{AB}{2}$
άρα ΖΜ = ΕΝ τότε ΖΜΝΕ ισοσκ. τραπέ

ΘΕΜΑ 4

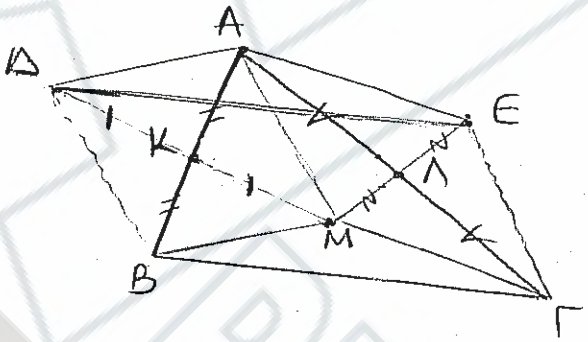
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Κ, Λ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Θεωρούμε τυχαίο σημείο **Μ στο εσωτερικό του τριγώνου** και Δ, Ε τα συμμετρικά του Μ ως προς Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΒΓ.

(Μονάδες 15)

β) Στην περίπτωση που **το σημείο Μ είναι το μέσο** της πλευράς ΒΓ, και Δ, Ε τα συμμετρικά του Μ ως προς Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Α και Ε είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 10)



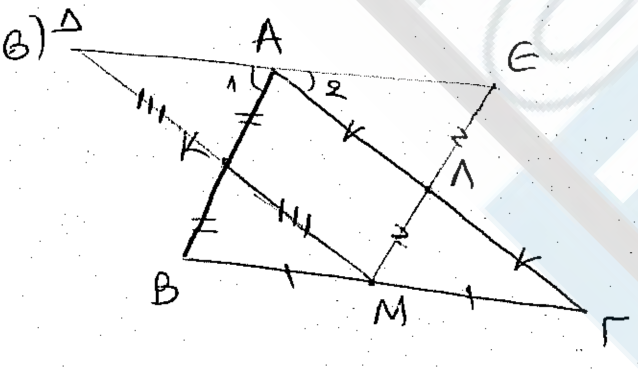
α) ΑΔΒΜ # αφού οι διαγώνιοι του διχοτομούνται

Δηλ. $\Delta B =\parallel AM$

Όμοια: ΑΕΓΜ #, άρα $E\Gamma =\parallel AM$

άρα: $\Delta B =\parallel E\Gamma$ άρα ΔΒΓΕ # άρα: ΔΕ ΒΓ.

β)



ΑΔΒΜ # αφού οι διαγώνιοι διχοτομούνται

άρα $\hat{A}_1 = \hat{B}$ ως εντός εναλλάξ.

ΑΕΓΜ # αφού οι διαγώνιοι διχοτομούνται

άρα $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma}$ ως εντός εναλλάξ.

Άρα: $\Delta\hat{A}E = \hat{A}_1 + \hat{A} + \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{A} + \hat{\Gamma} \overset{A\hat{B}\Gamma}{=} 180^\circ$

άρα Δ, Α, Ε συνευθειακά

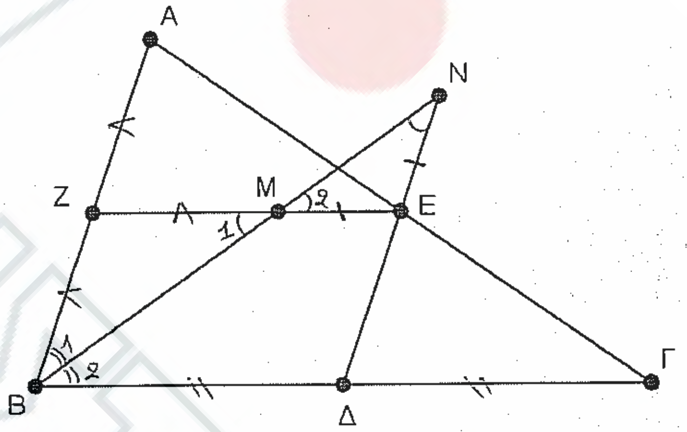
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ > ΑΒ και Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Αν η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την ΖΕ στο σημείο Μ και την προέκταση της ΔΕ στο σημείο Ν, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΖΕΔΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

β) Τα τρίγωνα ΒΖΜ και ΜΕΝ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 10)

γ) ΒΖ + ΝΕ =ΔΓ (Μονάδες 8)



α) $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: Ζ μέσο ΑΒ, Ε μέσο ΑΓ } άρα $ZE \overset{\parallel}{=} \frac{B\Gamma}{2}$

άρα $ZE \overset{\parallel}{=} B\Delta$

άρα: ΖΕΔΒ $\#$.

β) $\hat{M}_1 = \hat{B}_2$ ως εντός εναλλάξ
$\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ αφού ΒΜ διχοτόμος } άρα $\hat{M}_1 = \hat{B}_1$
άρα $B\overset{\triangle}{M}Z$ ισοσκελές

$\hat{N} = \hat{B}_1$ ως εντός εναλλάξ
$\hat{B}_2 = \hat{B}_1$ αφού ΒΜ διχοτόμος } άρα $\hat{N} = \hat{B}_2$ και $\hat{B}_2 = \hat{N}$
ως εντός εκτός και επί τ' αυτά άρα $\hat{N} = \hat{M}_2$ άρ
$M\overset{\triangle}{N}E$ ισοσκελές

γ) $BZ + NE \overset{β)}{=} ZM + ME = \underbrace{ZE = B\Delta}_{\text{αφού } BZE\Delta\ \#} = \Delta\Gamma$.

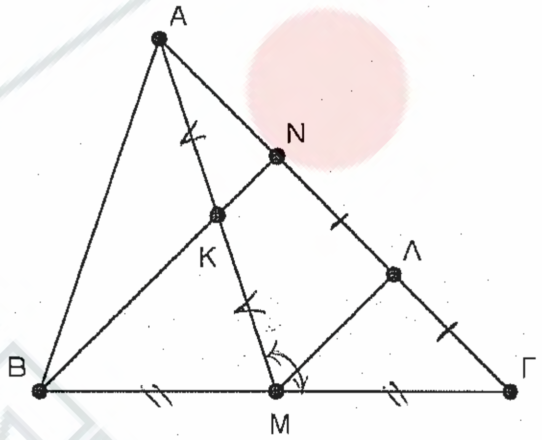
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΜ διάμεσός του και Κ το μέσο του ΑΜ. Αν η προέκταση της ΒΚ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ν, και Λ είναι το μέσο του ΓΝ, να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο Ν είναι μέσο του ΑΛ. (Μονάδες 9)

β) $K\hat{M}\Gamma = M\hat{B}K + A\hat{K}N$ (Μονάδες 9)

γ) ΒΚ = 3ΚΝ (Μονάδες 7)



α) $B\overset{\triangle}{N}\Gamma$: Μ μέσο ΒΓ, Λ μέσο ΝΓ } άρα $M\Lambda = \parallel \frac{BN}{2}$

$A\overset{\triangle}{M}\Lambda$: Κ μέσο ΑΜ, $KN \parallel M\Lambda$ } άρα Ν μέσο ΑΛ

β) $K\hat{M}\Gamma$ εξωτερική του $B\overset{\triangle}{M}K$, άρα θα έχω:

$K\hat{M}\Gamma = M\hat{B}K + B\hat{K}M = M\hat{B}K + A\hat{K}N$

(αφού $B\hat{K}M = A\hat{K}N$ ως κατακορυφήν)

γ) $BK = BN - KN \overset{\text{α)}}{=} 2M\Lambda - KN =$

$= 2 \cdot 2KN - KN = 4KN - KN = 3KN.$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος (Ο, R) με διάμετρο ΑΒ και δυο ευθείες $ε_1$, $ε_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου ΑΒ. Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου σ' ένα σημείο του Ε και τέμνει τις $ε_1$ και $ε_2$ στα Δ και Γ αντίστοιχα.

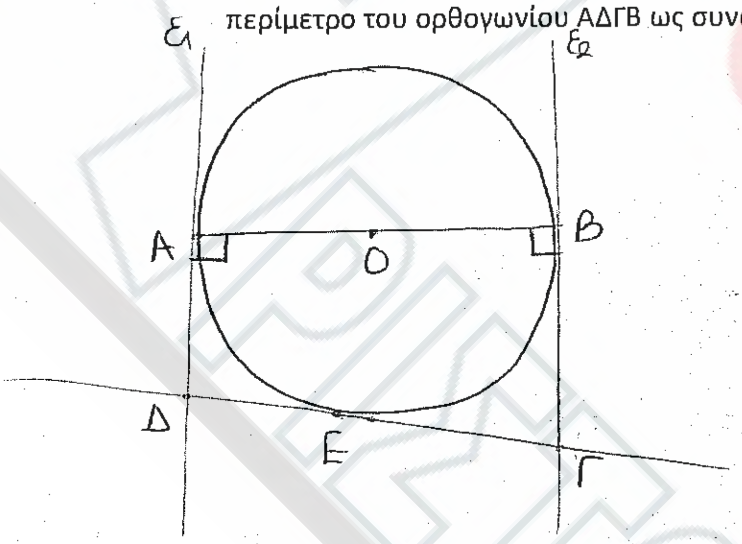
α) Αν το σημείο Ε δεν είναι το μέσο του τόξου ΑΒ, να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)

ii. ΓΔ= ΑΔ+ΒΓ. (Μονάδες 8)

β) Αν το σημείο Ε βρίσκεται στο μέσον του τόξου ΑΒ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΓΒ είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου ΑΔΓΒ ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.

(Μονάδες 9)



α) i) ΔΑ // ΒΓ αφού είναι ⊥ στην ΑΒ. Άρα ΑΒΓΔ τραπέζιο.

ii) ΔΕ = ΔΑ ως εφαπτόμενες από το Δ.
ΓΕ = ΓΒ ως εφαπτόμενες από το Γ.

Τότε: ΓΔ = ΓΕ + ΔΕ = ΓΒ + ΑΔ.

β) Αν Ε μέσο του ΑΒ, θα έχω $A\hat{O}E = B\hat{O}E = 90^\circ$ και ΟΕ ⊥ ΔΓ.

Τότε: ΑΟΕΔ ορθογώνιο αφού έχει 3 ορθές γωνίες.

Όμοια: ΟΒΓΕ —"— —"— —"—

Τότε: ΑΒΓΔ ορθογώνιο αφού έχει 3 ορθές γωνίες

περίμετρος = ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ =
= 2R + R + 2R + R = 6R.

ΘΕΜΑ 4

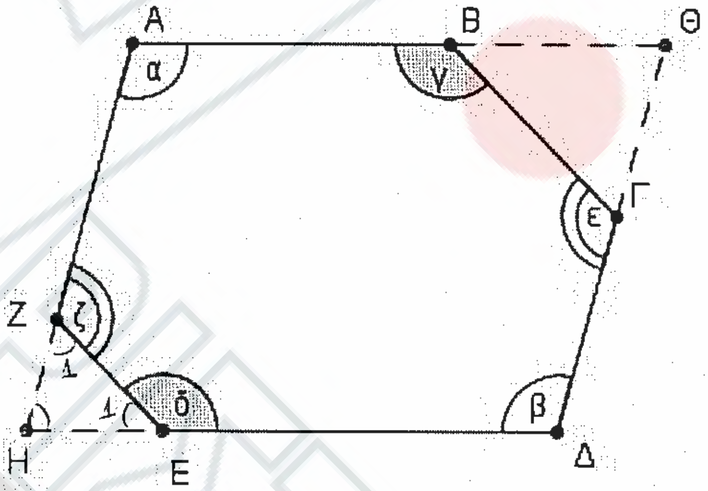
Στο κυρτό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ ισχύουν τα εξής: $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$, $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$ και $\hat{\varepsilon} = \hat{\zeta}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\varepsilon}$. (Μονάδες 8)

β) Αν οι πλευρές ΑΖ και ΔΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Η και οι πλευρές ΑΒ και ΔΓ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Θ, να αποδείξετε ότι:

i. Οι γωνίες Α και Η είναι παραπληρωματικές (Μονάδες 10)

ii. Το τετράπλευρο ΑΘΔΗ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)



α) $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\varepsilon} + \hat{\beta} + \hat{\delta} + \hat{\zeta} = (2 \cdot 6 - 4) \cdot 90^\circ$

$2\hat{\alpha} + 2\hat{\gamma} + 2\hat{\varepsilon} = (12 - 4) \cdot 90^\circ$

$2(\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\varepsilon}) = 8 \cdot 90^\circ$

$2(\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\varepsilon}) = 720^\circ$

$\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\varepsilon} = 360^\circ$.

β) i) $\hat{A} + \hat{H} = \hat{\alpha} + 180^\circ - \hat{Z}_1 - \hat{E}_1 =$

$= \hat{\alpha} + 180^\circ - (180^\circ - \hat{\zeta}) - (180^\circ - \hat{\delta}) =$

$= \hat{\alpha} + \cancel{180^\circ} - \cancel{180^\circ} + \hat{\zeta} - 180^\circ + \hat{\delta} =$

$= \hat{\alpha} + \hat{\varepsilon} + \hat{\gamma} - 180^\circ = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$.

ii) Αφού $\hat{A} + \hat{H} = 180^\circ$ έχω εντός και επί τ' αυτά γωνίες παραπληρωματικές άρα: $\boxed{ΑΘ \parallel ΔΗ}$.

Αφού $\hat{A} + \hat{H} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} + \hat{H} = 180^\circ$ έχω εντός και επί τ' αυτά γωνίες παραπληρωματικές άρα: $\boxed{ΑΗ \parallel ΔΒ}$. Άρα: ΑΘΔΗ #.

ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Μ το μέσο της ΒΓ. Φέρουμε ΓΔ ⊥ ΒΓ με ΓΔ=ΑΒ (Α,Δ εκατέρωθεν της ΒΓ).

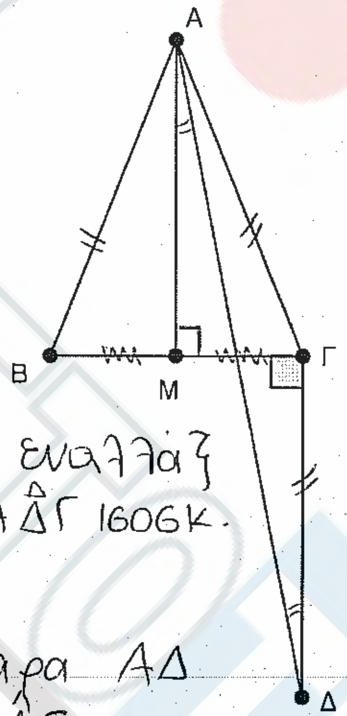
Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΜ // ΓΔ (Μονάδες 6)

β) η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\hat{A}\Gamma$. (Μονάδες 7)

γ) $\Delta\hat{A}\Gamma = 45^o - \frac{\hat{B}}{2}$ (Μονάδες 7)

δ) ΑΔ < 2 ΑΒ (Μονάδες 5)



α) $A\hat{B}\Gamma$ ισοσκελές με ΑΜ διάμεσος άρα ΑΜ και ύψος και διχοτόμος. Τότε: ΑΜ // ΓΔ γιατί είναι ⊥ στη ΒΓ.

β) $M\hat{A}\Delta = \hat{\Delta}$ ως εντός εναλλάξ

$\Gamma\Delta = A\Gamma = AB$ άρα $A\hat{\Delta}\Gamma$ ισοσκ.

άρα: $\Delta\hat{A}\Gamma = \hat{\Delta}$

Τότε: $M\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma$ άρα ΑΔ διχοτόμος της $M\hat{A}\Gamma$.

γ) $\Delta\hat{A}\Gamma = \frac{M\hat{A}\Gamma}{2} \overset{M\hat{A}\Gamma}{=} \frac{90^\circ - \hat{\Gamma}}{2} = \frac{90^\circ}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 45^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$.

δ) $\underline{A\hat{\Delta}\Gamma}$: Τριγωνική Ανισότητα:

ΑΔ < ΑΓ + ΓΔ

ΑΔ < ΑΒ + ΑΒ

ΑΔ < 2ΑΒ.

ΘΕΜΑ 4

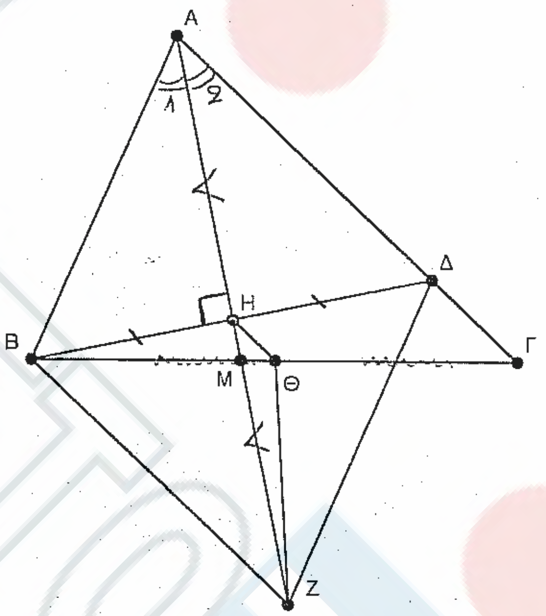
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ. Από το Β φέρουμε κάθετη στην διχοτόμο ΑΜ της γωνίας Α, η οποία τέμνει την ΑΜ στο Η και την ΑΓ στο Δ. Στην προέκταση της ΑΗ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΑΗ = ΗΖ και έστω Θ το μέσο της πλευράς ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

β) το τετράπλευρο ΗΒΖΘ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 9)

γ) η διάμεσος του τραπεζίου ΗΒΖΘ είναι ίση με $\frac{ΑΒ+ΑΓ}{4}$. (Μονάδες 7)



α) ΑΒΖΔ ∦ αφού οι διαγώνιοι του διχοτομούνται στο Η (αφού ΑΒ = ΑΔ γιατί $\overset{\triangle}{ΑΒΔ}$ ισοσκελές με ΑΗ ύψος+διχοτόμο, άρα ΑΗ διάμεσος) και έχει ⊥ διαγωνίους, άρα ΑΒΖΔ ρόμβος.

β) $\overset{\triangle}{ΒΔΓ}$: Η μέσο ΒΔ, Θ μέσο ΒΓ $\Big\}$ άρα ΘΗ $=\parallel \frac{ΔΓ}{2}$

άρα ΘΗ ∥ ΑΓ

άρα ΘΗ ∥ ΒΖ άρα ΗΒΖΘ τραπέζιο

γ) διάμεσος $= \frac{ΗΘ+ΒΖ}{2} = \frac{\frac{ΓΔ}{2}+ΑΔ}{2} = \frac{\frac{ΓΔ+2ΑΔ}{2}}{2} =$

$= \frac{ΓΔ+2ΑΔ}{4} = \frac{ΓΔ+ΑΔ+ΑΔ}{4} = \frac{ΑΓ+ΑΒ}{4}$.

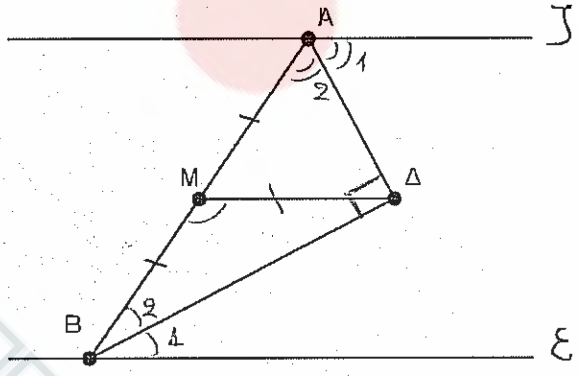
ΘΕΜΑ 4

Δίνονται δυο παράλληλες ευθείες (ε) και (ζ), και μια τρίτη που τις τέμνει στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Θεωρούμε τις διχοτόμους των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών που σχηματίζονται, οι οποίες τέμνονται σε σημείο Δ. Αν Μ είναι το μέσον του ΑΒ, να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία ΒΔΑ είναι ορθή. (Μονάδες 9)

β) $B\hat{M}\Delta = 2 \cdot M\hat{\Delta}A$ (Μονάδες 8)

γ) ΜΔ // ε (Μονάδες 8)



α) $M\hat{B}E + M\hat{A}\zeta = 180^\circ$ ως εντός και επί τ' αυτά

$2\hat{B}_2 + 2\hat{A}_2 = 180^\circ$

$\hat{B}_2 + \hat{A}_2 = \frac{180^\circ}{2}$

$\hat{B}_2 + \hat{A}_2 = 90^\circ$ άρα $A\overset{\triangle}{B}\Delta$ θα έχω $A\hat{\Delta}B = 90$

β) $A\overset{\triangle}{\Delta}B$: έχω ΜΔ διάμεσο, άρα $M\Delta = \frac{AB}{2} = MB = MA$

άρα $A\overset{\triangle}{M}\Delta$ ισοσκελές, με $M\hat{A}\Delta = M\hat{\Delta}A$.

$B\hat{M}\Delta$ εξωτερική στο $A\overset{\triangle}{M}\Delta$ άρα:

$B\hat{M}\Delta = M\hat{A}\Delta + M\hat{\Delta}A = 2M\hat{\Delta}A$.

γ) Αφού $B\hat{M}\Delta = 2M\hat{\Delta}A = 2M\hat{A}\Delta = 2\hat{A}_2 = M\hat{A}\zeta$

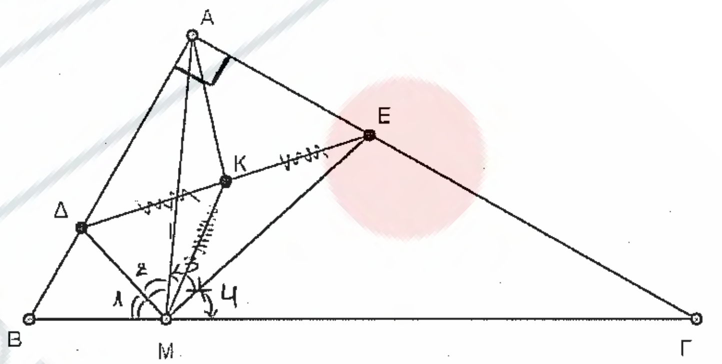
δηλ. έχω εντός-εκτός και επί τ' αυτά γωνίες ίσες άρα $M\Delta // \zeta // \varepsilon$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και Μ τυχαίο σημείο της πλευράς ΒΓ. Φέρουμε τις διχοτόμους γωνιών ΒΜΑ και ΑΜΓ οι οποίες τέμνουν τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι, η γωνία ΔΜΕ είναι ορθή. (Μονάδες 12)

β) Αν Κ το μέσο του ΔΕ, να αποδείξετε ότι ΜΚ = ΚΑ (Μονάδες 13)



α) Έχω $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 + \hat{M}_3 + \hat{M}_4 = 180^\circ$

$2\hat{M}_2 + 2\hat{M}_3 = 180^\circ$

$\hat{M}_2 + \hat{M}_3 = 90^\circ$

$\Delta\hat{M}E = 90^\circ$

β) $\underline{\Delta\hat{M}E}$: έχω ΜΚ διάμεσο, άρα $MK = \frac{\Delta E}{2} = \Delta K = KE$

$\underline{A\hat{\Delta}E}$: έχω ΑΚ διάμεσο, άρα $KA = \frac{\Delta E}{2} = \Delta K = KE$

άρα: $MK = KA$.

ΘΕΜΑ 4

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) φέρουμε τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ. Μία ευθεία ε παράλληλη στη βάση ΒΓ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα Ζ και Η αντίστοιχα και τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ στα σημεία Θ και Κ αντίστοιχα.

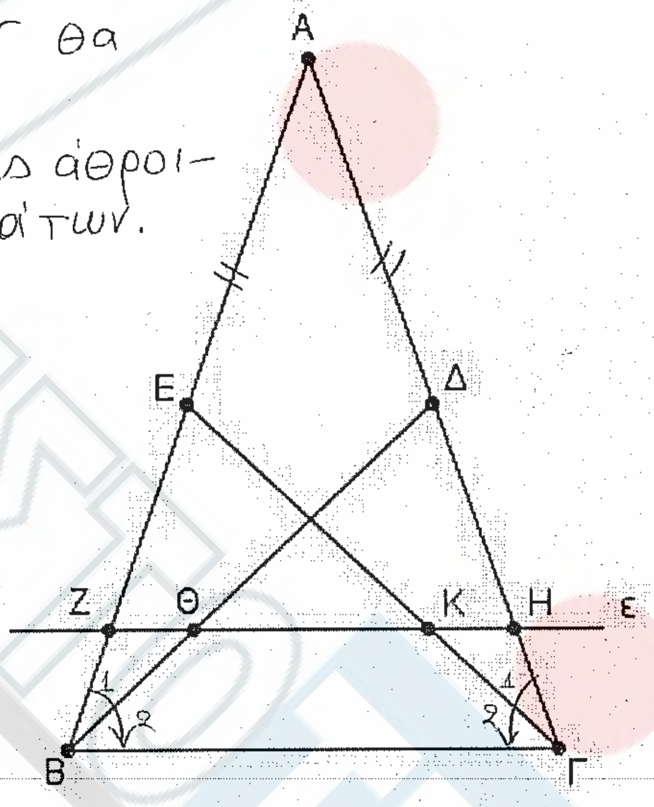
Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΖ=ΓΗ. (Μονάδες 8)

β) τα τρίγωνα ΖΒΘ και ΗΚΓ είναι ίσα. (Μονάδες 9)

γ) ΖΚ=ΗΘ . (Μονάδες 8)

γ) Αφού $Z\hat{B}\Theta = H\hat{K}\Gamma$ θα έχω ΖΘ = ΚΗ.
Άρα ΖΚ=ΗΘ ως άθροισμα ίσων τμημάτων.



α) $A\hat{Z}\Theta = \hat{B}$ ως εντός εκτός και επί τ' αυτά
$A\hat{H}K = \hat{\Gamma}$ —\\— —\\— —\\—
όμως $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ αφού $A\hat{B}\Gamma$ ισοσκελές
άρα $A\hat{Z}\Theta = A\hat{H}K$
άρα $A\hat{Z}H$ ισοσκ.
άρα ΑΖ = ΑΗ.

Τότε: ΒΖ = ΓΗ ως διαφορά ίσων τμημάτων.

β) Συγκρίνω $Z\hat{B}\Theta$ με $H\hat{K}\Gamma$ έχω:
1) ΒΖ = ΓΗ από α)
2) $B\hat{Z}\Theta = K\hat{H}\Gamma$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών
3) $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ ως διαφορά ίσων γωνιών
(αφού $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2$ αφού $B\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{\Gamma}E$)
άρα ισχύει Γ-Π-Γ άρα $Z\hat{B}\Theta = H\hat{K}\Gamma$.

ΘΕΜΑ 4

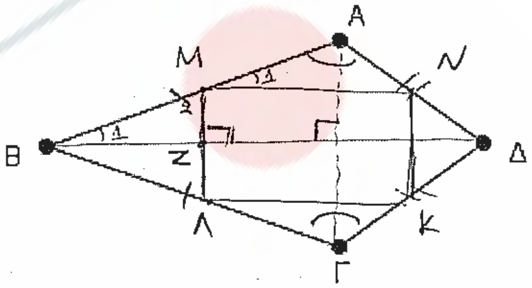
Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

β) Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται κάθετα. (Μονάδες 6)

γ) Το τετράπλευρο που έχει για κορυφές τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)



α) $BA = B\Gamma$ άρα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισοσκελές με $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$.
Τότε: $\Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}A$ ως διαφορά ίσων γωνιών.
Άρα $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$ ισοσκελές.

β) Τα σημεία Β, Δ ισαπέχουν από τα άκρα του ΑΓ άρα ανήκουν στη μεσοκάθετο αυτού.
Άρα: $A\Gamma \perp B\Delta$.

γ) $\underline{\overset{\triangle}{AB\Delta}}$: Μ μέσο ΑΒ, Ν μέσο ΑΔ $\Big\}$ άρα $MN =\parallel \frac{B\Delta}{2}$

$\underline{\text{όμοια}}$: $K\Lambda =\parallel \frac{B\Delta}{2}$ $\Big\}$ άρα $MN =\parallel K\Lambda$, άρα ΜΝΚΛ #

$\hat{M}_1 = \hat{B}_1$ ως εντός εκτός και επί τ' αυτά.
$\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = \hat{B}_1 + \hat{M}_2 \overset{\overset{\triangle}{BMZ}}{=\!=} 90^\circ$ άρα $\hat{M} = 90^\circ$. Τότε το # ΜΝΚΛ είναι ορθογώνιο.

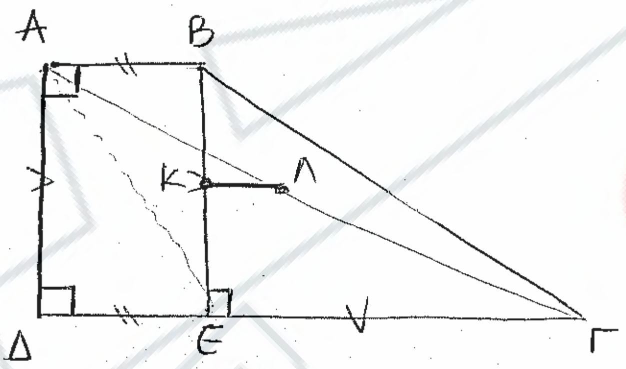
ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ, τέτοιο ώστε $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$ και $AB = \frac{1}{3}A\Delta$. Επιπλέον, φέρουμε $BE \perp \Delta\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. (Μονάδες 10)

γ) Αν Κ, Λ είναι τα μέσα των ΒΕ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η ΑΓ διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΒΚ. (Μονάδες 9)



α) ΑΒΕΔ ορθογώνιο αφού έχει 3 ορθές γωνίες.

β) $\Delta E = AB = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$ άρα $E\Gamma = \frac{3}{4}\Delta\Gamma$

Άρα: $E\Gamma = 3\Delta E$.

$AB = \frac{1}{3}A\Delta \Leftrightarrow A\Delta = 3AB$ άρα $BE = 3\Delta E = E\Gamma$

άρα $B\hat{E}\Gamma$ ορθογώνιο και ισοσκελές

γ) ΑΒΓΕ τραπέζιο, αφού $AB \parallel E\Gamma$

άρα: $K\Lambda = \frac{E\Gamma - AB}{2} = \frac{3\Delta E - \Delta E}{2} = \frac{\cancel{2}\Delta E}{\cancel{2}} = \Delta E = AB$.

Δηλ. $K\Lambda =\parallel AB$ άρα ΑΒΛΚ παραλληλόγραμμο

άρα οι διαγώνιοί του διχοτομούνται

άρα η ΑΓ διέρχεται από το μέσο του ΒΚ.

ΘΕΜΑ 4

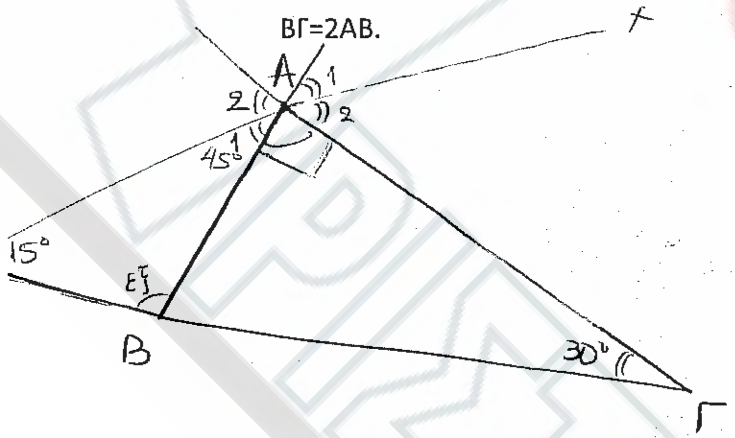
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ. Έστω Αx η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας Α.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{\hat{A}_{\varepsilon\xi}}{2}+\hat{B}_{\varepsilon\xi}=180^\circ+\frac{\hat{\Gamma}-\hat{B}}{2}$, όπου $\hat{A}_{\varepsilon\xi}$ και $\hat{B}_{\varepsilon\xi}$ παριστάνουν τις εξωτερικές γωνίες των $\hat{A}$, $\hat{B}$ αντίστοιχα. (Μονάδες 10)

ii. Η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει την προέκταση της πλευράς ΓΒ (προς το μέρος του Β) σε σημείο Ζ. (Μονάδες 8)

β) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α και $A\hat{Z}B=15^\circ$, να αποδείξετε ότι ΒΓ=2ΑΒ. (Μονάδες 7)



α) i) $\frac{\hat{A}_{\varepsilon\xi}}{2}+\hat{B}_{\varepsilon\xi}=\hat{A}_2+\hat{B}_{\varepsilon\xi}=\hat{A}_2+180^\circ-\hat{B}=\frac{180^\circ-\hat{A}}{2}+180^\circ-\hat{B}=$

$=\frac{180^\circ-\hat{A}+360^\circ-2\hat{B}}{2}=\frac{\cancel{\hat{A}}+\hat{B}+\hat{\Gamma}-\cancel{\hat{A}}+360^\circ-2\hat{B}}{2}$

$=\frac{360^\circ+\hat{\Gamma}-\hat{B}}{2}=\frac{360^\circ}{2}+\frac{\hat{\Gamma}-\hat{B}}{2}=180^\circ+\frac{\hat{\Gamma}-\hat{B}}{2}.$

ii) $\frac{\hat{A}_{\varepsilon\xi}}{2}+\hat{B}_{\varepsilon\xi}=180^\circ+\frac{\hat{\Gamma}-\hat{B}}{2}$

αρα $\frac{\hat{A}_{\varepsilon\xi}}{2}+\hat{B}_{\varepsilon\xi}>180^\circ$ αρα η Αx τέμνει τη ΓΒ προς το μέρος του Β.

β) Αν $\hat{A}=90^\circ$ θα εχω $\hat{A}_{\varepsilon\xi}=90^\circ$ αρα $\hat{A}_1=\hat{A}_2=45^\circ$

$A\overset{\triangle}{Z}B$: $\hat{B}_{\varepsilon\xi}=180^\circ-45^\circ-15^\circ=120^\circ$

αρα $\hat{B}=180^\circ-120^\circ=60^\circ$

αρα $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$: $\hat{\Gamma}=90^\circ-60^\circ=30^\circ$, άρα: $AB=\frac{B\Gamma}{2}$

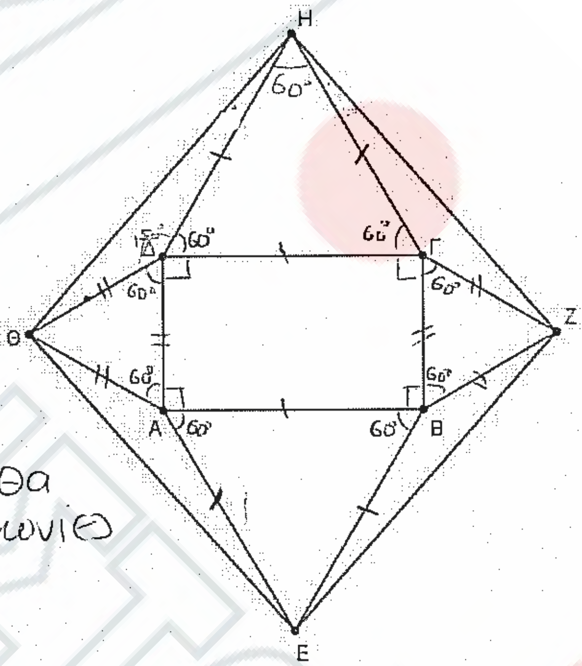
$B\Gamma=2AB.$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και έξω από αυτό, κατασκευάζουμε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ, ΓΔΗ, ΔΑΘ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ρόμβος. (Μονάδες 15)

β) Αν το αρχικό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, τότε το ΕΖΗΘ τι είδους παραλληλόγραμμο είναι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)



α) Αφού τα τρίγωνα είναι ισόπλευρα, θα έχουν όλες τις γωνίες τους 60°.

Συγκρίνω $H\hat{\Theta}\Delta$ με $H\hat{\Gamma}Z$ με $B\hat{E}Z$ με $\Theta\hat{A}E$ έχω:

1) $\Delta H = H\Gamma = BE = AE$ υπόθεση

2) $\Theta\Delta = \Gamma Z = BZ = \Theta A$ —||—

3) $\Theta\hat{\Delta}H = H\hat{\Gamma}Z = E\hat{B}Z = \Theta\hat{A}E = 150°$

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $H\hat{\Theta}\Delta = H\hat{\Gamma}Z = B\hat{E}Z = \Theta\hat{A}E$

άρα $\Theta H = HZ = EZ = \Theta E$ άρα ΕΖΗΘ ρόμβος.

