ΘΕΜΑ 1ο (Μιγαδικοί)

Δίνεται ο μιγαδικός $z \neq 1$ και έστω $w = \dfrac{2+i\bar{z}}{1-\bar{z}}$

α. Να βρεθεί ο μιγαδικός w όταν z=2

β. Να δείξετε ότι $\dfrac{w-2}{w+i} = \bar{z}$

γ. Αν η εικόνα του z κινείται στον κύκλο κέντρου (0,0) και ακτίνας 1 και Μ είναι η εικόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι το Μ κινείται σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

δ) Αν ο w είναι πραγματικός, να αποδείξετε ότι η εικόνα του z κινείται σε κύκλο από τον οποίο έχει εξαιρεθεί το σημείο Α(1,0)

ε) Για z=2 να αποδείξετε ότι ο w^{2004} είναι πραγματικός.

ΛΥΣΗ

α. Για z=2 είναι $w = \dfrac{2+i2}{1-2} = -2-2i$

β. Είναι $w = \dfrac{2+i\bar{z}}{1-\bar{z}} \Leftrightarrow w - w\bar{z} = 2 + i\bar{z} \Leftrightarrow i\bar{z} + w\bar{z} = w-2 \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{w-2}{w+i}$

γ. Δίνεται $|z| = 1$ οπότε $|\bar{z}| = 1$ οπότε $\left|\dfrac{w-2}{w+i}\right| = 1 \overset{w\neq -i}{\Leftrightarrow} |w-2| = |w+i| \overset{w=x+yi}{\Leftrightarrow}$

$(x-2)^2 + y^2 = x^2 + (y+1)^2 \Leftrightarrow -4x+4 = 2y+1 \Leftrightarrow 4x+2y-3=0$

Άρα το Μ κινείται στην ευθεία με εξίσωση 4x+2y-3=0

δ. w πραγματικός $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(w)=0 \Leftrightarrow 2\operatorname{Im}(w)i = 0 \Leftrightarrow w - \bar{w} = 0 \Leftrightarrow \bar{w} = w \Leftrightarrow$

$\overline{\left(\dfrac{2+i\bar{z}}{1-\bar{z}}\right)} = \dfrac{2+i\bar{z}}{1-\bar{z}} \Leftrightarrow \dfrac{2-iz}{1-z} = \dfrac{2+i\bar{z}}{1-\bar{z}} \Leftrightarrow (2-iz)(1-\bar{z}) = (2+i\bar{z})(1-z) \Leftrightarrow$

$2-2\bar{z}-iz+iz\bar{z} = 2-2z+i\bar{z}-iz\bar{z} \Leftrightarrow 2iz\bar{z} - i(z+\bar{z}) + 2(z-\bar{z}) = 0 \overset{z=x+yi}{\Leftrightarrow}$

$2i(x^2+y^2) - i2x + 2\cdot 2yi = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-x+2y=0$

Που παριστάνει κύκλο κέντρου $K\left(\dfrac{1}{2},\ -1\right)$ και ακτίνας

$\rho = \dfrac{\sqrt{(-1)^2+2^2-4\cdot 0}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Όμως $\bar{z} \neq 1 \Leftrightarrow z \neq 1$ και για (x,y)=(1,0) επαληθεύεται η (1) άρα από τον κύκλο εξαιρούμε το Α(1,0)

ε. Για z=2 είναι (από **α)** ερώτημα) $w = -2-2i = -2(1+i)$ οπότε

$w^2 = 2^2(1^2+i^2+2i) = 2^2\cdot 2i$ και $w^4 = (2^2)^2\cdot 2^2 i^2 = 2^4\cdot 2^2(-1) = -2^6$

Άρα $w^{2004} = (w^4)^{501} = (-2^6)^{501} = -2^{3006}$ πραγματικός

ΘΕΜΑ 2^{ο} (Μιγαδικοί)

Έστω $f(w)=(2+\frac{3}{2}i)w-\frac{5}{2}\overline{w}i$, όπου $w=a+\beta i,\ a,\ \beta\in R$

α. Να βρεθούν τα Re(f(w)) και $\text{Im}(f(w))$

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M(f(w)) στο μιγαδικό επίπεδο

γ. Να βρεθεί το μέτρο $|f(w)|$ όταν $\text{Re}(w)=2\,\text{Im}(w)+3$

δ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w, όταν η απόσταση του f(w) από την αρχή των αξόνων είναι ίση με $2\sqrt{5}$.

