Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Επιλεγμένα θέματα για τους υποψήφιους μαθητές της Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου.

ΘΕΜΑ 1ο

Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 ικανοποιούν τις σχέσεις

$$|z_1| = 2, \quad |z_2| = \sqrt{2} \quad κ΄ \quad \frac{1}{2}z_1 - 3z_2 + z_1 z_2 - 4 = 0$$

τότε:

α. Να υπολογίσετε τον αριθμό: $|3z_1 - z_2 + 2z_1 z_2|$

β. Να βρείτε τους z_1, z_2

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει

$$(2z - 3i)^{2005} = (\bar{z} + 6i)^{2005}$$

α. Να δείξετε ότι $|2z - 3i| = |z - 6i|$

β. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου στην οποία κινούνται οι εικόνες του z στο μιγαδικό επίπεδο.

γ. Να δείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών w με 3w=2z+6 ανήκουν σε κύκλο με κέντρο Κ(2,0) και ακτίνα ρ=2.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{3z - iz^2 - i}{z - z^2 - 1}$

$$z \in C^* - \{1\} \quad κ΄ z^2 - z + 1 \neq 0$$

α. Να αποδείξετε ότι $f(z) = \frac{3 - iz}{1 - z}$.

β. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων, των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει:

$$\mathrm{Im}[f(z) + f(\bar{z})] = 0$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ 1ο ΘΕΜΑ

α. Είναι $|z_1| = 2 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 4 \Leftrightarrow z_1\overline{z_1} \Leftrightarrow \overline{z_1} = \frac{4}{z_1} \quad (1)$

κ΄ $|z_2| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z_2|^2 = 2 \Leftrightarrow z_2\overline{z_2} = 2 \Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{2}{z_2} \quad (2)$

$$|3z_1 - z_2 + 2z_1z_2| = |\overline{3z_1 - z_2 + 2z_1z_2}| =$$

$$= |3\overline{z_1} - \overline{z_2} + 2\overline{z_1}\,\overline{z_2}| \overset{(1),(2)}{=} \left|3\cdot\frac{4}{z_1} - \frac{2}{z_2} + 2\cdot\frac{4}{z_1}\cdot\frac{2}{z_2}\right| =$$

$$= \left|\frac{12z_2 - 2z_1 + 16}{z_1\cdot z_2}\right| = \frac{4\cdot\left|3z_2 - \frac{1}{2}z_1 + 4\right|}{|z_1|\cdot|z_2|} =$$

$$= \frac{4\cdot\left|\frac{1}{2}z_1 - 3z_2 - 4\right|}{|z_1|\cdot|z_2|} \overset{υποθ.}{=} \frac{4\cdot|-z_1\cdot z_2|}{2\cdot\sqrt{2}} = \frac{4\cdot|z_1|\cdot|z_2|}{2\cdot\sqrt{2}} \overset{υποθ.}{=} 4$$

β. $\frac{1}{2}z_1 - 3z_2 + z_1z_2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\overline{z_1} - 3\overline{z_2} + \overline{z_1}\cdot\overline{z_2} - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\overset{(1),(2)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{z_1} - 3\cdot\frac{2}{z_2} + \frac{4}{z_1}\cdot\frac{2}{z_2}\cdot -4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{z_1} - \frac{6}{z_2} + \frac{8}{z_1z_2} - 4 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow$$

$$z_2 - 3z_1 + 4 - 2z_1z_2 = 0 \qquad (3)$$

Έτσι έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}z_1 - 3z_2 + z_1z_2 - 4 = 0 \\ z_2 - 3z_1 - 2z_1z_2 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 - 6z_2 + 2z_1z_2 - 8 = 0 \\ z_2 - 3z_1 - 2z_1z_2 + 4 = 0 \end{cases}$$

όπου η πρόσθεση κατά μέλη:

$$-2z_1 - 5z_2 - 4 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -\frac{5z_2 + 4}{2} \qquad (4)$$

που αν την αντικαταστήσουμε στην (3) θα πάρουμε:

$$z_2 + \frac{15z_2 + 12}{2} + 5z_2^2 + 4z_2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 10z_2^2 + 25z_2 + 20 = 0 \Leftrightarrow 2z_2^2 + 5z_2 + 4 = 0$$

$$\Delta = 25 - 32 = -7 = \left(i\sqrt{7}\right)^2. \quad Άρα \quad z_2 = \frac{-5 \pm i\sqrt{7}}{4}$$

$$κ΄ \text{ από } (4): \quad z_1 = \frac{9 \mp 5i\sqrt{7}}{8}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ 2ο ΘΕΜΑ