β) Τότε: $\Theta\hat{\Delta}H$ ισοσκελές με $H\hat{\Theta}\Delta = \Theta\hat{H}\Delta = \frac{180°-150°}{2} = \frac{30°}{2} = 1$

Ομοίως: $\Gamma\hat{H}Z = 30°$.

Τότε: $\Theta\hat{H}Z = 15° + 60° + 15° = 90°$

άρα ΕΖΗΘ θα είναι τετράγωνο.

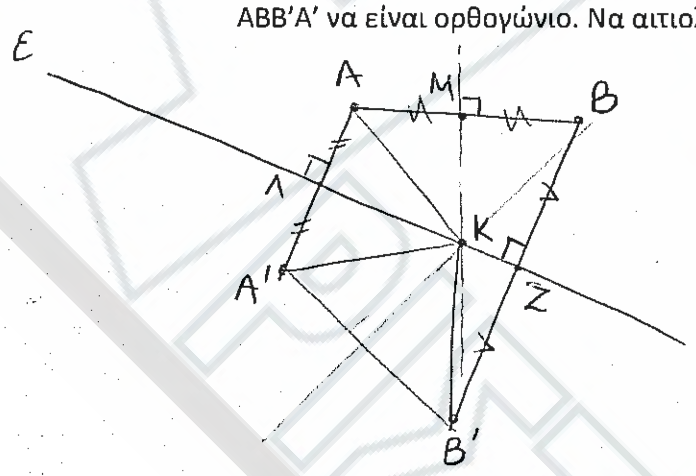
ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ευθεία (ε) και δυο σημεία Α και Β εκτός αυτής, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημεπίπεδο σε σχέση με την (ε) έτσι ώστε, η ευθεία ΑΒ να μην είναι κάθετη στην (ε). Έστω Α΄ και Β΄ τα συμμετρικά σημεία των Α και Β αντίστοιχα ως προς την ευθεία (ε).

α) Αν η μεσοκάθετος του ΑΒ τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Κ , να αποδείξετε ότι το Κ ανήκει και στη μεσοκάθετο του Α΄Β΄. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΒ'Α' είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τη σχέση των ευθειών ΑΒ και της ευθείας (ε) ώστε το τετράπλευρο ΑΒΒ'Α' να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)



ΚΒ = ΚΑ, αφού ΚΜ μεσοκάθετος του ΑΒ.

ΚΑ = ΚΑ', αφού ΚΛ μεσοκάθετος του ΑΑ'.

ΚΒ = ΚΒ', αφού ΚΖ μεσοκάθετος του ΒΒ'.

Άρα: ΚΑ' = ΚΒ' δηλ. το Κ σημείο της μεσοκαθέτου της Α'Β'.

β) ΑΑ' ⊥ ε και ΒΒ' ⊥ ε άρα ΑΑ' // ΒΒ', άρα ΑΒΒ'Α' τραπέζιο.

γ) Θα πρέπει ΑΒ ∥ ε γιατί τότε ΑΒ ⊥ ΑΑ' και ΑΒ ⊥ ΒΒ'.

ΘΕΜΑ 4

Έστω ε_1, ε_2 δυο κάθετες ευθείες που τέμνονται στο Ο και τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου που δεν ανήκει στις ευθείες.

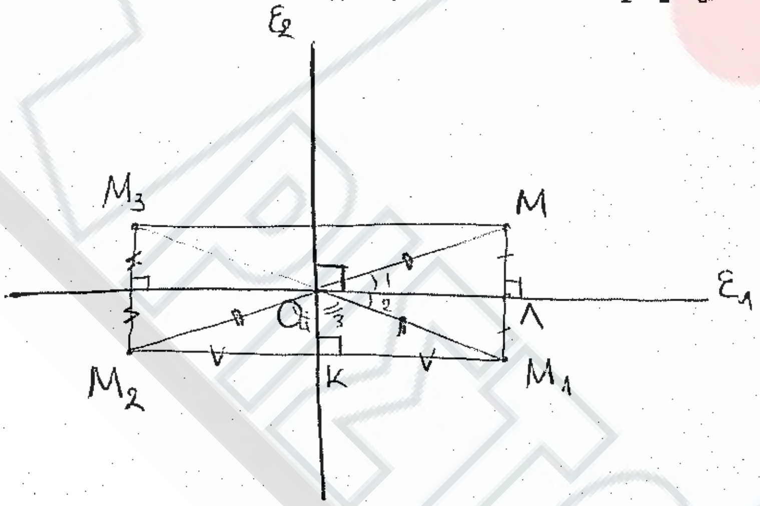
α) Αν M_1 είναι το συμμετρικό του Μ ως προς την ε_1 και M_2 το συμμετρικό του M_1 ως προς την ε_2, να αποδείξετε ότι:

I. $OM = OM_1$ (Μονάδες 6)

II. Τα σημεία Μ, Ο και M_2 είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)

III. Το τρίγωνο MM_1M_2 είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

Β) Αν M_3 είναι το συμμετρικό σημείο του M_2 ως προς την ε_1, τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $MM_1M_2M_3$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)



α) i) ΟΛ μεσοκάθετος του MM_1, άρα $OM = OM_1$.

ii) ΟΚ —\\— του M_1M_2, άρα $OM_2 = OM_1$

Έχω: ΟΛ και ΟΚ ύψη και διχοτόμοι στα ισοσκελή $\overset{\triangle}{OMM_1}$ και $\overset{\triangle}{OM_1M_2}$. Άρα $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ και $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$.

Όμως: $M\hat{O}M_2 = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3 =$
$= 2(\hat{O}_2 + \hat{O}_3) = 2K\hat{O}\Lambda = 2\cdot 90^\circ = 180^\circ$

άρα M, O, M_2 συνευθειακά.

iii) $OKM_1\Lambda$ είναι ορθογώνιο αφού έχει 3 ορθές γωνίες άρα $K\hat{M}_1\Lambda = 90^\circ$. Δηλ. $\overset{\triangle}{MM_1M_2}$ ορθογώνιο.

β) Όμοια με α) θα έχω $OM = OM_1 = OM_2 = OM_3$ δηλ. οι διαγώνιοι του $MM_1M_2M_3$ διχοτομούνται και είναι ίσες, άρα είναι ορθογώνιο.

ΘΕΜΑ 2

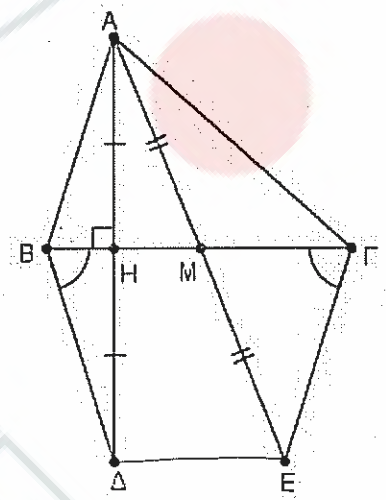
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε το ύψος του ΑΗ κατά τμήμα ΗΔ=ΑΗ και τη διάμεσό του ΑΜ κατά τμήμα ΜΕ=ΑΜ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ=ΒΔ=ΓΕ (Μονάδες 8)

β) $Γ\hat{B}Δ = B\hat{Γ}E$ (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)



α) ΒΗ μεσοκάθετος του ΑΔ, άρα: $\boxed{BA = BΔ}$

Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ABM}$ με $M\overset{\triangle}{E}Γ$ έχω:

1) ΑΜ = ΜΕ υπόθεση

2) ΒΜ = ΜΓ -\\-

3) $A\hat{M}B = Γ\hat{M}E$ ως κατακορυφήν

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\overset{\triangle}{ABM} = M\overset{\triangle}{E}Γ$ άρα $\boxed{AB = ΓE}$

Άρα: ΑΒ = ΒΔ = ΓΕ.

β) Αφού $\overset{\triangle}{ABM} = M\overset{\triangle}{E}Γ$ θα έχω $B\hat{Γ}E = A\hat{B}M$.

$\overset{\triangle}{ABΔ}$ ισοσκελές με ΒΗ ύψος άρα και διχοτόμο,

δηλ. $Δ\hat{B}H = A\hat{B}M$

Άρα: $B\hat{Γ}E = Δ\hat{B}H$.

γ) $\overset{\triangle}{AΔE}$: Η μέσο ΑΔ, Μ μέσο ΑΕ } άρα $HM = \parallel \frac{ΔE}{2}$ άρα ΒΓ ∥ ΔΕ δηλ. ΒΓΕΔ τραπέζιο με $B\hat{Γ}E = Δ\hat{B}H$ άρα ισοσκ. τραπέζιο.

ΘΕΜΑ 4

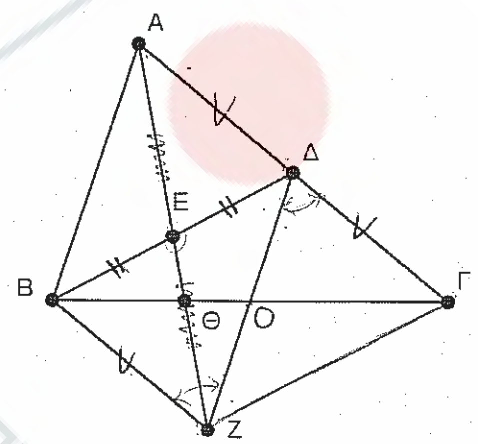
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της διαμέσου ΒΔ. Στην προέκταση της ΑΕ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΕΖ=ΑΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΒΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

γ) Το σημείο Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΒΔΖ. (Μονάδες 9)



α) ΑΒΖΔ # αφού οι διαγώνιοι του διχοτομούνται.

β) ΒΖ =// ΑΔ , αρα ΒΖ =// ΔΓ

αρα ΒΔΓΖ #.

γ) ΒΔΓΖ # οι διαγώνιοι του διχοτομούνται

αρα στο $\hat{\text{ΒΔΖ}}$ εχω ΖΕ και ΒΟ διαμέσους

αυτού, αρα Θ βαρύκεντρο.

ΘΕΜΑ 4

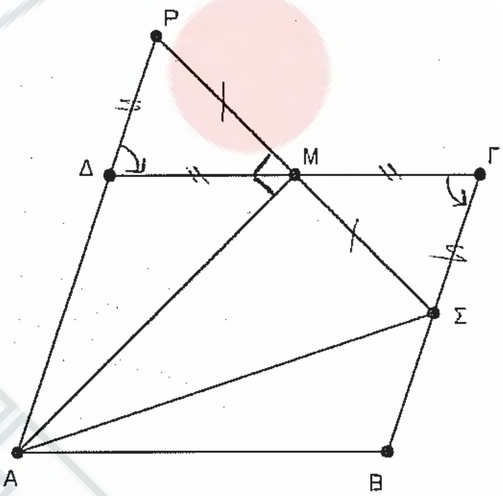
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της πλευράς ΔΓ. Φέρουμε κάθετη στην ΑΜ στο σημείο της Μ, η οποία τέμνει την ευθεία ΑΔ στο σημείο Ρ και την ΒΓ στο Σ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΔΡ = ΣΓ. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΑΡΣ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) ΑΣ = ΑΔ + ΓΣ. (Μονάδες 9)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{\Delta P M}$ με $\overset{\triangle}{\Gamma M \Sigma}$ έχω:

1) ΜΔ = ΜΓ υπόθεση

2) $P\hat{M}\Delta = \Gamma\hat{M}\Sigma$ ως κατακορυφην

3) $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ ως εντος εναλλαξ

αρα ισχυει Γ-Π-Γ αρα $\overset{\triangle}{\Delta P M} = \Gamma M \Sigma$

αρα: ΔΡ = ΣΓ. και ΜΡ = ΜΣ

β) ΑΜ μεσοκάθετος του ΡΣ, αρα ΑΡ = ΑΣ,

αρα $\overset{\triangle}{A P \Sigma}$ ισοσκελές.

γ) Αφού $\overset{\triangle}{A P \Sigma}$ ισοσκελές, θα εχω

$A\Sigma = AP = A\Delta + \Delta P \overset{\alpha)}{=} A\Delta + \Sigma\Gamma.$

ΘΕΜΑ 4

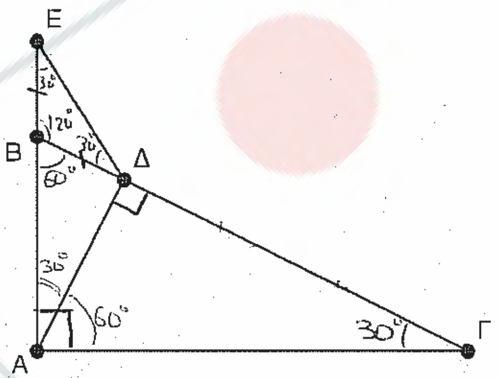
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην προέκταση της ΑΒ τέτοιο ώστε ΒΕ = ΒΔ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. $BE = \frac{AB}{2}$ (Μονάδες 8)

ii. ΑΕ = ΓΔ (Μονάδες 8)



α) $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90°$

$2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90°$

$3\hat{\Gamma} = 90°$

$\hat{\Gamma} = 30°$ αρα $\hat{B} = 2 \cdot 30° = 60°$

$E\hat{B}\Delta = 180° - 60° = 120°$

$BE = B\Delta$ αρα $B\overset{\triangle}{E}\Delta$ ισοσκελές

με $\hat{E} = B\hat{\Delta}E = \frac{180° - 120°}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$

β) i) $A\overset{\triangle}{B}\Delta$: εχω $B\hat{A}\Delta = 30°$ αρα $B\Delta = \frac{AB}{2}$

αρα $BE = \frac{AB}{2}$

ii) $AE = AB + BE \overset{i)}{=} 2BE + BE = 3BE = 3B\Delta$.

$\Gamma\Delta = B\Gamma - B\Delta = 2AB - B\Delta = 2 \cdot 2B\Delta - B\Delta = 4B\Delta - B\Delta = 3B\Delta$

($A\overset{\triangle}{B}\Gamma$: $\hat{\Gamma} = 30°$ αρα: $AB = \frac{B\Gamma}{2}$, $B\Gamma = 2AB$)

Αρα: $AE = \Gamma\Delta$.

ΘΕΜΑ 4

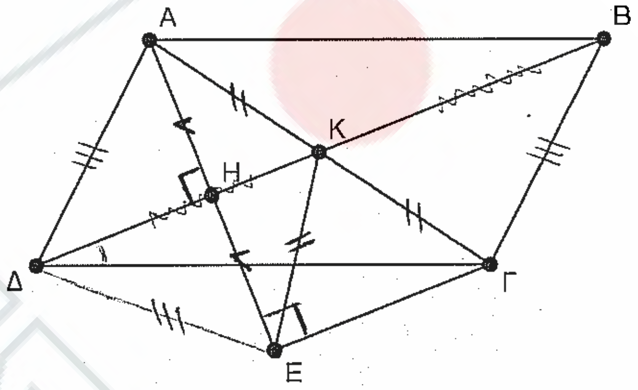
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Κ το σημείο τομής των διαγωνίων του. Φέρουμε ΑΗ κάθετη στην ΒΔ και στην προέκταση της ΑΗ (προς το Η) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΑΗ = ΗΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΚΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο ΔΒΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)



α) ΚΗ μεσοκάθετος του ΑΕ, άρα ΚΑ = ΚΕ
άρα $\overset{\triangle}{AKE}$ ισοσκελές.

β) $\overset{\triangle}{AE\Gamma}$: ΕΚ διάμεσος και $EK = \frac{A\Gamma}{2}$ άρα
$\overset{\triangle}{AE\Gamma}$ ορθογώνιο με ΑΓ υποτείνουσα.

γ) ΔΒ // ΕΓ αφού είναι ⊥ στην ΑΕ,
άρα ΔΒΓΕ τραπέζιο.
ΔΗ μεσοκάθετος του ΑΕ, άρα ΔΕ = ΔΑ = ΒΓ
Άρα ΔΒΓΕ ισοσκελές τραπέζιο.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^o\right)$ με ΒΔ διχοτόμο και ΑΚ ύψος, που τέμνονται στο Ε. Η κάθετη από το Ε στην ΑΒ τέμνει τις ΑΒ και ΒΓ στα Η και Ζ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

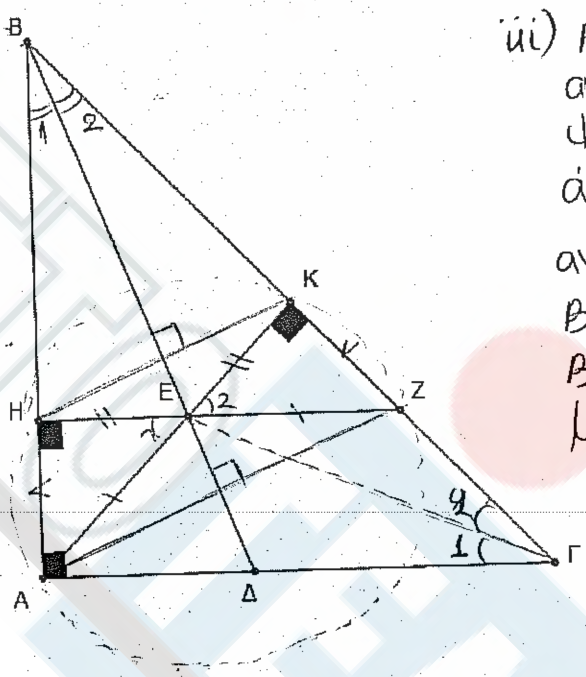
i. τα τρίγωνα ΕΗΑ και ΕΚΖ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

ii. το τρίγωνο ΒΚΗ είναι ισοσκελές τρίγωνο. (Μονάδες 6)

iii. Οι ΑΖ και ΒΔ είναι κάθετες. (Μονάδες 7)

β) Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι και ισοσκελές, να αποδείξετε ότι η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ. (Μονάδες 6)

α) i) Συγκρίνω $E\hat{H}A$ με $E\hat{K}Z$ έχω:
1) ορθογώνια
2) ΗΕ = ΚΕ αφού Ε σημείο της διχοτόμου της $\hat{B}$
3) $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ ως κατακορ.
άρα ισχύει Γ-Π-Γ
άρα $E\hat{H}A = E\hat{K}Z$



ii) Συγκρίνω $B\hat{H}E$ με $B\hat{E}K$ έχω:
1) ορθογώνια
2) ΒΕ κοινή πλευρά
3) $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ υπόθεση
άρα ισχύει υποτ.+οξ. γωνία άρα $B\overset{\Delta}{H}E = B\overset{\Delta}{E}K$ άρα ΒΗ = ΒΚ, δηλ. $B\hat{H}K$ ισοσκ.

iii) $A\hat{H}Z + A\hat{K}Z = 180^o$
άρα το ΑΗΚΖ εγγράψιμο και ΑΗ = ΚΖ
άρα $\overset{\frown}{AH} = \overset{\frown}{KZ}$,
άρα ΗΚ // ΑΖ και
ΒΔ ⊥ ΗΚ (αφού στ
$B\hat{H}H$ έχω ΒΔ διχοτόμο, άρα και ύψος)
άρα: ΒΔ ⊥ ΑΖ.

ΜΑΘΗΜΑ	Μαθηματικά: Γεωμετρία
ΤΥΠΟΣ ΛΥΚΕΙΟΥ	Γ. Ε. Λ.
ΣΤΟΧΟΙ του Π.Σ. των οποίων η υλοποίηση ελέγχεται μέσω της δραστηριότητας	Τ3 ΠΤ3

β) Αφού $A\hat{B}\Gamma$ ισοσκελές θα έχω $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^o$, άρα $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 22,5$
και ΑΚ ύψος, άρα διάμεσος και διχοτόμος. Τότε έχω
ΕΚ μεσοκάθετο της ΑΓ, άρα ΕΒ = ΕΓ, άρα $E\hat{B}\Gamma$
ισοσκ. με $\hat{\Gamma}_2 = \hat{B}_2 = 22,5^o$, άρα $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma} - \hat{\Gamma}_2 = 22,5^o$ άρα ΓΕ διχοτόμος

Ενδεικτική Απάντηση	
ΘΕΜΑ	**4**
ΓΝΩΣΤΙΚΗ ΑΠΑΙΤΗΣΗ της δραστηριότητας	**4.1 4.2**

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με ΑΚ διχοτόμο της γωνίας Α. Στην προέκταση της ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK = K\Delta$. Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει τις ΑΓ και ΒΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.

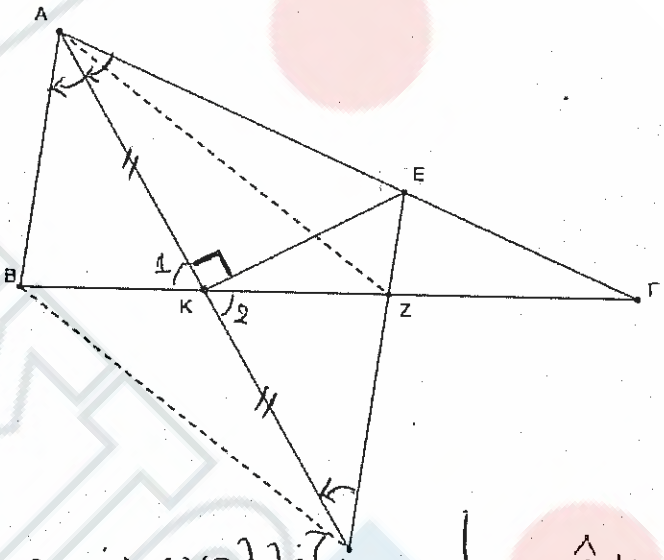
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Η ΕΚ είναι μεσοκάθετος της ΑΔ . (Μονάδες 6)

γ) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΚΔΖ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

δ) Το τετράπλευρο ΑΖΔΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)



α) $E\hat{\Delta}K = B\hat{A}K$ ως εντός εναλλάξ, $K\hat{A}E = B\hat{A}K$ αφού ΑΚ διχοτόμος $\Big\}$ $E\hat{\Delta}K = K\hat{A}E$ άρα $\overset{\triangle}{AE\Delta}$ ισοσκελές

β) $\overset{\triangle}{AE\Delta}$ ισοσκελές με ΚΕ διάμεσο, άρα ΚΕ ύψος + διχοτόμο, άρα ΚΕ μεσοκάθετος της ΑΔ.

γ) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{AKB}$ με $\overset{\triangle}{K\Delta Z}$ έχω:

1) $AK = K\Delta$ υπόθεση

2) $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$ ως κατακορυφήν

3) $B\hat{A}K = K\hat{\Delta}Z$ ως εντός εναλλάξ

άρα ισχύει Γ-Π-Γ άρα $\overset{\triangle}{AKB} = \overset{\triangle}{K\Delta Z}$.

δ) Αφού $\overset{\triangle}{AKB} = \overset{\triangle}{K\Delta Z}$ έχω $AB = \Delta Z$, δηλ. έχω $AB =\parallel \Delta Z$ άρα ΑΖΔΒ #.

ΘΕΜΑ 4

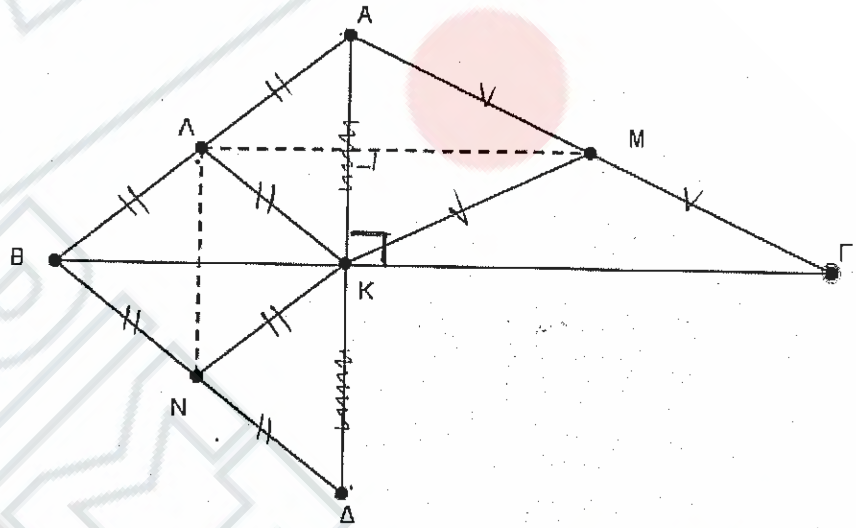
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση του ύψους του ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $ΑΚ = ΚΔ$. Έστω Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο ΒΛΚΝ είναι ρόμβος . (Μονάδες 9)

γ) $ΛΜ \perp ΛΝ$ (Μονάδες 9)



α) ΒΚ μεσοκάθετος του ΑΔ, αρα ΒΑ = ΒΔ,
αρα $\overset{\triangle}{ΑΒΔ}$ ισοσκελές.

β) $\overset{\triangle}{ΑΒΚ}$: εχω ΚΛ διαμεσο, αρα $ΚΛ = \frac{ΑΒ}{2} = ΒΛ$

$\overset{\triangle}{ΑΒΔ}$: Λ μέσο ΑΒ, Κ μεσο ΑΔ } αρα $ΚΛ =\parallel \frac{ΒΔ}{2} =\parallel ΒΝ$ αρα
το ΒΛΚΝ ## και ΚΛ = ΒΛ
αρα ειναι ρόμβος.

γ) $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$: Λ μεσο ΑΒ, Μ μεσο ΑΓ } αρα $ΛΜ =\parallel \frac{ΒΓ}{2}$ } αρα $ΑΚ \perp ΛΜ$
και $ΑΚ \perp ΒΓ$

$\overset{\triangle}{ΑΒΔ}$: Λ μεσο ΑΒ, Ν μεσο ΒΔ } αρα $ΛΝ =\parallel \frac{ΑΔ}{2}$ αρα $ΛΝ \perp ΒΓ$ }
αρα: $ΛΜ \perp ΛΝ$.

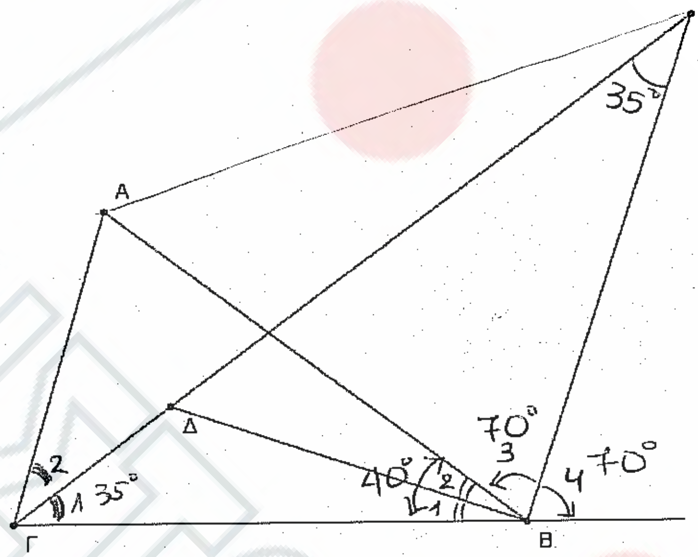
ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο Δ. Η εξωτερική διχοτόμος της Β τέμνει την προέκταση της ΓΔ στο Ε. Δίνεται ότι $A\hat{B}E = 70^o = 2\Gamma\hat{E}B$

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΒΕ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΒΕ είναι ισοσκελές (Μονάδες 8)



α) $A\hat{B}E = 70^\circ$ αρα $\Gamma\hat{E}B = 35^\circ$

$\hat{B}_4 = \hat{B}_3 = 70^\circ$ αρα $A\hat{B}\Gamma = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$

$\Gamma\overset{\Delta}{B}E$: $\hat{\Gamma}_1 = 180^\circ - 35^\circ - (40^\circ + 70^\circ) =$

$= 180^\circ - 35^\circ - 110^\circ = 180^\circ - 145^\circ = 35^\circ$

$\hat{\Gamma} = 2\hat{\Gamma}_1 = 2 \cdot 35^\circ = 70^\circ$.

$A\overset{\Delta}{B}\Gamma$: $\hat{A} = 180^\circ - 70^\circ - 40^\circ = 70^\circ$

β) $\hat{\Gamma} = \hat{B}_4 = 70^\circ$ έχω εντος εκτος και επι τ' αυτά γωνιες ίσες, αρα ΑΓ//ΒΕ, αρα ΑΓΒΕ τραπέζιο.

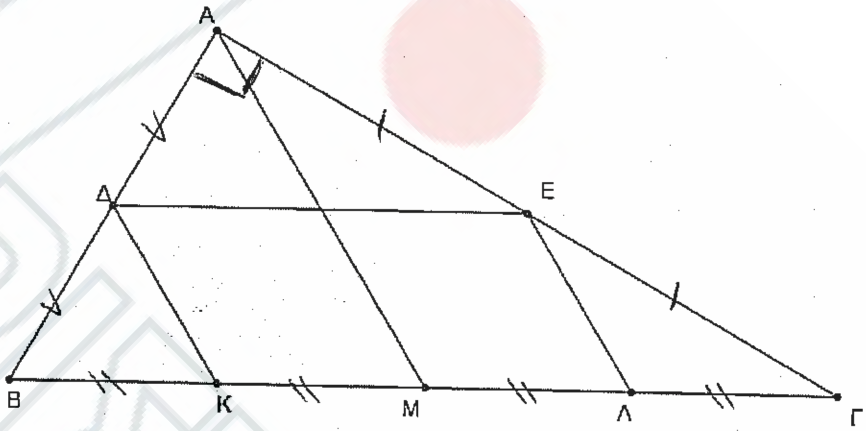
γ) $\hat{\Gamma}_1 = \Gamma\hat{E}B = 35^\circ$ αρα: $\Gamma\overset{\Delta}{B}E$ ισοσκελες.

ΘΕΜΑ 4

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ με $\hat{A} = 90^o$. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε τα σημεία Κ, Μ, Λ ώστε $BK = KM = M\Lambda = \Lambda\Gamma$. Αν τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΔΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) Η διάμεσος του τραπεζίου ΚΔΑΜ ισούται με $\frac{3}{8}B\Gamma$. (Μονάδες 12)



α) $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$: Δ μέσο ΑΒ, Ε μέσο ΑΓ $\Big\}$ άρα: $\Delta E =\parallel \frac{B\Gamma}{2} =\parallel K\Lambda$

άρα: ΔΕΛΚ ▱.

β) $\overset{\Delta}{ABM}$: Δ μέσο ΑΒ, Κ μέσο ΒΜ $\Big\}$ άρα $\Delta K =\parallel \frac{AM}{2}$

$\overset{\Delta}{AB\Gamma}$: έχω ΑΜ διάμεσο, άρα: $AM = \frac{B\Gamma}{2}$ $\Big\}$ άρα: $\Delta K = \frac{B\Gamma}{4}$

$$\text{διάμεσος} = \frac{K\Delta + AM}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{4} + \frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{\frac{3B\Gamma}{4}}{2} = \frac{3B\Gamma}{8}$$

ΘΕΜΑ 4

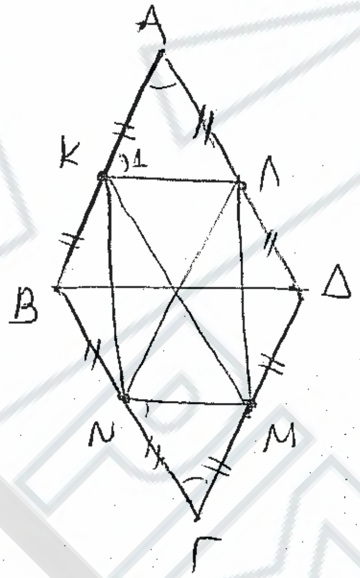
α) Σε ρόμβο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου.

(Μονάδες 12)

α)



$\overset{\triangle}{ΑΒΔ}$: Κ μέσο ΑΒ, Λ μέσο ΑΔ } άρα $ΚΛ =// \frac{ΔΒ}{2}$

$\overset{\triangle}{ΒΓΔ}$: Ν μέσο ΒΓ, Μ μέσο ΓΔ } άρα $ΜΝ =// \frac{ΔΒ}{2}$

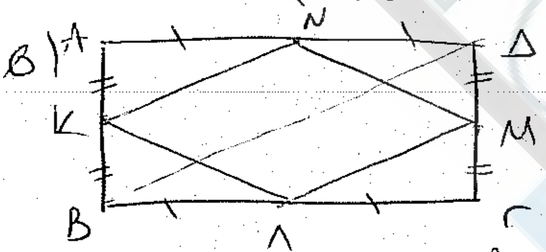
άρα: ΚΛ =// ΜΝ

άρα ΚΛΜΝ #

ΚΜ μεσοπαράλληλος των ΑΔ, ΒΓ άρα ΚΜ = ΑΔ = ΒΓ και ΝΛ μεσοπαράλληλος των ΑΒ, ΓΔ άρα ΝΛ = ΑΒ = ΓΔ

Δηλ. το # ΚΛΜΝ έχει ΚΜ = ΝΛ άρα είναι ορθογώνιο

β)



$\overset{\triangle}{ΑΒΔ}$: Κ μέσο ΑΒ, Ν μέσο ΑΔ } άρα $ΚΝ =// \frac{ΔΒ}{2}$

$\overset{\triangle}{ΓΒΔ}$: Λ μέσο ΒΓ, Μ μέσο ΔΓ } άρα $ΛΜ =// \frac{ΔΒ}{2}$

} άρα ΚΝ =// ΛΜ άρα ΚΛΜΝ #

Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ΑΚΝ}$ με $\overset{\triangle}{ΝΔΜ}$ έχω

1) ορθογώνια

2) ΚΑ = ΜΔ ως μισά ίσων πλευρών

3) ΑΝ = ΝΔ αφού Ν μέσο ΑΔ

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\overset{\triangle}{ΑΚΝ} = \overset{\triangle}{ΔΜΝ}$ άρα ΚΝ = ΝΜ δηλ. το ΚΛΜΝ ρόμβος

ΘΕΜΑ 4

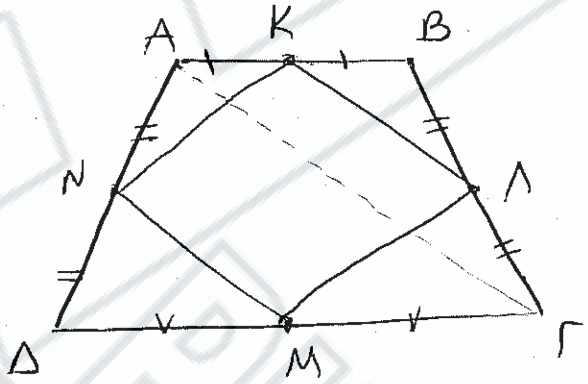
α) Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 13)

β) Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ τα μέσα Κ, Λ, Μ, Ν των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Για να σχηματίζεται ρόμβος το ΑΒΓΔ πρέπει να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντησή σας.

(Μονάδες12)

α)



$\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$: Κ μέσο ΑΒ, Λ μέσο ΒΓ } άρα: $ΚΛ =\parallel \frac{ΑΓ}{2}$

$\overset{\Delta}{ΑΔΓ}$: Ν μέσο ΑΔ, Μ μέσο ΔΓ } άρα: $ΝΜ =\parallel \frac{ΑΓ}{2}$

} άρα: $ΚΛ =\parallel ΝΜ$ άρα ΚΛΜΝ #.

Συγκρίνω $\overset{\Delta}{ΑΚΝ}$ με $\overset{\Delta}{ΚΒΛ}$ έχω:

1) ΑΚ = ΒΚ υπόθεση

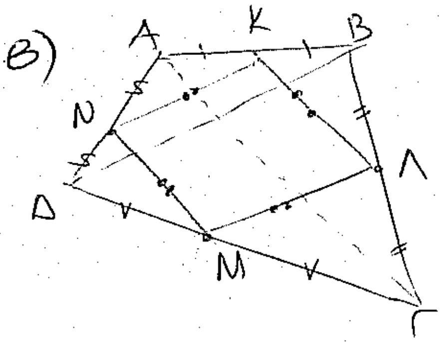
2) ΑΝ = ΒΛ ως μισά ίσων πλευρών

3) $\hat{Α} = \hat{Β}$ αφού ΑΒΓΔ ισοσκ. τραπέζιο

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\overset{\Delta}{ΑΚΝ} = \overset{\Delta}{ΚΒΛ}$ άρα ΚΝ = ΚΛ

Τότε το # ΚΛΜΝ έχει ΚΝ = ΚΛ άρα ρόμβος

β)



$\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$: $ΚΛ =\parallel \frac{ΑΓ}{2} \Leftrightarrow ΑΓ = 2ΚΛ$

$\overset{\Delta}{ΔΒΓ}$: $ΜΝ =\parallel \frac{ΔΒ}{2} \Leftrightarrow ΔΒ = 2ΜΝ$

όμως: ΚΛ = ΜΝ

άρα: ΑΓ = ΔΒ.