ΛΥΣΗ

α. Είναι $f(w)=(2+\frac{3}{2}i)(a+\beta i)-\frac{5}{2}(a-\beta i)i=$

$2a+2\beta i+\frac{3}{2}ai-\frac{3}{2}\beta-\frac{5}{2}ai-\frac{5}{2}\beta=2a-4\beta+(-a+2\beta)i$

Οπότε $\text{Re}(f(w))=2a-4\beta$ και $\text{Im}(f(w))=-a+2\beta$

β. Έστω $f(w)=x+yi$

Τότε $\begin{cases}x=2a-4\beta\\ y=-a+2\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2a-4\beta\\ 2y=-2a+4\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2a-4\beta\\ x+2y=0\end{cases}$

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία $\varepsilon: x+2y=0$

γ. Είναι $|f(w)|=\sqrt{(2a-4\beta)^2+(-a+2\beta)^2}=\sqrt{4(a-2\beta)^2+(a-2\beta)^2}=\sqrt{5}|a-2\beta|$

Αλλά $\text{Re}(w)=2\,\text{Im}(w)+3\Leftrightarrow a=2\beta+3\Leftrightarrow a-2\beta=3$ οπότε $|f(w)|=3\sqrt{5}$

δ. Δίνεται ότι η απόσταση του f(w) από την αρχή των αξόνων είναι $2\sqrt{5}$ οπότε $|f(w)|=2\sqrt{5}\Leftrightarrow\sqrt{5}|\alpha-2\beta|=2\sqrt{5}\Leftrightarrow\alpha-2\beta=2$ ή $a-2\beta=-2\Leftrightarrow a-2\beta-2=0$ ή $a-2\beta+2=0$

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι οι ευθείες $\varepsilon_1: x-2y-2=0$ και $\varepsilon_2: x-2y+2=0$

ΘΕΜΑ 3^{ο} (Μιγαδικοί)

Δίνεται ο μιγαδικός $z\neq 2i$ και έστω $f(z)=\frac{5-12i-2iz}{z-2i}$. Θεωρούμε ακόμη τους μιγαδικούς $z_1=z+3i$ και $z_2=f(z)+3i$.

α. Να βρεθεί ο z_1 αν $z_1=z_2$

β. Να λυθεί η εξίσωση f(z)=5+2i

γ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z όταν f(z) πραγματικός

ΛΥΣΗ

α. $z_1=z_2\Leftrightarrow f(z)=z\Leftrightarrow\frac{5-12i-2iz}{z-2i}=z\Leftrightarrow 5-12i-2iz=z^2-2iz\Leftrightarrow z^2=5-12i$

Έστω $z=x+yi$ τότε $z^2=x^2-y^2+2xyi$ οπότε $\begin{cases}x^2-y^2=5 & (1)\\ 2xy=-12 & (2)\end{cases}$

Από (2) έχω x,y ετερόσημοι

Όμως $(x^2-y^2)^2=25 \Leftrightarrow x^4+y^4-2x^2y^2=25$ και $4x^2y^2=144$

Οπότε προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$x^4+y^4+2x^2y^2=169 \Leftrightarrow (x^2+y^2)^2=169 \Leftrightarrow x^2+y^2=13 \quad (3)$

$$\left.\begin{matrix}(1)\\(3)\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}2x^2=18\\2y^2=8\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}x=\pm 3\\y=\pm 2\end{matrix}\right\} \overset{x,y\ \text{ετερ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases}z=3-2i\\ \text{ή}\\ z=-3+2i\end{cases}$$

Οπότε $z_1=3+i$ ή $z_1=-3+5i$

β. $f(z)=5+2i \Leftrightarrow 5-12i-2iz=(z-2i)(5+2i) \Leftrightarrow 5-12i-2iz=5z+2iz-10i+4 \Leftrightarrow$

$(5+4i)z=1-2i \Leftrightarrow z=\dfrac{1-2i}{5+4i}=\dfrac{(1-2i)(5-4i)}{25+16}=\dfrac{5-4i-10i-8}{41}=-\dfrac{3}{41}-\dfrac{14}{41}i$

γ. $f(z)$ πραγματικός $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f(z)=0 \Leftrightarrow 2\operatorname{Im} f(z)i=0 \Leftrightarrow f(z)-\overline{f(z)}=0 \Leftrightarrow$

$f(z)=\overline{f(z)} \Leftrightarrow \dfrac{5-12i-2iz}{z-2i}=\dfrac{5+12i+2i\bar{z}}{\bar{z}+2i} \Leftrightarrow$

$5\bar{z}+10i-12i\bar{z}+24-2iz\bar{z}+4z=5z+12iz+2iz\bar{z}-10i+24+4\bar{z} \Leftrightarrow$

$4iz\bar{z}+12i(z+\bar{z})+(z-\bar{z})-20i=0 \Leftrightarrow$

$2(x^2+y^2)+12x+y-10=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+6x+\dfrac{1}{2}y-5=0 \Leftrightarrow$

$(x+3)^2+(y+\dfrac{1}{4})^2=5+9+\dfrac{1}{16} \Leftrightarrow (x+3)^2+(y+\dfrac{1}{4})^2=\dfrac{225}{16}$

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος κέντρου $K(-3,\ -\frac{1}{4})$ και ακτίνας $\rho=\dfrac{15}{4}$.