α. Έχουμε $(2z - 3i)^{2005} = \left(\bar{z} + 6i\right)^{2005}$ οπότε

$$\left|(2z - 3i)^{2005}\right| = \left|\left(\bar{z} + 6i\right)^{2005}\right| \Leftrightarrow |2z - 3i|^{2005} = |\bar{z} + 6i|^{2005}$$

$$\Leftrightarrow |2z - 3i| = |\bar{z} + 6i| \Leftrightarrow |2z - 3i| \Leftrightarrow |\overline{z - 6i}| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |2z - 3i| = |z - 6i| \qquad αφού \quad |\bar{z}| = |z|$$

β. Λόγω του ερωτήματος α. έχουμε:

$$|2z - 3i| = |z - 6i| \Leftrightarrow |2z - 3i|^2 = |z - 6i|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2z - 3i)(2\bar{z} + 3i) = (z - 6i)(\bar{z} + 6i) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4|z|^2 + 6iz - 6i\bar{z} + 9 = |z|^2 + 6iz - 6i\bar{z} + 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3|z|^2 = 27 \Leftrightarrow |z|^2 = 9 \Leftrightarrow |z| = 3$$

γ. Είναι $3w = 2z + 6 \Leftrightarrow 3w - 6 = 2z$ οπότε

$|3w - 6| = |2z| \Leftrightarrow 3|w - 2| = 2|z|$, όμως $|z| = 3$, άρα

$3|w - 2| = 2\cdot 3 \Leftrightarrow |w - 2| = 2$

Επομένως, οι εικόνες του w ανήκουν σε κύκλο με κέντρο το σημείο Κ(2,0) και ακτίνα ρ=2.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ 3ο ΘΕΜΑ

α. Έχουμε $f\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{3z - iz^2 - i}{z - z^2 - 1} =$

$$= \frac{z\left(3 - iz - \frac{i}{z}\right)}{z\left(1 - z - \frac{1}{z}\right)} = \frac{3 - i\left(z + \frac{1}{z}\right)}{1 - \left(z + \frac{1}{z}\right)}$$

Θέτοντας όπου $z + \frac{1}{z} = w$ έχουμε:

$$f(w) = \frac{3 - iw}{1 - w} \qquad οπότε \qquad f(z) = \frac{3 - iz}{1 - z}$$

β. Είναι $f(z) + f(\bar{z}) = \frac{3 - iz}{1 - z} + \frac{3 - i\bar{z}}{1 - \bar{z}} =$

$$= \frac{(3 - iz)(1 - \bar{z}) + (3 - i\bar{z})(1 - z)}{(1 - z)(1 - \bar{z})} =$$

$$= \frac{6 - 3(z + \bar{z}) - i(z + \bar{z}) + 2iz\bar{z}}{1 - (z + \bar{z}) + z\bar{z}}$$

Αντικαθιστώντας z=α+βi έχουμε:

$$f(z) + f(\bar{z}) = \frac{6 - 3\cdot 2α - i2α + 2i(α^2 + β^2)}{1 - 2α + α^2 + β^2} =$$

$$= \frac{6 - 6α}{(α-1)^2 + β^2} + \frac{2α^2 + 2β^2 - 2α}{(α-1)^2 + β^2}i, \quad (α \neq 1), \quad β \neq 0)$$

$$Άρα \quad \mathrm{Im}[f(z) + f(\bar{z})] = 0 \Leftrightarrow 2α^2 + 2β^2 - 2α = 0$$

$$\Leftrightarrow α^2 - α + β^2 = 0 \Leftrightarrow α^2 - α + \frac{1}{4} + β^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(α - \frac{1}{2}\right)^2 + β^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

οπότε ο ζητούμενος γ.Τ. είναι κύκλος με κέντρο

$$Κ\left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad κ΄ \quad ρ = \frac{1}{2}$$

εκτός από τα σημεία Ο(0,0) και Α(1,0).

ΚΥΠΡΙΑΝΟΣ ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