Το ΑΒΓΔ θα έχει ίσες διαγωνίους, άρα όχι μόνο ισοσκ. τραπέζιο.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και ΑΓ μια διάμετρός του. Θεωρούμε τις χορδές ΑΔ=ΒΓ. Έστω Κ και Λ τα μέσα των χορδών ΔΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

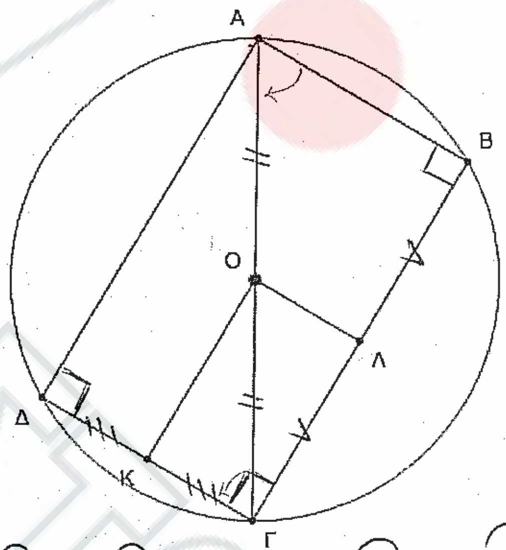
Να αποδείξετε ότι:

α) Οι χορδές ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες. (Μονάδες 6)

β) Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

γ) Η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου. (Μονάδες 7)

δ) Το τετράπλευρο ΟΛΓΚ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)



α) ΑΒ = ΔΓ άρα $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Delta\Gamma}$ άρα $\overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{B\Gamma}$ (ως διαφορά ίσων τόξων). Τότε: ΑΒ // ΔΓ.

β) Αφού ΑΒ =// ΔΓ το ΑΒΓΔ είναι # και έχει $\hat{\Delta} = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο άρα ΑΒΓΔ ορθογώνιο.

γ) $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$ και είναι εγγεγραμμένες άρα $\overset{\frown}{\Delta AB} = \overset{\frown}{\Delta\Gamma B} = 180^\circ$. Άρα ΔΒ διάμετρος.

δ) $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: Λ μέσο ΒΓ, Ο μέσο ΑΓ $\}$ άρα ΟΛ $=// \frac{AB}{2} =// \frac{\Delta\Gamma}{2} =//$ ΚΓ

άρα ΟΛΓΚ # και έχει $\hat{\Gamma} = 90^\circ$ άρα ΟΛΓΚ ορθογώνιο.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Έστω σημείο Α εξωτερικό του κύκλου και τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ ώστε να ισχύει $B\hat{A}\Gamma = 60^o$. Έστω ότι η εφαπτόμενη του κύκλου στο Δ τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.

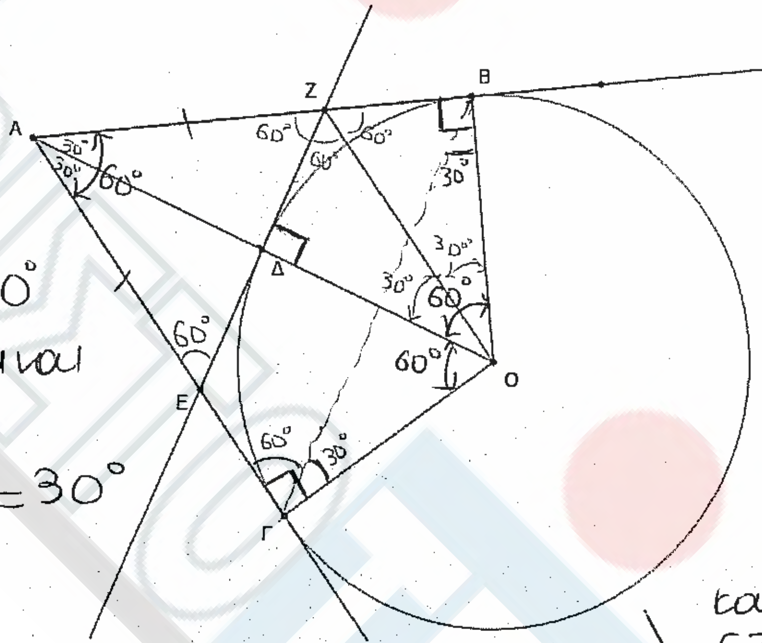
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΟΓ είναι εγγράψιμο με ΟΑ=2ΟΒ. (Μονάδες 6)

β) Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 6)

γ) $2ZB = AZ$ (Μονάδες 7)

δ) Το τετράπλευρο ΕΖΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 6)



$*\ O\hat{B}\Gamma$ ισοσκελές με $\Gamma\hat{O}B = 120°$

άρα: $B\hat{\Gamma}O = \Gamma\hat{B}O = 30°$

Τότε: $E\hat{\Gamma}B = 60°$

Δηλ. έχω:

$E\hat{\Gamma}B = A\hat{E}Z = 60°$

δηλ. έχω εντός εκτός και επί τ' αυτά γωνίες ίσες, άρα $EZ // \Gamma B$

και $E\Gamma = ZB$ άρα το ΕΖΒΓ ισοσκ. τραπέζιο

α) $A\hat{\Gamma}O + A\hat{B}O = 90° + 90° = 180°$

άρα το ΑΒΟΓ είναι εγγράψιμο.

$O\hat{A}B$: έχω $O\hat{A}B = 30°$

άρα: $OB = \frac{OA}{2}$

$2 \cdot OB = OA$.

β) ΖΟ διχοτομεί τη γωνία των ακτίνων ΔΟ, ΒΟ

άρα: $\Delta\hat{O}Z = Z\hat{O}B = 30°$ άρα $\Delta\hat{Z}O = O\hat{Z}B = 60°$.

Τότε: $A\hat{Z}E = 180° - 60° - 60° = 60°$

Όμοια: $A\hat{E}Z = 60°$, άρα $A\hat{E}Z$ ισόπλευρο.

γ) $O\hat{B}Z$: έχω $Z\hat{O}B = 30°$ άρα: $ZB = \frac{ZO}{2}$

$2ZB = ZO$

$2ZB = ZA$ (αφού $AZ\hat{O}$ ισοσκελές με $Z\hat{A}O = Z\hat{O}A = 30°$)

δ) $AB = A\Gamma$ ως εφαπτόμενα από το Α, τότε: $E\Gamma = ZB$ ως διαφορά ίσων τμημάτων. *

ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΔΓ) με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και $AB = B\Gamma = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

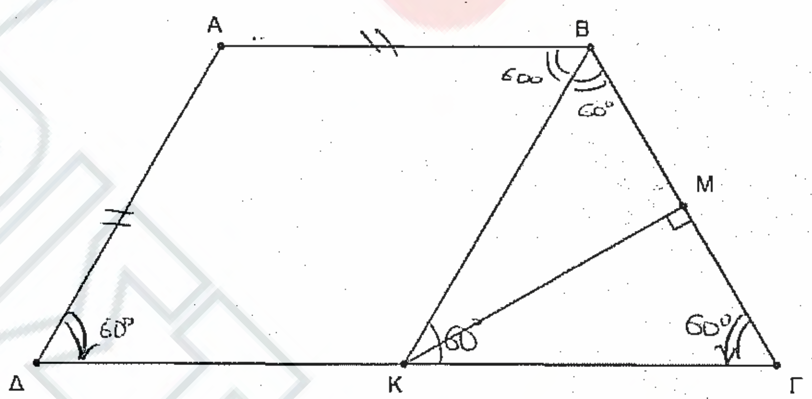
Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{B}$, η οποία τέμνει το ΔΓ στο Κ και η κάθετη από το Κ προς το ΒΓ το τέμνει στο Μ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του ΑΒΓΔ. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΒΚΔ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

ii. Το σημείο Μ είναι το μέσο του ΒΓ. (Μονάδες 7)



α) $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$ ως εντός και επί τ' αυτά

$2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180°$

$3\hat{\Gamma} = 180°$

$\hat{\Gamma} = 60°$ άρα $\hat{B} = 2 \cdot 60° = 120°$

$\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 60°$ και $\hat{A} = \hat{B} = 120°$ αφού ΑΒΓΔ ισοσκ. τραπέζι

β) i) $B\hat{K}\Gamma = 180° - 60° - 60° = 60°$ (από το $\overset{\triangle}{BK\Gamma}$).

Τότε: $B\hat{K}\Gamma = \hat{\Delta} = 60°$ δηλ. έχω εντός εκτός και επί τ' αυτά γωνίες ίσες άρα ΒΚ//ΑΔ και ΑΒ//ΔΚ

άρα ΑΒΚΔ # και έχει ΑΒ=ΑΔ άρα ρόμβος.

ii) $B\hat{K}\Gamma$ ισόπλευρο με ΚΜ ύψος άρα ΚΜ διάμεσος + διχοτόμος, δηλ. Μ μέσο ΒΓ.

ΘΕΜΑ 4

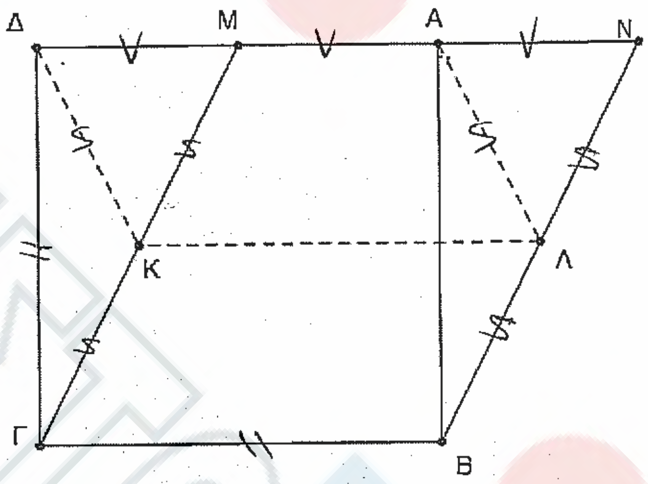
Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της πλευράς ΔΑ . Προεκτείνουμε το τμήμα ΔΑ (προς την πλευρά του Α)κατά τμήμα ΑΝ=$\frac{ΑΔ}{2}$. Φέρουμε τα τμήματα ΓΜ και ΒΝ και θεωρούμε τα μέσα τους Κ και Λ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΜΝΒΓ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΑΔΚΛ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο ΑΜΚΛ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)



α) ΜΑ=ΑΝ αρα ΜΝ=ΒΓ και ΜΝ//ΒΓ αρα ΜΝΒΓ ▱.

β) Κ μέσο ΜΓ και Λ μέσο ΒΝ αρα ΚΛ μεσοπαράλληλος, αρα ΚΛ=ΜΝ=ΒΓ=ΑΔ
Δηλ. ΚΛ=// ΑΔ αρα ΑΔΚΛ ▱.

γ) $\overset{\triangle}{ΑΒΝ}$: εχω ΑΛ διάμεσο, αρα ΑΝ = $\frac{ΒΝ}{2}$

$\overset{\triangle}{ΔΚΜ}$: εχω ΔΚ διάμεσο, αρα ΔΚ = $\frac{ΜΓ}{2}$

Αφού ΑΔΚΛ ▱ θα εχω ΜΑ//ΚΛ και ΑΛ=ΜΚ
αρα ΑΜΚΛ ισοσκελές τραπέζιο.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < AΓ$. Στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε ΑΕ=ΑΓ. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $AΔ = AB$. Αν τα τμήματα ΔΕ και ΒΓ τέμνονται στο Κ και η προέκταση της ΑΚ τέμνει την ΕΓ στο Μ.

Να αποδείξετε ότι:

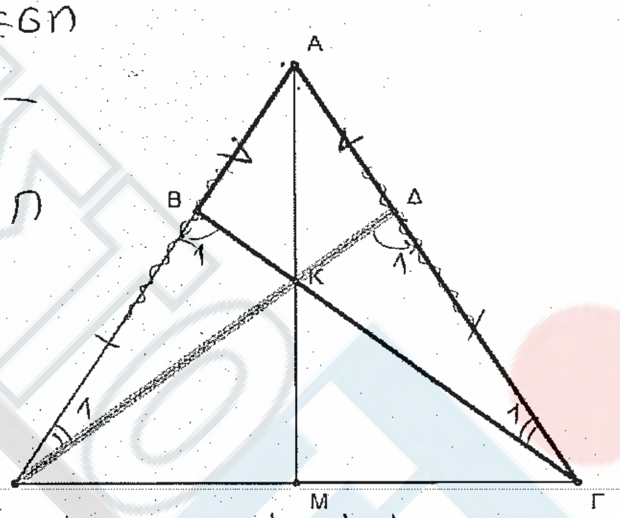
α) $BΓ = ΔE$ (Μονάδες 6)

β) $BK = KΔ$ (Μονάδες 7)

γ) Η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας Α. (Μονάδες 6)

δ) Η ΑΜ είναι μεσοκάθετος της ΕΓ. (Μονάδες 6)

α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ABΓ}$ με $\overset{\triangle}{AΔE}$ έχω:
1) $AΔ = AB$ υπόθεση
2) $AΓ = AE$ —//—
3) $\hat{A}$ κοινή γωνία
άρα ισχύει Π-Γ-Π
άρα $\overset{\triangle}{ABΓ} = \overset{\triangle}{AΔE}$
άρα: $\boxed{BΓ = ΔE}$



β) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ΔKΓ}$ με $\overset{\triangle}{BKΓ}$ έχω:
1) $EB = ΔΓ$ ως διαφορά ίσων τμημάτων
2) $\hat{E}_1 = \hat{Γ}_1$ αφού $\overset{\triangle}{AΔE} = \overset{\triangle}{ABΓ}$
3) $\hat{B}_1 = \hat{Δ}_1$ ως παραπληρωμ. ίσων γωνιών
άρα ισχύει Γ-Π-Γ άρα $\overset{\triangle}{ΔKΓ} = \overset{\triangle}{BKΓ}$ άρα $BK = ΔK$.

γ) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ABK}$ με $\overset{\triangle}{AΔK}$ έχω:

ΜΑΘΗΜΑ	Μαθηματικά: Γεωμετρία
ΤΥΠΟΣ ΛΥΚΕΙΟΥ	Γ. Ε. Λ.

1) ΑΚ κοινή πλευρά
2) $AB = AΔ$ υπόθεση
3) $BK = ΔK$ από β)
άρα ισχύει Π-Π-Π άρα $\overset{\triangle}{ABK} = \overset{\triangle}{AΔK}$ άρα $B\hat{A}K = K\hat{A}Δ$
δηλ. ΑΚ διχοτόμος της $\hat{A}$.

δ) $AE = AΓ$ άρα $\overset{\triangle}{AEΓ}$ ισοσκελές με ΑΜ διχοτόμο άρα ΑΜ ύψος + διάμεσος, άρα ΑΜ μεσοκάθετος του ΕΓ.

ΣΤΟΧΟΙ του Π.Σ. των οποίων η υλοποίηση ελέγχεται μέσω της δραστηριότητας	Τ2 Τ3
Ενδεικτική Απάντηση	**4.1 4.2**
ΘΕΜΑ	**4**
ΓΝΩΣΤΙΚΗ ΑΠΑΙΤΗΣΗ της δραστηριότητας	

ΘΕΜΑ 4

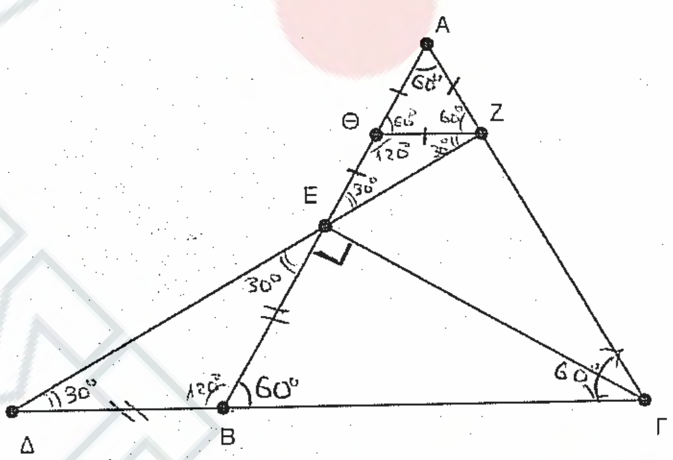
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΓΕ. Στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΒΔ = $\frac{ΒΓ}{2}$. Αν η ευθεία ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και ΖΘ // ΒΓ:

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές και το τρίγωνο ΑΘΖ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΘΕΖ. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι ΑΕ = 2 ΘΖ. (Μονάδες 5)

δ) Να αποδείξετε ότι 3ΑΒ = 4ΘΒ. (Μονάδες 5)



α) $ΒΓ = ΒΑ$ και $ΒΔ = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{ΒΑ}{2} = ΒΕ = ΕΑ$

άρα: $Β\overset{\triangle}{Δ}Ε$ ισοσκελές.

$\hat{Θ} = \hat{Β} = 60°$ ως εντός εκτός και επί τ' αυτά

$\hat{Ζ} = \hat{Γ} = 60°$ —"— —"—

άρα $Α\overset{\triangle}{Θ}Ζ$ ισόπλευρο.

β) $Ε\hat{Θ}Ζ = 180° - 60° = 120°$

$Θ\hat{Ε}Ζ = Δ\hat{Ε}Β = 30°$ ως κατακορυφήν

(με $Δ\hat{Ε}Β = 30°$ αφού $Δ\hat{Β}Ε = 180° - 60° = 120°$

και $Δ\overset{\triangle}{Β}Ε$ ισοσκελές).

$Θ\overset{\triangle}{Ε}Ζ$: $Ε\hat{Ζ}Θ = 180° - 120° - 30° = 30°$

γ) $Ε\hat{Ζ}Θ = Θ\hat{Ε}Ζ = 30°$ άρα $Θ\overset{\triangle}{Ε}Ζ$ ισοσκελές με $ΘΖ = ΘΕ$

Τότε: $ΑΕ = ΑΘ + ΘΕ = 2ΘΖ$.

δ) $3ΑΒ = 3(ΑΘ + ΘΕ + ΕΒ) = 3(ΑΘ + ΑΘ + 2ΑΘ) = 3 \cdot 4ΑΘ = 12ΑΘ$

$4ΘΒ = 4(ΘΕ + ΒΕ) = 4(ΑΘ + 2ΑΘ) = 4 \cdot 3ΑΘ = 12ΑΘ = 3ΑΒ$.

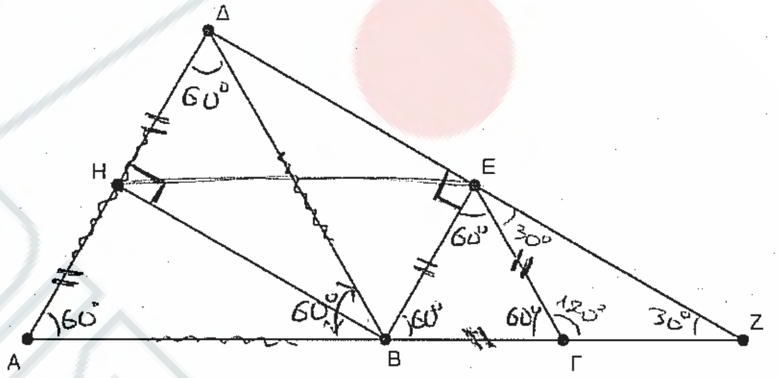
ΘΕΜΑ 4

Σε μια ευθεία (ε) θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ έτσι ώστε ΑΒ = 2 ΒΓ και στο ίδιο ημιεπίπεδο θεωρούμε ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ. Αν Η είναι το μέσο του ΑΔ και η ευθεία ΔΕ τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Ζ να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΒΗΔΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΓΖΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΗΕΓΑ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)



α) ΒΓ = ΒΕ = ΕΓ
και ΑΒ = 2ΒΓ άρα: ΔΗ = ΑΗ = ΒΕ
$\hat{A} = E\hat{B}\Gamma = 60^\circ$ δηλ. σχηματίζουν ~~εντός~~ εκτός και
επί τ' αυτά μέρη ίσες, άρα ΑΔ // ΒΕ.
Δηλ. έχω ΔΗ =// ΒΕ άρα ΒΗΔΕ # και έχει
$\hat{H} = 90^\circ$ (αφού ΒΗ διάμεσος στο ισόπλευρο $A\hat{\Delta}B$,
θα είναι ύψος + διχοτόμος) άρα ορθογώνιο.

β) $E\hat{\Gamma}Z = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
$\Gamma\hat{E}Z = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$
$\underline{E\overset{\triangle}{\Gamma}Z}$: $\hat{Z} = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ = \Gamma\hat{E}Z$
άρα: $E\overset{\triangle}{\Gamma}Z$ ισοσκελές

γ) ΒΕ // ΔΗ άρα και ΒΕ // ΑΗ και ΒΕ = ΑΗ
άρα ΑΗΕΒ #, δηλ. έχω ΗΕ // ΑΒ άρα
ΗΕ // ΑΓ και $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$ άρα ΗΕΓΑ ισοσκ. τραπέζιο

ΘΕΜΑ 4

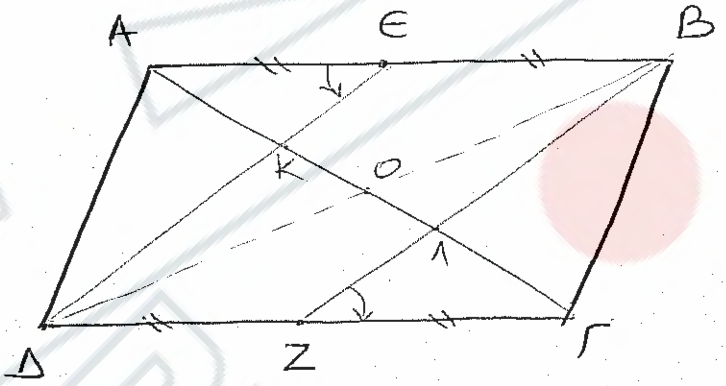
Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

α) Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) $A\hat{E}\Delta = B\hat{Z}\Gamma$ (Μονάδες 8)

γ) Οι ΔΕ και ΒΖ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΑΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

(Μονάδες 9)



α) ΔΖ =∥ ΒΕ ως μισά ίσων πλευρών

άρα ΔΕΒΖ #

β) Συγκρίνω $A\overset{\triangle}{E}\Delta$ με $B\overset{\triangle}{Z}\Gamma$ έχω:

1) ΑΕ = ΖΓ ως μισά ίσων πλευρών

2) ΑΔ = ΒΓ αφού ΑΒΓΔ #

3) ΔΕ = ΒΖ αφού ΔΕΒΖ #

άρα ισχύει Π-Π-Π άρα $A\overset{\triangle}{E}\Delta = B\overset{\triangle}{Z}\Gamma$

άρα $A\hat{E}\Delta = B\hat{Z}\Gamma$.

γ) Οι διαγώνιοι του # ΑΒΓΔ διχοτομούνται

άρα στο $A\overset{\triangle}{\Delta}B$ και $\Delta\overset{\triangle}{B}\Gamma$ έχω Κ και Λ βαρύκεντρα. Τότε:

$$\left.\begin{aligned} AK &= \frac{2}{3}OA \\ \Gamma\Lambda &= \frac{2}{3}O\Gamma \\ \text{όμως } OA &= O\Gamma \end{aligned}\right\} \text{ άρα: } AK = \Gamma\Lambda$$

$$K\Lambda = KO + O\Lambda = \frac{1}{3}OA + \frac{1}{3}O\Gamma = \frac{2}{3}OA$$

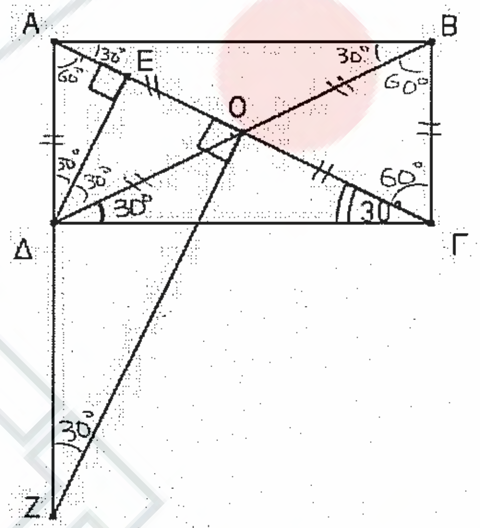
Άρα: ΑΚ = ΓΛ = ΚΛ δηλ. οι ΔΕ, ΒΖ τριχοτομούν την ΑΓ.

ΘΕΜΑ 4

Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\Delta\hat{\Gamma}A = 30^o$ και Ο το κέντρο του. Φέρουμε $\Delta E \perp A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $A\hat{\Delta}\Gamma$ χωρίζεται από τη ΔΕ και τη διαγώνιο ΔΒ σε τρεις ίσες γωνίες. (Μονάδες 13)

β) Φέρουμε κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Ο η οποία τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ζ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΖΟ και ΑΒΓ είναι ίσα. (Μονάδες 12)



α) Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου ΑΒΓΔ ειναι ίσες και διχοτομούνται, άρα $\overset{\Delta}{O\Gamma}$ ισοσκελές
με $O\hat{\Delta}\Gamma = O\hat{\Gamma}\Delta = 30^o$
$O\overset{\Delta}{B}\Gamma$ ισοσκελές με $O\hat{\Gamma}B = 60^o$ άρα $O\overset{\Delta}{B}\Gamma$ ισόπλευρο
Άρα: $A\hat{B}O = 30^o$. Τότε και $B\hat{A}O = 30^o$, άρα $\Delta\hat{A}O = 60^o$,
άρα $A\hat{\Delta}E = 30^o$.
Τότε: $E\hat{\Delta}O = 90^o - 30^o - 30^o = 30^o$

β) Συγκρίνω $A\overset{\Delta}{Z}O$ με $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$ έχω:
1) ορθογώνια
2) ΟΑ = ΒΓ υπόθεση
3) $Z\hat{A}O = B\hat{\Gamma}A = 60^o$
άρα ισχυει Γ-Π-Γ άρα $A\overset{\Delta}{Z}O = A\overset{\Delta}{B}\Gamma$.

ΘΕΜΑ 4

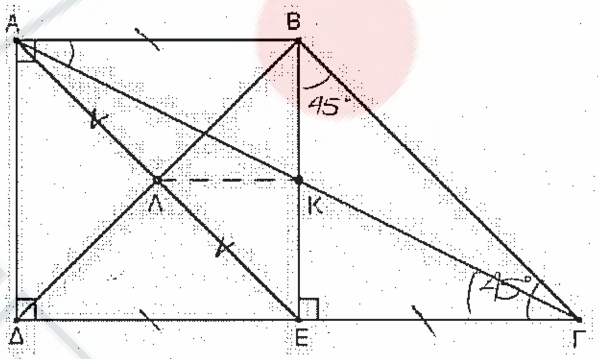
Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A}=\hat{\Delta}=90°$, ΔΓ=2ΑΒ και $\hat{B}=3\hat{\Gamma}$. Από το Β φέρνουμε κάθετη στη ΓΔ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ και την ΓΔ στο Ε. Επίσης φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Λ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Gamma}=45°$ (Μονάδες 8)

β) ΒΔ=ΑΕ (Μονάδες 9)

γ) $ΚΛ=\frac{1}{4}ΔΓ$. (Μονάδες 8)



α) $\hat{B}+\hat{\Gamma}=180°$ ως εντός και επί τ' αυτά

$3\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=180°$

$4\hat{\Gamma}=180°$

$\hat{\Gamma}=45°$ τότε $\hat{B}=3\cdot 45°=135°$.

β) ΔΓ = 2ΑΒ και ΑΒ = ΔΕ (αφού ΑΒΕΔ ορθογώνιο αφού έχει 3 ορθές γωνίες) άρα: ΑΒ = ΔΕ = ΕΓ

$\overset{\Delta}{ΒΕΓ}$: έχω $\hat{\Gamma}=45°$ άρα είναι ισοσκελές ορθογώνιο

Τότε: ΒΕ = ΕΓ = ΑΒ. Άρα το ΑΒΕΔ τετράγωνο και έχει ίσες διαγώνιους, δηλ. ΑΕ = ΔΒ.

γ) Συγκρίνω $Α\overset{\Delta}{Β}Κ$ με $Κ\overset{\Delta}{Ε}Γ$ έχω:

1) ορθογώνια

2) ΑΒ = ΕΓ από β)

3) $Β\hat{Α}Κ = Κ\hat{Γ}Ε$ ως εντός εναλλάξ

άρα ισχύει Γ-Π-Γ άρα $Α\overset{\Delta}{Β}Κ = Κ\overset{\Delta}{Ε}Γ$

άρα: ΒΚ = ΚΕ δηλ. Κ μέσο ΒΕ.

$\overset{\Delta}{ΑΕΓ}$: Λ μέσο ΑΕ, Κ μέσο ΑΓ } άρα: $ΚΛ \overset{=}{\parallel} \frac{ΕΓ}{2} = \frac{\frac{ΔΓ}{2}}{2} = \frac{ΔΓ}{4}$.

ΘΕΜΑ 4

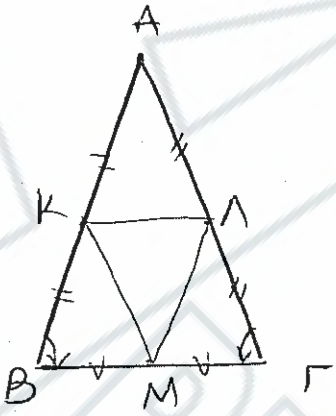
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για

i. ισόπλευρο τρίγωνο. (Μονάδες 8)

ii. ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο. (Μονάδες 9)

α)



Συγκρίνω $\overset{\triangle}{BMK}$ με $\overset{\triangle}{M\Gamma\Lambda}$ έχω:

1) $BK = \Lambda\Gamma$ ως μισά ίσων πλευρών

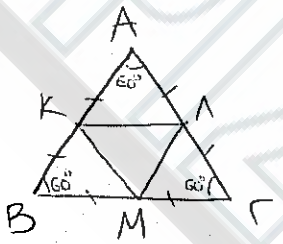
2) $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ αφού $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισοσκ.

3) $BM = M\Gamma$ υπόθεση

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\overset{\triangle}{BMK} = \overset{\triangle}{M\Gamma\Lambda}$

άρα $MK = M\Lambda$ άρα $\overset{\triangle}{MK\Lambda}$ ισοσκελές

β)



i) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{BMK}$ με $\overset{\triangle}{M\Gamma\Lambda}$ με $\overset{\triangle}{AK\Lambda}$ έχω:

1) $BK = AK = \Gamma\Lambda$ ως μισά ίσων πλευρών

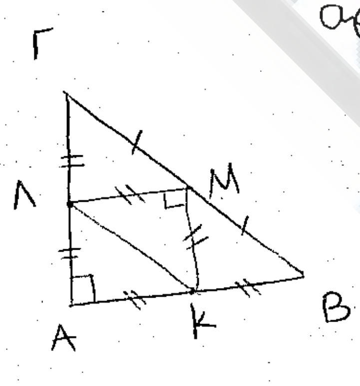
2) $BM = A\Lambda = M\Gamma$ —\\— —\\—

3) $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60°$

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\overset{\triangle}{BMK} = \overset{\triangle}{M\Gamma\Lambda} = \overset{\triangle}{AK\Lambda}$

άρα: $K\Lambda = KM = M\Lambda$ άρα $\overset{\triangle}{KM\Lambda}$ ισόπλευρο.

ii)



Λ μέσο ΑΓ
Μ μέσο ΒΓ } άρα $\Lambda M =\parallel \frac{AB}{2}$

άρα $\Lambda M =\parallel AK$ άρα

ΑΚΜΛ ▱ με $\hat{A} = 90°$

άρα ορθογώνιο με ΑΛ=ΑΚ

ως μισά ίσων πλευρών

άρα ΑΚΜΛ τετράγωνο.

Άρα: $\overset{\triangle}{\Lambda MK}$ ορθογώνιο και ισοσκελές

ΘΕΜΑ 4

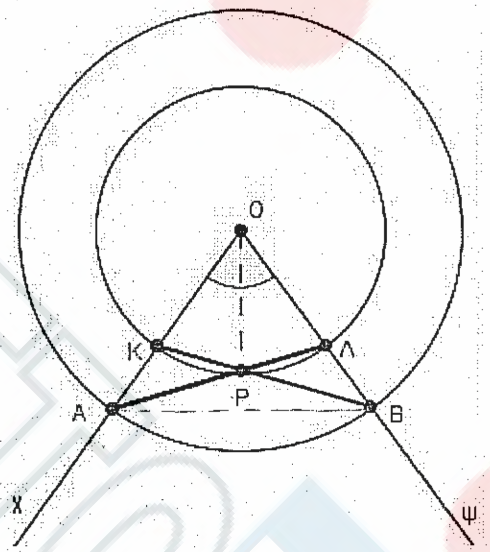
Δίνεται οξεία γωνία $x\hat{O}y$ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (Ο, ρ_1) και (Ο, ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την Οχ στα σημεία Κ, Α και την Οψ στα Λ, Β αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΛ = ΒΚ. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισοσκελές, όπου Ρ το σημείο τομής των ΑΛ και ΒΚ. (Μονάδες 8)

γ) Η ΟΡ διχοτομεί την $x\hat{O}y$. (Μονάδες 9)



α) Συγκρίνω $A\overset{\triangle}{O}\Lambda$ με $K\overset{\triangle}{O}B$ έχω:

1) $O\Lambda = OK = \rho_1$

2) $OA = OB = \rho_2$

3) $\hat{O}$ κοινή γωνία

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $A\overset{\triangle}{O}\Lambda = K\overset{\triangle}{O}B$ άρα $\Lambda A = KB$.

β) Αφού $A\overset{\triangle}{O}\Lambda = K\overset{\triangle}{O}B$ θα έχω $O\hat{A}P = O\hat{B}K$

και $O\hat{A}B = O\hat{B}A$ αφού $O\overset{\triangle}{A}B$ ισοσκελές με $OA = OB = \rho_2$

Τότε: $P\hat{A}B = P\hat{B}A$ ως διαφορά ίσων γωνιών, άρα $P\overset{\triangle}{A}B$ ισοσκελ.

γ) Συγκρίνω $O\overset{\triangle}{A}P$ με $O\overset{\triangle}{B}P$ έχω:

1) ΟΡ κοινή πλευρά

2) $OA = OB = \rho_2$

3) $PA = PB$ από β)

άρα ισχύει Π-Π-Π άρα $O\overset{\triangle}{A}P = O\overset{\triangle}{B}P$ άρα $A\hat{O}P = P\hat{O}B$ δηλ.

ΟΡ διχοτομεί τη $x\hat{O}y$

ΘΕΜΑ 4

Έστω ΑΒΓ τρίγωνο και τα ύψη του $ΒΕ$ και $ΓΔ$ που αντιστοιχούν στις πλευρές $ΑΓ$ και $ΑΒ$ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ, τότε τα ύψη $ΒΕ$ και $ΓΔ$ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση ***Π*** αιτιολογώντας την απάντησή σας

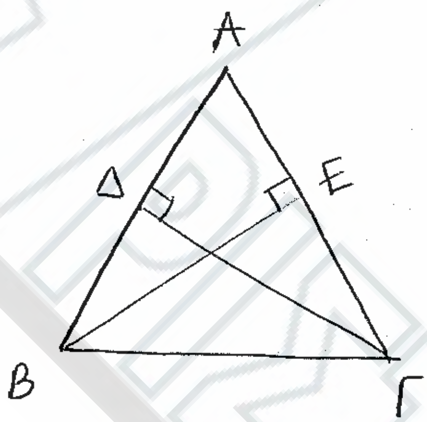
(Μονάδες 10)

β) Να διατυπώσετε την ***αντίστροφη*** πρόταση της ***Π*** και να αποδείξετε ότι ισχύει.

(Μονάδες 10)

γ) Να διατυπώσετε την πρόταση ***Π*** και την ***αντίστροφή της*** ως ενιαία πρόταση.

(Μονάδες 5)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ΑΒΕ}$ με $\overset{\triangle}{ΑΔΓ}$ έχω:
1) ορθογώνια
2) $\hat{Α}$ κοινή γωνία
3) ΑΒ = ΑΓ υπόθεση
άρα ισχύει υποτ. + οξ. γωνία
άρα $\overset{\triangle}{ΑΒΕ} = \overset{\triangle}{ΑΔΓ}$ άρα ΒΕ = ΓΔ

β) Αν τα ύψη ΒΕ και ΓΔ είναι ίσα, τότε
<u>ΝΔΟ:</u> ΑΒ = ΑΓ.
Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ΑΒΕ}$ με $\overset{\triangle}{ΑΔΓ}$ έχω:
1) ορθογώνια
2) ΒΕ = ΓΔ υπόθεση
3) $\hat{Α}$ κοινή γωνία
άρα ισχύει Γ-Π-Γ άρα $\overset{\triangle}{ΑΒΕ} = \overset{\triangle}{ΑΔΓ}$
άρα ΑΒ = ΑΓ.