ΘΕΜΑ 4^{O} (1-1 και αντίστροφη)

Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $f^3(x)+f(x)+\dfrac{1}{2}x=0$ (1) για κάθε x∈R.

α. Να αποδειχθεί ότι η f είναι “1-1”

β. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f^{-1}

γ. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x^3-x)=f^{-1}(3-3x)$

ΛΥΣΗ

α. Είναι $(1) \Leftrightarrow f^3(x)+f(x)=-\dfrac{1}{2}x$ (2)

Έστω $x_1,x_2\in R$ με $f(x_1)=f(x_2)$ τότε $f^3(x_1)=f^3(x_2)$ οπότε

$f^3(x_1)+f(x_1)=f^3(x_2)+f(x_2) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} -\dfrac{1}{2}x_1=-\dfrac{1}{2}x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$

Άρα η f είναι “1-1”

β. Έστω f(x)=y τότε $x = f^{-1}(y)$ οπότε η (1) γίνεται

$$y^3 + y + \frac{1}{2} f^{-1}(y) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = -2y^3 - 2y$$

Άρα $f^{-1}(y) = -2y^3 - 2y$

γ. Η f^{-1} είναι "1-1" οπότε η εξίσωση γίνεται $x^3 - x = 3 - 3x \Leftrightarrow x^3 + 2x - 3 = 0$

1	0	2	-3	x=1
///	1	1	3	
1	1	3	0	

Οπότε $\begin{cases} x = 1 \\ \acute{\eta} \\ x^2 + x + 3 = 0 \quad \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau o \end{cases}$

Άρα x=1

ΘΕΜΑ 5^{O} (Συνέχεια – συναρτησιακές σχέσεις – αντίστροφη)

Δίνεται η συνεχής στο 0 συνάρτηση $f: R \to R$, για την οποία ισχύουν $f(\alpha + \beta) = f(a) \cdot f(\beta)$ (1) για οποιαδήποτε α, β∈R και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$.

Να αποδείξετε ότι

α. $f(0) = 1$

β. $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$

γ. $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ για κάθε $x \in R$

δ. Αν η εξίσωση f(x)=1 έχει μοναδική ρίζα το 0 τότε η f αντιστρέφεται και ισχύει $f^{-1}(x \cdot y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α. Η σχέση (1) για α=β=0 γίνεται

$$f(0) = f(0) \cdot f(0) \Leftrightarrow (f(0))^2 - f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)(f(0) - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \acute{\eta} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Και επειδή $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$, θα έχουμε $f(0) = 1$

β. Η f δεν μηδενίζεται πουθενά στο R ($f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$) και παίρνει την τιμή 1 για x=0. Οπότε για να έχει παντού θετικές τιμές (f(x)>0 για κάθε $x \in R$) αρκεί να είναι συνεχής στο R. Στο 0 η f δίνεται συνεχής. Έστω $x_0 \in R^*$

τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = \lim\limits_{h \to 0}(f(x_0) \cdot f(h)) = \lim\limits_{h \to 0} f(x_0) \cdot \lim\limits_{h \to 0} f(h) \overset{f\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ 0}{=}$

$$f(x_0) \cdot f(0) = f(x_0) \cdot 1 = f(x_0)$$

Άρα η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in R^*$. Επομένως f συνεχής στο R. Δίνεται όμως ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε x. Οπότε, από συνέπειες του θεωρήματος Bolzano, η f διατηρεί το πρόσημό της σε όλο το R και επειδή f(0)=1>0 έχουμε ότι f(x)>0 για κάθε $x \in R$.

γ. Η σχέση (1) για α=-x και β=x γίνεται

$$f(-x+x) = f(-x)\cdot f(x) \Leftrightarrow f(0) = f(-x)\cdot f(x) \Leftrightarrow f(-x)\cdot f(x) = 1 \overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

δ. Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $f(x_1) = f(x_2)$ (2)

Θέτω $x_1 - x_2 = h \Leftrightarrow x_1 = x_2 + h$ οπότε

(2) $\Leftrightarrow f(x_2+h) = f(x_2) \Leftrightarrow f(x_2)\cdot f(h) = f(x_2) \overset{f(x_2)\neq 0}{\Leftrightarrow}$

$f(h) = 1 \Leftrightarrow h = 0$ αφού η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική ρίζα το 0

Οπότε $x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Άρα f “1-1” επομένως αντιστρέφεται.

Έστω $f^{-1}(x) = a$ και $f^{-1}(y) = \beta$ τότε x=f(α) και y=f(β) οπότε

$$xy = f(a)f(\beta) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} xy = f(a+\beta) \Leftrightarrow f^{-1}(xy) = a+\beta \Leftrightarrow f^{-1}(xy) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$$

ΘΕΜΑ 6^{O} (Όριο – συνέχεια)

Για τη συνεχή στο [-1, 1] συνάρτηση f, ισχύει $xf(x) = 2 - \sqrt{1-x^2} - \sigma\upsilon\nu x$ (1) για κάθε $x \in [-1,\ 1]$.

