ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ'ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα 1^{ο}:

Α1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], τότε να δείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό/Λάθος, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν οι μιγαδικοί z_1 και z_2 έχουν εικόνες αντίστοιχα τα σημεία M_1 και M_2, τότε ισχύει $(M_1M_2)=|z_1+z_2|$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

β. Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

γ. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ ή $+\infty$

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

δ. Αν μια ρητή συνάρτηση δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη, τότε αυτή έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

ε. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι “1-1” σε ένα διάστημα Δ, τότε δεν είναι και γνησίως μονότονη στο Δ.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

στ. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$ και αντιστρόφως.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

Θέμα 2^{ο}:

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} - 4x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Να μελετήσετε την f ως προς:

α. Την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

β. Την μονοτονία.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της

ΜΟΝΑΔΕΣ 9

Θέμα 3^{o}:

Έστω οι μιγαδικοί z_1 και z_2 με $|z_1| = |z_2| = 2$ και $z_1^2+z_2^2 \neq 0$. Έστω ο μιγαδικός αριθμός

$$\omega = \frac{2z_1z_2}{z_1^2 z_2^2}$$

Να δείξετε ότι:

α. $\overline{z_1} = \dfrac{4}{z_1}$ και $\overline{z_2} = \dfrac{4}{z_2}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

β. $\omega \in R$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

γ. $|\omega| \geq 1$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

δ. το τετράπλευρο ΟΑΓΒ με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών 0, z_1, z_1+z_2, z_2 αντίστοιχα, είναι ρόμβος.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ε. αν w = 2 να υπολογιστεί το εμβαδό του ΟΑΓΒ

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Θέμα 4^{o}:

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt, \; x \in R$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της A(1,f(1)).

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 9

δ. Να δείξετε ότι $\int_0^1 f(t)dt = \dfrac{1-e}{2}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

<u>Θέμα 1^{ο}:</u>

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 335

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 260

<u>Γεωμετρική ερμηνεία Θεωρήματος Fermat:</u>

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, τότε οι εφαπτόμενες στα σημεία που είναι θέσεις τοπικών ακρότατων, είναι παράλληλες προς τον άξονα $x'x$.

Β.α) Λάθος β) Λάθος γ) Σωστό δ) Λάθος ε) Σωστό στ) Λάθος

<u>Θέμα 2^{ο}:</u>

α) Η f παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=2e^{2x}-8x$

Η f' παραγωγίσιμη στο R με $f''(x)=4e^{2x}-8$

οπότε:

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 4e^{2x}-8=0 \Leftrightarrow 4e^{2x}=8 \Leftrightarrow e^{2x}=2 \Leftrightarrow$

$\ln e^{2x}=\ln 2 \Leftrightarrow 2x=\ln 2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln 2$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow 4e^{2x}-8>0 \Leftrightarrow 4e^{2x}>8 \Leftrightarrow e^{2x}>2$

$\Leftrightarrow \ln e^{2x}>\ln 2 \Leftrightarrow 2x>\ln 2 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}\ln 2$

$f''(x)<0 \Leftrightarrow 4e^{2x}-8<0 \Leftrightarrow 4e^{2x}<8 \Leftrightarrow e^{2x}<2$

$\Leftrightarrow \ln e^{2x}<\ln 2 \Leftrightarrow 2x<\ln 2 \Leftrightarrow x<\frac{1}{2}\ln 2$

x	-∞		$\frac{1}{2}\ln 2$		+∞
$f''(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$	

Άρα η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής, το $A\left(\frac{1}{2}\ln 2, f\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)\right)$ με

$f\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)=e^{2\frac{1}{2}\ln 2}-4\frac{1}{4}\ln^2 2=e^{\ln 2}-\ln^2 2=2-\ln^2 2$, δηλαδή $A\left(\frac{1}{2}\ln 2,\quad 2-(\ln 2)^2\right)$

Β)

Από το ερώτημα (α) και με βάση τον παρακάτω πίνακα

x	-∞		$\frac{1}{2}\ln 2$		+∞
$f''(x)$		-	0	+	
$f'(x)$		$\searrow$	ελάχιστο	$\nearrow$	

η συνάρτηση $f'(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=\frac{1}{2}\ln 2$, οπότε για κάθε $x\in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x)\geq f'\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)\Leftrightarrow f'(x)\geq 2e^{2\frac{1}{2}\ln 2}-8\frac{1}{2}\ln 2$$
$$\Leftrightarrow f'(x)\geq 2\cdot 2-4\ln 2$$
$$\Leftrightarrow f'(x)\geq 4(1-\ln 2)$$
$$\Leftrightarrow f'(x)\geq 4(\ln e-\ln 2)$$
$$\Leftrightarrow f'(x)\geq 4\ln\frac{e}{2}>0$$