γ)
Σε τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ φέρνω ΒΕ και ΓΔ τα ύψη του. <u>ΝΔΟ:</u> το τρίγωνο είναι ισοσκελές αν και μόνο αν ΓΔ = ΒΕ.

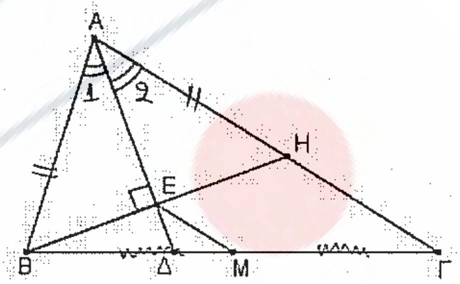
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ < ΑΓ) και η διχοτόμος του ΑΔ. Φέρουμε από το Β κάθετη στην ΑΔ που τέμνει την ΑΔ στο Ε και την πλευρά ΑΓ στο Η. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

β) ΕΜ//ΗΓ (Μονάδες 8)

γ) ΕΜ=(ΑΓ-ΑΒ)/2 (Μονάδες 8)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ABE}$ με $\overset{\triangle}{AEH}$ έχω:

1) ορθογώνια

2) ΑΕ κοινή πλευρά

3) $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ αφού ΑΕ διχοτόμος της $\hat{A}$

άρα ισχύει Γ-Π-Γ άρα $\overset{\triangle}{ABE} = \overset{\triangle}{AEH}$

άρα ΑΒ = ΑΗ, δηλ. $\overset{\triangle}{ABH}$ ισοσκελές

β) Αφού $\overset{\triangle}{ABH}$ ισοσκελές τότε ΑΕ και διάμεσος

$\overset{\triangle}{BH\Gamma}$: Ε μέσο ΒΗ, Μ μέσο ΒΓ $\Big\}$ άρα $EM =\parallel \frac{H\Gamma}{2}$

γ) $EM = \frac{H\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma - AH}{2} = \frac{A\Gamma - AB}{2}$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε $ΔΕ \perp ΒΓ$ και ονομάζουμε Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ.

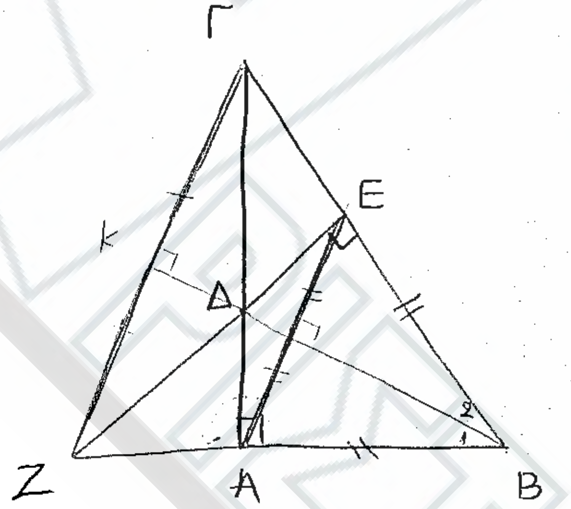
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β)Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΖ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

γ) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων ΑΕ και ΖΓ. (Μονάδες 6)

δ)Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)



α) Συγκρίνω $A\overset{\triangle}{Δ}B$ με $Δ\overset{\triangle}{E}B$ έχω
1) ορθογώνια
2) $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ αφού ΔΒ διχοτόμος
3) ΔΒ κοινή πλευρά
άρα ισχύει Υποτ.+οξ. γωνία
άρα $A\overset{\triangle}{Δ}B = Δ\overset{\triangle}{E}B$ άρα ΒΕ = ΒΑ
άρα $A\overset{\triangle}{B}E$ ισοσκελές.

β) Συγκρίνω $A\overset{\triangle}{B}Γ$ με $B\overset{\triangle}{E}Z$ έχω:
1) ορθογώνια
2) ΒΑ = ΒΕ από α)
3) $\hat{B}$ κοινή γωνία
άρα ισχύει Γ-Π-Γ άρα $A\overset{\triangle}{B}Γ = B\overset{\triangle}{E}Z$

γ) ΒΕ = ΒΑ από α) και ΔΕ = ΔΑ αφού Δ σημείο της διχοτόμου της $\hat{B}$ άρα τα σημεία Δ, Β ισαπέχουν από τ' άκρα του ΑΕ άρα ανήκουν στη μεσοκάθετο αυτού.
Δ είναι το σημείο τομής των υψών ΓΑ και ΖΕ του $B\overset{\triangle}{Γ}Z$ άρα Δ ορθόκεντρο άρα ΔΒ (προεκτεινόμενο) θα είναι το τρίτο ύψος του τριγώνου και αφού $A\overset{\triangle}{B}Γ = B\overset{\triangle}{E}Z$ θα έχω ΒΖ = ΒΓ άρα $B\overset{\triangle}{Γ}Z$ ισοσκελές άρα ΔΒ και διάμεσος, δηλ. μεσοκάθετος του ΖΓ.

δ) ΔΒ ⊥ ΑΕ και ΖΓ άρα ΑΕ ∥ ΖΓ άρα ΑΕΓΖ τραπέζιο
και ΑΖ = ΓΕ ως διαφορά ίσων τμημάτων άρα ΑΕΓΖ ισοσκ. τραπ

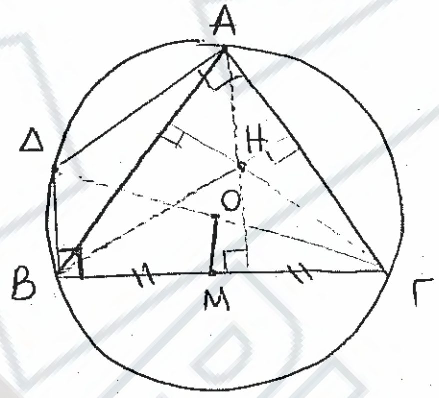
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Έστω σημείο Δ του τόξου ΑΒ τέτοιο ώστε ΔΒ⊥ΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΔ⊥ΑΓ. (Μονάδες 8)

β) Έστω Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΗ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) Αν Μ το μέσον της ΒΓ, να αποδείξετε ότι $ΟΜ=\frac{ΑΗ}{2}$. (Μονάδες 8)



α) $\hat{ΔΒΓ}=90^\circ$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο $\overset{\frown}{ΔΑΓ}$, άρα $\overset{\frown}{ΔΑΓ}=180^\circ$, άρα του $ΔΒΓ=180^\circ$.
Τότε: $Δ\hat{Α}Γ=90^\circ$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.
Άρα: ΑΔ ⊥ ΑΓ.

β) ΑΔ // ΒΗ γιατί είναι ⊥ στην ΑΓ
ΔΒ // ΑΗ γιατί είναι ⊥ στην ΒΓ
$\Big\}$ άρα: ΑΔΒΗ ▱

γ) $\overset{\triangle}{ΔΒΓ}$: Ο μέσο ΔΓ, Μ μέσο ΒΓ $\Big\}$ άρα: $ΟΜ = // \frac{ΔΒ}{2}$

άρα: $ΟΜ=\frac{ΑΗ}{2}$, αφού ΑΔΒΗ ▱.

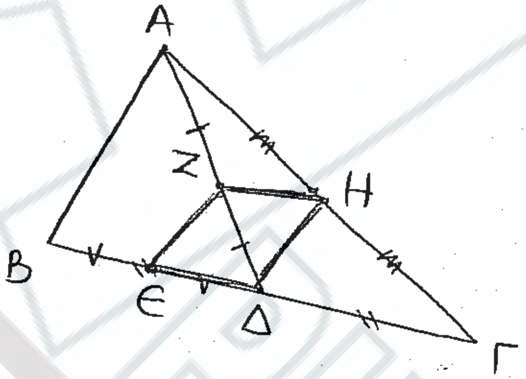
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Έστω Ε, Ζ και Η είναι τα μέσα των ΒΔ, ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τη σχέση των πλευρών ΑΒ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε το παραλληλόγραμμο ΔΕΖΗ να είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

γ) Στην περίπτωση που το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο (η γωνία Β ορθή), να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου ΔΕΖΗ. (Μονάδες 5)



α) $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$: $\left.\begin{array}{l} Z \text{ μέσο } A\Delta \\ H \text{ μέσο } A\Gamma \end{array}\right\}$

άρα: $ZH \mathrel{=\!/\!/} \frac{\Delta\Gamma}{2}$

άρα: $ZH \mathrel{=\!/\!/} \frac{B\Delta}{2}$

άρα: $ZH \mathrel{=\!/\!/} E\Delta$

άρα: ΔΕΖΗ ▱.

β) $\overset{\triangle}{AB\Delta}$: $\left.\begin{array}{l} Z \text{ μέσο } A\Delta \\ E \text{ μέσο } B\Delta \end{array}\right\}$ άρα: $ZE \mathrel{=\!/\!/} \frac{AB}{2}$

Για να είναι ρόμβος το ▱ ΔΕΖΗ θα πρέπει να έχει $ZE = ZH$, δηλ. $\frac{AB}{\cancel{2}} = \frac{B\Delta}{\cancel{2}}$

$AB = B\Delta$

$AB = \frac{B\Gamma}{2}$

$\boxed{B\Gamma = 2AB}$

γ) Αφού $AB \perp B\Gamma$ και $ZE /\!/ AB$ θα έχω και $ZE \perp B\Gamma$. Δηλ. το ▱ ΔΕΖΗ έχει μία ορθή γωνία, άρα είναι ορθογώνιο.

ΘΕΜΑ 4

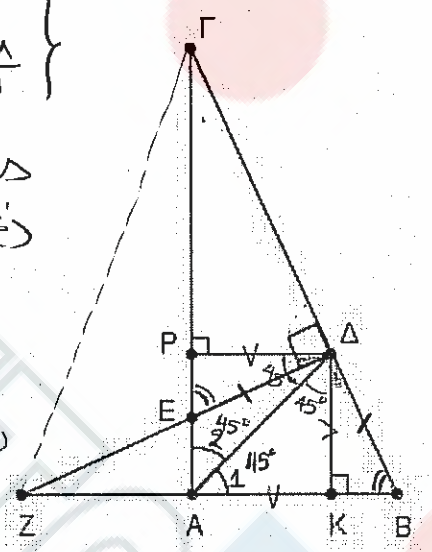
Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. Έστω ΔΚ και ΔΡ οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Η κάθετη της ΒΓ στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε και την προέκταση της πλευράς ΑΒ (προς το Β) στο σημείο Ζ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{B} = \Delta\hat{E}\Gamma$ (Μονάδες 8)

ii. ΔΕ=ΔΒ (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΔΓΖ (Μονάδες 9)



α) i) $A\hat{B}\Gamma$: $\hat{B} = 90° - \hat{\Gamma}$
$\Delta\hat{E}\Gamma$: $\Delta\hat{E}\Gamma = 90° - \hat{\Gamma}$
αρα: $\hat{B} = \Delta\hat{E}\Gamma$ ως συμπληρωματικές της $\hat{\Gamma}$.

ii) Συγκρίνω $P\hat{E}\Delta$ με $\Delta\hat{B}K$ εχω
1) ορθογώνια
2) $\hat{B} = \Delta\hat{E}\Gamma$ από i)
3) $P\Delta = K\Delta$ αφού Δ σημείο της διχοτόμου της $\hat{A}$
αρα ισχύει Γ-Π-Γ αρα $P\hat{E}\Delta = \Delta\hat{B}K$ αρα: $\boxed{\Delta E = \Delta B}$

β) Συγκρίνω $\Delta\hat{B}Z$ με $E\hat{\Delta}\Gamma$ εχω:
1) ορθογώνια
2) $E\Delta = \Delta B$ από ii)
3) $\hat{B} = \Delta\hat{E}\Gamma$ από i)
αρα ισχύει Γ-Π-Γ αρα $\Delta\hat{B}Z = E\hat{\Delta}\Gamma$
αρα: $\Gamma\Delta = Z\Delta$ αρα: $\Gamma\hat{\Delta}Z$ ισοσκελές και ορθογώνιο, αρα: $\Delta\hat{\Gamma}Z = \Gamma\hat{Z}\Delta = 45°$.

ΘΕΜΑ 4

Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο με ΑΒ>ΒΓ τέτοιο ώστε οι διαγώνιοί του να σχηματίζουν γωνία 60°. Από το Δ φέρουμε ΔΜ κάθετη στην ΑΓ.

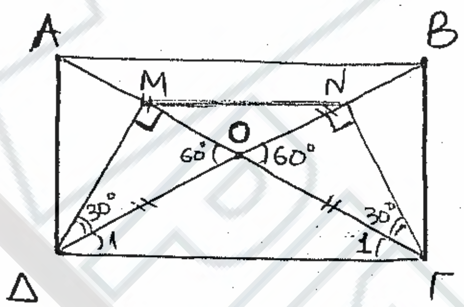
α) Να αποδείξετε ότι:

i. το σημείο Μ είναι μέσο του ΑΟ όπου Ο το κέντρο του ορθογωνίου.

(Μονάδες 8)

ii. $AM=\frac{1}{4}A\Gamma$ (Μονάδες 7)

β) Αν από το Γ φέρουμε ΓΝ κάθετη στη ΒΔ, να αποδείξετε ότι το ΜΝΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)



α) i) Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες και διχοτομούνται άρα $OA = OB = O\Gamma = O\Delta$.
Αφού $M\hat{O}\Delta = 60°$, τότε $M\hat{\Delta}O = 30°$
άρα στο $M\hat{O}\Delta$: έχω $OM = \frac{O\Delta}{2} = \frac{OA}{2}$
άρα Μ μέσο ΟΑ.

ii) Αφού Μ μέσο ΟΑ θα έχω $AM = \frac{OA}{2} = \frac{\frac{A\Gamma}{2}}{2} = \frac{A\Gamma}{4}$

β)
Όμοια: θα έχω Ν μέσο ΟΒ
$\underline{A\hat{O}B}$: $\left.\begin{matrix}M \text{ μέσο } OA \\ N \text{ μέσο } OB\end{matrix}\right\}$ άρα: $MN \mathrel{=}\!\!\parallel \frac{AB}{2}$
δηλ. $MN \parallel \Delta\Gamma$ άρα ΜΝΓΔ τραπέζιο

$O\hat{\Delta}\Gamma$ ισοσκελές αφού $O\Delta = O\Gamma$ άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1$
Τότε: $M\hat{\Delta}\Gamma = N\hat{\Gamma}\Delta$ ως άθροισμα ίσων γωνιών
άρα ΜΝΓΔ ισοσκ. τραπέζιο.

ΘΕΜΑ 4

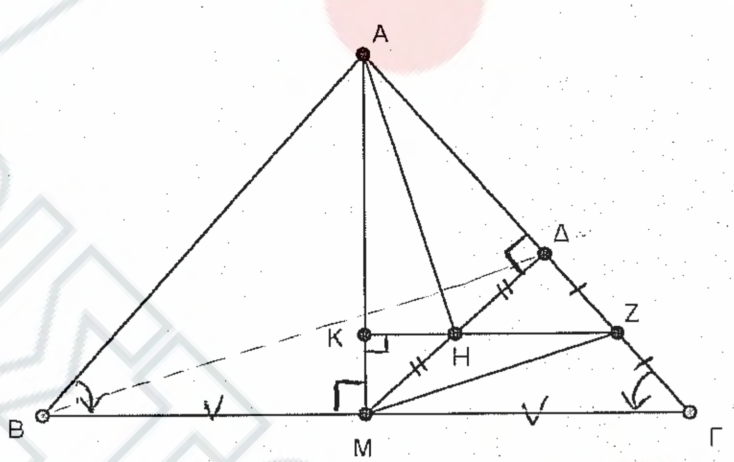
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και το ύψος του ΑΜ. Φέρουμε ΜΔ κάθετη στην ΑΓ και θεωρούμε Η το μέσο του τμήματος ΜΔ. Από το Η φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ η οποία τέμνει τις ΑΜ και ΑΓ στα σημεία Κ και Ζ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΗΖ = $\frac{\text{ΒΓ}}{4}$ (Μονάδες 9)

β) ΜΖ // ΒΔ (Μονάδες 8)

γ) Η ευθεία ΑΗ είναι κάθετη στη ΒΔ. (Μονάδες 8)



α) $\underline{\text{Μ}\hat{\text{Δ}}\text{Γ}}$: Η μέσο ΔΜ, ΖΗ // ΜΓ } άρα: Ζ μέσο ΔΓ

και $ZH = \frac{MΓ}{2} = \frac{\frac{BΓ}{2}}{2} = \frac{BΓ}{4}$.

β) $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$ ισοσκελές με ΑΜ ύψος, άρα ΑΜ διάμεσος και διχοτόμος.

$\underline{\text{Β}\hat{\text{Δ}}\text{Γ}}$: Μ μέσο ΒΓ, Ζ μέσο ΔΓ } άρα ΜΖ $=\!\!\parallel$ $\frac{ΔΒ}{2}$

άρα ΜΖ $\parallel$ ΔΒ.

γ) Στο $\text{Α}\hat{\text{Μ}}\text{Ζ}$ έχω ΖΚ, ΜΔ τα ύψη του, άρα Η ορθόκεντρο, άρα ΑΗ (προεκτεινόμενο) θα είναι το τρίτο ύψος του τριγώνου και αφού ΒΔ $\parallel$ ΜΖ θα έχω και ΒΔ $\perp$ ΑΗ.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΒΕ=ΑΒ και στην προέκταση της πλευράς ΑΔ τμήμα ΔΖ=ΑΔ.

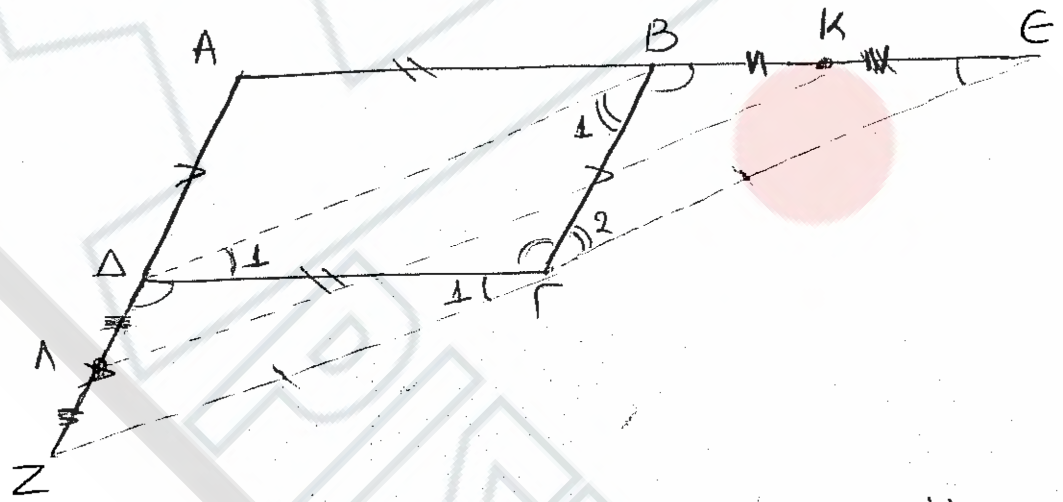
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τετράπλευρα ΒΔΓΕ και ΒΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 7)

ii. Τα σημεία Ε, Γ και Ζ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 9)

β) Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των ΒΕ και ΔΖ αντίστοιχα, τότε ΚΛ// ΔΒ και $K\Lambda = \frac{3}{2}\Delta B$.

(Μονάδες 9)



α) i) ΒΕ = ΑΒ =∥ ΓΔ άρα ΒΕΓΔ #

ΒΓ =∥ ΑΔ = ΔΖ άρα ΔΖΓΒ #.

ii) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{\Delta\Gamma Z}$ με $\overset{\triangle}{\Gamma B E}$ έχω:

1) ΒΓ = ΔΖ υπόθεση

2) ΔΓ = ΒΕ —″—

3) $Z\hat{\Delta}\Gamma = \Gamma\hat{B}E$ ως παραπληρωμ. ίσων γωνιών

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\overset{\triangle}{\Delta\Gamma Z} = \overset{\triangle}{\Gamma B E}$ άρα $\boxed{\hat{\Gamma}_1 = \hat{E}}$

$\hat{\Gamma}_2 = \hat{B}_1$ ως εντός εναλλάξ.

Τότε: $Z\hat{\Gamma}E = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}_2 = \hat{E} + \hat{\Gamma} + \hat{B}_1 \overset{\Delta BE\Gamma\,\#}{=}$

$= \hat{\Delta}_1 + \hat{\Gamma} + \hat{B}_1 \overset{\overset{\triangle}{B\Gamma\Delta}}{=} 180^\circ$

άρα: Ζ, Γ, Ε συνευθειακά

β) ΔΒ ∥ ΖΕ άρα ΔΒΕΖ τραπέζιο με ΚΛ διάμεσο

άρα: ΚΛ ∥ ΔΒ ∥ ΖΕ.

και $K\Lambda = \frac{\Delta B + ZE}{2} = \frac{\Delta B + 2Z\Gamma}{2} \overset{ii)}{=} \frac{\Delta B + 2\Delta B}{2} = \frac{3\Delta B}{2}$.

ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ με $AB = A\Gamma$. Προεκτείνουμε το ΒΓ (προς το Γ) κατά τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Φέρουμε τις διαμέσους ΑΕ και ΓΖ του τριγώνου $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ που τέμνονται στο Θ. Το ΒΘ προεκτεινόμενο, τέμνει το ΑΓ στο Κ και το ΑΔ στο Η.

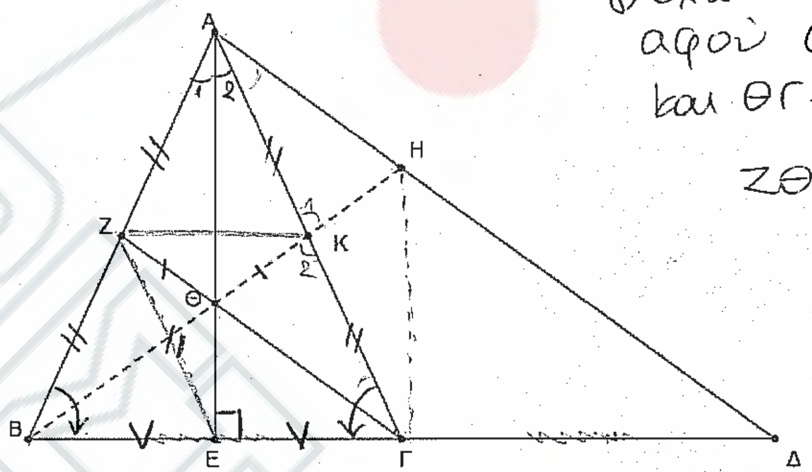
Να αποδείξετε ότι:

α) Το ΖΚΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

β) $AH = \Theta\Gamma$. (Μονάδες 9)

γ) ΑΗ=2ΖΘ. (Μονάδες 7)

γ) Έχω $AH = \Theta\Gamma = 2Z\Theta$ αφού Θ βαρύκεντρο και $\Theta\Gamma = \frac{2}{3}\Gamma Z$ και $Z\Theta = \frac{1}{3}\Gamma Z$.



α) Αφού $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ ισοσκ. και ΑΕ διάμεσος, θα έχω ΑΕ ύψος και διχοτόμος.

$\overset{\Delta}{ABE}$: έχω ΖΕ διάμεσος, άρα $ZE = \frac{AB}{2} = BZ = AZ$.

Στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ έχω Θ βαρύκεντρο και αφού η ΒΚ διέρχεται από το Θ θα είναι η τρίτη διάμεσος του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$. Άρα: $\underbrace{K\Gamma = BZ}_{\text{ως μισά ίσων πλευρών}} = ZE$

$\overset{\Delta}{AB\Gamma}$: Ζ μέσο ΑΒ, Ε μέσο ΒΓ $\Big\}$ άρα: $ZE =\parallel \frac{A\Gamma}{2} =\parallel K\Gamma$ άρα το ΖΚΓΕ ▱.

β) Συγκρίνω $\overset{\Delta}{AKH}$ με $\overset{\Delta}{\Theta K\Gamma}$ έχω:

1) $AK = K\Gamma$ από α).

2) $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$ ως κατακορυφήν

3) $K\hat{\Gamma}\Theta = K\hat{A}H$ ως εντός εναλλάξ (αφού $Z\Gamma \parallel A\Delta$ αφού Ζ μέσο ΑΒ, Γ μέσο ΒΔ $\Big\}$ $Z\Gamma =\parallel \frac{A\Delta}{2}$)

άρα ισχύει Γ-Π-Γ άρα $\overset{\Delta}{AKH} = \overset{\Delta}{\Theta K\Gamma}$ άρα $AH = \Theta\Gamma$.

ΘΕΜΑ 4

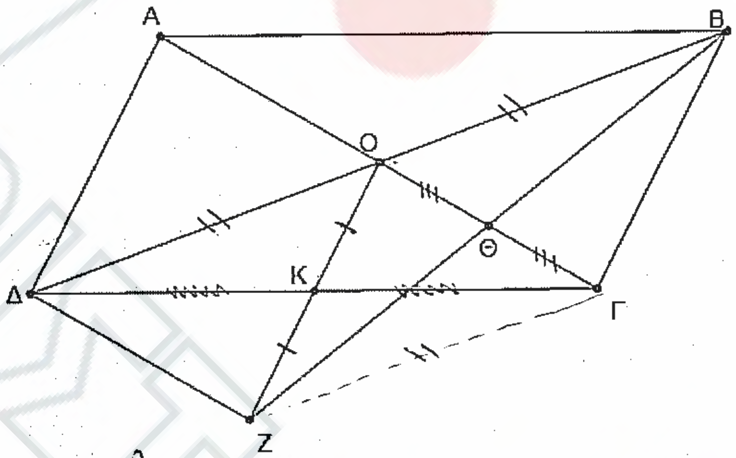
Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του και Κ το μέσο του ΓΔ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΟΚ κατά τμήμα $ΚΖ = ΚΟ$. Η ΒΖ τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Θ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα ΟΓ και ΒΖ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)

β) $ΑΟ = ΔΖ$. (Μονάδες 9)

γ) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{ΑΟΒ}$ και $\overset{\Delta}{ΔΖΓ}$ είναι ίσα. (Μονάδες 8)



α) $\overset{\Delta}{ΑΔΓ}$: Ο μέσο ΑΓ, Κ μέσο ΔΓ $\Big\}$ άρα: $ΟΚ =// \frac{ΑΔ}{2}$

$2ΟΚ =// ΑΔ$

$ΟΖ =// ΒΓ$ (1)

Τότε: ΟΖΓΒ # και οι διαγώνιοι του διχοτομούνται.

β) (1) έχω $ΟΖ =// ΑΔ$ άρα ΑΔΖΟ #, άρα: $ΑΟ = ΔΖ$.

γ) Συγκρίνω $\overset{\Delta}{ΑΟΒ}$ με $\overset{\Delta}{ΔΖΓ}$ έχω:

1) $ΟΒ = ΖΓ$ αφού ΟΒΓΖ #
2) $ΔΖ = ΑΟ$ αφού ΑΔΖΟ #
3) $ΑΒ = ΔΓ$ αφού ΑΒΓΔ #

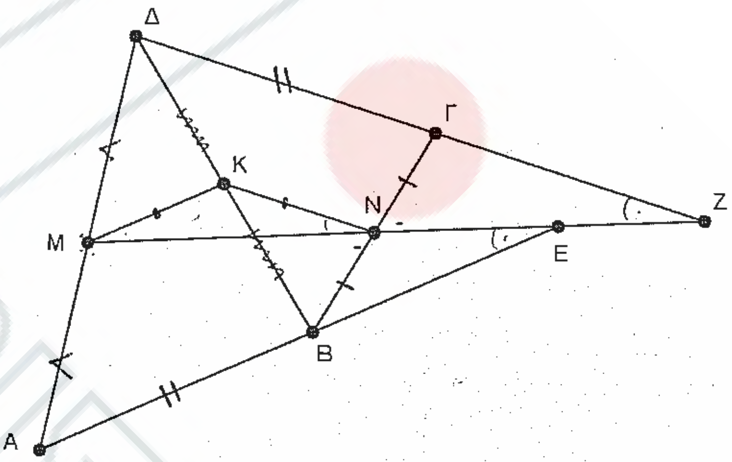
άρα ισχύει Π-Π-Π άρα $\overset{\Delta}{ΑΟΒ} = \overset{\Delta}{ΔΖΓ}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΒ = ΓΔ και Μ, Ν, Κ τα μέσα των ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των ΑΒ και ΔΓ τέμνουν την προέκταση της ΜΝ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

α) ΜΚ = ΚΝ. (Μονάδες 13)

β) $\mathrm{M}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{A} = \mathrm{M}\hat{\mathrm{Z}}\Delta$. (Μονάδες 12)



α) $\overset{\Delta}{A\Delta B}$: Μ μέσο ΑΔ, Κ μέσο ΔΒ } άρα $MK \overset{\parallel}{=} \frac{AB}{2}$

$\overset{\Delta}{\Delta B\Gamma}$: Κ μέσο ΔΒ, Ν μέσο ΒΓ } άρα $KN \overset{\parallel}{=} \frac{\Delta\Gamma}{2}$

όμως: $AB = \Delta\Gamma$

άρα: $MK = KN$.

β) $\hat{E} = 180^\circ - E\hat{M}A - \hat{A} =$

$= \underbrace{180^\circ - E\hat{M}A}_{} - K\hat{M}\Delta =$ (ως εντός εκτός και επί τ' αυτά)

$= E\hat{M}\Delta - K\hat{M}A =$

$= K\hat{M}N \overset{MKN\ \text{ισοσκ.}}{=} K\hat{N}M = \hat{Z}$ (ως εντός εκτός και επί τ' αυτά)

ΘΕΜΑ 4

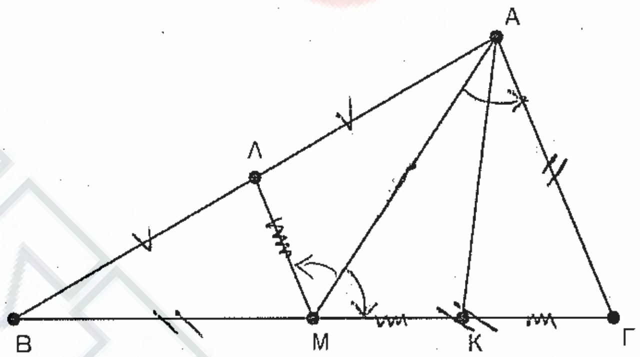
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 2ΑΓ. Έστω ΑΜ διάμεσος του ΑΒΓ και Κ, Λ τα μέσα των ΜΓ και ΑΒ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \mathrm{A}\hat{\mathrm{M}}\Gamma$. (Μονάδες 7)

β) ΜΛ = ΜΚ. (Μονάδες 9)

γ) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Lambda\hat{\mathrm{A}}\mathrm{K}$. (Μονάδες 9)



α) Έχω ΒΓ = 2ΑΓ άρα: ΑΓ = ΒΜ = ΜΓ
άρα $\overset{\triangle}{\mathrm{A}\mathrm{M}\Gamma}$ ισοσκελές
με $\mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \mathrm{A}\hat{\mathrm{M}}\Gamma$.

β) $\underline{\overset{\triangle}{\mathrm{AB}\Gamma}}$: Λ μέσο ΑΒ, Μ μέσο ΒΓ } άρα $\mathrm{M}\Lambda =\parallel \frac{\mathrm{A}\Gamma}{2} = \frac{\mathrm{M}\Gamma}{2} = \mathrm{MK}$

γ) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{\mathrm{A}\Lambda\mathrm{M}}$ με $\overset{\triangle}{\mathrm{AMK}}$ έχω
1) ΑΜ κοινή πλευρά
2) ΜΛ = ΜΚ από β)
3) $\Lambda\hat{\mathrm{M}}\mathrm{A} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{K}$ (αφού $\Lambda\hat{\mathrm{M}}\mathrm{A} = \mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ ως εντός εναλλάξ)
άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\overset{\triangle}{\mathrm{A}\Lambda\mathrm{M}} = \overset{\triangle}{\mathrm{AMK}}$
άρα: $\Lambda\hat{\mathrm{A}}\mathrm{M} = \mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{K}$ δηλ. ΑΜ διχοτόμος της $\Lambda\hat{\mathrm{A}}\mathrm{K}$

ΘΕΜΑ 4

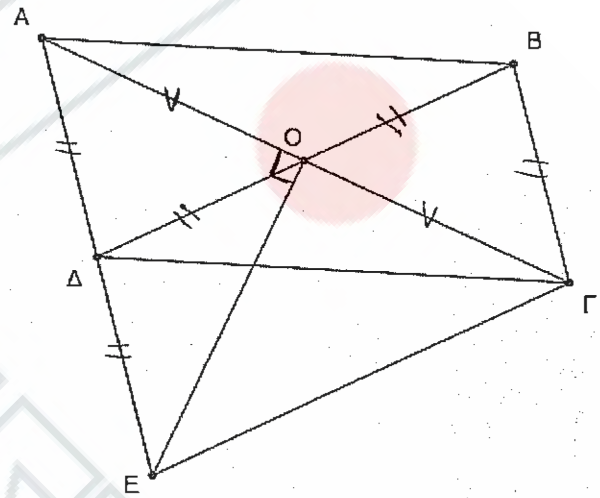
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε αν φέρουμε την κάθετη στην ΑΓ στο κέντρο του Ο, αυτή τέμνει την προέκταση της ΑΔ σε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΔΕ=ΑΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) Το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)



α) Έχω ΕΟ μεσοκάθετος του ΑΓ, άρα ΕΑ = ΕΓ
άρα $\overset{\triangle}{AEΓ}$ ισοσκελές.

β) ΔΕ = ΑΔ =// ΒΓ άρα ΒΓΕΔ ▱.

γ) Στο $\overset{\triangle}{AOE}$ έχω ΔΟ διάμεσο
άρα $ΔO = \frac{AE}{2} = AΔ$ δηλ. και ΟΒ = ΑΔ = ΒΓ
άρα $\overset{\triangle}{BOΓ}$ ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB // \Gamma\Delta$ και ΑΔ= ΒΓ =ΑΒ. Φέρουμε τμήματα ΑΕ και ΒΖ κάθετα στις διαγώνιες ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

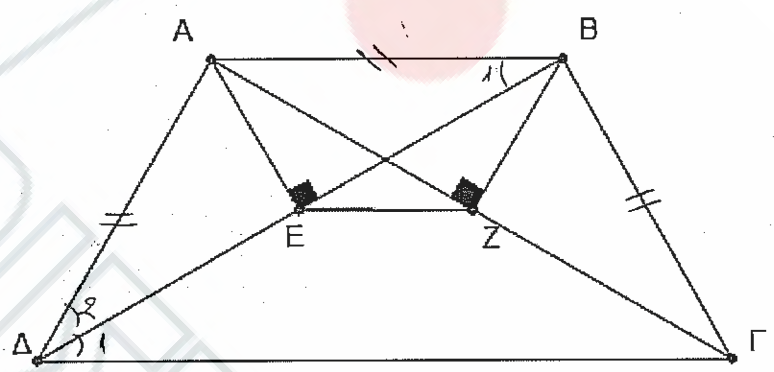
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Ζ και Ε είναι μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

β) ΑΕ =ΒΖ . (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)

δ) Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ. (Μονάδες 5)



α) $A\Delta = AB$ αρα $\overset{\triangle}{A\Delta B}$ ισοσκ. με ΑΕ ύψος, αρα ΑΕ και διάμεσος, δηλ. Ε μέσο ΔΒ.
$AB = B\Gamma$ αρα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισοσκ. με ΒΖ ύψος, άρα ΒΖ και διάμεσος, δηλ. Ζ μέσο ΑΓ.

β) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{A\Delta E}$ με $\overset{\triangle}{BZ\Gamma}$ έχω:
1) ορθογώνια
2) $A\Delta = B\Gamma$ υπόθεση
3) $\Delta E = Z\Gamma$ ως μισά ισων τμημάτων
αρα ισχυει υποτ. + καθ. πλευρά, άρα $\overset{\triangle}{A\Delta E} = \overset{\triangle}{BZ\Gamma}$
αρα: $\boxed{AE = BZ}$

γ) ΕΖ ενώνει τα μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου ΑΒΓΔ αρα $EZ \parallel AB \parallel \Gamma\Delta$ αρα ΑΒΖΕ τραπέζιο και $AE = BZ$ αρα ΑΒΖΕ ισοσκ. τραπέζιο.

δ) $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$ ως εντός εναλλάξ
$\hat{\Delta}_2 = \hat{B}_1$ αφού $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ ισοσκελές
άρα: $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ δηλ. ΔΒ διχοτόμος της $\hat{\Delta}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από την κορυφή Α φέρουμε ΑΕ⊥ΒΔ.