α. Να βρείτε το f(0)

β. Να βρείτε το α∈R ώστε η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & x \in [-1,\ 0) \cup (0,\ 1] \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

να είναι συνεχής

γ. Για την τιμή του α που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να δείξετε ότι η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [-1, 1].

ΛΥΣΗ

α. (1) $\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} f(x) = \dfrac{2-\sqrt{1-x^2}-\sigma\upsilon\nu x}{x}$

Οπότε

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{1-x^2}-\sigma\upsilon\nu x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x^2)}{x(1+\sqrt{1-x^2})} + 0 =$$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{0}{2} = 0$ αλλά f συνεχής στο 0, οπότε f(0)=0

β. Η g είναι συνεχής στο $[-1,\ 0) \cup (0,\ 1]$ ως πηλίκο συνεχών.

Επίσης

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{1-x^2}-\text{συν}x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\text{συν}x}{x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x^2)}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\text{συν}^2x}{x^2(1+\text{συν}x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} + \lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{ημ}^2x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\text{συν}x}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

Άρα πρέπει α=1

γ. Αρκεί να δείξουμε ότι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [-1,\ 1]$.

Είναι $g(0) = 1 \neq 0$

Επίσης $2-\sqrt{1-x^2}-\sigma\upsilon\nu x = 1-\sqrt{1-x^2}+1-\sigma\upsilon\nu x$

Αλλά για $x \neq 0$ ισχύει $1-\sqrt{1-x^2} > 0$ και $1-\sigma\upsilon\nu x \geq 0$ οπότε $1-\sqrt{1-x^2}+1-\text{συν}x > 0 \Leftrightarrow xf(x) > 0$ οπότε $f(x) \neq 0$. Άρα για $x \neq 0$ ισχύει $g(x) \neq 0$. Επομένως $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [-1,\ 1]$.

ΘΕΜΑ 7$^{\text{Ο}}$ (Συνέχεια – μονοτονία με ορισμό – “1-1”)

Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει $|f(x)-f(y)| < |x-y|$ (1) για οποιαδήποτε $x, y \in R$ με $x \neq y$.

α. Να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο R

β. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x) = x - f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο R

γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(2x^3) - f(3-x^2) = 2x^3 + x^2 - 3$

ΛΥΣΗ

α. Έστω $x_0 \in R$. Τότε για κάθε $x \in R$ με $x \neq x_0$ ισχύει $|f(x)-f(x_0)| < |x-x_0| \Leftrightarrow -|x-x_0| < f(x)-f(x_0) < |x-x_0|$

Αλλά $\lim_{x\to 0}(-|x-x_0|) = \lim_{x\to 0}|x-x_0| = 0$

Οπότε από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x\to 0}(f(x)-f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Άρα η f είναι συνεχής στο R.

β. Έχουμε $g(x) = x - f(x) \Leftrightarrow f(x) = x - g(x)$. Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 \neq x_2$ τότε ισχύει

$$|f(x_1)-f(x_2)| < |x_1-x_2| \Leftrightarrow |x_1-g(x_1)-x_2+g(x_2)| < |x_1-x_2| \Leftrightarrow \left|\frac{x_1-x_2-(g(x_1)-g(x_2))}{x_1-x_2}\right| < 1 \Leftrightarrow$$

$$\left|1-\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1-\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} < 1 \Leftrightarrow -2 < -\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$0 < \frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} < 2$$

Οπότε $\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} > 0$

Αν $x_1 < x_2$ τότε $x_1 - x_2 < 0$ οπότε $g(x_1)-g(x_2) < 0 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$

Επομένως g γνησίως αύξουσα στο R.
γ. Διαδοχικά έχουμε

$$f(2x^3)-f(3-x^2)=2x^3+x^2-3 \Leftrightarrow 3-x^2-f(3-x^2)=2x^3-f(2x^3) \Leftrightarrow$$

$$g(3-x^2)=g(2x^3) \Leftrightarrow 3-x^2=2x^3 \Leftrightarrow 2x^3+x^2-3=0$$

2	1	0	-3	x=1
///	2	3	3	
2	3	3	0	

Οπότε $\begin{cases} x=1 \\ ή \\ 2x^2+3x+3=0 \quad \text{αδύνατο} \end{cases}$

Άρα x=1

ΘΕΜΑ 8^{O} (Μιγαδικοί – θ. Bolzano)

Δίνεται ο μιγαδικός $w=\dfrac{z+2}{z-i}$ με $z=x+yi,\quad x,y\in R$ με $(x,y)\neq(0,1)$.

α. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M(x,y) του επιπέδου, για τα οποία $|w|=\sqrt{2}$.

