Μαθηματικά Κατεύθυνσης

1ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η $f: R \to R$ για την οποία ισχύει η σχέση
$3f(x) - 2f(-x) = 5x - 3$, για κάθε $x \in R$.
ι) Να βρείτε τον τύπο της f
ιι) Να βρείτε το $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) + 3) \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right]$
ιιι) Αν είναι $(gof)(x) = x^2+1$, για κάθε $x \in R$ να βρείτε τον τύπο της g.

2ο ΘΕΜΑ

Έστω η συνεχής συνάρτηση f στο [α,β] και οι μιγαδικοί $z=f(\beta) - i\beta^2$ και $w=f(\alpha) + i\alpha^2$ με $|w + \bar{z}| < |\bar{w} - z|$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi)=0$.

3ο ΘΕΜΑ

Αν για τη συνάρτηση $f: R \to R$ ισχύει $f^3(x) + f(x) + x = 4$, για κάθε $x \in R$ να δείξετε ότι
ι) η f είναι συνάρτηση «1-1»
ιι) να λύσετε την εξίσωση $f(e^x) = f(1-x)$
ιιι) να βρείτε την f^{-1}
ιv) να βρείτε το $\lim_{x \to 0} \left[(4 - f^{-1}(x)) \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right]$

4ο ΘΕΜΑ

Δίνεται παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ συνάρτηση f για την οποία $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και οι μιγαδικοί

$z_1 = \alpha^2 + if(\alpha)$ και $z_2 = \frac{1}{\beta^2} + i \frac{1}{f(\beta)}$ με $0<\alpha<\beta$ για τους οποίους ισχύει $|z_1 + \bar{z}_2| = |z_1 - \bar{z}_2|$

Να αποδείξετε ότι
α) Ο $z_1 z_2$ είναι φανταστικός
β) Οι αριθμοί f(α) και f(β) είναι ανάλογοι των τετραγώνων των α και β
γ) Υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = \frac{2f(\xi)}{\xi}$

ΛΥΣΕΙΣ

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

ι) Δίνεται ότι $3f(x) - 2f(-x) = 5x - 3$, για κάθε $x \in R$.
Θέτουμε όπου x το -x και έχουμε
$3f(-x) - 2f(x) = -5x - 3$, όπου λύνουμε το σύστημα

$(\Sigma) \begin{cases} 3f(x) - 2f(-x) = 5x - 3 \\ 3f(-x) - 2f(x) = -5x - 3 \end{cases}$ και παίρνουμε $f(x)=x-3$

ιι) $\lim_{x \to +\infty} \left[(f(x)+3) \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[(x-3+3) \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right] =$

$= \lim_{x \to +\infty} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$, θέτω $\frac{1}{x} = u$ οπότε

$\lim_{u \to 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$

ιιι) Δίνεται $(gof)(x) = x^2+1$
$g(f(x))=x^2+1 \Leftrightarrow g(x-3)=x^2+1 \Leftrightarrow g(\omega)=\omega^2+6\omega+10 (x-3=\omega)$
Άρα $g(x) = x^2+6x+10$ για κάθε $x \in R$.

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

$|w + \bar{z}| < |\bar{w} - z|$

$\Leftrightarrow \left| f(\alpha)+i\alpha^2+ f(\beta)+i\beta^2 \right| < \left| f(\alpha) - i\alpha^2- f(\beta)+ i\beta^2 \right| \Leftrightarrow$

$\left| (f(\alpha)+ f(\beta))+i(\alpha^2+\beta^2) \right| < \left| (f(\alpha) - f(\beta)) + i(\beta^2 - \alpha^2) \right| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(f(\alpha)+f(\beta))^2 + (\alpha^2+\beta^2)^2} < \sqrt{(f(\alpha) - f(\beta))^2 + (\beta^2 - \alpha^2)^2} \Leftrightarrow$

(εκτελώ τις πράξεις)
$\Leftrightarrow 4f(\alpha) f(\beta) < -4\alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow f(\alpha) f(\beta) < -\alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow f(\alpha) f(\beta) < 0$
Η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Bolzano στο (α, β) άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$.

ΛΥΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

ι) $f^3(x) + f(x) + x = 4$ άρα $f^3(x) + f(x) = 4 - x$ για κάθε $x \in R$
Τότε για κάθε $x_1, x_2 \in R$ με $f(x_1)= f(x_2)$ έχουμε

$\left. \begin{array}{l} f^3(x_1) = f^3(x_2) \\ f(x_1) = f(x_2) \end{array} \right\} (+)$

άρα $f^3(x_1)+f(x_1) = f^3(x_2)+f(x_2) \Leftrightarrow 4-x_1=4 - x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$
Άρα η f είναι «1-1».
ιι) Η f είναι «1-1», άρα είναι αντιστρέψιμη. Αν θέσουμε $y=f(x)$ τότε η $f^3(x)+f(x)+x=4$ γίνεται
$y^3+y+x=4 \Leftrightarrow x= 4 - y^3-y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=4 - y^3 - y$, $y \in R$,
(διότι f(R)=R) ή $f^{-1}(x)=- x^3 - x +4, x \in R$
ιιι) Επειδή η f είναι «1-1» άρα $e^x=1 -x \Leftrightarrow e^x+x-1=0$.
Προφανής ρίζα x=0 διότι $e^0+0 -1=1 -1=0$
Η συνάρτηση h με $h(x)=e^x+x-1$ είναι γνήσια αύξουσα διότι για κάθε $x_1, x_2 \in R$
με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 -1< x_2-1$
και $e^{x_1} < e^{x_2}$
προσθέτοντας κατά μέλη έχω
$e^{x1}+x_1 - 1< e^{x2}+x_2 -1 \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2)$ άρα η h είναι «1-1»

οπότε x=0 μοναδική ρίζα.
ιv) Είναι $(4-f^{-1}(x))\eta\mu\frac{1}{x} = (4+x^3+x-4)\ \eta\mu\frac{1}{x} = (x^3+x)\ )\eta\mu\frac{1}{x}$,

όμως $\left| (x^3+x)\eta\mu\frac{1}{x} \right| \leq |x^3+x| \Leftrightarrow -|x^3+x| \leq (x^3+x)\eta\mu\frac{1}{x} \leq |x^3+x|$,

το $\lim_{x \to 0} \left(-|x^3+x| \right) = \lim_{x \to 0} |x^3+x| = 0$, άρα από κριτήριο

παρεμβολής και $\lim_{x \to 0} (x^3+x)\ \eta\mu\frac{1}{x} = 0$.

ΛΥΣΗ 4ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) Διαδοχικά έχουμε
$|z_1 + \bar{z}_2| = |z_1 - \bar{z}_2| \Leftrightarrow |z_1 + \bar{z}_2|^2 = |z_1 - \bar{z}_2|^2 \Leftrightarrow$

$(z_1+\bar{z}_2)(\bar{z}_1+z_2) = (z_1-\bar{z}_2)(\bar{z}_1-z_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 + z_1z_2 + \bar{z}_2\bar{z}_1 + \bar{z}_2z_2 = z_1\bar{z}_1 - z_1z_2 - \bar{z}_2\bar{z}_1 + \bar{z}_2z_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2z_1z_2 + 2\overline{z_1z_2} = 0 \Leftrightarrow z_1z_2 + \overline{z_1z_2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2Re(z_1z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1z_2$ φανταστικός

β) Είναι
$z_1z_2 = (\alpha^2+if(\alpha)) \left(\frac{1}{\beta^2} + i \frac{1}{f(\beta)} \right) = \frac{\alpha^2}{\beta^2} + i \frac{\alpha^2}{f(\beta)}\ i \frac{f(\alpha)}{\beta^2} - \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} =$

$= \frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} + i \left(\frac{(\alpha)^2}{f(\beta)} + \frac{f(\alpha)}{(\beta)^2} \right) \ (1)$

Αλλά z_1z_2 φανταστικός $\Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = 0 \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} (1)$

Οπότε f(α) και f(β) είναι ανάλογα των τετραγώνων των α και β.
γ) $(1) \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{\alpha^2} = \frac{f(\beta)}{\beta^2}$

Η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = \frac{x^2f'(x) - 2x\ f(x)}{x^4} = \frac{xf'(x) - 2f(x)}{x^3}$

και επίσης g(α) = g(β).
Οπότε για την g εφαρμόζεται θεώρημα Rolle στο[α,β]. Άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε

$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - 2f(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{2f(\xi)}{\xi}$

ΚΥΠΡΙΑΝΟΣ ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