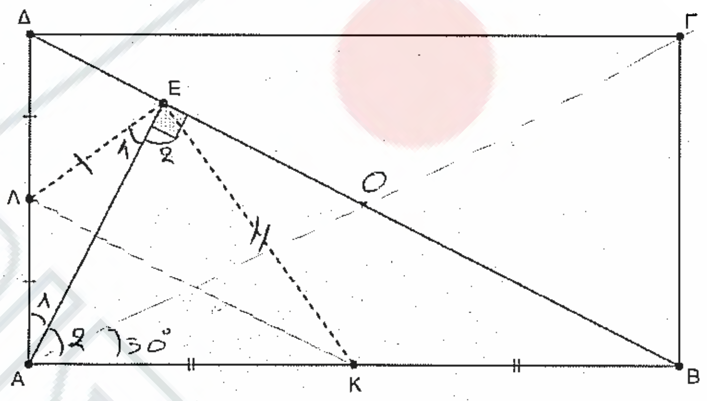
Έστω Κ, Λ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΔ αντιστοίχως, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $K\hat{E}\Lambda = 90^\circ$. (Μονάδες 8)

ii. $K\Lambda = \frac{A\Gamma}{2}$. (Μονάδες 8)

γ) Αν $B\hat{A}\Gamma = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι ΚΛ=ΒΓ. (Μονάδες 9)



α) i) $\overset{\triangle}{AE\Delta}$: έχω ΛΕ διάμεσο, άρα $\Lambda E = \frac{\Delta A}{2}$, άρα $\overset{\triangle}{A\Lambda E}$ ισοσκελές με $\hat{E}_1 = \hat{A}_1$

$\overset{\triangle}{AEB}$: έχω ΕΚ διάμεσο, άρα $EK = \frac{AB}{2}$, άρα $\overset{\triangle}{AEK}$ ισοσκελές με $\hat{E}_2 = \hat{A}_2$.

Τότε: $K\hat{E}\Lambda = \hat{E}_1 + \hat{E}_2 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A} = 90^\circ$

ii) $\overset{\triangle}{A\Delta B}$: Λ μέσο ΑΔ, Κ μέσο ΑΒ $\Big\}$ άρα $K\Lambda \parallel= \frac{\Delta B}{2}$

άρα $K\Lambda = \frac{A\Gamma}{2}$ (αφού οι διαγώνιοι ορθογωνίου είναι ίσες)

β) $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: έχω $B\hat{A}\Gamma = 30^\circ$, άρα $B\Gamma = \frac{A\Gamma}{2} = K\Lambda$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Έστω ότι Δ είναι το μέσο της ΑΜ τέτοιο ώστε ΒΔ = $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$ και γωνία $A\hat{\Delta}B = 120^{o}$.

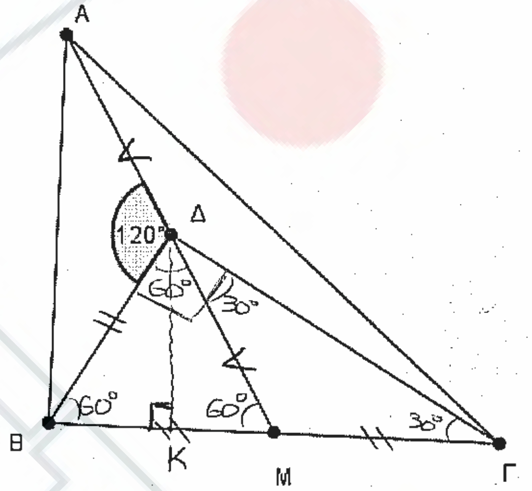
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΜ. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΔΜΓ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

δ) Αν το σημείο Κ είναι η προβολή του Δ στην ΒΓ, να αποδείξετε ότι 2ΜΚ=ΑΔ.

(Μονάδες 8)



α) $B\hat{\Delta}M = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$
ΒΔ = ΒΜ αρα $B\hat{\Delta}M$ ισοσκελες με $B\hat{\Delta}M = 60^\circ$, αρα
$B\hat{\Delta}M$ ισόπλευρο, αρα $B\hat{\Delta}M = \Delta\hat{B}M = \Delta\hat{M}B = 60^\circ$.

β) Στο $B\hat{\Delta}\Gamma$ έχω ΔΜ διάμεσο και $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2}$, αρα
$B\hat{\Delta}\Gamma$ ορθογώνιο με ΒΓ υποτείνουσα.

γ) $M\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$
ΔΜ = ΜΓ άρα $\Delta\hat{M}\Gamma$ ισοσκελές με $M\hat{\Delta}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}M = 30^\circ$
αρα $\Delta\hat{M}\Gamma = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$
Συγκρίνω $A\hat{\Delta}B$ με $\Delta\hat{M}\Gamma$ εχω: 1) ΔΒ = ΜΓ υπόθεση
2) ΔΜ = ΑΔ —"—
3) $A\hat{\Delta}B = \Delta\hat{M}\Gamma = 120^\circ$

αρα ισχυει Π-Γ-Π αρα $A\hat{\Delta}B = \Delta\hat{M}\Gamma$.

δ) $B\hat{\Delta}M$: εχω ΔΚ ύψος, αρα ΔΚ διάμεσος και διχοτόμος, αρα: $K\hat{\Delta}M = 30^\circ$, αρα $MK = \frac{M\Delta}{2} = \frac{A\Delta}{2} \Leftrightarrow 2MK = A$

ΘΕΜΑ 4

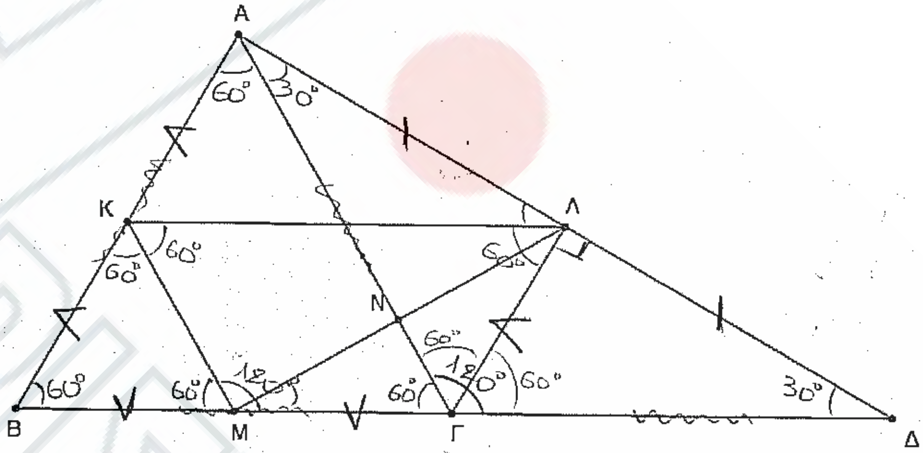
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα $ΓΔ = ΒΓ$. Αν Μ, Κ και Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα τότε:

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΔ. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι:

i) Το τετράπλευρο ΚΛΓΜ είναι ισοσκελές τραπέζιο με τη μεγάλη βάση διπλάσια από τη μικρή. (Μονάδες 8)

ii) Το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)



α) Αφού $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ ισόπλευρο, θα έχει όλες τις γωνίες του 60°, άρα: $Α\hat{Γ}Δ = 120°$

Όμως: $ΓΔ = ΒΓ = ΑΓ$ άρα $\overset{\triangle}{ΑΔΓ}$ ισοσκελές με $Γ\hat{Α}Λ = \hat{Δ} = \frac{180°-120°}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$

Άρα: $\hat{Β} = 60°$, $\hat{Δ} = 30°$, $Β\hat{Α}Δ = 60° + 30° = 90°$.

β) i) $\underline{\overset{\triangle}{ΑΒΔ}}$: Κ μέσο ΑΒ, Λ μέσο ΑΔ $\Big\}$ άρα $ΚΛ = \parallel \frac{ΒΔ}{2}$

άρα $ΚΛ \parallel ΜΓ$ άρα ΚΛΓΜ τραπέζιο

Έχω $\overset{\triangle}{ΒΜΚ}$ ισόπλευρο άρα $Κ\hat{Μ}Β = 60°$, άρα $Κ\hat{Μ}Γ = 120°$ και $Μ\hat{Γ}Λ = 120°$ (αφού ΓΛ διχοτόμος στο $\overset{\triangle}{ΑΓΔ}$ που είναι ισοσκελές με ΓΛ διάμεσο)

άρα το ΚΛΓΜ ισοσκελές τραπέζιο.

$ΚΛ = \frac{ΒΔ}{2} = ΒΓ = 2ΜΓ$.

ii) ΒΚΛΓ ▱ άρα $ΓΛ = ΜΓ$ άρα $\overset{\triangle}{ΜΓΛ}$ ισοσκ. με $Ν\hat{Μ}Γ = Ν\hat{Λ}Γ = (180° - 120°) : 2 = 60° : 2 = 30°$. Άρα: $Κ\hat{Μ}Λ = 120° - 30° = 90°$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και ο περιγεγραμμένος του κύκλος (Ο, ρ) ώστε η διαγώνιος του ΔΒ να είναι διάμετρος του κύκλου. Η γωνία Β είναι διπλάσια της γωνίας Δ και οι πλευρές ΑΒ και ΒΓ είναι ίσες. Φέρουμε κάθετη στη ΒΔ στο Ο, η οποία τέμνει τις πλευρές ΑΔ και ΓΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.

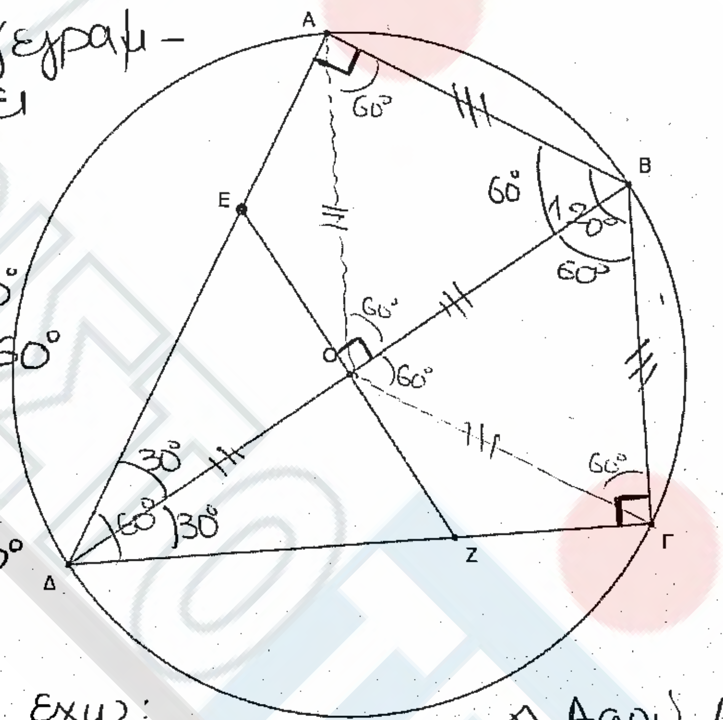
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 6)

β) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΑΒ και ΔΓΒ. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΟ είναι ρόμβος. (Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΟΕ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

(Μονάδες 6)



α) $\hat{A} = 90°$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο

Ομοια: $\hat{\Gamma} = 90°$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360°$

$90° + 2\hat{\Delta} + 90° + \hat{\Delta} = 360°$

$3\hat{\Delta} = 180°$

$\hat{\Delta} = 60°$

άρα: $\hat{B} = 2 \cdot 60° = 120°$

β) Συγκρίνω $\Delta\hat{A}B$ με $\Delta\hat{\Gamma}B$ έχω:

1) ορθογώνια

2) $AB = B\Gamma$ υπόθεση

3) ΔB κοινή πλευρά

άρα ισχύει υποτ. + καθ. πλευρά

άρα $\Delta\hat{A}B = \Delta\hat{\Gamma}B$.

γ) Αφού $\widehat{AB\Delta} = \widehat{B\Gamma\Delta}$ θα έχω $E\hat{\Delta}O = O\hat{\Delta}Z = 30°$ και $A\hat{B}O = O\hat{B}\Gamma = 60°$

Τότε: $A\hat{O}B$ και $O\hat{B}\Gamma$ ισόπλευρα.

Άρα: $O\hat{A}B = B\hat{\Gamma}O = 60°$ και $A\hat{O}\Gamma = A\hat{B}\Gamma = 120°$

άρα ΑΒΓΟ ▱ με ΑΒ=ΒΓ

άρα ΑΒΓΟ ρόμβος.

δ) $E\hat{A}B + E\hat{O}B = 90° + 90° = 180°$

άρα ΑΒΟΕ εγγράψιμο.

ΘΕΜΑ 4

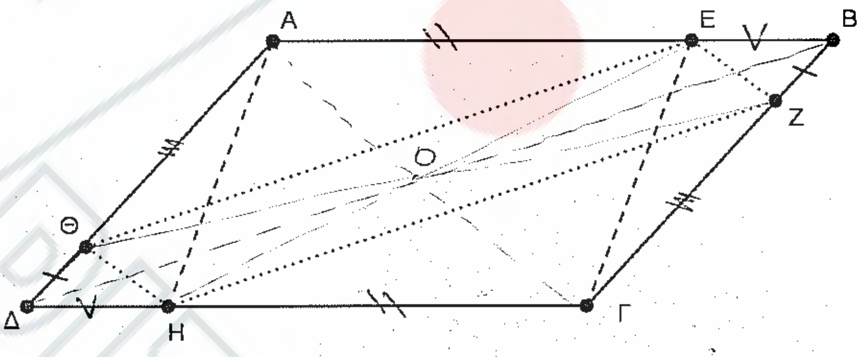
Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ θεωρούμε σημεία Ε, Ζ, Η, Θ στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα, με ΑΕ=ΓΗ και ΒΖ=ΔΘ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΕΓΗ είναι παραλληλόγραμμο. (6 μονάδες)

β) Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο. (10 μονάδες)

γ) Τα τμήματα ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΖΘ διέρχονται από το ίδιο σημείο. (9 μονάδες)



α) Έχω ΑΕ =// ΓΗ άρα ΑΕΓΗ #

β) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{\Delta\Theta H}$ με $\overset{\triangle}{EBZ}$ έχω: 1) ΔΘ = ΒΖ υπόθεση
2) ΔΗ = ΕΒ ως διαφορά ίσων τμημάτων
3) $\hat{\Delta} = \hat{B}$ αφού ΑΒΓΔ #

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\overset{\triangle}{\Delta\Theta H} = \overset{\triangle}{EBZ}$ άρα $\boxed{\Theta H = EZ}$

Συγκρίνω $\overset{\triangle}{A\Theta E}$ με $\overset{\triangle}{H\Gamma Z}$ έχω: 1) ΑΕ = ΗΓ υπόθεση
2) ΑΘ = ΓΖ ως διαφορά ίσων τμημάτων
3) $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ αφού ΑΒΓΔ #

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\overset{\triangle}{A\Theta E} = \overset{\triangle}{H\Gamma Z}$ άρα $\boxed{\Theta E = ZH}$

Άρα το ΕΖΗΘ #.

γ) ΑΒΓΔ # άρα ΑΓ, ΔΒ διχοτομούνται άρα Ο μέσο ΑΓ και Ο μέσο ΔΒ.

ΑΕΓΗ # άρα ΑΓ, ΕΗ διχοτομούνται και αφού Ο μέσο του ΑΓ, θα έχω Ο μέσο ΕΗ.

ΕΖΗΘ # άρα ΕΗ, ΘΖ διχοτομούνται και αφού Ο μέσο του ΕΗ θα έχω Ο μέσο ΘΖ.

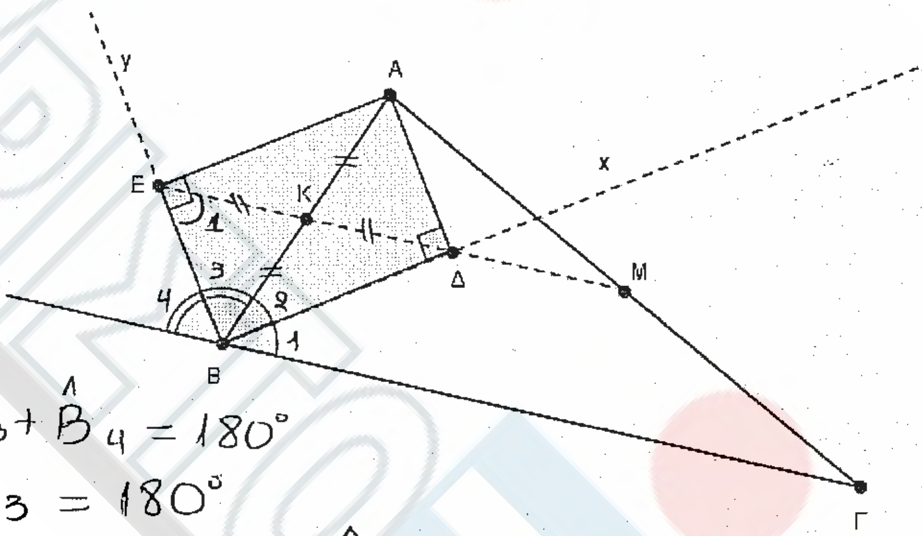
ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος Βx της γωνίας Β του τριγώνου ΑΒΓ και η διχοτόμος Βy της εξωτερικής γωνίας Β. Αν Δ και Ε είναι οι προβολές της κορυφής Α του τριγώνου ΑΒΓ στην Βx και Βy αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

β) Η ευθεία ΕΔ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ και διέρχεται από το μέσο Μ της ΑΓ. (Μονάδες 10)

γ) Το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του είναι ίση με $\frac{3\alpha}{4}$, όπου α=ΒΓ. (Μονάδες 8)



α) $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{B}_3 + \hat{B}_4 = 180°$

$2\hat{B}_2 + 2\hat{B}_3 = 180°$

$\hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 90°$ δηλ. $E\hat{B}\Delta = 90°$

Άρα το ΑΔΒΕ είναι ορθογώνιο, αφού έχει 3 γωνίες ορθές.

β) Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες και διχοτομούνται, άρα $\overset{\triangle}{EKB}$ ισοσκελές, με $\hat{E}_1 = \hat{B}_3$ άρα και $\hat{E}_1 = \hat{B}_4$, δηλ. έχω εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, άρα ΕΔ∥ΒΓ.

$\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: Κ μέσο ΑΒ, ΚΜ∥ΑΓ } άρα Μ μέσο ΑΓ.

γ) $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: Κ μέσο ΑΒ, Μ μέσο ΑΓ } άρα $KM = \parallel \frac{B\Gamma}{2}$ άρα ΚΜΓΒ τραπέζιο

δ) μέσος $= \frac{KM + B\Gamma}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2} + B\Gamma}{2} = \frac{\frac{3B\Gamma}{2}}{2} = \frac{3B\Gamma}{4} = \frac{3\alpha}{4}$.

ΘΕΜΑ 4

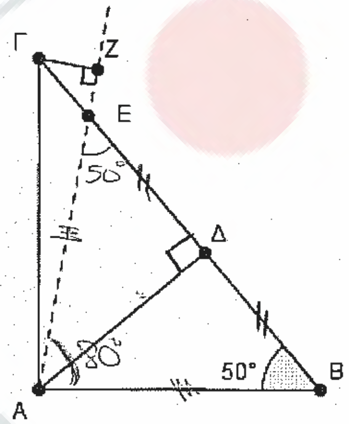
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^0$) με $\widehat{B} = 50^0$, το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην ΔΓ ώστε ΔΕ=ΒΔ. Το σημείο Ζ είναι η προβολή του Γ στην ΑΕ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

ii. $\Gamma\hat{A}E = 10^o$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΓΕ. (Μονάδες 9)



α) i) ΑΔ μεσοκάθετος του ΕΒ, άρα ΑΕ = ΑΒ,
άρα $A\hat{B}E$ ισοσκελές,

ii) με $A\hat{E}B = \hat{B} = 50^\circ$

$A\hat{E}B$: $E\hat{A}B = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ$

$\Gamma\hat{A}E = 90^\circ - E\hat{A}B = 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ$.

β) $\Gamma\hat{E}Z = A\hat{E}B = 50^\circ$ ως κατακορυφήν

$\Gamma\hat{Z}E$: $Z\hat{\Gamma}E = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$.

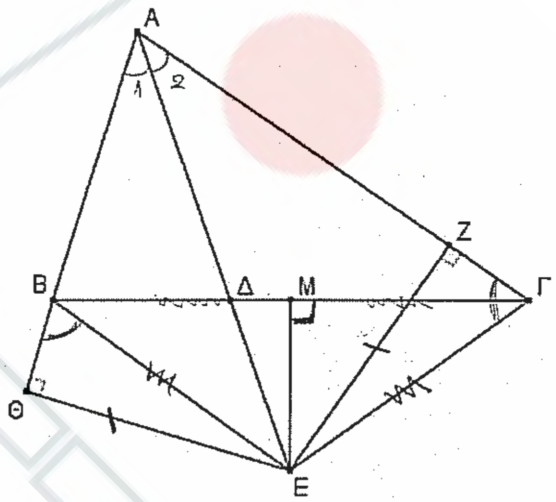
ΘΕΜΑ 4

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, η κάθετη από το μέσο Μ της ΒΓ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου ΑΔ στο σημείο Ε. Αν Θ, Ζ είναι οι προβολές του Ε στις ΑΒ, ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

β) Τα τρίγωνα ΘΒΕ και ΖΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

γ) $A\hat{\Gamma}E + A\hat{B}E = 180^o$ (Μονάδες 12)



α) ΕΜ μεσοκάθετος του ΒΓ, άρα ΕΒ = ΕΓ, άρα $E\hat{B}\Gamma$ ισοσκελές.

β) Συγκρίνω $\Theta\hat{B}E$ με $Z\hat{\Gamma}E$ έχω:
1) ορθογώνια
2) ΒΕ = ΕΓ από α)
3) ΘΕ = ΕΖ αφού Ε σημείο της διχοτόμου της $\hat{A}$
άρα ισχύει Υποτ + καθ. πλευρά, άρα $\Theta\hat{B}E = Z\hat{\Gamma}E$.

γ) Αφού $\Theta\hat{B}E = Z\hat{\Gamma}E$ έχω $Z\hat{\Gamma}E = \Theta\hat{B}E$.
Τότε: $A\hat{B}E + \Theta\hat{B}E = 180^\circ$
$A\hat{B}E + Z\hat{\Gamma}E = 180^\circ$.

ΘΕΜΑ 4

Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) είναι ΓΔ= 2ΑΒ. Επίσης τα Ζ, Η, Ε είναι τα μέσα των ΑΔ, ΒΓ και ΔΓ αντίστοιχα. Ακόμη η ΖΗ τέμνει τις ΑΕ, ΒΕ στα σημεία Θ, Ι αντίστοιχα.

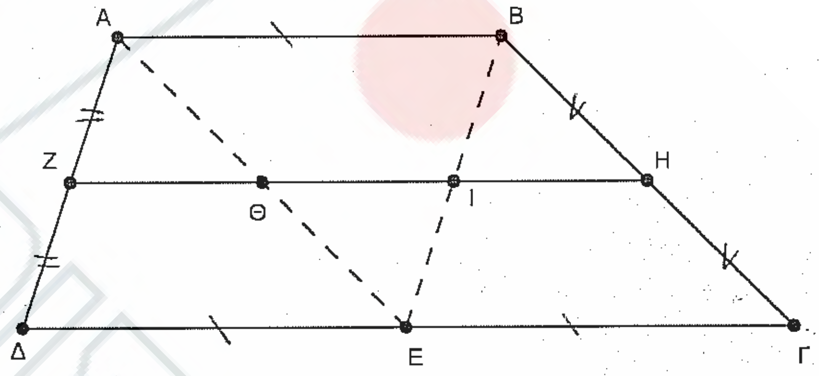
α) Να δείξετε ότι, το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι, τα σημεία Θ, Ι είναι μέσα των ΑΕ, ΒΕ αντίστοιχα.

(Μονάδες 5)

γ) Να δείξετε ότι ΖΗ = $\frac{3}{2}$ ΑΒ. (Μονάδες 10)



α) ΓΔ = 2ΑΒ άρα ΔΕ = ΕΓ = ΑΒ, δηλ. έχω

ΑΒ =\\ ΕΓ άρα ΑΒΓΕ #.

β) ΑΒΓΔ: έχω ΖΗ διάμεσο, άρα ΖΗ \\ ΑΒ \\ ΓΔ.

$\overset{\triangle}{\text{ΑΔΕ}}$: Ζ μέσο ΑΔ, ΖΘ \\ ΔΕ } άρα Θ μέσο ΑΕ.

$\overset{\triangle}{\text{ΒΓΕ}}$: Η μέσο ΒΓ, ΙΗ \\ ΕΓ } άρα Ι μέσο ΒΕ.

γ) $ZH = \frac{AB + ΓΔ}{2} = \frac{AB + 2AB}{2} = \frac{3AB}{2}$.

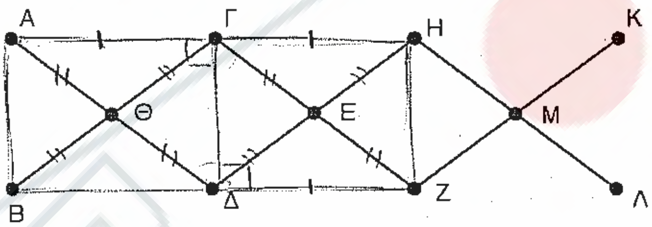
ΘΕΜΑ 4

Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι **ίσα** ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου (ΑΔ, ΒΓ, ΓΖ, ΔΗ, ΖΚ, ΗΛ) που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά (Α, Β, Γ, Δ, Θ, Ε, Μ, Η, Κ, Λ, Ζ). Αν το σημείο Θ, είναι **μέσο** των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ ενώ το σημείο Ε είναι **μέσο** των τμημάτων ΓΖ και ΔΗ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΓΗΖΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)

β) Τα σημεία Β, Δ, Ζ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)



διαγώνιοι του ΓΗΖΔ διχοτομούνται,
α είναι # και είναι και ίσες, άρα
ναι ορθογώνιο.

μοια: με α) και ΑΒΔΓ ορθογώνιο.
τε: $B\hat{\Delta}Z = B\hat{\Delta}\Gamma + \Gamma\hat{\Delta}Z = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$
α Β, Δ, Ζ συνευθειακά.

Η: είναι ισοσκελές με ΓΔ ύψος, άρα ΓΔ και
διάμεσος και διχοτόμος, δηλ. ΑΓ = ΓΗ = ΔΖ.
Έχω και ΑΔ = ΓΖ, άρα το ΑΓΖΔ #.

ου βαίνε

άρα:

0°

και

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ευθεία (ε) και δυο σημεία Α, Β εκτός αυτής έτσι ώστε η ευθεία ΑΒ να μην είναι κάθετη στην (ε). Φέρουμε ΑΔ, ΒΓ κάθετες στην (ε) και Μ, Ν μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα.

α) Αν τα Α, Β είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε)

i) να εξετάσετε αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι, παραλληλόγραμμο, τραπέζιο ή ορθογώνιο σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

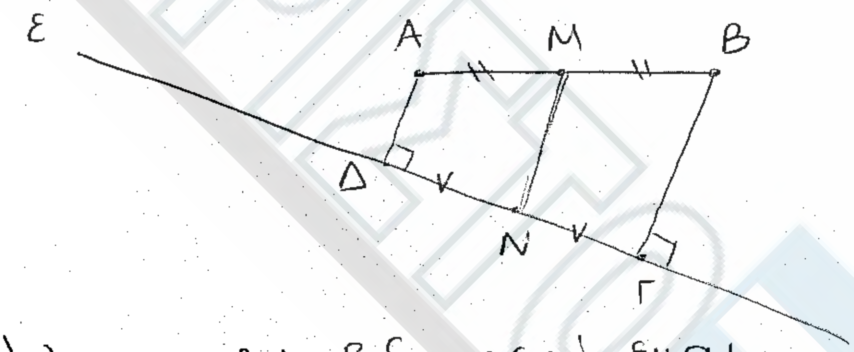
1) ΑΔ < ΒΓ (Μονάδες 4)

2) ΑΔ = ΒΓ. (Μονάδες 4)

ii) να εκφράσετε το τμήμα ΜΝ σε σχέση με τα τμήματα ΑΔ, ΒΓ στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις. (Μονάδες 6)

β) Αν η ευθεία (ε) τέμνει το τμήμα ΑΒ στο μέσο του Μ να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου ΑΓΒΔ (παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, ορθογώνιο) και να δείξετε ότι τα Μ, Ν ταυτίζονται. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9+2)

α)



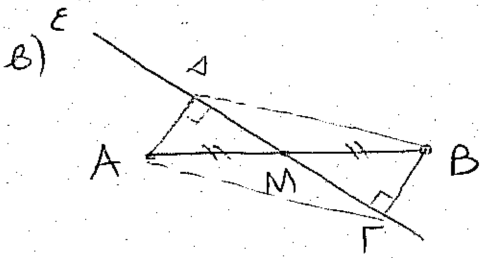
1) ΑΔ < ΒΓ και ΑΔ // Β[Γ]
αφού είναι ⊥ στην ε
άρα ΑΒΓΔ τραπέζιο

2) ΑΔ = ΒΓ και ΑΔ // ΒΓ
αφού είναι ⊥ στην ε
άρα είναι # το ΑΒΓΔ
και έχει $\hat{\Delta} = 90^\circ$ άρα
είναι ορθογώνιο.

ii) 1) $MN = \frac{A\Delta + B\Gamma}{2}$, αφού είναι
διάμεσος τραπεζίου.

2) ΜΝ = ΑΔ = ΒΓ, αφού είναι
μεσοπαράλληλος ορθογωνίου

β)



Συγκρίνω $\overset{\triangle}{A\Delta M}$ με $\overset{\triangle}{BM\Gamma}$ έχω
1) ορθογώνια
2) ΑΜ = ΜΒ αφού Μ μέσο ΑΒ
3) $A\hat{M}\Delta = B\hat{M}\Gamma$ ως κατακορυφήν
άρα ισχύει υποτ. + οξ. γωνία, άρα
$\overset{\triangle}{A\Delta M} = \overset{\triangle}{BM\Gamma}$, άρα ΔΜ = ΜΓ.

Δηλ. οι διαγώνιοι του ΑΓΒΔ διχοτομούνται στο Μ
άρα είναι #.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΚ και ΓΛ, τα οποία τέμνονται στο Ι.

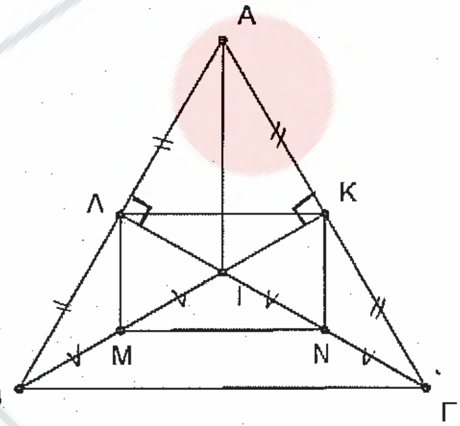
Αν Μ και Ν τα μέσα των ΒΙ και ΓΙ αντίστοιχα, να αποδείξετε:

α) Το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές (Μονάδες 5)

β) Τα τρίγωνα ΒΙΛ και ΓΙΚ είναι ίσα (Μονάδες 5)

γ) Το ΑΙ προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 5)

δ) Το τετράπλευρο ΜΛΚΝ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



α) ΒΚ, ΓΛ ύψη του ισόπλευρου $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$, άρα ΒΚ, ΓΛ διάμεσοι και διχοτόμοι, άρα $Ι\hat{Β}Γ = Ι\hat{Γ}Β = 30^\circ$ άρα $\overset{\triangle}{ΒΙΓ}$ ισοσκελές.

β) Συγκρίνω $Β\overset{\triangle}{Λ}Ι$ με $Κ\overset{\triangle}{Γ}Ι$ έχω:
1) ορθογώνια
2) ΒΛ = ΚΓ ως μισά ίσων πλευρών
3) ΒΙ = ΓΙ από α)

άρα ισχύει υποτ. + οξ. γωνία άρα $Β\overset{\triangle}{Λ}Ι = Κ\overset{\triangle}{Γ}Ι$

γ) Ι είναι το ορθόκεντρο του $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$, άρα το ΑΙ προεκτεινόμενο θα είναι το τρίτο ύψος του τριγώνου, άρα θα είναι και διάμεσος και διχοτόμος, αφού $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ ισόπλευρο.

δ) $\underline{\overset{\triangle}{ΑΒΙ}}$: Λ μέσο ΑΒ, Μ μέσο ΒΙ $\Big\}$ άρα ΜΛ =// $\frac{ΑΙ}{2}$

$\underline{\overset{\triangle}{ΑΙΓ}}$: Ν μέσο ΓΙ, Κ μέσο ΑΓ $\Big\}$ άρα ΝΚ =// $\frac{ΑΙ}{2}$

$\Big\}$ άρα ΜΛ =// ΝΚ άρα ΜΝΚΛ #

και ΛΙ = ΚΙ, αφού $Β\overset{\triangle}{Λ}Ι = Γ\overset{\triangle}{Κ}Ι$ και οι διαγώνιοι του # διχοτομούνται ... άρα ΛΝ = ΚΜ ... ΜΝΚΛ ορθογώνιο

ΘΕΜΑ 4

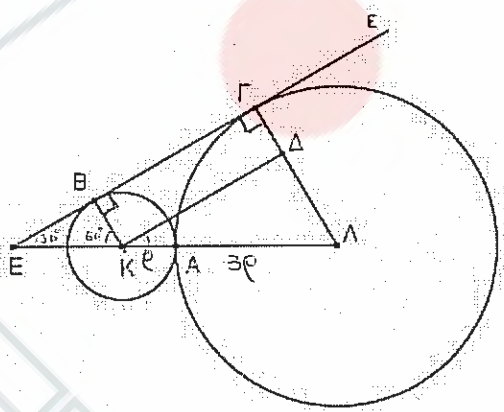
Οι κύκλοι (Κ, ρ) και (Λ, 3ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Μία ευθεία ε εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου ΚΛ στο σημείο Ε. Φέρουμε από το σημείο Κ παράλληλο τμήμα στην ε που τέμνει το τμήμα ΛΓ στο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΔΚ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΔΚΛ είναι 30°. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το τμήμα ΕΛ=6ρ, όπου ρ η ακτίνα του κύκλου (Κ, ρ).

(Μονάδες 8)



α) ΚΒ // ΓΔ γιατί είναι ⊥ στην ε
και ΚΔ // ΒΓ άρα το ΒΚΔΓ #
και έχει $\hat{B}=90^\circ$ άρα ορθογώνιο.

β) ΚΒ = ΓΔ = ρ
Τότε: ΔΛ = ΓΛ − ΓΔ = 3ρ − ρ = 2ρ
Δηλ. έχω στο $\overset{\triangle}{ΚΔΛ}$: $ΔΛ = \frac{ΚΛ}{2}$ άρα $Δ\hat{Κ}Λ = 30^\circ$

γ) $Β\hat{Κ}Ε = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$
$\overset{\triangle}{ΕΒΚ}$: $\hat{Ε} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ άρα $ΒΚ = \frac{ΕΚ}{2}$
ΕΚ = 2ΒΚ = 2ρ

Τότε: ΕΛ = ΕΚ + ΚΑ + ΑΛ = 2ρ + ρ + 3ρ = 6ρ.

ΘΕΜΑ 4

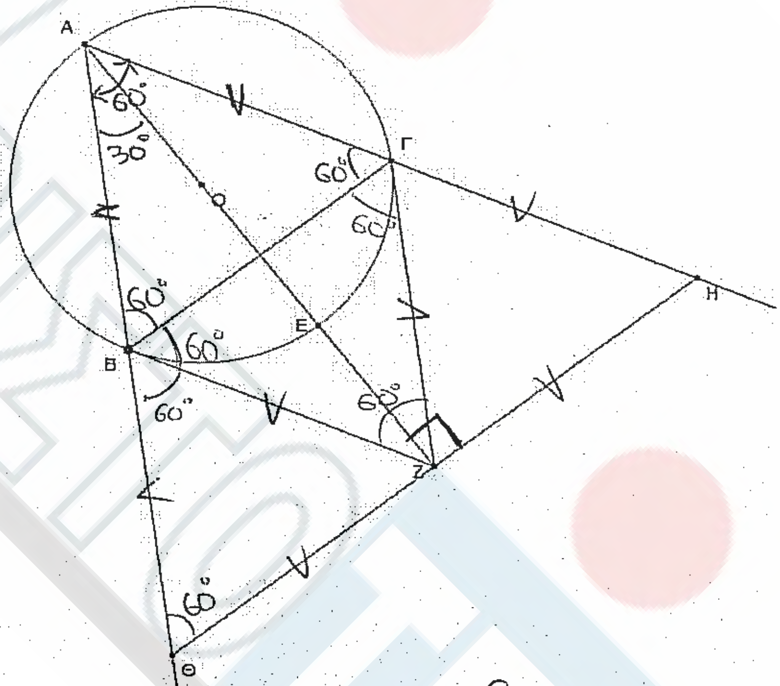
Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Τα τμήματα ΓΖ και ΒΖ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου στα σημεία Γ και Β αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΘΗ είναι κάθετο στο τμήμα ΑΖ στο Ζ , να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΖΒΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο ΑΓΖΒ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΒΓΗΘ είναι τραπέζιο, με $\mathrm{B\Theta} = \mathrm{BZ}$ και $\mathrm{\Theta H} = 2\mathrm{B\Gamma}$.