β. Αν Α(α,β) ένα σημείο του γεωμετρικού τόπου του **α** ερωτήματος, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3(a-2)^2x^5+2(\beta-2)^2x^3-10=0$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο διάστημα (0, 1).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α. Έχουμε

$$|w|=\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|z+2|}{|z-i|}=\sqrt{2} \overset{z\neq i}{\Leftrightarrow} |z+2|=\sqrt{2}|z-i| \Leftrightarrow (z+2)(\bar{z}+2)=2(z-i)(\bar{z}+i) \Leftrightarrow$$

$$z\bar{z}+2z+2\bar{z}+4=2z\bar{z}+2iz-2i\bar{z}+2 \Leftrightarrow z\bar{z}+2i(z-\bar{z})-2(z+\bar{z})-2=0 \Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2-4y-4x-2=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=10 \qquad (1)$$

Η (2) για x=0 και y=1 δεν επαληθεύεται.
Επομένως ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος κέντρου Κ(2,2) και ακτίνας $\rho=\sqrt{10}$.

β. Επειδή το Α είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου έχουμε $(a-2)^2+(\beta-2)^2=10$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=3(a-2)^2x^5+2(\beta-2)^2x^3-10,\quad x\in[0,\ 1]$

Η f είναι συνεχής στο [0, 1] ως πολυωνυμική.
Ακόμη f(0)=-10<0 και

$$f(1)=3(a-2)^2+2(\beta-2)^2-10=(a-2)^2+(\beta-2)^2-10+(a-2)^2+(\beta-2)^2+(a-2)^2=$$

$$10+(a-2)^2>0$$

Οπότε από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο (0, 1). Όμως $f'(x)=15(a-2)^2x^4+6(\beta-2)^2x^2>0$ για κάθε $x\in(0,\ 1)$. Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0, 1). Επομένως η ρίζα είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ 9ο (Μιγαδικοί – Θ. Rolle)

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο (0, +∞) συνάρτηση f για την οποία $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,\ +\infty)$ και οι μιγαδικοί $z_1=a^2+if(a)$ και $z_2=\frac{1}{\beta^2}+i\frac{1}{f(\beta)}$ με 0<α<β για τους οποίους ισχύει $\left|z_1+\overline{z}_2\right|=\left|z_1-\overline{z}_2\right|$.

Να αποδείξετε ότι

α. Ο z_1z_2 είναι φανταστικός

β. Οι αριθμοί f(α) και f(β) είναι ανάλογοι των τετραγώνων των α και β

γ. Υπάρχει ένας τουλάχιστον ξ∈(α, β) τέτοιος ώστε $f'(\xi)=\frac{2f(\xi)}{\xi}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α. Διαδοχικά έχουμε

$$\left|z_1+\overline{z}_2\right|=\left|z_1-\overline{z}_2\right|\Leftrightarrow\left|z_1+\overline{z}_2\right|^2=\left|z_1-\overline{z}_2\right|^2\Leftrightarrow$$

$$(z_1+\overline{z}_2)(\overline{z}_1+z_2)=(z_1-\overline{z}_2)(\overline{z}_1-z_2)\Leftrightarrow$$

$$z_1\overline{z}_1+z_1z_2+\overline{z}_2\overline{z}_1+\overline{z}_2z_2=z_1\overline{z}_1-z_1z_2-\overline{z}_2\overline{z}_1+\overline{z}_2z_2\Leftrightarrow$$

$$2z_1z_2+2\overline{z_1z_2}=0\Leftrightarrow z_1z_2+\overline{z_1z_2}=0\Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}(z_1z_2)=0$$

$\Leftrightarrow z_1z_2$ φανταστικός

β. Είναι $z_1z_2=(a^2+if(a))(\frac{1}{\beta^2}+i\frac{1}{f(\beta)})=$

$$\frac{a^2}{\beta^2}+i\frac{a^2}{f(\beta)}+i\frac{f(a)}{\beta^2}-\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}=\frac{a^2}{\beta^2}-\frac{f(a)}{f(\beta)}+i\left(\frac{a^2}{f(\beta)}+\frac{f(a)}{\beta^2}\right)$$

Αλλά z_1z_2 φανταστικός $\Leftrightarrow\frac{a^2}{\beta^2}-\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}=0\Leftrightarrow\frac{f(a)}{f(\beta)}=\frac{a^2}{\beta^2}$ (1)

Οπότε f(α) και f(β) ανάλογα των τετραγώνων των α και β

γ. $(1)\Leftrightarrow\frac{f(a)}{a^2}=\frac{f(\beta)}{\beta^2}$

Η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ με $g'(x)=\frac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}=\frac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}$ και επίσης $g(a)=g(\beta)$. Οπότε για την g εφαρμόζεται θεώρημα Rolle στο [α, β]. Άρα υπάρχει ξ∈(α, β) τέτοιος ώστε $g'(\xi)=0\Leftrightarrow\xi f'(\xi)-2f(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{2f(\xi)}{\xi}$