αφού $\frac{e}{2}>1$ άρα $\ln\left(\frac{e}{2}\right)>0$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

Επίσης, το σύνολο τιμών της f, η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, είναι το διάστημα:

$$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right) \text{ με}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-4x^2\right)=0-(+\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{2x}-4x^2\right)\overset{(+\infty)-(+\infty)}{=}\lim_{x\to+\infty}\left[e^{2x}-\left(1-\frac{4x^2}{e^{2x}}\right)\right]$$

Όμως, $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{e^{2x}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(4x^2)'}{(e^{2x})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x}{2e^{2x}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(8x)'}{(2e^{2x})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{4e^{2x}}=0$

Άρα $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ και τότε $f(\mathbb{R})=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

<u>Θέμα 3^{o}:</u>

α)

Ισχύει από την υπόθεση:

$$|z_1|=2\Leftrightarrow |z_1|^2=4\Leftrightarrow z_1\overline{z_1}=4\Leftrightarrow \overline{z_1}=\frac{4}{z_1}$$

$$|z_2|=2\Leftrightarrow |z_2|^2=4\Leftrightarrow z_2\overline{z_2}=4\Leftrightarrow \overline{z_2}=\frac{4}{z_2}$$

β)

Έχουμε $\overline{w}=\overline{\left(\dfrac{2z_1z_2}{z_1^{\ 2}+z_2^{\ 2}}\right)}=\dfrac{\overline{2z_1z_2}}{\overline{z_1^{\ 2}+z_2^{\ 2}}}=\dfrac{2\overline{z_1z_2}}{\overline{z_1}^{\,2}+\overline{z_2}^{\,2}}\overset{(a)}{=}\dfrac{2\dfrac{4}{z_1}\dfrac{4}{z_2}}{\left(\dfrac{4}{z_1}\right)^2+\left(\dfrac{4}{z_2}\right)^2}=\dfrac{\dfrac{32}{z_1z_2}}{\dfrac{16}{z_1^{\ 2}}+\dfrac{16}{z_2^{\ 2}}}=$

$\dfrac{\dfrac{32}{z_1z_2}}{\dfrac{16(z_1^{\ 2}+z_2^{\ 2})}{z_1^{\ 2}z_2^{\ 2}}}=\dfrac{2z_1z_2}{z_1^2+z_2^2}=w$, άρα $w\in \mathrm{R}$.

γ)

Έχουμε $|w|=\left|\dfrac{2z_1z_2}{z_1^{\ 2}+z_2^{\ 2}}\right|=\dfrac{2|z_1z_2|}{|z_1^{\ 2}+z_2^{\ 2}|}=\dfrac{2|z_1||z_2|}{|z_1^{\ 2}|+|z_2^{\ 2}|}$,

όμως από την τριγωνική ανισότητα ισχύει:

$\left|z_1^{\ 2}+z_2^{\ 2}\right|\leq |z_1|^2+|z_2|^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\left|z_1^{\ 2}+z_2^{\ 2}\right|}\geq\dfrac{1}{|z_1|^2+|z_2|^2}$

Οπότε:

$|w|=\dfrac{2|z_1||z_2|}{|z_1^{\ 2}+z_2^{\ 2}|}\geq\dfrac{2|z_1||z_2|}{|z_1^{\ 2}|+|z_2^{\ 2}|}=2\dfrac{2\cdot 2}{4\cdot 4}=1$

άρα $|w|\geq 1$

δ)

Για να είναι το ΟΑΓΒ ρόμβος, ένα τρόπος είναι να δείξουμε ότι έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Από την υπόθεση ισχύει:

$|z_1|=|z_2|=2$,

δηλαδή $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2$ (1)

επίσης $|\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}|=|\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|z_1+z_2-z_1|=|z_2|=2$ (2)

και $|\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}|=|\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|z_1+z_2-z_2|=|z_1|=2$ (3)

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι

$|\overrightarrow{\text{ΟΑ}}|=|\overrightarrow{\text{Ï Β}}|=|\overrightarrow{\text{ΑÃ}}|=|\overrightarrow{\text{ΒÃ}}|$

δηλαδή το τετράπλευρο ΟΑΓΒ είναι ρόμβος.