(Μονάδες 10)



α) $\Gamma\hat{B}Z = \hat{A} = 60°$ ως γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης

$B\hat{\Gamma}Z = \hat{A} = 60°$ —"— —"— —"—

Τότε: $B\hat{Z}\Gamma = 180° - 60° - 60° = 60°$ άρα $B\overset{\triangle}{Z}\Gamma$ ισόπλευρο

β) ΑΒ = ΓΖ και ΑΓ = ΒΖ άρα το ΑΓΖΒ # και έχει ΑΒ = ΑΓ άρα είναι ρόμβος.

γ) $\underline{A\overset{\triangle}{\Theta}Z}$: $\hat{\Theta} = 90° - 30° = 60°$

$\Theta\hat{B}Z = 180° - 60° - 60° = 60°$

$\underline{B\overset{\triangle}{\Theta}Z}$: $\Theta\hat{Z}B = 180° - 60° - 60° = 60°$ άρα $\Theta\overset{\triangle}{B}Z$ ισόπλευρο

άρα ΒΘ = ΒΖ.

$\underline{\text{Όμοια}}$: $\Gamma\overset{\triangle}{Z}H$ ισόπλευρο.

$A\overset{\triangle}{\Theta}\Gamma$: Β μέσο ΑΘ, Γ μέσο ΑΗ άρα: $B\Gamma =\parallel \frac{\Theta H}{2} \Leftrightarrow 2B\Gamma = \Theta H$

ΘΕΜΑ 4

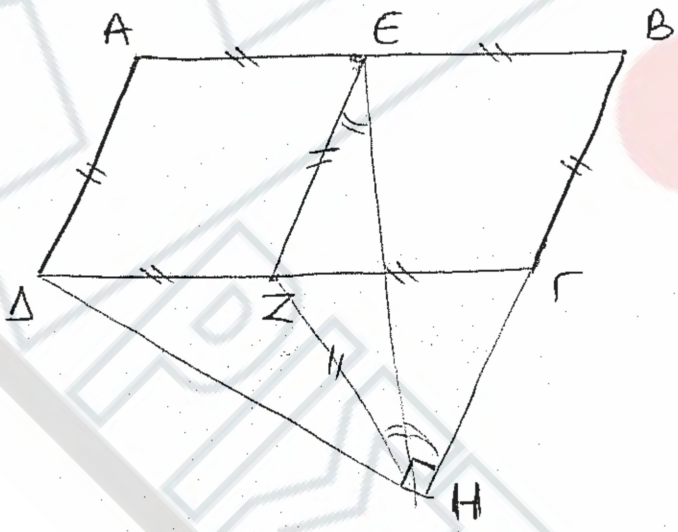
Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με γωνία Α αμβλεία, ισχύει ότι ΑΒ=2ΑΔ. Τα σημεία Ε και Ζ, είναι μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Από το Δ φέρουμε τη ΔΗ κάθετη στην προέκταση της ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΕΖΗ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) Το τμήμα ΗΕ, είναι διχοτόμος της γωνίας $Z\hat{H}\Gamma$. (Μονάδες 8)



α) ΑΕ =∥ ΔΖ ως μισά ίσων πλευρών άρα ΑΕΖΔ # με ΑΔ = ΑΕ άρα ρόμβος.

β) $\overset{\triangle}{\Delta H \Gamma}$: έχω ΖΗ διάμεσο, άρα $ZH = \frac{\Delta\Gamma}{2} = \Delta Z = EZ$

άρα $\overset{\triangle}{ZEH}$ ισοσκελές.

γ) $Z\hat{E}H = Z\hat{H}E$ αφού $\overset{\triangle}{ZEH}$ ισοσκελές

$Z\hat{E}H = E\hat{H}\Gamma$ ως εντός εναλλάξ

άρα: $Z\hat{H}E = E\hat{H}\Gamma$ άρα ΗΕ διχοτόμος της $Z\hat{H}\Gamma$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος (Ο, R) με διάμετρο ΑΒ και ευθείες ε_1, ε_2 εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου ΑΒ. Θεωρούμε ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του Ε, η οποία τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

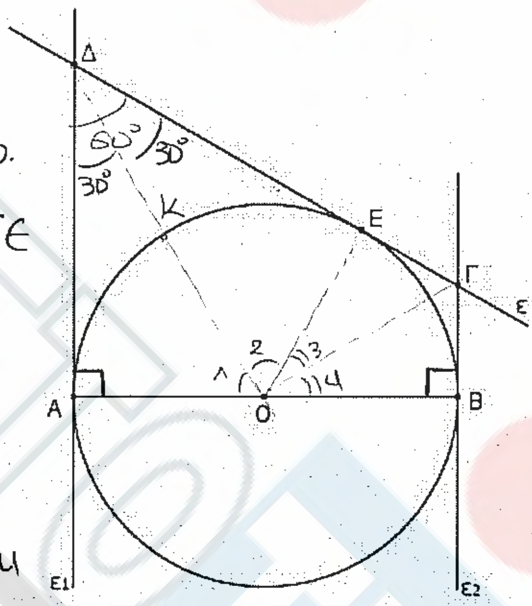
i. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 6)

ii. ΓΔ= ΑΔ + ΒΓ (Μονάδες 7)

iii. Το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

β) Αν η γωνία ΑΔΕ είναι 60^o και η ΟΔ τέμνει τον κύκλο (Ο, R) στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι το Κ είναι μέσο του ΔΟ. (Μονάδες 5)

α) i) ΑΔ // ΓΒ γιατί είναι ⊥ στην ΑΒ
άρα ΑΒΓΔ τραπέζιο.



ii) ΔΑ = ΔΕ και ΓΒ = ΓΕ
ως εφαπτόμενες από το Δ και Γ.

ΓΔ = ΓΕ + ΕΔ =
= ΓΒ + ΔΑ.

iii) $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ και $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$
γιατί η διακεντρική ευθεία διχοτομεί τη γωνία των ακτίνων.

Άρα: $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 180°$

$2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3 = 180°$

$\hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 90°$ δηλ. $\Delta\hat{O}E = 90°$

άρα $\Gamma\hat{O}\Delta$ ορθογώνιο.

β) $\hat{\Delta} = 60°$ άρα $A\hat{\Delta}O = O\hat{\Delta}E = 30°$

Τότε: $\underline{A\hat{O}\Delta}$: $\hat{O}_1 = 60°$ και $OA = \frac{O\Delta}{2} \Leftrightarrow O\Delta = 2 \cdot OA$

και $OK = OA = R$

άρα ΔΚ = R δηλ. Κ μέσο του ΟΔ.

ΘΕΜΑ 4

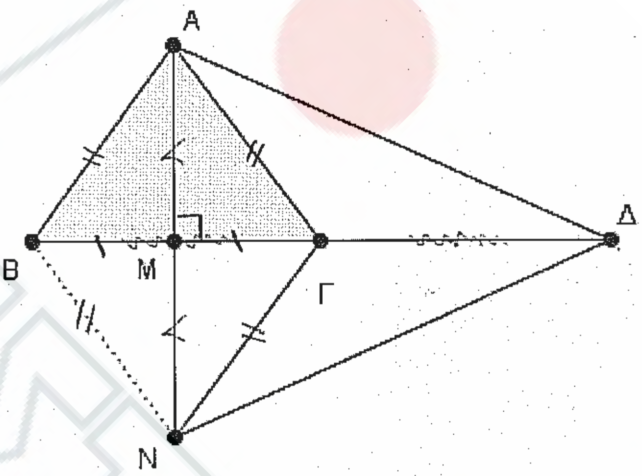
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και ΑΜ το ύψος του στην πλευρά ΒΓ. Στην προέκταση του ΑΜ θεωρούμε τμήμα ΜΝ=ΑΜ . Στην προέκταση του ΒΓ προς το μέρος του Γ θεωρούμε τμήμα ΓΔ =ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΝΓ ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΑΔΝ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Το σημείο Γ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΔΝ. (Μονάδες 9)



α) $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ ισοσκελες με ΑΜ ύψος, αρα ΑΜ διάμεσος και διχοτόμος.
Τότε οι διαγώνιοι του ΑΒΝΓ διχοτομουνται αρα ειναι # και τέμνονται κάθετα, αρα ΑΒΝΓ ρόμβος.

β) Συγκρινω $A\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$ με $N\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$ εχω:
1) ΓΔ κοινή πλευρά
2) ΑΓ = ΓΝ αφού ΑΒΝΓ ρόμβος
3) $A\hat{\Gamma}\Delta = N\hat{\Gamma}\Delta$ ως παραπληρωματικές ισων γωνιών, αφου οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του.

αρα ισχυει Π-Γ-Π αρα $A\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma = N\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$
αρα ΑΔ = ΝΔ, δηλ. $A\overset{\triangle}{\Delta}N$ ισοσκελες

γ) $M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 2M\Gamma$ αρα $\Gamma\Delta = \frac{2}{3} M\Delta$ αρα Γ βαρύκεντρο του $A\overset{\triangle}{\Delta}N$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία Α ίση με 120° και γωνία Β είναι ίση με 45° . Στην προέκταση της ΒΑ προς το Α, παίρνουμε τμήμα ΑΔ = 2ΑΒ. Από το Δ φέρνουμε την κάθετη στην ΑΓ που την τέμνει στο σημείο Κ.

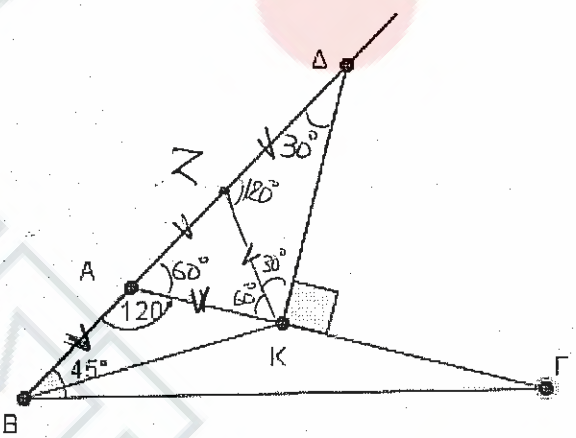
Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία ΑΔΚ είναι ίση με 30°. (Μονάδες 6)

β) Το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

γ) Αν Ζ το μέσο της ΔΑ, τότε $Z\widehat{K}B$=90°. (Μονάδες 6)

δ) Το σημείο Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος ΒΔ. (Μονάδες 7)



α) $\Delta\hat{A}K = 180° - 120° = 60°$

$A\overset{\triangle}{\Delta}K$: $90° - 60° = 30°$

β) $A\overset{\triangle}{\Delta}K$: έχω $\hat{\Delta} = 30°$ άρα: $AK = \frac{A\Delta}{2} \Leftrightarrow A\Delta = 2AK$

και $A\Delta = 2BA$

άρα: $AK = BA$ άρα $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ ισοσκελές

γ) $A\overset{\triangle}{K}\Delta$: έχω ΖΚ διάμεσο, άρα $ZK = \frac{A\Delta}{2} = ZA = Z\Delta$

άρα $Z\overset{\triangle}{A}K$ ισοσκελές με $Z\hat{A}K = 60°$, άρα

$Z\hat{A}K$ ισόπλευρο άρα $A\hat{K}Z = 60°$

$A\overset{\triangle}{B}K$ ισόπλευρο, άρα $A\hat{B}K = A\hat{K}B = \frac{180°-120°}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$

$B\hat{K}Z = B\hat{K}A + A\hat{K}Z = 30° + 60° = 90°$.

δ) Συγκρίνω $A\overset{\triangle}{B}K$ με $Z\overset{\triangle}{K}\Delta$ έχω 1) $Z\Delta = AB$ 2) $ZK = AK$

3) $\Delta\hat{Z}K = B\hat{A}K = 120°$ άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $A\overset{\triangle}{B}K = Z\overset{\triangle}{K}\Delta$

άρα $K\Delta = KB$ άρα Κ σημείο της μεσοκαθέτου τμήμα

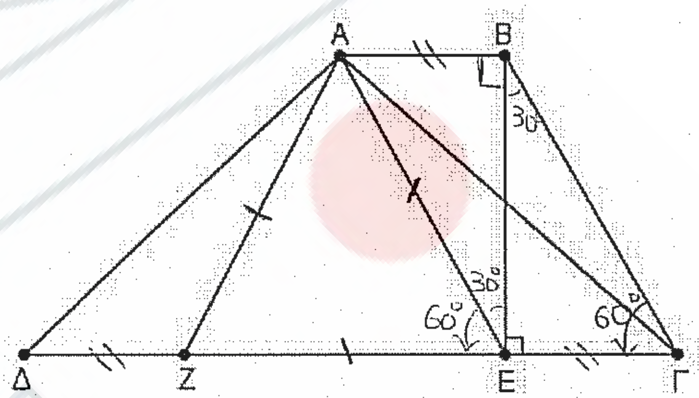
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB//\Gamma\Delta$, $\Delta\Gamma = 4AB$ και $B\Gamma = 2AB$. Θεωρούμε σημείο Ζ της ΓΔ, ώστε $\Delta Z = AB$. Αν η γωνία Γ είναι 60^0 και ΒΕ το ύψος του τραπεζίου, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

γ) Τα τρίγωνα ΔΑΖ και ΓΑΕ είναι ίσα. (Μονάδες 9)



α) $\overset{\triangle}{BE\Gamma}$: έχω $\hat{\Gamma} = 30°$ άρα $E\hat{B}\Gamma = 30°$ άρα $E\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{\cancel{2}AB}{\cancel{2}}$

$= AB$ και $E\Gamma \parallel AB$ άρα ΑΒΓΕ ▱.

β) $ZE = \Gamma\Delta - \Delta Z - E\Gamma = 4AB - AB - AB = 2AB$

$A\hat{E}Z = \hat{\Gamma} = 60°$ ως εντός εκτός και επί τ' αυτά

$A\hat{E}B = 90° - 60° = 30°$ τότε στο $\overset{\triangle}{AEB}$ έχω:

$AB = \frac{AE}{2} \Leftrightarrow \boxed{AE = 2AB} = ZE$

Άρα: $\overset{\triangle}{ZAE}$ ισοσκελές με $A\hat{E}Z = 60°$, άρα $\overset{\triangle}{ZAE}$ ισόπλευρο.

γ) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{A\Delta Z}$ με $\overset{\triangle}{A\Gamma E}$ έχω:

1) $AZ = AE$ από β)

2) $\Delta Z = E\Gamma$ από β)

3) $\Delta Z\hat{A} = A\hat{E}\Gamma = 120°$

άρα ισχύει Π−Γ−Π άρα $\overset{\triangle}{A\Delta Z} = \overset{\triangle}{A\Gamma E}$.

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τις μεσοκαθέτους μ1, μ2 των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τέμνονται στο μέσο Μ της ΒΓ.

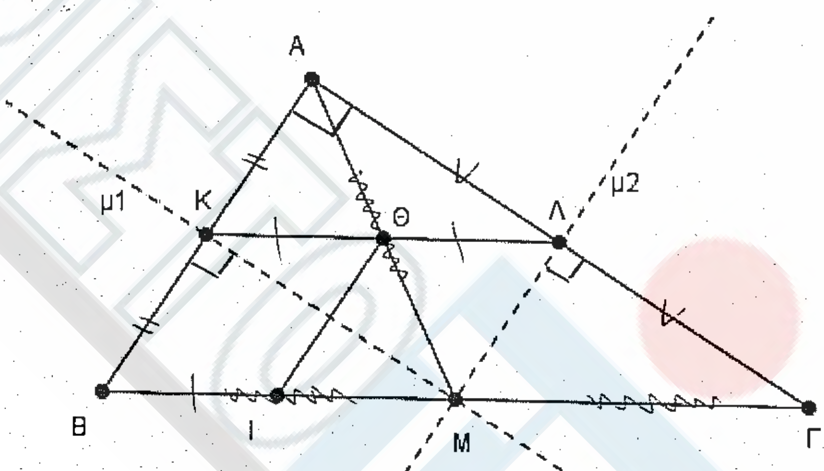
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^o$. (Μονάδες 5)

ii. Το τετράπλευρο ΑΛΜΚ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

iii. $\Lambda\Theta = \frac{B\Gamma}{4}$, όπου Θ το σημείο τομής των ΑΜ και ΚΛ. (Μονάδες 6)

δ) Αν Ι σημείο της ΒΓ τέτοιο ώστε $BI = \frac{B\Gamma}{4}$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΘΙΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)



α) i) Μ σημείο της μ_1, άρα: $MA = MB = \frac{B\Gamma}{2}$

άρα το $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο με ΒΓ υποτείνουσα, άρα $\hat{A} = 90^o$.

ii) ΑΛΜΚ είναι ορθογώνιο αφού έχει 3 ορθές γωνίες.

iii) Οι διαγώνιοι του ορθογώνιου ΑΛΜΚ διχοτομούνται άρα Θ μέσο ΚΛ και Θ μέσο ΑΜ.

$\overset{\Delta}{AM\Gamma}$: Θ μέσο ΑΜ, Λ μέσο ΑΓ } άρα $\Theta\Lambda =\parallel \frac{M\Gamma}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$.

β) $BI = \frac{B\Gamma}{4} = \Theta\Lambda = K\Theta$

$\overset{\Delta}{AB\Gamma}$: Κ μέσο ΑΒ, Λ μέσο ΑΓ } άρα: $K\Lambda =\parallel \frac{B\Gamma}{2}$ δηλ. έχω $BI =\parallel K\Theta$ άρα: ΒΚΘΙ #.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνίες Β και Γ οξείες και Δ, Μ και Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Στις μεσοκάθετες των ΑΒ και ΒΓ και εκτός του τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε σημεία Ζ και Η αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΔΖ = $\frac{AB}{2}$ και ΕΗ = $\frac{B\Gamma}{2}$.

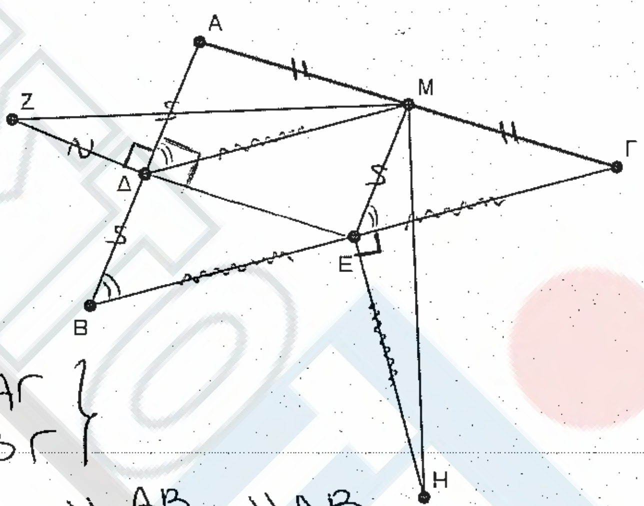
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΒΔΜΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 5)

ii. Τα τρίγωνα ΖΔΜ και ΕΜΗ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Αν τα σημεία Ζ, Δ, Ε είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι η γωνία Α=90° .

(Μονάδες 10)



α) i) $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: Μ μέσο ΑΓ, Ε μέσο ΒΓ

άρα: $ME =\parallel \frac{AB}{2} =\parallel \Delta B$

άρα: ΒΔΜΕ ▱

ii) Συγκρίνω $Z\overset{\triangle}{\Delta}M$ με $M\overset{\triangle}{E}H$ έχω:

1) $Z\Delta = ME$ $(= B\Delta)$

2) $\Delta M = EH$ $(= BE)$

3) $Z\hat{\Delta}M = M\hat{E}H$ ως άθροισμα ίσων γωνιών, αφού $A\hat{\Delta}M = \hat{B}$ ως εντός εκτός και επί τ' αυτά

$M\hat{E}H = \hat{B}$ —"— —"— —"—

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $Z\hat{\Delta}M = M\hat{E}H$

β) Αν Ζ, Δ, Ε συνευθειακά, θα έχω $A\hat{\Delta}E = 90°$

Τότε το ▱ ΑΜΕΔ θα είναι ορθογώνιο

άρα $\hat{A} = 90°$. → $(ME =\parallel AB/2 =\parallel A\Delta)$.

ΘΕΜΑ 4

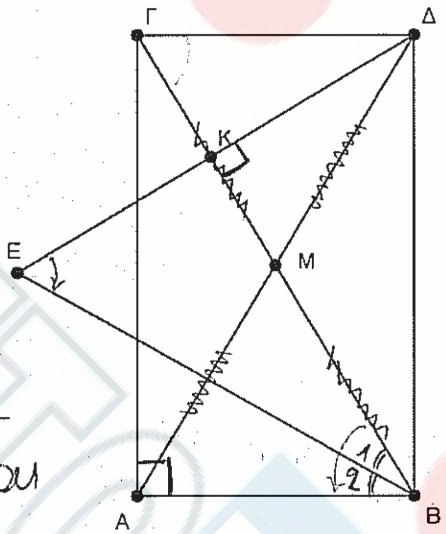
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($Α=90^o$). Φέρουμε τη διάμεσο του ΑΜ την οποία προεκτείνουμε (προς το μέρος του Μ) κατά τμήμα ΜΔ = ΑΜ. Θεωρούμε ευθεία ΔΚ κάθετη στη ΒΓ, η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας Β στο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι ορθογώνιο (Μονάδες 8)

α) $Κ\hat{Ε}Β = 90^o - \frac{\hat{Β}}{2}$ (Μονάδες 8)

β) ΔΕ = ΒΔ (Μονάδες 9)



α) Στο $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ έχω ΑΜ διάμεσο, άρα $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2} = ΒΜ = ΜΓ$

άρα και $ΑΜ = ΜΔ = ΒΜ = ΜΓ$.

ΑΒΓΔ ▱ γιατί οι διαγώνιοι του διχοτομούνται και είναι και ίσες άρα είναι ορθογώνιο.

β) $\overset{\triangle}{ΕΚΒ}$: $Κ\hat{Ε}Β = 90^\circ - \hat{Β}_1 = 90^\circ - \frac{\hat{Β}}{2}$.

γ) $Δ\hat{Β}Ε = \hat{Β}_1 + Δ\hat{Β}Γ \overset{ΒΓΔ}{=} \hat{Β}_1 + 90^\circ - Β\hat{Γ}Δ$

$Β\hat{Γ}Δ = \hat{Β}$ ως εντός εναλλάξ

$= \hat{Β}_1 + 90^\circ - \hat{Β} = 90^\circ + \frac{\hat{Β}}{2} - \hat{Β} =$

$= 90^\circ - \frac{\hat{Β}}{2} = Κ\hat{Ε}Β$ άρα $\overset{\triangle}{ΔΕΒ}$ ισοσκελές με ΔΕ = ΔΒ.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημεία Κ, Λ της διαγωνίου του ΒΔ, τέτοια ώστε να ισχύει ΒΚ=ΚΛ=ΛΔ .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο.

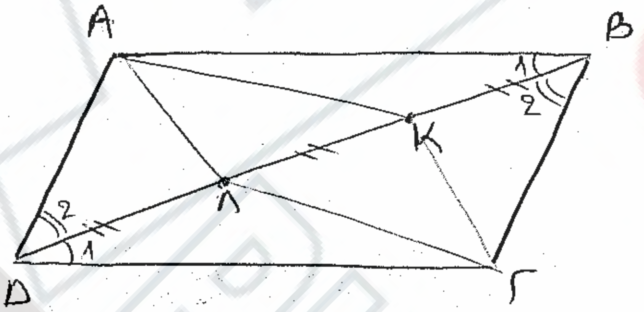
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι, αν το αρχικό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, τότε και το ΑΚΓΛ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

γ) Ποιά πρέπει να είναι η σχέση των διαγωνίων του αρχικού παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ

ΑΝΓΔ, ώστε το ΑΚΓΛ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{AKB}$ με $\overset{\triangle}{\Delta\Lambda\Gamma}$ εχω:

1) ΑΒ = ΔΓ αφού ΑΒΓΔ #

2) ΚΒ = ΔΛ υπόθεση

3) $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$ ως εντός εναλλάξ

αρα ισχυει Π-Γ-Π αρα $\overset{\triangle}{AKB} = \overset{\triangle}{\Delta\Lambda\Gamma}$

αρα: $\boxed{AK = \Gamma\Lambda}$

όμοια: $\overset{\triangle}{\Delta A\Lambda} = \overset{\triangle}{BK\Gamma}$ άρα: $\boxed{A\Lambda = K\Gamma}$.

Αρα: ΑΚΓΛ #.

β) Αν το ΑΒΓΔ ειναι ρόμβος θα εχω και $\overset{\triangle}{\Delta A\Lambda} = \overset{\triangle}{ABK}$ (Π-Γ-Π) αρα: ΑΛ = ΑΚ

αρα το ΑΚΓΛ ρόμβος.

γ) Για να ειναι το ΑΚΓΛ ορθογώνιο θα πρέπει: ΑΓ = ΚΛ.

Δηλ. η ΔΒ = 3ΑΓ.

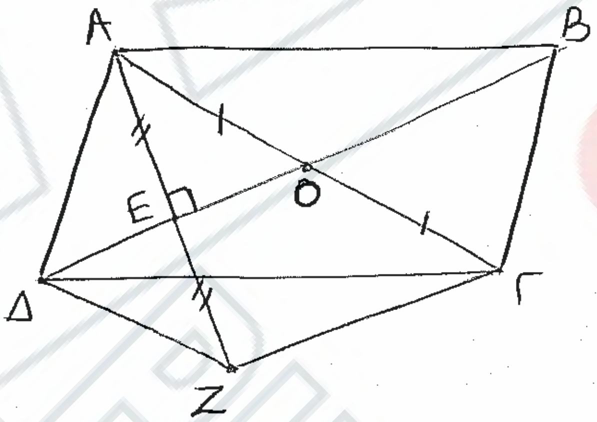
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ. Φέρνουμε την ΑΕ κάθετη στην διαγώνιο ΒΔ. Εάν Ζ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την διαγώνιο ΒΔ, τότε να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) ΖΓ = 2ΟΕ. (Μονάδες 9)

γ) Το ΒΔΖΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)



α) ΔΕ μεσοκάθετος του ΑΖ, άρα ΔΑ = ΔΖ
άρα $\overset{\triangle}{\text{ΑΔΖ}}$ ισοσκελές.

β) $\overset{\triangle}{\text{ΑΖΓ}}$: Ε μέσο ΑΖ, Ο μέσο ΑΓ } άρα ΟΕ $=\parallel \frac{\text{ΖΓ}}{2}$

$2 \cdot$ ΟΕ = ΖΓ

γ) ΕΟ ∥ ΖΓ άρα και ΔΒ ∥ ΖΓ άρα ΔΒΓΖ τραπέζιο
και ΔΖ = ΔΑ = ΒΓ άρα ισοσκελές τραπέζιο.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ ($\hat{\mathrm{A}} = 90^o$) και $\hat{\Gamma} = 30^o$ με Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς ΒΓ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$. (Μονάδες 6)

ii) $\mathrm{AE} = \dfrac{\Gamma\mathrm{E}}{2}$. (Μονάδες 6)

iii) η ΒΕ είναι μεσοκάθετος της διαμέσου ΑΜ. (Μονάδες 7)

β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ που τέμνει την ΒΕ στο Η, να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, Η και Ν είναι συνευθειακά. (Μονάδες 6)

* ανήκουν στη μεσοκάθετο αυτού.

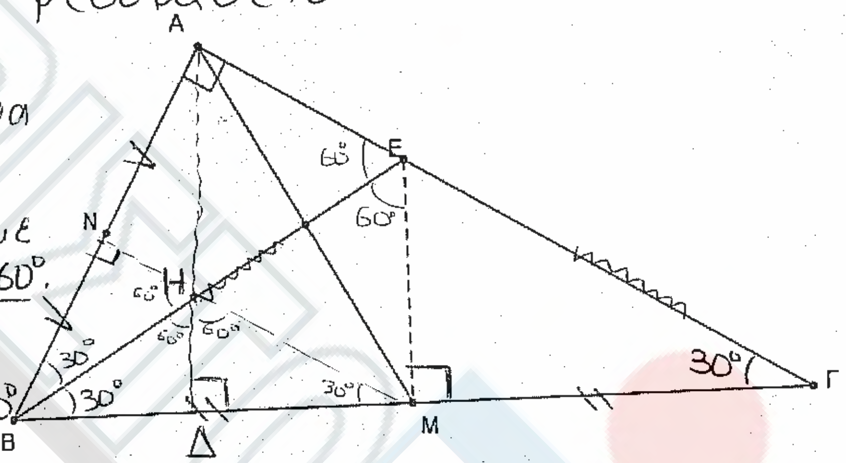
β) Μ μέσο ΒΓ, Ν μέσο ΑΒ } άρα $MN \overset{\parallel}{=} \dfrac{A\Gamma}{2}$ άρα

$\overset{\Delta}{B\hat{N}H}$ ορθογώνιο με $N\hat{B}H = 30^o$, άρα $N\hat{H}B = 60^o$.

$B\hat{H}\Delta = 90^o - 30^o = 60^o$

$\Delta\hat{H}M = 90^o - 30^o = 60^o$

άρα: $N\hat{H}M = 3 \cdot 60^o = 180^o$



α) i) $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$: $\hat{B} = 90^o - 30^o = 60^o$

Ε σημείο της μεσοκαθέτου της ΒΓ, άρα: ΒΕ = ΓΕ

άρα ΒΕΓ ισοσκελές με $E\hat{B}\Gamma = \hat{\Gamma} = 30^o$

Τότε: $A\hat{B}E = \hat{B} - E\hat{B}\Gamma = 60^o - 30^o = 30^o$.

Άρα: ΒΕ διχοτόμος της $\hat{B}$.

ii) $\overset{\Delta}{A\hat{B}E}$: $A\hat{B}E = 30^o$, άρα: $AE = \dfrac{BE}{2} = \dfrac{\Gamma E}{2}$

iii) Συγκρίνω $\overset{\Delta}{ABE}$ με $\overset{\Delta}{EMB}$ έχω:

1) ΒΕ κοινή πλευρά

2) $A\hat{B}E = E\hat{B}M = 30^o$

3) ορθογώνια

άρα ισχύει υποτ. + οξ. γωνία, άρα $\overset{\Delta}{ABE} = \overset{\Delta}{EMB}$

άρα: ΒΑ = ΒΜ και ΕΑ = ΕΜ. Δηλ. τα σημεία Β, Ε ισαπέχουν από τα άκρα του ΑΜ, άρα *

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύουν: $A\Delta = B\Gamma$, $A\Gamma = B\Delta$, και $AB < \Gamma\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΔΟΓ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι ΓΔ=3ΑΒ και Κ , Λ τα μέσα των διαγωνίων ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΛΚ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) $K\Lambda = \dfrac{\Gamma\Delta - AB}{2} = \dfrac{3AB - AB}{2} = \dfrac{2AB}{2} = AB$

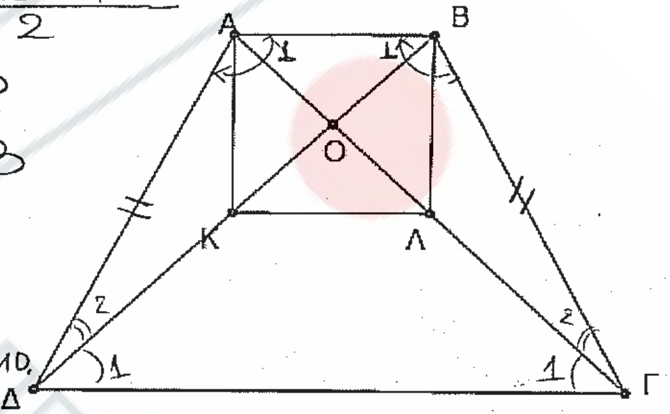
δηλ. έχω $K\Lambda \mathrel{=\!\parallel} AB$

άρα ΑΒΛΚ # και

ΑΛ = ΚΒ ως μισά

των τμημάτων

άρα ΑΒΛΚ ορθογώνιο.



α) Συγκρίνω $A\hat{\Delta}\Gamma$ με $B\hat{\Delta}\Gamma$ έχω:

1) ΑΔ = ΒΓ υπόθεση

2) ΑΓ = ΔΒ —״—

3) ΔΓ κοινή πλευρά

άρα ισχύει Π-Π-Π άρα $A\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma$ άρα $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$

άρα $O\hat{\Delta}\Gamma$ ισοσκελές

Συγκρίνω $A\hat{B}\Gamma$ με $A\hat{B}\Delta$ έχω:

1) ΑΒ κοινή πλευρά

2) ΑΔ = ΒΓ υπόθεση

3) ΑΓ = ΔΒ —״—

άρα ισχύει Π-Π-Π άρα $A\hat{B}\Gamma = A\hat{B}\Delta$ άρα $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$

άρα $O\hat{A}B$ ισοσκελές

β) Αφού $A\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma$ θα έχω $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$

και $A\hat{B}\Gamma = A\hat{B}\Delta$ θα έχω $\hat{A} = \hat{B}$.

Τότε: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^\circ$

$2\hat{A} + 2\hat{\Delta} = 360^\circ$

$\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^\circ$ δηλ. έχω εντός και επί τα αυτά γωνίες παραπληρωματικές άρα $AB \parallel \Delta\Gamma$. Άρα ΑΒΓΔ ισοσκ. τραπέζιο.

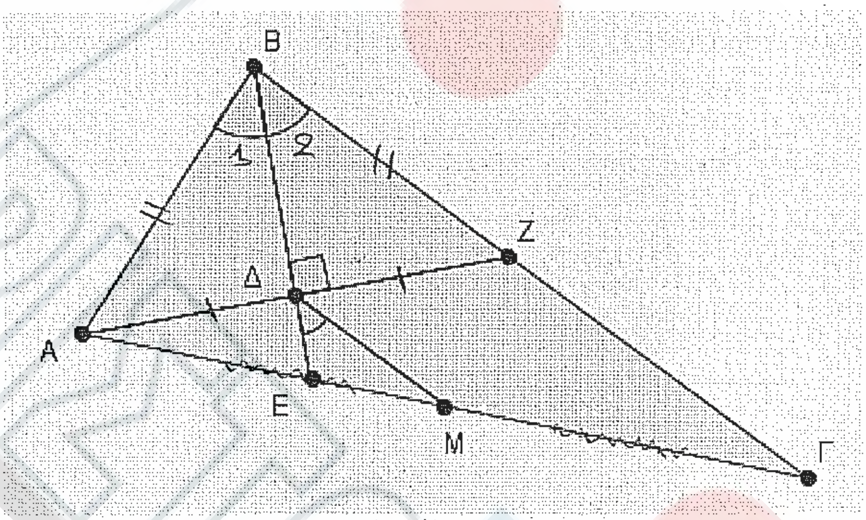
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΒΓ και η διχοτόμος ΒΕ της γωνίας $\hat{B}$. Αν ΑΖ $\perp$ ΒΕ, όπου Ζ σημείο της ΒΓ και Μ το μέσον της ΑΓ, να αποδείξετε ότι :

α) Το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) ΔΜ//ΒΓ και ΔΜ = $\dfrac{\mathrm{B\Gamma - AB}}{2}$ (Μονάδες 10)

γ) $\mathrm{E\hat{\Delta}M} = \dfrac{\hat{B}}{2}$, όπου $\hat{B}$ η γωνία του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)



α) Στο $\overset{\triangle}{ABZ}$ έχω ΒΔ διχοτόμο και ύψος,
άρα $\overset{\triangle}{ABZ}$ ισοσκελές, με ΒΔ και διάμεσο.

β) $\overset{\triangle}{AZ\Gamma}$: Δ μέσο ΑΖ, Μ μέσο ΑΓ $\Big\}$ άρα: ΔΜ $=\!\!//$ $\dfrac{Z\Gamma}{2}$

άρα: ΔΜ // ΒΓ.

$$\Delta M = \frac{Z\Gamma}{2} = \frac{B\Gamma - BZ}{2} \overset{\alpha)}{=} \frac{B\Gamma - AB}{2}.$$

γ) $E\hat{\Delta}M = \hat{B}_2 = \dfrac{\hat{B}}{2}$ ως εντός-εκτός και επί τ' αυτά.