ΘΕΜΑ 10^{O} (Θ. Rolle – παράγωγος – εφαπτομένη)
Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ορισμένες στο R για τις οποίες υπάρχει $x_0 \in R$ τέτοιο ώστε $f(x)=(x-x_0)g(x)$ για κάθε $x \in R$ και ακόμη για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο διάστημα [α, β] με α,β∈R, α<β. Αν f(α)=0 και $x_0 \notin [a,\ \beta]$ να δειχθεί ότι
α. υπάρχει ξ∈(α, β) τέτοιο ώστε g΄(ξ)=0
β. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A(ξ, (f(ξ)) και B(x_0, 0) εφάπτεται της C_f στο A

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α. Ισχύει $x-x_0 \neq 0$ για κάθε $x \in [a,\ \beta]$ αφού $x_0 \notin [a,\ \beta]$. Οπότε $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-x_0}$

Η f είναι συνεχής στο [α, β] οπότε και η g ως πηλίκο συνεχών. Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) οπότε και η g ως πηλίκο παραγωγίσιμων.

Ακόμη $g(a)=\dfrac{f(a)}{a-x_0}=\dfrac{0}{a-x_0}=0$ και $g(\beta)=\dfrac{f(\beta)}{\beta-x_0}=\dfrac{f(a)}{\beta-x_0}=0$ οπότε g(α)=g(β)

Επομένως από θεώρημα Rolle υπάρχει ξ∈(α, β) τέτοιος ώστε g΄(ξ)=0 (1)

β. Αρκεί η εφαπτομένη της C_f στο A να διέρχεται από το B.

Είναι $g'(x)=\dfrac{f'(x)(x-x_0)-f(x)}{(x-x_0)^2}$

Οπότε η (1) είναι ισοδύναμη με την $f'(\xi)(\xi-x_0)-f(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{\xi-x_0}$

Η εφαπτομένη της C_f στο A είναι

$\varepsilon: y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi) \Leftrightarrow y-f(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{\xi-x_0}(x-\xi)$ (2)

Η (2) για $x=x_0$ και y=0 (συντεταγμένες του B) γίνεται $0-f(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{\xi-x_0}(x_0-\xi) \Leftrightarrow -f(\xi)=-f(\xi)$ αληθεύει.

Άρα το B είναι σημείο της ε.

ΘΕΜΑ 11^{O} (Θ.Μ.Τ.)
α. Να αποδειχθεί ότι για την συνάρτηση f(x)=lnx εφαρμόζεται ΘΜΤ στο [α, β] $(0<a<\beta)$ και ισχύει $\dfrac{1}{\beta}<\dfrac{\ln\beta-\ln a}{\beta-\alpha}<\dfrac{1}{a}$ (1)
β. Να αποδειχθεί ότι $e^e\pi^\pi > e^{2\pi}$ (2)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ οπότε σε κάθε διάστημα [α, β] με $0<a<\beta$ εφαρμόζεται για την f Θ.Μ.Τ. Από ΘΜΤ υπάρχει ξ∈(α, β) τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(a)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow\frac{1}{\xi}=\frac{\ln\beta-\ln a}{\beta-\alpha}$$

οπότε $(1)\Leftrightarrow\frac{1}{\beta}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{a}\overset{a,\beta,\xi>0}{\Leftrightarrow}\beta>\xi>a$ αληθεύει

β. Η (2) γράφεται ισοδύναμα $\ln(e^e\pi^\pi)>\ln e^{2\pi}\Leftrightarrow\ln e^e+\ln\pi^\pi>2\pi\ln e\Leftrightarrow$
$e\ln e-\pi\ln e>\pi\ln e-\pi\ln\pi\Leftrightarrow(e-\pi)\ln e>\pi(\ln e-\ln\pi)\Leftrightarrow(\pi-e)\ln e<\pi(\ln\pi-\ln e)\Leftrightarrow$

$$\overset{\pi>e}{\Leftrightarrow}\frac{1}{\pi}<\frac{\ln\pi-\ln e}{\pi-e}\qquad(3)$$

Αλλά υπάρχει ξ∈(e, π) τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(\pi)-f(e)}{\pi-e}\Leftrightarrow\frac{1}{\xi}=\frac{\ln\pi-\ln e}{\pi-e}$

Οπότε (3) $\Leftrightarrow\frac{1}{\pi}<\frac{1}{\xi}\Leftrightarrow\pi>\xi$ αληθεύει .