ε)

Ισχύει: $(\mathrm{OA\Gamma B})=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}|$, όπου $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|z_2-z_1|$ και $|\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}|=|z_1+z_2|$.

Όμως $w=2$ οπότε έχουμε:

$$w=2 \Leftrightarrow \frac{2z_1z_2}{z_1^{\,2}+z_2^{\,2}}=2 \Leftrightarrow z_1^{\,2}+z_2^{\,2}=z_1z_2 \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow z_1^{\,2}+z_2^{\,2}-2z_1z_2=-z_1z_2$$

$$\Leftrightarrow (z_1-z_2)^2=-z_1z_2$$

οπότε: $|(z_1-z_2)|^2=|-z_1z_2| \Leftrightarrow |z_1-z_2|^2=|z_1||z_2|$

$$\Leftrightarrow |z_1-z_2|^2=4$$

$$\Leftrightarrow |z_1-z_2|=2$$

Επίσης, από τη σχέση (4) έχουμε:

$$z_1^2+z_2^2+2\cdot z_1\cdot z_2=3\cdot z_1\cdot z_2$$

Οπότε: $|z_1+z_2|^2=|3z_1z_2| \Leftrightarrow |z_1+z_2|^2=3|z_1||z_2|$

$$\Leftrightarrow |z_1+z_2|^2=12$$

$$\Leftrightarrow |z_1+z_2|=\sqrt{12}$$

$$\Leftrightarrow |z_1+z_2|=2\sqrt{3}$$

Συνεπώς, $(\text{ΟΑΓΒ})=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ τ.μ.

<u>Θέμα 4ο:</u>

α)

Η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R με

$$f'(x)=\left(\int_1^x e^{t^2}dt\right)=e^{x^2} \qquad (1)$$

Όμως $f'(x)>0$ για κάθε $x\in \mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο R .

Επίσης η f' είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R με $f''(x)=2xe^{x^2}$.

Οπότε $f''(x)=0 \Leftrightarrow 2xe^{x^2}=0 \Leftrightarrow x=0$ και τότε:

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow 2xe^{x^2}>0 \Leftrightarrow x>0$$

$$f''(x)<0 \Leftrightarrow 2xe^{x^2}<0 \Leftrightarrow x<0$$

οπότε:

x	-∞	0	+∞
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$			

άρα η συνάστηση f είναι κοίλη στο (-∞,o] ενώ κυρτή στο [0,+∞).

β)

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $A(1,f(1))$ είναι

$$(\varepsilon): y-f(1)=f'(1)(x-1)$$

Στην (1) για $x=1$: $f'(1)=e$ και $f(1)=\int_1^1 e^{t^2}dt=0$, οπότε $(\varepsilon): y=ex-e$

γ)

Εφόσον η f είναι κοίλη στο διάστημα (-∞,ο], η γραφική παράσταση της f θα είναι κάτω από την εφαπτομένη (ε) του ερωτήματος β) στο διάστημα (-∞,0). Δηλαδή, για κάθε $x<0$ θα ισχύει:

$$f(x)<y \Leftrightarrow f(x)<ex-e \Leftrightarrow f(x)<e(x-1)<0$$, αφού $x<0$

Άρα $f(x)<e(x-1)<0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{f(x)(x-1)}<\dfrac{e(x-1)}{f(x)(x-1)}<0$, εφόσον $\left.\begin{matrix} f(x)<0 \\ x-1<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x)\cdot(x-1)>0$

Δηλαδή, $\dfrac{1}{x-1}<\dfrac{e}{f(x)}<0$ και επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$ από το κριτήριο παρεμβολής,

προκύπτει: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e}{f(x)}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

δ)

Ισχύει:

$\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 (t)'f(t)dt$ (παραγοντική ολοκλήρωση)

$=[tf(t)]_0^1-\int_0^1 t f'(t)dt$

$=1f(1)-0f(0)-\int_0^1 t e^{t^2}dt$

$=0-0-\int_0^1 t e^{t^2}dt$

$=-\dfrac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{t^2}\right)dt$

$=-\dfrac{1}{2}\left[e^{t^2}\right]_0^1=-\dfrac{e}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1-e}{2}$

ΕΠΙΜΕΛΗΤΕΣ:
Χατζόπουλος Δημήτριος
Κιουρκτσιάν Μπετυ
Τζαλλας Κων/νος
Γεωργαντάς Χρήστος
Τηλαβερίδου Μαριάννα