ΘΕΜΑ 4

Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου κέντρου Ο φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ, ΡΒ και τη διακεντρική ευθεία ΡΟ που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ τέμνει τις προεκτάσεις των ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

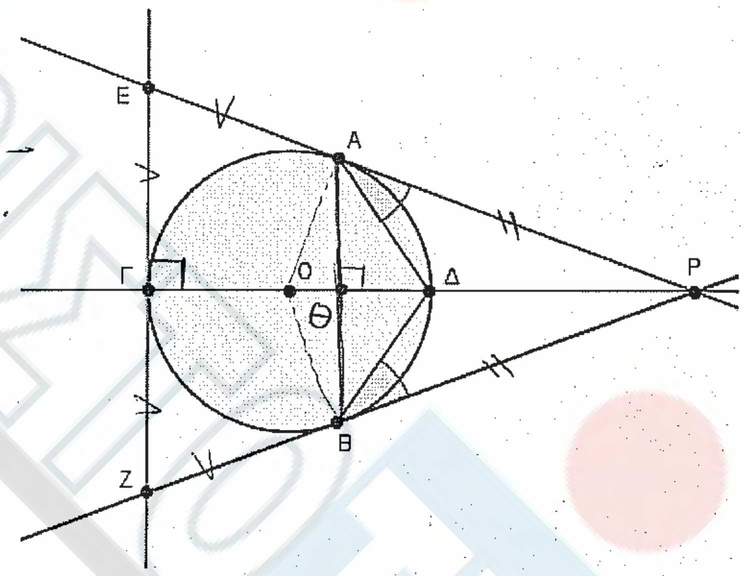
Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\hat{A}P = \Delta\hat{B}P$ (Μονάδες 8)

β) ΕΑ=ΖΒ (Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

)ΟΑ=ΟΒ = ρ
και ΡΑ=ΡΒ
αρα ΡΟ μεσοκά-
θετος του ΑΒ.
Τότε: ΕΖ//ΑΒ
γιατί είναι ⊥
στην ΓΔ. Άρα
ΑΒΖΕ τραπέζιο
και ΕΑ=ΖΒ αρα
ισοσκ. τραπέζιο.



α) Συγκρίνω $\overset{\Delta}{\Delta AP}$ με $\overset{\Delta}{\Delta BP}$ έχω:

1) ΡΑ=ΡΒ ως εφαπτόμενες από το Ρ
2) ΡΔ κοινή πλευρά
3) $A\hat{P}\Delta = \Delta\hat{P}B$ * αφού ΟΡ διχοτομεί τη γωνία των εφαπτομένων

αρα ισχυει Π-Γ-Π αρα $\overset{\Delta}{\Delta AP} = \overset{\Delta}{\Delta BP}$ αρα $P\hat{A}\Delta = \Delta\hat{B}P$.

β) Συγκρίνω $\overset{\Delta}{E\Gamma P}$ με $\overset{\Delta}{Z\Gamma P}$ έχω:

1) ορθογώνια
2) ΓΡ κοινή πλευρά
3) $A\hat{P}\Delta = \Delta\hat{P}B$ *

αρα ισχυει Γ-Π-Γ αρα $\overset{\Delta}{E\Gamma P} = \overset{\Delta}{Z\Gamma P}$

αρα: ΡΕ=ΡΖ. Τότε: ΕΑ = ΖΒ ως διαφορά ίσων
γωνιών.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΔΓ) και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η ΑΓ είναι κάθετη στην ΑΔ και η ΒΔ είναι κάθετη στην ΒΓ. Θεωρούμε τα μέσα Μ, Ε και Ζ των ΓΔ, ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

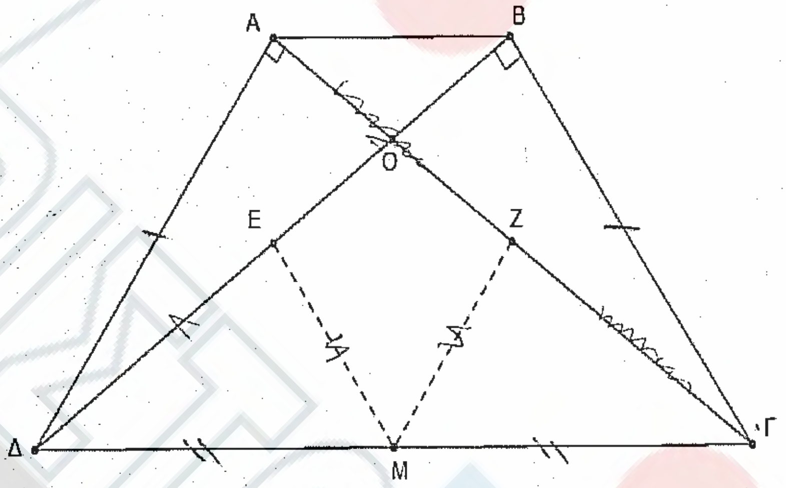
Να αποδείξετε ότι:

α) ΜΕ=ΜΖ. (Μονάδες 6)

β) Η ΜΖ είναι κάθετη στην ΑΓ. (Μονάδες 6)

γ) Τα τρίγωνα $\mathrm{M}\overset{\Delta}{\Delta}\mathrm{E}$ και $\mathrm{M}\overset{\Delta}{\mathrm{Z}}\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

δ) Η ΟΜ είναι μεσοκάθετος του ΕΖ. (Μονάδες 6)



α) $\overset{\Delta}{\Delta B\Gamma}$: Ε μέσο ΔΒ, Μ μέσο ΔΓ } άρα: $EM \overset{=}{//} \frac{B\Gamma}{2}$

$A\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma$: Ζ μέσο ΑΓ, Μ μέσο ΔΓ } άρα: $MZ \overset{=}{//} \frac{A\Delta}{2}$

όμως: ΒΓ = ΑΔ } άρα: ΕΜ = ΜΖ.

β) $A\Delta \perp A\Gamma$, $MZ // A\Delta$ } άρα: $MZ \perp A\Gamma$

γ) Όμοια: θα έχω $ME \perp \Delta B$

Συγκρίνω $M\overset{\Delta}{\Delta}E$ με $M\overset{\Delta}{Z}\Gamma$ έχω:

1) ορθογώνια
2) ΜΕ = ΜΖ από α)
3) ΜΔ = ΜΓ υπόθεση

άρα ισχύει υποτ. + καθ. πλευρά

άρα $M\overset{\Delta}{\Delta}E = M\overset{\Delta}{Z}\Gamma$.

δ) ΟΕ = ΟΖ (ως διαφορά ίσων τμημάτων) και ΜΕ=ΜΖ άρα τα σημεία Ο, Μ ισαπέχουν από τα άκρα του ΕΖ, δηλ. ΟΜ μεσοκάθετος του ΕΖ.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Με βάση την ΑΒ κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΒ, εκτός του τριγώνου ΑΒΓ, με γωνία $\hat{\Delta} = 120^o$. Θεωρούμε τα μέσα Ζ και Η των πλευρών ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

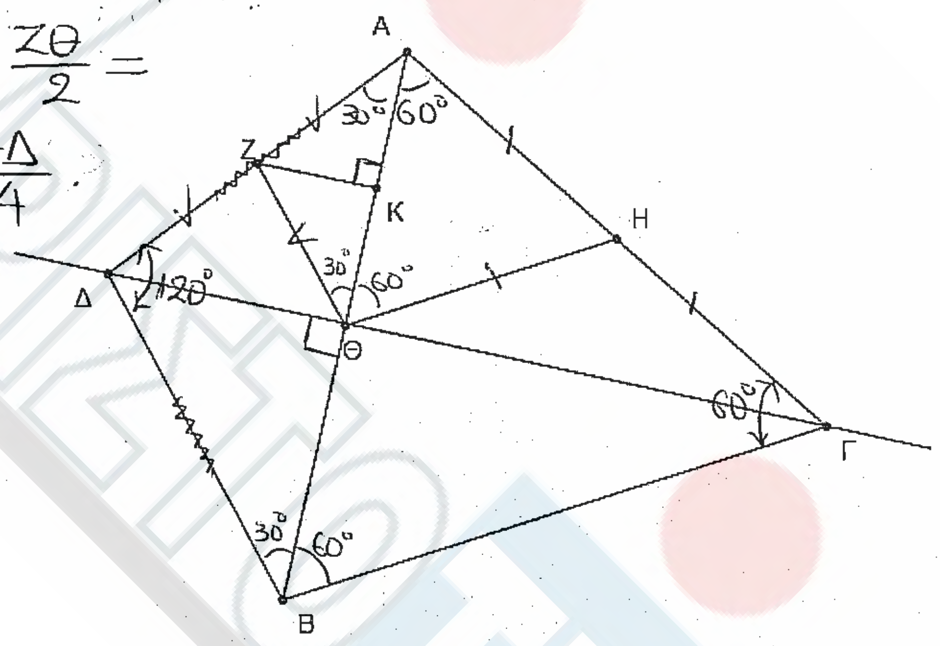
α) Να αποδείξετε ότι η ΔΓ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ. (Μονάδες 8)

β) Αν η ΔΓ τέμνει την ΑΒ στο Θ, να αποδείξετε ότι η γωνία $Z\hat{\Theta}H$ είναι ορθή. (Μονάδες 9)

γ) Αν η ΖΚ είναι η κάθετη στην ΑΒ από το σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι $ZK = \frac{A\Delta}{4}$. (Μονάδες 8)

$\overset{\triangle}{ZK\Theta}$: έχω $Z\hat{\Theta}K = 30^\circ$,

άρα: $ZK = \frac{Z\Theta}{2} = \frac{\frac{A\Delta}{2}}{2} = \frac{A\Delta}{4}$.



α) ΔΑ = ΔΒ και ΓΑ = ΓΒ, δηλ. τα σημεία Δ, Γ ισαπέχουν από τα άκρα του ΑΒ άρα ανήκουν στη μεσοκάθετο αυτού.

β) $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισόπλευρο, άρα όλες οι γωνίες του είναι 60°. $A\hat{\Delta}B = 120^\circ$ και $\overset{\triangle}{A\Delta B}$ ισοσκελές,

άρα $\Delta\hat{A}B = \Delta\hat{B}A = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

$\overset{\triangle}{\Delta A\Theta}$: ΖΘ διάμεσος, άρα $Z\Theta = \frac{A\Delta}{2} = ZA$ άρα $\overset{\triangle}{ZA\Theta}$ ισοσκελές με $Z\hat{\Theta}A = \Delta\hat{A}\Theta = 30^\circ$

Όμοια: $\overset{\triangle}{A\Theta H}$ ισοσκελές με $A\hat{\Theta}H = \Theta\hat{A}H = 60^\circ$.

Άρα: $Z\hat{\Theta}H = Z\hat{\Theta}A + A\hat{\Theta}H = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και ΑΒ > ΒΓ, ΑΓ=2ΒΓ. Στην προέκταση της πλευράς ΔΑ (προς το Α) παίρνουμε σημείο Ε ώστε ΔΑ=ΑΕ.

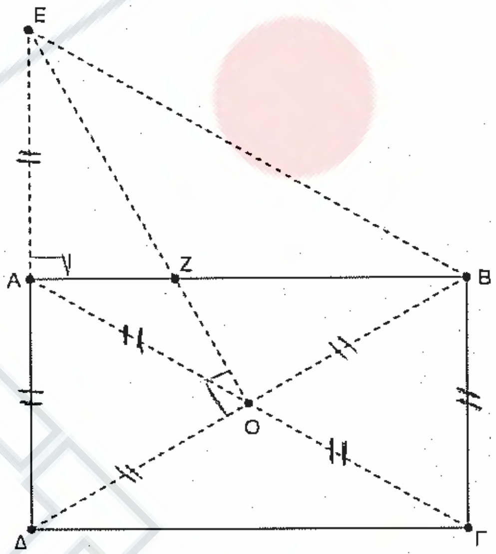
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

ii. Το τρίγωνο ΕΒΔ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 9)

β) Αν η ΕΟ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι ΔΖ⊥ΕΒ.

(Μονάδες 8)



α)i) $ΑΓ = 2ΒΓ$ άρα $ΑΟ = ΟΓ = ΒΓ = ΑΔ = ΑΕ$
δηλ. έχω $ΒΓ =\parallel ΑΕ$ άρα ΑΕΒΓ ▱.

ii) Αφού ΑΕΒΓ ▱ θα έχω $ΕΒ = ΑΓ = ΔΕ = ΔΒ$
άρα ΕΒΔ ισόπλευρο.

β) Ζ είναι το σημείο τομής των υψών ΕΟ, ΒΑ
δηλ. ορθόκεντρο του $\overset{\triangle}{ΔΕΒ}$. Άρα $ΔΖ \perp ΕΒ$
(το 3 ύψος του τριγώνου)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος (O,R) με διάμετρο ΒΓ. Θεωρούμε σημείο Α του κύκλου και σχεδιάζουμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Η προέκταση της ΑΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ζ. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ, η προέκταση του οποίου τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ε.

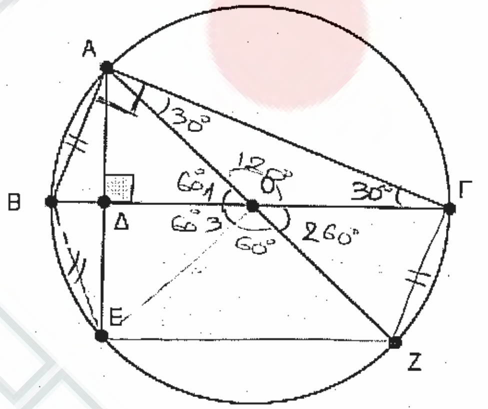
α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΖΓ=ΑΒ=ΒΕ (Μονάδες 8)

ii. Το τετράπλευρο ΒΕΖΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)

β) Αν $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τραπεζίου ΒΕΖΓ είναι ίση με 5R , όπου R η ακτίνα του κύκλου. (Μονάδες 10)

* περιμετρος = ΒΓ + ΓΖ + ΕΖ + ΒΕ = 2R + R + R + R = 5R.



α) i) $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ ως κατακορυφήν, άρα $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{Z\Gamma}$

άρα: ΑΒ = ΖΓ.

$A\hat{O}E$ ισοσκελές με ΟΔ ύψος, άρα ΟΔ διάμεσος και διχοτόμος, δηλ. $\hat{O}_1 = \hat{O}_3$ άρα $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BE}$

άρα: ΑΒ = ΒΕ.

Άρα: ΑΒ = ΖΓ = ΒΕ.

ii) Αφού $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{Z\Gamma}$ θα έχω ΒΓ // ΕΖ και ΒΕ = ΓΖ

άρα ΒΕΖΓ ισοσκ. τραπέζιο

β) $B\hat{A}\Gamma = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.

$\underline{A\hat{B}\Gamma}$: έχω $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ άρα: $AB = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{2R}{2} = R$

$A\hat{O}\Gamma$ ισοσκελές άρα $O\hat{A}\Gamma = \hat{\Gamma} = 30^\circ$ άρα $A\hat{O}\Gamma = 120^\circ$

άρα $Z\hat{O}\Gamma = 60^\circ = \hat{O}_2 = \hat{O}_1 = \hat{O}_3$. Άρα: $E\hat{O}Z = 60^\circ$

και ΟΕ = ΟΖ = R άρα $O\hat{E}Z$ ισόπλευρο, άρα

ΕΖ = ΟΕ = ΟΖ = R. *

ΘΕΜΑ 4

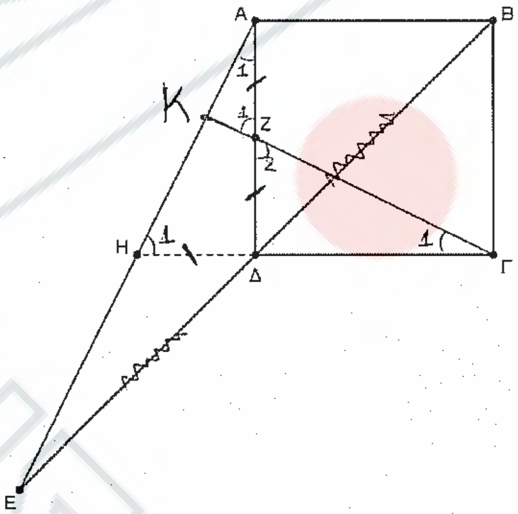
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Έστω Ε το συμμετρικό σημείο του Β ως προς το Δ και Ζ είναι το μέσο της ΑΔ. Η προέκταση της ΓΔ τέμνει την ΑΕ στο Η.

Να αποδείξετε ότι:

α) $ΔΗ = \frac{ΑΒ}{2}$ (Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΔΓ είναι ίσα. (Μονάδες 9)

γ) Η ΓΖ είναι κάθετη στην ΑΕ. (Μονάδες 8)



α) $\overset{\triangle}{EAB}$: Δ μέσο ΕΒ, ΗΔ ∥ ΑΒ } άρα: Η μέσο ΑΕ και $HΔ \overset{\parallel}{=} \frac{AB}{2} = \frac{AΔ}{2}$

β) Συγκρίνω $A\hat{Δ}H$ με $Z\hat{Δ}Γ$ έχω:

1) ορθογώνια

2) ΑΔ = ΔΓ αφού ΑΒΓΔ τετράγωνο

3) ΗΔ = ΖΔ από α)

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $A\hat{Δ}H = Z\hat{Δ}Γ$

γ) $A\hat{K}Z = 180° - \hat{A}_1 - \hat{Z}_1 =$

$= 180° - \hat{A}_1 - \hat{Z}_2 =$ ($\hat{A}_1 = \hat{Γ}_1$ αφού $A\hat{Δ}H = Z\hat{Δ}Γ$).

$= 180° - \hat{Γ}_1 - \hat{Z}_2 \overset{Z\hat{Δ}Γ}{=}$

$= 90°$ άρα ΚΓ ⊥ ΑΕ

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) με $\hat{A}=\hat{\Delta}=90^\circ$, ΔΓ = 2ΑΒ και $\hat{B}=3\hat{\Gamma}$. Φέρνουμε ΒΕ ⊥ ΔΓ που τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Μ. Φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ στο Ν.

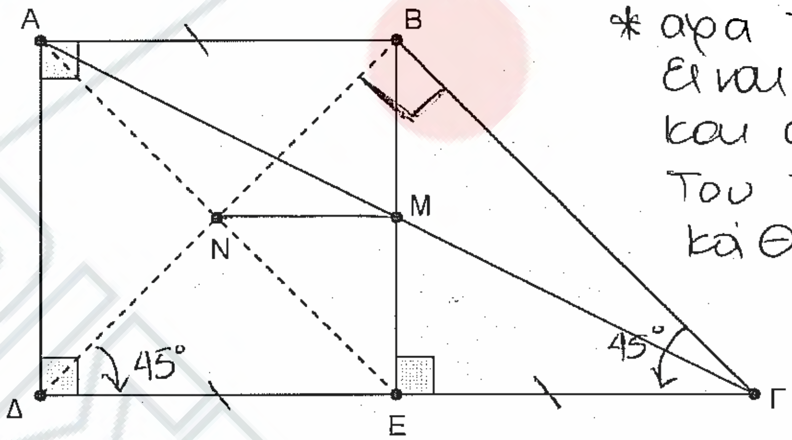
Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Gamma}=45^\circ$. (Μονάδες 6)

β) Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

β) $MN=\frac{1}{4}\Gamma\Delta$. (Μονάδες 7)

γ) ΑΕ ⊥ ΒΔ. (Μονάδες 6)



* άρα το ΑΒΕΔ θα είναι τετράγωνο και οι διαγώνιοι του τέμνονται κάθετα. Άρα: ΑΕ ⊥ ΒΔ.

α) $\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ$ ως εντός και επί τ' αυτά

$3\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=180^\circ$

$4\hat{\Gamma}=180^\circ$

$\hat{\Gamma}=45^\circ$. τότε $\hat{B}=3\cdot 45^\circ=135^\circ$.

β) ΑΒΕΔ ορθογώνιο αφού έχει 3 ορθές γωνίες, άρα ΑΒ = ΔΕ

ΔΓ = 2ΑΒ = 2ΔΕ άρα ΕΓ = ΔΕ = ΑΒ

Δηλ. έχω ΑΒ =∥ ΕΓ άρα ΑΒΓΕ ▱.

γ) Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου ΑΒΕΔ και του ▱ ΑΒΓΕ διχοτομούνται, άρα Ν μέσο ΑΕ και Μ μέσο ΑΓ.

$A\hat{E}\Gamma$: Ν μέσο ΑΕ, Μ μέσο ΑΓ } άρα $MN =\parallel \frac{E\Gamma}{2}=\frac{\frac{\Delta\Gamma}{2}}{2}=\frac{\Delta\Gamma}{4}$.

δ) Αφού ΒΕ μεσοκάθετος του ΔΓ θα έχω ΔΒ = ΒΓ άρα $\Delta\hat{B}\Gamma$ ισοσκελές με $B\hat{\Delta}\Gamma=\hat{\Gamma}=45^\circ$. Άρα: $\Delta\hat{B}\Gamma=90^\circ$ με ΒΕ διάμεσο, άρα ΒΕ = ΔΓ/2 = ΔΕ *

ΘΕΜΑ 4

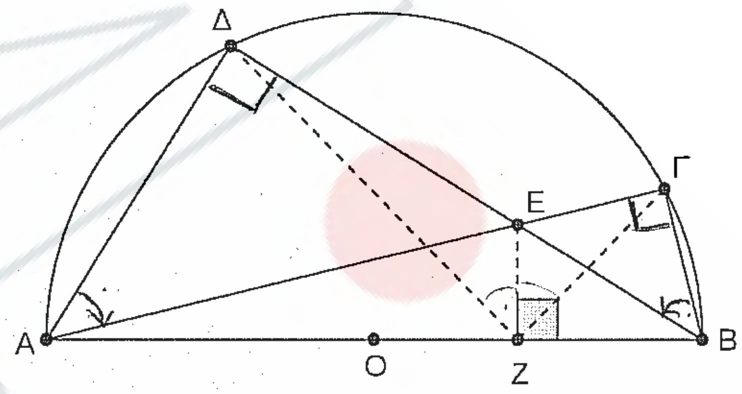
Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και δύο χορδές του ΑΓ και ΒΔ, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Ε. Φέρουμε $ΕΖ \perp ΑΒ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες ΔΑΓ και ΔΒΓ είναι ίσες (Μονάδες 7)

β) Τα τετράπλευρα ΑΔΕΖ και ΕΖΒΓ είναι εγγράψιμα. (Μονάδες 9)

γ) Η ΕΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $Δ\hat{Ζ}Γ$. (Μονάδες 9)



α) $Δ\hat{Α}Γ = Δ\hat{Β}Γ$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο $\overset{\frown}{ΔΓ}$.

β) $Α\hat{Δ}Β = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.

Τότε: $Α\hat{Δ}Ε + Ε\hat{Ζ}Α = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

άρα το ΑΔΕΖ εγγράψιμο.

$Α\hat{Γ}Β = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.

Τότε: $Ε\hat{Γ}Β + Ε\hat{Ζ}Β = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

άρα το ΕΖΒΓ εγγράψιμο.

γ) $Δ\hat{Ζ}Ε = Δ\hat{Α}Γ$ αφού το ΑΔΕΖ εγγράψιμο

$Ε\hat{Ζ}Γ = Δ\hat{Β}Γ$ αφού το ΖΕΓΒ -״-

άρα: $Δ\hat{Ζ}Ε = Ε\hat{Ζ}Γ$ άρα ΕΖ διχοτόμος της $Δ\hat{Ζ}Γ$.

ΘΕΜΑ 4

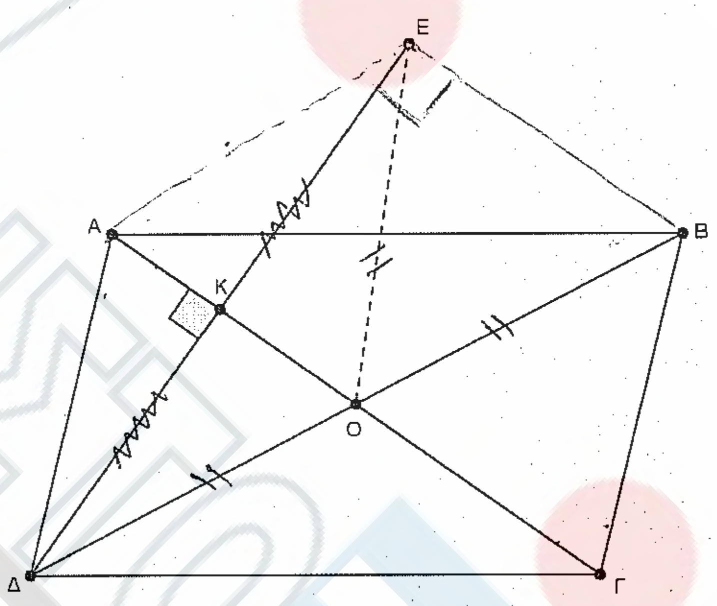
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Ο το κέντρο του. Από την κορυφή Δ φέρουμε το τμήμα ΔΚ κάθετο στην ΑΓ και στην προέκτασή του προς το Κ θεωρούμε σημείο Ε, ώστε ΚΕ= ΔΚ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $EO = \frac{B\Delta}{2}$. (Μονάδες 8)

β) Η γωνία $\Delta\hat{E}B$ είναι ορθή. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)



α) $\overset{\Delta}{\Delta O E}$: ΟΚ μεσοκάθετος του ΔΕ, άρα $EO = \Delta O = \frac{\Delta B}{2}$.

β) $\overset{\Delta}{\Delta \hat{E} B}$: έχω $EO = \frac{\Delta B}{2}$ άρα $\overset{\Delta}{\Delta E B}$ ορθογώνιο με ΔΒ υποτείνουσα, άρα: $\Delta\hat{E}B = 90^\circ$.

γ) $\overset{\Delta}{\Delta \hat{E} B}$: Κ μέσο ΔΕ, Ο μέσο ΔΒ } άρα $KO = \parallel \frac{EB}{2}$ δηλ. ΑΓ ∥ ΕΒ

άρα: ΑΕΒΓ τραπέζιο.

ΑΚ μεσοκάθετος του ΔΕ άρα ΑΔ = ΑΕ και ΑΒ = ΒΓ } άρα ΑΕ = ΒΓ

άρα το ΑΕΒΓ ισοσκ. τραπεζ

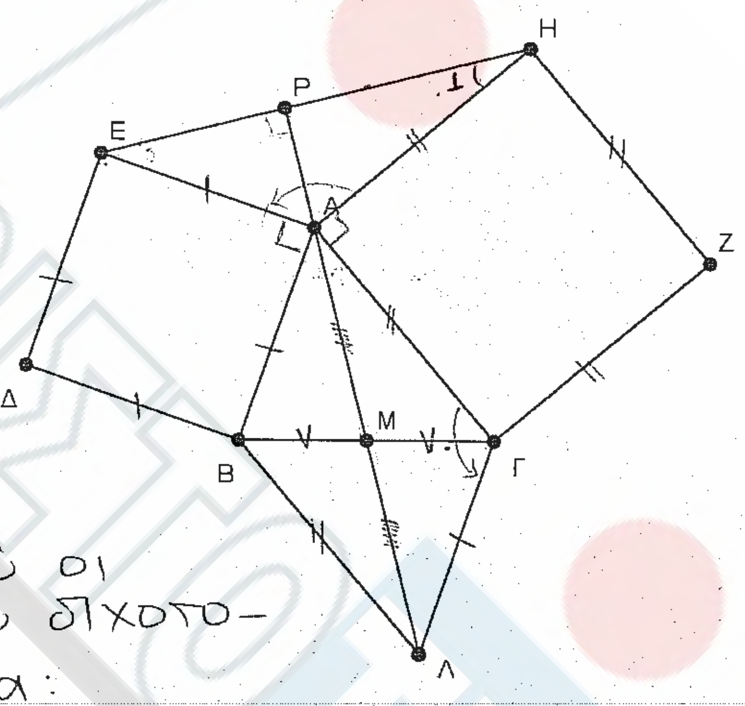
ΘΕΜΑ 4

Εκτός τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Αν Μ το μέσο του ΒΓ και Λ σημείο στην προέκταση της ΑΜ τέτοιο ώστε ΑΜ = ΜΛ, να αποδείξετε ότι:

α) ΓΛ = ΑΕ. (Μονάδες 10)

β) Οι γωνίες ΑΓΛ και ΕΑΗ είναι ίσες. (Μονάδες 10)

γ) Η προέκταση της ΜΑ (προς το Α) τέμνει κάθετα την ΕΗ. (Μονάδες 5)



α) ΑΒΛΓ ▱ αφού οι διαγώνιοι του διχοτομούνται, άρα:
ΓΛ = ΑΒ = ΑΕ.

β) $E\hat{A}H = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - B\hat{A}\Gamma = 180^\circ - B\hat{A}\Gamma$

$B\hat{A}\Gamma + A\hat{\Gamma}\Lambda = 180^\circ$ ως εντός και επί τ' αυτά

$A\hat{\Gamma}\Lambda = 180^\circ - B\hat{A}\Gamma$

άρα: $E\hat{A}H = A\hat{\Gamma}\Lambda$.

γ) $E\hat{P}A$ είναι εξωτερική του $P\hat{A}H$, άρα έχω: $E\hat{P}A = \hat{H}_1 + \underbrace{P\hat{A}H} = \underbrace{\hat{H}_1 + 90^\circ - M\hat{A}\Gamma} =$

$= P\hat{H}Z - M\hat{A}\Gamma \underset{\text{από Π-Γ-Π}}{\overset{E\hat{A}H = A\hat{\Gamma}\Lambda}{=}} P\hat{H}Z - \hat{H}_1 = 90^\circ$

άρα $PA \perp EH$.

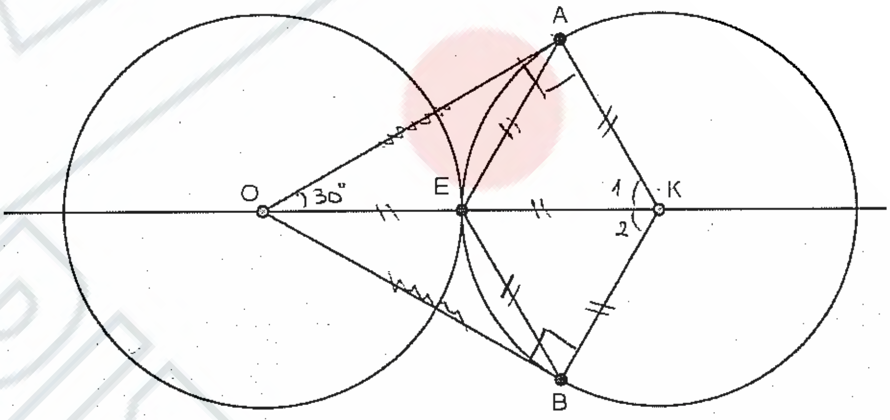
ΘΕΜΑ 4

Δυο ίσοι κύκλοι (Ο, ρ) και (Κ,ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ε. Αν ΟΑ και ΟΒ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο Ο στον κύκλο (Κ,ρ) να αποδείξετε ότι:

α) ΑΕ = ΒΕ. (Μονάδες 9)

β) $A\hat{O}K = 30^o$. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΑΚΒΕ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)



α) ΟΑ = ΟΒ ως εφαπτομένες από το Ο
και ΟΚ διακεντρική ευθεία, άρα
διχοτομεί τη γωνία των ακτίνων,
άρα $A\hat{K}E = E\hat{K}B$ άρα $\overset{\frown}{EA} = \overset{\frown}{EB}$, άρα ΕΑ = ΕΒ.

β) $O\hat{A}K$: έχω $AK = \frac{OK}{2}$ άρα $A\hat{O}K = 30^\circ$.

γ) $O\hat{A}K$: έχω $A\hat{O}K = 30^\circ$ άρα $\hat{K}_1 = 60^\circ$ και ΚΑ = ΚΕ
άρα $E\overset{\triangle}{A}K$ ισόπλευρο.

Τότε έχω: ΑΕ = ΚΒ και ΑΚ = ΕΒ
άρα ΑΚΒΕ παραλληλόγραμμο και η ΕΚ διχοτομεί
μία γωνία του, άρα ρόμβος.

ΘΕΜΑ 4

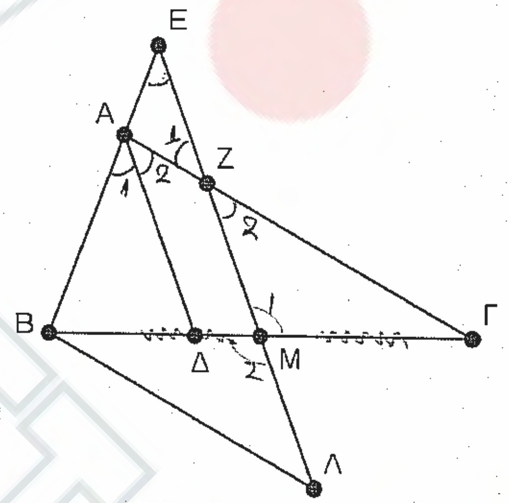
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ, η διχοτόμος του ΑΔ και ευθεία (ε) παράλληλη από το Β προς την ΑΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΔ η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ζ, την ευθεία (ε) στο σημείο Λ και την προέκταση της ΒΑ στο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΒΛΕ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 8)

β) ΒΛ =ΓΖ . (Μονάδες 9)

γ) ΑΕ=ΑΓ-ΒΛ. (Μονάδες 8)



α) $\hat{E} = \hat{A}_1$ ως εντός εκτός και επί τ' αυτά
$\hat{Z}_1 = \hat{A}_2$ ως εντός εναλλάξ
όμως $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ αφού ΑΔ διχοτόμος
άρα: $\hat{E} = \hat{Z}_1$ δηλ. ΑΕ̂Ζ ισοσκελές.
$\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$ ως κατακορυφήν
$\hat{Z}_2 = \hat{\Lambda}$ ως εντός εναλλάξ
άρα $\hat{Z}_1 = \hat{\Lambda}$
άρα και $\hat{E} = \hat{\Lambda}$
άρα: ΒΛ̂Ε ισοσκελές

β) Συγκρίνω ΒΜ̂Λ με ΖΜ̂Γ έχω:
1) ΒΜ = ΜΓ αφού Μ μέσο ΒΓ
2) $\Lambda\hat{B}M = \hat{\Gamma}$ ως εντός εναλλάξ
3) $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ ως κατακορυφήν
άρα ισχύει Γ-Π-Γ άρα ΒΜ̂Λ = ΖΜ̂Γ άρα ΒΛ = ΓΖ

γ) $AE = AZ = A\Gamma - \Gamma Z \overset{(\beta)}{=} A\Gamma - B\Lambda$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΒΔ = ΒΓ, ενώ στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΓΕ = ΒΓ. Φέρουμε την κάθετη στην ΕΔ στο σημείο Ε, η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΑ στο Ζ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΓΑΕ και ΒΔΑ. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ΓΖ είναι μεσοκάθετος του ΑΕ. (Μονάδες 12)

γ) Να αποδείξετε ότι ΑΒ//ΓΖ. (Μονάδες 5)

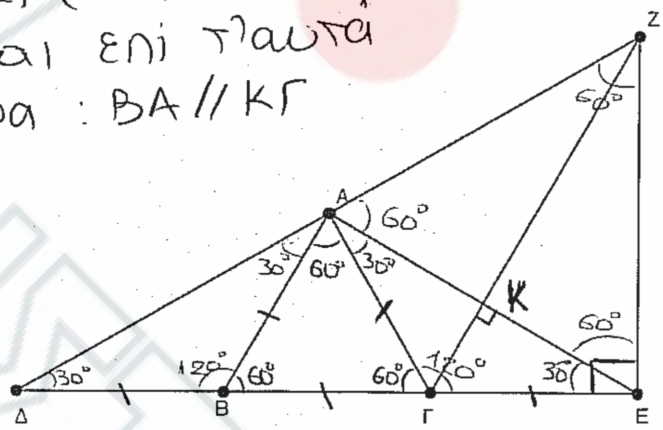
γ) $\overset{\triangle}{\Gamma K E}$: $A\hat{E}\Gamma = 30^\circ$ άρα $K\hat{\Gamma}E = 60^\circ$

δηλ. έχω $\hat{B} = K\hat{\Gamma}E = 60^\circ$ δηλ. έχω

εντός εκτός και επί τ' αυτά

γωνίες ίσες, άρα: $BA \parallel K\Gamma$

άρα: $BA \parallel \Gamma Z$.



α) $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισόπλευρο, άρα έχει όλες τις γωνίες του 60°.