ΘΕΜΑ 12^{Ο} (Θ. Bolzano, ΘΜΤ)
Δίνεται η συνεχής στο [0, 1] συνάρτηση f για την οποία ισχύει f(0)=1 και f(1)=0. Να αποδείξετε ότι

α. Υπάρχει $x_0\in(0,\ 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=x_0$

β. Αν, επί πλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο (0, 1) τότε υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,\ 1)$ τέτοια ώστε $f'(x_1)\cdot f'(x_2)=1$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α. Η συνάρτηση g(x)=f(x)-x είναι συνεχής στο [0, 1] ως διαφορά συνεχών και $g(0)=f(0)-0=1-0=1>0$ και $g(1)=f(1)-1=0-1=-1<0$. Οπότε, από θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0\in(0,\ 1)$ τέτοιο ώστε

$$g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)-x_0=0\Leftrightarrow f(x_0)=x_0$$

β. Για την συνάρτηση f εφαρμόζεται ΘΜΤ σε καθένα από τα διαστήματα $[0,\ x_0]$ και $[x_0,\ 1]$. Οπότε υπάρχουν $x_1\in(0,\ x_0)$ και $x_2\in(x_0,\ 1)$ τέτοια ώστε

$$f'(x_1)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\frac{x_0-1}{x_0}\ (1)$$ και

$$f'(x_2)=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=\frac{0-x_0}{1-x_0}=\frac{x_0}{x_0-1}\ (2)$$

Από τις (1) και (2) έχω $f'(x_1)\cdot f'(x_2)=1$

ΘΕΜΑ 13ο (Μονοτονία – ακρότατα – σύνολο τιμών - απόδειξη ανισότητας - λύση ανίσωσης)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{2x}{e^x}$ και $g(x)=e^x-\frac{x^3}{3}-x-1$

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να αποδείξετε ότι $e^x>2x$ για κάθε $x\in R$

γ. Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

δ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της g

ε. Να λύσετε την ανίσωση $g(e^{2x})<g(4x^2+1)$

ΛΥΣΗ

α. $D_f=R$ (αφού $e^x\neq 0$ για κάθε $x\in R$) όπου η f είναι παραγωγίσιμη με

$f'(x)=\frac{2e^x-2xe^x}{(e^x)^2}=\frac{2-2x}{e^x}$

Σχηματίζουμε τον πίνακα

x	-∞		1		+∞
f΄(x)		+	0	-	
f		↗	μέγιστο	↘	

Οπότε είναι $f\uparrow$ στο $(-\infty,\ 1]$, $f\downarrow$ στο $[1,\ +\infty)$

Στο 1 η f έχει (ολικό) μέγιστο το $f(1)=\frac{2}{e}$

β. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{1}{e^x}\cdot 2x)=+\infty(-\infty)=-\infty$

Οπότε σε συνδυασμό και με το **α)** ερώτημα έχουμε ότι $f(R)=(-\infty,\ \frac{2}{e}]$

(Δεν χρειάζεται το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$)

Η ζητούμενη ανίσωση $e^x>2x$ γίνεται $\frac{2x}{e^x}<1$ (αφού $e^x>0$) που αληθεύει αφού $\frac{2x}{e^x}\leq\frac{2}{e}$ και $\frac{2}{e}<1$

γ. $D_g=R$ όπου η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με

$g'(x)=e^x-x^2-1$ και

$g''(x)=e^x-2x>0$ για κάθε $x\in R$ από **β)** ερώτημα

Οπότε $g'\uparrow$ και επειδή $g'(0)=0$ έχουμε τον πίνακα

x	-∞		0		+∞
g΄(x)		-	0	+	
g		↘	ελάχιστο	↗	

Οπότε $g\downarrow$ στο $(-\infty,\ 0]$, $g\uparrow$ στο $[0,\ +\infty)$

Στο 0 η g έχει ελάχιστο το g(0)=0

δ. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-\frac{x^3}{3}-x-1\right)=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{x^3}{3}-x-1\right)=+\infty$

Οπότε σε συνδυασμό και με το **γ)** ερώτημα έχουμε ότι $g(R)=[0,\ +\infty)$

ε. Είναι $e^{2x}>0,\ 4x^2+1>0$ και $g\uparrow$ στο $[0,\ +\infty)$ οπότε η ανίσωση $f(e^{2x})<f(4x^2+1)$ γίνεται

$$e^{2x}<4x^2+1\overset{2x=y}{\Leftrightarrow} e^y<y^2+1\Leftrightarrow e^y-y^2-1<0\Leftrightarrow g'(y)<0\Leftrightarrow y<0\Leftrightarrow 2x<0\Leftrightarrow x<0$$

ΘΕΜΑ 14$^{\text{Ο}}$ (Rolle – Μονοτονία)

α. Αν για τη συνάρτηση f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο [α, β] και $f''(x)<0$ για κάθε $x\in[a,\ \beta]$ να δείξετε ότι $f(x)>f(a)$ για κάθε $x\in(a,\ \beta)$.