$A\hat{\Gamma}E = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$A\Gamma = \Gamma E$ άρα $A\overset{\triangle}{\Gamma}E$ ισοσκελές με

$\Gamma\hat{A}E = \Gamma\hat{E}A = \dfrac{180^\circ - 120^\circ}{2} = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

$\Delta\hat{B}A = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$AB = \Delta B$ άρα $\Delta\overset{\triangle}{A}B$ ισοσκελές, με

$\hat{\Delta} = \Delta\hat{A}B = \dfrac{180^\circ - 120^\circ}{2} = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

β) $A\hat{E}Z = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

$E\hat{A}Z = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

$\overset{\triangle}{AZE}$: $A\hat{Z}E = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$

άρα $\overset{\triangle}{AZE}$ ισόπλευρο με $ZA = ZE$ και $\Gamma A = \Gamma E$

άρα τα σημεία Γ, Ζ ισαπέχουν από τα άκρα του ΑΕ, άρα ΓΖ μεσοκάθετος του ΑΕ.

ΘΕΜΑ 4

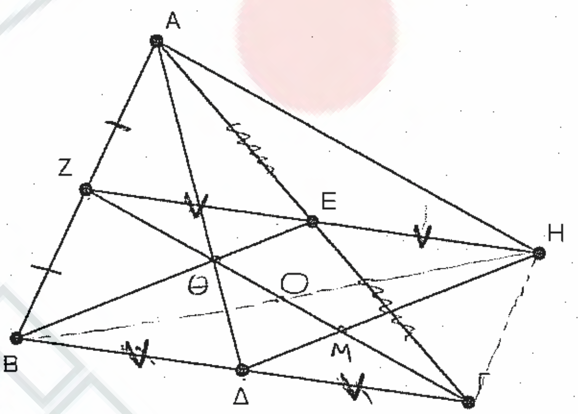
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι διάμεσοί του ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΖΕ (προς το Ε) κατά τμήμα ΕΗ = ΖΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΕΗΔΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Η περίμετρος του τριγώνου ΑΔΗ είναι ίση με το άθροισμα των διαμέσων του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)

γ) Οι ευθείες ΒΕ και ΔΗ τριχοτομούν το τμήμα ΖΓ. (Μονάδες 8)



α) $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$: Ζ μέσο ΑΒ, Ε μέσο ΑΓ $\Big\}$ αρα $ΖΕ =\parallel \frac{ΒΓ}{2}$

αρα $ΖΕ =\parallel ΒΔ$

αρα και $ΕΗ =\parallel ΒΔ$ αρα ΕΗΔΒ #

β) ΑΖΓΗ # αφού οι διαγώνιοι του διχοτομούνται

αρα $\boxed{ΑΗ = ΖΓ}$.

περίμετρος $= ΑΔ + ΔΗ + ΑΗ = ΑΔ + ΒΕ + ΓΖ$

γ) ΒΖΗΓ # αφού $ΖΗ =\parallel ΒΓ$ και οι διαγώνιοι του διχοτομούνται στο Ο.

Τότε: $\overset{\triangle}{ΒΖΗ}$: Θ βαρύκεντρο, αρα $ΘΖ = \frac{2}{3} ΖΟ$

$\overset{\triangle}{ΒΗΓ}$: Μ βαρύκεντρο, αρα $ΜΓ = \frac{2}{3} ΓΟ$ $\Big\}$ αρα $ΘΖ=1$

$ΘΜ = ΘΟ + ΜΟ = \frac{1}{3} ΖΟ + \frac{1}{3} ΟΓ = \frac{2}{3} ΓΟ = ΘΖ = ΜΓ$.

ΘΕΜΑ 4

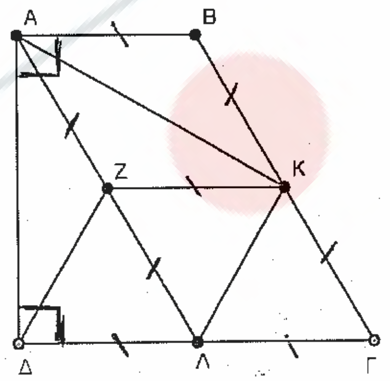
Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ ($\hat{A}=\hat{\Delta}=90^o$) με ΒΓ = ΓΔ = 2ΑΒ και Κ, Λ τα μέσα των ΒΓ και ΓΔ. Η παράλληλη από το Κ προς την ΑΒ τέμνει την ΑΛ στο Ζ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΓ = 2 ΔΖ. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΖΚΓΛ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

γ) $A\hat{K}\Lambda=90^o$. (Μονάδες 8)



α) ΒΓ = ΓΔ = 2ΑΒ άρα: ΒΚ = ΚΓ = ΑΒ = ΔΛ = ΛΓ.

ΑΒ =∥ ΓΛ άρα ΑΒΓΛ ▱, άρα ΑΛ = ΒΓ.

Τότε και Ζ μέσο του ΑΛ

άρα και ΑΒΚΖ ▱ με ΚΖ = ΑΒ

$\overset{\Delta}{A\Delta\Lambda}$: έχω ΔΖ διάμεσο, άρα $\Delta Z = \frac{A\Lambda}{2} = \frac{B\Gamma}{2}$

άρα: 2ΔΖ = ΒΓ.

β) ΖΚΓΛ ▱ και έχει ΖΚ = ΚΓ άρα ρόμβος.

γ) $\overset{\Delta}{AK\Lambda}$: έχω ΖΚ διάμεσο, με $ZK = \frac{A\Lambda}{2}$

άρα το $\overset{\Delta}{AK\Lambda}$ ορθογώνιο με ΑΛ υποτείνουσα

άρα: $A\hat{K}\Lambda = 90^o$.

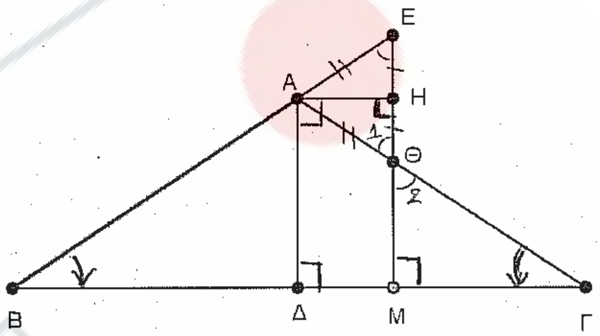
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), και τυχαίο σημείο Μ της πλευράς ΒΓ. Από το σημείο Μ φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Θ αντίστοιχα. Αν ΑΔ και ΑΗ τα ύψη των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΘΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\hat{A}H = 90^o$. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΑΘΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) ΜΘ+ΜΕ = 2ΑΔ. (Μονάδες 9)



α) ΑΔΜΗ ορθογώνιο, αφού έχει 3 ορθές γωνίες,
άρα $\Delta\hat{A}H = 90°$.

β) $\hat{E} = 90° - \hat{B}$ από το $B\hat{E}M$.
$\hat{\Theta}_1 = \hat{\Theta}_2 = 90° - \hat{\Gamma}$ από το $M\hat{\Theta}\Gamma$
ως κατακορυφήν
όμως $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ αφού $A\hat{B}\Gamma$ ισοσκελές
άρα: $\hat{E} = \hat{\Theta}_1$ άρα $E\hat{\Theta}A$ ισοσκελές

γ) $M\Theta + ME = M\Theta + M\Theta + \Theta H + HE =$
$= 2M\Theta + 2\Theta H =$
$= 2(M\Theta + \Theta H) =$
$= 2MH = 2A\Delta$.

ΘΕΜΑ 4

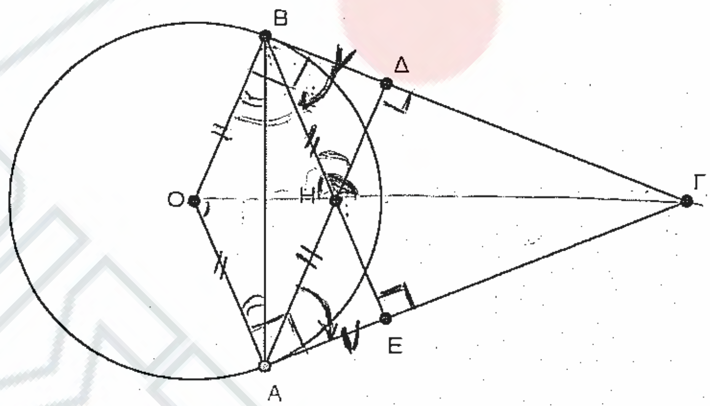
Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και δυο μη αντιδιαμετρικά σημεία του Α και Β. Φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Α και Β οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ. Φέρουμε επίσης και τα ύψη ΑΔ και ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ τα οποία τέμνονται στο σημείο Η.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΗΑ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΟΒΗΑ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

γ) Τα σημεία Ο, Η, Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)



α) Συγκρίνω $B\hat{E}\Gamma$ με $A\hat{\Delta}\Gamma$ έχω:

1) ορθογώνια

2) $\hat{\Gamma}$ κοινή γωνία

3) ΓΒ = ΓΑ ως εφαπτόμενες από το Γ

άρα ισχύει υποτ.+ καθ. πλευρά

άρα $B\hat{E}\Gamma = A\hat{\Delta}\Gamma$ άρα: $E\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{A}\Gamma$.

$OA = OB = \rho$ άρα $O\hat{A}B$ ισοσκελές, με $O\hat{A}B = O\hat{B}A$

Τότε: $A\hat{B}H = B\hat{A}H$ ως διαφορά ίσων γωνιών,

άρα $A\hat{B}H$ ισοσκελές.

β) $O\hat{B}H = 90° - H\hat{B}\Delta$

$B\hat{H}\Delta \overset{B\hat{H}\Delta}{=} 90° - H\hat{B}\Delta$

άρα $O\hat{B}H = B\hat{H}\Delta$ δηλ. έχω εντός εναλλάξ γωνίες ίσες

άρα ΟΒ // ΑΗ

ΟΑ // ΒΕ γιατί είναι ⊥ στην ΑΓ

άρα ΟΑΗΒ ▱ και έχει $OA = OB = \rho$ άρα ρόμβος.

γ) $O\hat{H}\Gamma = \underline{O\hat{H}B} + B\hat{H}\Gamma = \underline{H\hat{O}B} + B\hat{H}\Delta + \Delta\hat{H}\Gamma =$

$= H\hat{O}B + 90° - H\hat{B}\Delta + 90° - H\hat{\Gamma}\Delta = 180° + \cancel{H\hat{O}B} - \cancel{H\hat{O}B} = 180$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και σημείο Δ στην προέκταση της ΒΓ. Από το Δ φέρουμε ΔΚ κάθετη στην ΑΒ και ΔΕ κάθετη στην προέκταση της ΑΓ. Από το σημείο Γ φέρουμε ΓΗ κάθετη στην ΑΒ και ΓΖ κάθετη στην ΚΔ.

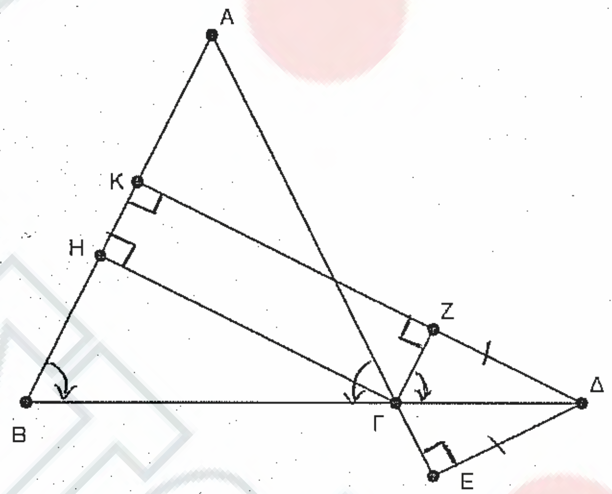
Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία ΖΓΔ είναι ίση με τη γωνία Β. (Μονάδες 4)

β) Η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΖΓΕ. (Μονάδες 4)

γ) Το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

δ) ΔΚ – ΔΕ = ΗΓ (Μονάδες 8)



α) ΓΖ // ΒΚ γιατί είναι ⊥ στην ΚΔ
αρα: $Z\hat{Γ}Δ = \hat{B}$ ως εντός εκτός και επί τ' αυτά

β) $Δ\hat{Γ}E = \hat{Γ}$ ως κατακορυφήν
$\hat{B} = \hat{Γ}$ αφου $A\hat{B}Γ$ ισοσκελες } αρα: $Δ\hat{Γ}E = \hat{B} \overset{α)}{=} Z\hat{Γ}Δ$ δηλ. ΓΔ διχοτόμος της $Z\hat{Γ}E$.

γ) Συγκρίνω $Γ\hat{Z}Δ$ με $Γ\hat{E}Δ$ έχω:
1) ορθογώνια
2) $Δ\hat{Γ}E = Z\hat{Γ}Δ$ από β)
3) ΓΔ κοινή πλευρά
αρα ισχύει υποτ + οξ. γωνία, αρα $Γ\hat{Z}Δ = Γ\hat{E}Δ$
αρα ΖΔ = ΕΔ δηλ. $Δ\hat{Z}E$ ισοσκελές

δ) ΔΚ − ΔΕ $\overset{γ)}{=}$ ΔΚ − ΔΖ = ΖΚ = ΓΗ αφού το ΚΗΓΖ είναι ορθογώνιο αφού έχει 3 ορθές γωνίες.

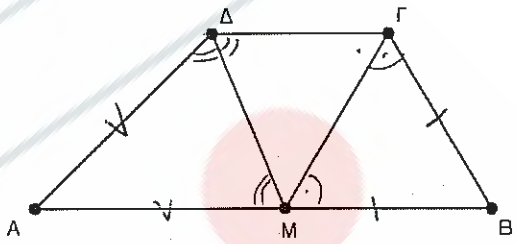
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ και ΑΒ = ΑΔ + ΒΓ. Αν η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΜ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) Η ΓΜ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ του τραπεζίου. (Μονάδες 8)



α) $A\hat{M}\Delta = M\hat{\Delta}\Gamma$ ως εντος εναλλάξ
$A\hat{\Delta}M = M\hat{\Delta}\Gamma$ αφού ΔΜ διχοτομος
αρα: $A\hat{M}\Delta = A\hat{\Delta}M$ αρα $A\overset{\triangle}{\Delta}M$ ισοσκελες.

β) $AB = A\Delta + B\Gamma$
$AB = AM + B\Gamma$
$AB - AM = B\Gamma$
$MB = B\Gamma$ άρα $M\overset{\triangle}{B}\Gamma$ ισοσκελες.

γ) $\Delta\hat{\Gamma}M = \Gamma\hat{M}B$ ως εντος εναλλάξ
$M\hat{\Gamma}B = \Gamma\hat{M}B$ αφού $M\overset{\triangle}{B}\Gamma$ ισοσκελες
αρα: $\Delta\hat{\Gamma}M = M\hat{\Gamma}B$ δηλ. ΜΓ διχοτομος της $\hat{\Gamma}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και ΑΔ, ΒΕ τα ύψη του.

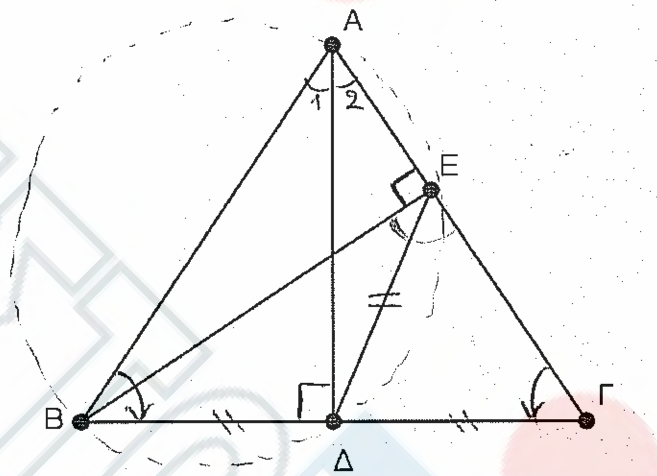
Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΓ =2 ΕΔ. (Μονάδες 6)

β) $B\hat{E}\Delta = \dfrac{\hat{A}}{2}$. (Μονάδες 7)

γ) Το τετράπλευρο ΑΕΔΒ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 6)

δ) $A\hat{B}E = A\hat{\Delta}E$. (Μονάδες 6)



α) $A\hat{B}\Gamma$ ισοσκελές με ΑΔ ύψος, άρα ΑΔ διάμεσος και διχοτόμος.

$B\hat{E}\Gamma$: ΔΕ διάμεσος, άρα $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow 2\Delta E = B\Gamma$.

β) $B\hat{E}\Delta = 180^\circ - 90^\circ - \Delta\hat{E}\Gamma = 90^\circ - \hat{\Gamma} \overset{A\hat{\Delta}\Gamma}{=} \hat{A}_2 = \dfrac{\hat{A}}{2}$.

δ) Η ΑΒ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες, αφού $B\hat{\Delta}A = B\hat{E}A = 90^\circ$. Άρα ΑΕΔΒ εγγράψιμο.

δ) $A\hat{B}E = A\hat{\Delta}E$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο $\overset{\frown}{AE}$.

ΘΕΜΑ 4

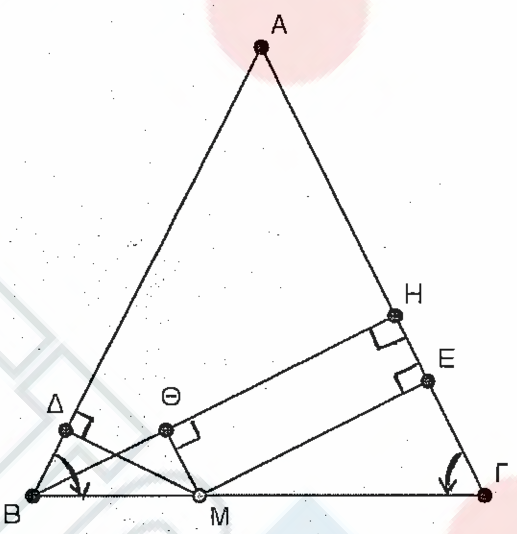
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ , τυχαίο σημείο Μ της βάσης του ΒΓ και το ύψος του ΒΗ. Από το Μ φέρουμε κάθετες ΜΔ, ΜΕ και ΜΘ στις ΑΒ, ΑΓ και ΒΗ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΜΕΗΘ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

β) ΒΘ = ΔΜ (Μονάδες 9)

γ) Το άθροισμα ΜΔ+ΜΕ=ΒΗ. (Μονάδες 7)



α) ΜΕΗΘ ορθογώνιο, αφού έχει 3 ορθές γωνίες.

β) Συγκρίνω $B\hat{\Theta}M$ με $B\hat{\Delta}M$ έχω:

1) ορθογώνια

2) ΒΜ κοινή πλευρά

3) $\hat{B} = \Theta\hat{M}B$ (αφού $\Theta\hat{M}B = \hat{\Gamma}$ ως εντός εκτός και επί τ'αυτά)

άρα ισχύει Υποτ. + οξ. γωνία άρα $B\hat{\Theta}M = B\hat{\Delta}M$

άρα: ΒΘ = ΔΜ.

γ) $M\Delta + ME \overset{\beta)}{=} B\Theta + \Theta H = BH$.

ΘΕΜΑ

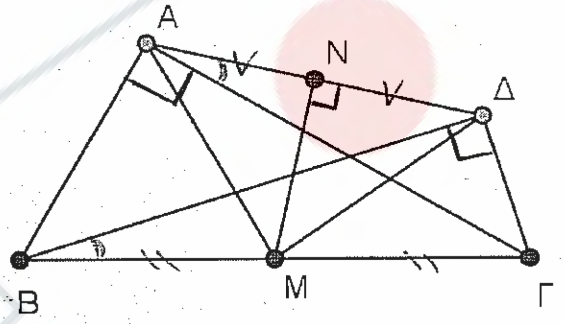
Δίνονται ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ με $\hat{A}=90^o$, $\hat{\Delta}=90^o$ και Μ, Ν τα μέσα των ΒΓ και ΑΔ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΜ = ΜΔ. (Μονάδες 10)

β) Η ΜΝ είναι κάθετη στην ΑΔ. (Μονάδες 10)

γ) $\Gamma\hat{B}\Delta=\Gamma\hat{A}\Delta$. (Μονάδες 5)



α) $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: έχω ΑΜ διάμεσο, άρα $AM = \frac{B\Gamma}{2}$

$B\hat{\Delta}\Gamma$: έχω ΔΜ διάμεσο, άρα $M\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$

άρα: ΑΜ=ΜΔ

β) Αφού ΑΜ=ΜΔ έχω $\overset{\triangle}{AM\Delta}$ ισοσκελές με ΜΝ διάμεσο, άρα ΜΝ ύψος + διχοτόμο.
Δηλ. $MN \perp A\Delta$.

γ) Η ΒΓ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες, αφού $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ$
άρα το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο.
Τότε: $\Gamma\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο $\widehat{\Gamma\Delta}$.

ΘΕΜΑ 4

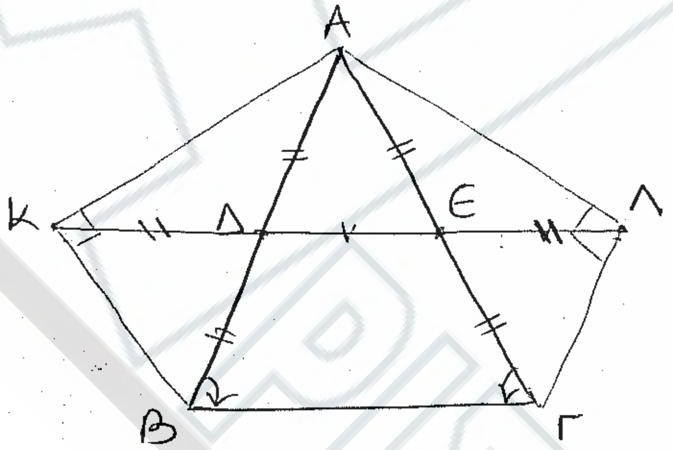
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Δ, Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Στην προέκταση της ΔΕ (προς το Ε) θεωρούμε σημείο Λ ώστε ΕΛ = ΑΕ και στην προέκταση της ΕΔ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο Κ τέτοιο ώστε ΔΚ = ΑΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΚΔ = ΛΕ. (Μονάδες 6)

β) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ορθογώνια. (Μονάδες 9)

γ) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ίσα. (Μονάδες 10)



α) ΚΔ = ΑΔ και ΛΕ = ΑΕ
όμως ΚΔ = ΑΕ ως μισά ίσων πλευρών.
Άρα: ΚΔ = ΛΕ.

β) $\overset{\triangle}{ΑΒΚ}$: έχω $ΚΔ = \frac{ΑΒ}{2}$ άρα το $\overset{\triangle}{ΑΒΚ}$ ορθογώνιο με ΑΒ υποτείνουσα, άρα $Α\hat{Κ}Β = 90°$.

όμοια: $\overset{\triangle}{ΑΓΛ}$ ορθογώνιο με $Α\hat{Λ}Γ = 90°$.

γ) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ΑΒΚ}$ με $\overset{\triangle}{ΑΓΛ}$ έχω:
1) ορθογώνια
2) ΑΒ = ΑΓ αφού $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ ισοσκελές
3) ΑΚ = ΑΛ (αφού $\overset{\triangle}{ΑΚΔ} = \overset{\triangle}{ΑΕΛ}$ άρα έχω:
1) ΑΔ = ΑΕ ως μισά ίσων πλευρών
2) ΚΔ = ΕΛ από α)
3) $Α\hat{Δ}Κ = Α\hat{Ε}Λ$ ως παραπληρωμ. ίσων γωνιών
άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\overset{\triangle}{ΑΚΔ} = \overset{\triangle}{ΑΕΛ}$).

άρα ισχύει υποτ. + καθ. πλευρά
άρα $\overset{\triangle}{ΑΒΚ} = \overset{\triangle}{ΑΓΛ}$.

ΘΕΜΑ 4

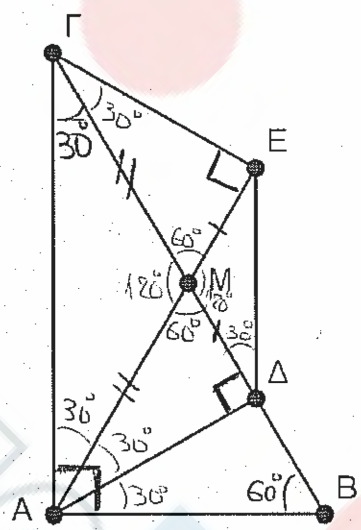
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^o$ και $\hat{\Gamma}=30^o$. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και τη διάμεσό του ΑΜ. Από το Γ φέρουμε κάθετη στην ευθεία ΑΜ, η οποία την τέμνει στο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

β) ΜΕ=ΜΔ=ΒΓ/4 (Μονάδες 9)

γ) Το ΑΔΕΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)



α) $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: έχω ΑΜ διάμεσο

άρα $AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma = MB$

άρα $\overset{\triangle}{AMB}$ ισοσκελές

με $\hat{B}=60^\circ$ (αφού $\hat{\Gamma}=30^\circ$)

άρα $\overset{\triangle}{AMB}$ ισόπλευρο.

β) Αφού $\overset{\triangle}{AMB}$ ισόπλευρο

θα έχει όλες τις

γωνίες του 60°, άρα $\Delta\hat{M}E = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

$\Gamma\hat{M}E = A\hat{M}B = 60^\circ$ άρα στο $\overset{\triangle}{ME\Gamma}$ έχω $M\hat{\Gamma}E = 30^\circ$

άρα: $ME = \frac{\Gamma M}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$.

$\Delta\hat{A}B = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ άρα: $M\hat{A}\Delta = 30^\circ$.

$\overset{\triangle}{AM\Delta}$: έχω $M\hat{A}\Delta = 30^\circ$ άρα $M\Delta = \frac{MA}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$

Άρα: $ME = M\Delta = \frac{B\Gamma}{4}$.

γ) $ME = M\Delta$ άρα: $\overset{\triangle}{M\Delta E}$ ισοσκελές με $M\hat{E}\Delta = M\hat{\Delta}E =$

$= \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ = A\hat{\Gamma}M$ άρα σχηματίζουν

εντός εναλλάξ γωνίες ίσες άρα $\Delta E \parallel A\Gamma$ και

$A\hat{\Gamma}E = \Gamma\hat{A}\Delta = 60^\circ$ άρα ΑΔΕΓ ισοσκ. τραπέζιο.

ΘΕΜΑ 4

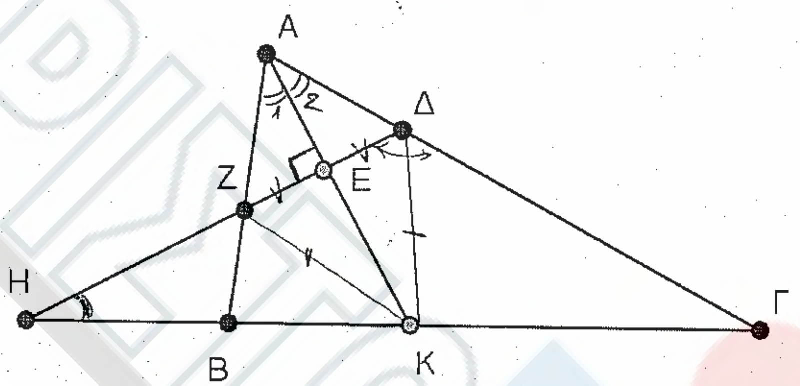
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΚ και σε τυχαίο σημείο της Ε φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο ΑΚ, η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ζ και Δ αντίστοιχα και την προέκταση της ΓΒ στο σημείο Η.

Να αποδείξετε ότι:

α) $Z\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$. (Μονάδες 7)

β) ΖΚ = ΚΔ. (Μονάδες 8)

γ) $Z\hat{H}\Gamma = \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$. (Μονάδες 10)



α) $Z\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εξωτερική του $E\hat{A}\Delta$, άρα

$Z\hat{\Delta}\Gamma = \hat{A}_2 + 90^\circ = \frac{\hat{A}}{2} + 90^\circ$

β) $A\hat{Z}\Delta$ ισοσκελές, αφού ΑΕ διχοτόμος + ύψος

άρα ΑΕ διάμεσος, δηλ. ΖΕ = ΕΔ.

Τότε: ΕΚ μεσοκάθετος του ΖΔ, άρα ΖΚ = ΔΚ.

γ) $Z\hat{H}\Gamma \overset{H\hat{\Delta}\Gamma}{=} 180^\circ - Z\hat{\Delta}\Gamma - \hat{\Gamma} \overset{\alpha)}{=} 180^\circ - \left(90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}\right) - \hat{\Gamma} =$

$= 180^\circ - 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} - \hat{\Gamma} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} - \hat{\Gamma} =$

$= \frac{180^\circ - \hat{A} - 2\hat{\Gamma}}{2} = \frac{180^\circ - \hat{A} - \hat{\Gamma} - \hat{\Gamma}}{2} \overset{A\hat{B}\Gamma}{=}$

$= \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΒ = ΑΔ και ΓΒ = ΓΔ. Αν Ε το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΒΑ και ΓΔ και Ζ το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΔΑ και ΓΒ να αποδείξετε ότι:

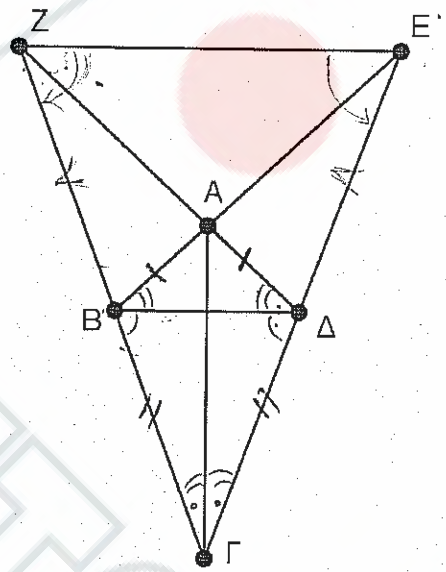
α) Η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΓΔ. (Μονάδες 7)

β) ΓΖ = ΓΕ (Μονάδες 9)

γ) ΕΖ // ΒΔ (Μονάδες 9)

* έχω $\overset{\frown}{BZ} = \overset{\frown}{\Delta E}$

άρα: ΖΕ // ΒΔ.



α) Συγκρίνω $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ με $A\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$ έχω:

1) ΑΒ = ΑΔ υπόθεση

2) ΒΓ = ΓΔ —\\—

3) ΑΓ κοινή πλευρά

άρα ισχύει Π-Π-Π άρα $A\overset{\triangle}{B}\Gamma = A\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$

άρα $B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Gamma}\Delta$, δηλ. ΑΓ διχοτόμος της $B\hat{\Gamma}\Delta$.

β) Συγκρίνω $Z\overset{\triangle}{A}\Gamma$ με $E\overset{\triangle}{A}\Gamma$ έχω:

1) ΓΑ κοινή πλευρά

2) $B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Gamma}\Delta$ από α)

3) $Z\hat{A}\Gamma = E\hat{A}\Gamma$ ως άθροισμα ίσων γωνιών

άρα ισχύει Γ-Π-Γ άρα $Z\overset{\triangle}{A}\Gamma = E\overset{\triangle}{A}\Gamma$ άρα ΓΖ = ΓΕ.

γ) $B\hat{Z}A = A\hat{E}\Delta$ ως διαφορά ίσων γωνιών, άρα ΒΔΕΖ εγγράψιμο αφού οι γωνίες βλέπουν την ΒΔ. Έχω ΒΖ = ΔΕ ως διαφορά ίσων τμημάτων, άρα: *

ΘΕΜΑ 4

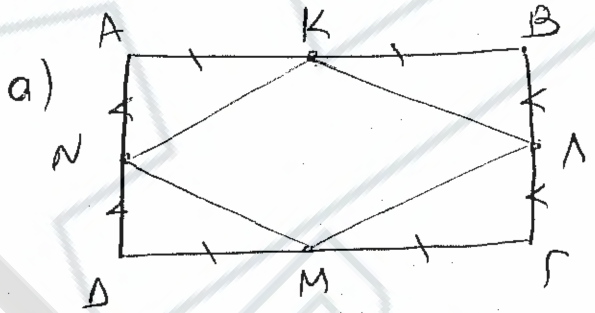
α) Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 15)

β) Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ τα μέσα Κ, Λ, Μ, Ν των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ, πρέπει να είναι απαραίτητα ορθογώνιο; Να τεκμηριώσετε τη θετική ή αρνητική σας απάντηση.

(Μονάδες 10)

α)



Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ANK}$ με $\overset{\triangle}{M\Lambda\Gamma}$ έχω:

1) ορθογώνια

2) ΑΚ = ΜΓ ως μισά ίσων πλευρών

3) ΑΝ = ΓΛ —\\—   —\\—

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\overset{\triangle}{ANK} = \overset{\triangle}{M\Lambda\Gamma}$

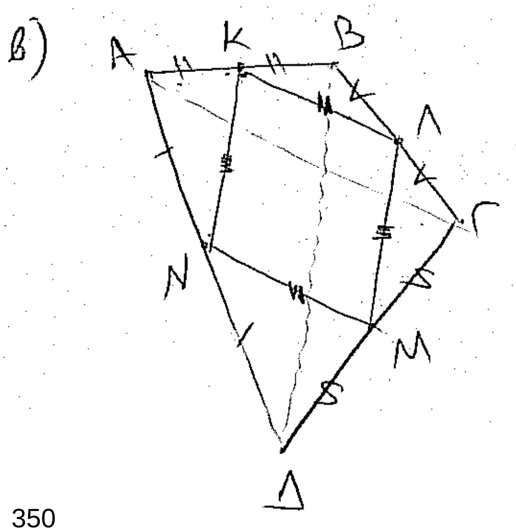
άρα $\boxed{KN = M\Lambda}$

Όμοια: $\overset{\triangle}{N\Delta M} = \overset{\triangle}{KB\Lambda}$, άρα: $\boxed{MN = K\Lambda}$

Άρα: ΚΛΜΝ # και όμοια: $\overset{\triangle}{AKN} = \overset{\triangle}{KB\Lambda}$

άρα ΝΚ = ΚΛ άρα ΚΛΜΝ ρόμβος.

β)



$\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: Κ μέσο ΑΒ, Λ μέσο ΒΓ } άρα $K\Lambda = \parallel \frac{A\Gamma}{2}$

όμοια: $MN = \parallel \frac{A\Gamma}{2}$

άρα $MN = \parallel K\Lambda$

όμοια: $KN = \parallel \Lambda M = \parallel \frac{B\Delta}{2}$

Αφού ΚΛΜΝ ρόμβος θα έχει ΚΝ = ΚΛ δηλ. ΒΔ = ΑΓ. Άρα το ΑΒΓΔ θα πρέπει να έχει ίσες διαγωνίους. Όχι μόνο το ορθογώνιο.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών Α, Β, Γ, Δ και Ε και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωριό Ε ισαπέχει από τα χωριά Β, Γ και επίσης από τα χωριά Α και Δ.

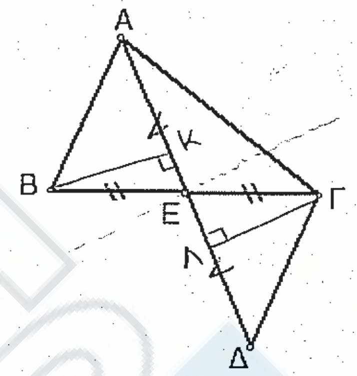
α) Να αποδείξετε ότι:

i. η απόσταση των χωριών Α και Β είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ. (Μονάδες 5)

ii. αν οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν. (Μονάδες 5)

iii. τα χωριά Β και Γ ισαπέχουν από τον δρόμο ΑΔ. (Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου ΑΓ που ισαπέχει από τα χωριά Α και Δ. (Μονάδες 7)



α) i) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{ABE}$ με $\overset{\triangle}{E\Delta\Gamma}$ έχω:

1) $AE = E\Delta$ υπόθεση

2) $BE = E\Gamma$ —"—

3) $\hat{AEB} = \hat{\Gamma E \Delta}$ ως κατακορυφήν

άρα ισχύει Π-Γ-Π άρα $\overset{\triangle}{ABE} = \overset{\triangle}{E\Delta\Gamma}$ άρα $AB = \Gamma\Delta$.

ii) ΑΒΔΓ # αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται άρα $AB // \Gamma\Delta$

iii) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{BKE}$ με $\overset{\triangle}{E\Lambda\Gamma}$ έχω:

1) ορθογώνια

2) $BE = E\Gamma$ υπόθεση

3) $\hat{AEB} = \hat{\Gamma E \Delta}$ ως κατακορυφήν

άρα ισχυει Υποτ. + οξ. γωνία άρα $\overset{\triangle}{BKE} = \overset{\triangle}{E\Lambda\Gamma}$

άρα: $BK = \Gamma\Lambda$.

β) Θα είναι το σημείο τομής της μεσοκαθέτου του ΑΔ και της ΑΓ.