β. Αν για τη συνάρτηση g ισχύει $g''(x)<0$ για κάθε $x\in[0,\ 1]$ να δείξετε ότι $g(x)>g(0)(1+x)-xg(1)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α. Από θεώρημα Rolle υπάρχει ξ∈(α, β) τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$. Αλλά $f''(x)<0$ στο [α, β] οπότε $f'\downarrow$ στο [α, β]. Οπότε για x∈[α, ξ) είναι $x<\xi\Leftrightarrow f'(x)>f'(\xi)\Leftrightarrow f'(x)>0$ και για $x\in(\xi,\ \beta]$ είναι $x>\xi\Leftrightarrow f'(x)<f'(\xi)\Leftrightarrow f'(x)<0$. Άρα για το πρόσημο της f΄ και την μονοτονία της f έχουμε τον πίνακα

x	α	ξ	β
f΄(x)	+	0	-
f	↗		↘

Άρα $f\uparrow$ στο [α, ξ] οπότε για x∈(α, ξ], ισχύει $f(x)>f(a)$ και $f\downarrow$ στο [ξ, β] οπότε για $x\in[\xi,\ \beta)$ ισχύει $f(x)>f(\beta)\Leftrightarrow f(x)>f(a)$

Άρα για κάθε $x\in(a,\beta)$ ισχύει $f(x)>f(a)$.

β. Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x)=g(x)-g(0)(1+x)+xg(1)$

Είναι $f'(x)=g'(x)-g(0)+g(1)$ και $f''(x)=g''(x)$, οπότε $f''(x)<0$ για κάθε $x\in[0,\ 1]$. Επίσης $f(0)=g(0)-g(0)+0=0$ και $f(1)=g(1)-2g(1)+g(1)=0$

Οπότε για την f εφαρμόζεται και το θεώρημα Rolle στο [0, 1]. Επομένως για κάθε $x\in(0,\ 1)$ ισχύει

$$f(x)>f(0)\Leftrightarrow g(x)-g(0)(1+x)+xg(1)>0\Leftrightarrow g(x)>g(0)(1+x)-xg(1)$$

ΘΕΜΑ 15^{O} (Μονοτονία και με ορισμό – πλήθος ριζών)

α. Να δειχτεί ότι αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ τότε ισχύει η ισοδυναμία $f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow x_1<x_2$ ($x_1,x_2\in\Delta$).

β. Να δειχτεί ότι η συνάρτηση $g(x)=e^x+x$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

γ. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x^2+x+1}-e^{x+1}+x^2$, $x\in R$. Να δειχθεί ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα την x=0 και για οποιαδήποτε $x\in R^*$ ισχύει f(x)>0.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α. Έστω $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ τότε $f(x_1)<f(x_2)$ αφού $f\uparrow$ στο Δ. Αντίστροφα. Έστω $x_1,x_2\in\Delta$ με $f(x_1)<f(x_2)$. Αν $x_1\geq x_2$ τότε $f(x_1)\geq f(x_2)$ (αφού $f\uparrow$ στο Δ) άτοπο . Άρα $x_1<x_2$. Επομένως $f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow x_1<x_2$.

β. Είναι $g'(x)=e^x+1>0$ για κάθε $x\in R$ οπότε $g\uparrow$ στο R.

γ. Είναι $f(0)=e^1-e^1+0=0$ οπότε το x=0 ρίζα της f(x)=0. Θα δείξουμε ότι για κάθε $x\in R^*$ ισχύει

$$f(x)>0\Leftrightarrow e^{x^2+x+1}-e^{x+1}+x^2>0\Leftrightarrow e^{x^2+x+1}-e^{x+1}+x^2+x+1-(x+1)>0\Leftrightarrow$$

$$e^{x^2+x+1}+x^2+x+1>e^{x+1}+x+1$$

$$\Leftrightarrow g(x^2+x+1)>g(x+1)\overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow}x^2+x+1>x+1\Leftrightarrow x^2>0\Leftrightarrow x\neq 0$$

Άρα πράγματι για κάθε x≠0 ισχύει f(x)>0

ΘΕΜΑ 16^{O} Ακρότατα – Κριτήριο Παρεμβολής – Σύνολο τιμών

α. Να δειχτεί ότι $ax^{\frac{1}{a}}\leq x+a-1$ για οποιαδήποτε x>0 και α>1

β. Να δειχτεί ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-2}\right)^{\frac{1}{x-5}}=1$

γ. Να δειχτεί ότι $2005x^{\frac{1}{2005}}-x-2004<e^x$ για κάθε $x\in(0,\ +\infty)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α. Η ζητούμενη γίνεται $ax^{\frac{1}{a}}-x-a+1\leq 0$

Έστω $f(x)=ax^{\frac{1}{a}}-x-a+1$, $x\in(0,\ +\infty)$

Αρκεί να δείξουμε ότι η f έχει μέγιστο το 0 ή κάποιον μικρότερο του 0.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $D_f=(0,\ +\infty)$ με $f'(x)=x^{\frac{1}{a}-1}-1$ και

$f''(x)=\left(\dfrac{1}{a}-1\right)x^{\frac{1}{a}-2}<0$ για κάθε $x\in(0,\ +\infty)$ και $a\in(1,\ +\infty)$ οπότε $f'\downarrow$.

Λύνω την εξίσωση $f'(x)=0\Leftrightarrow x^{\frac{1}{a}-1}=1\Leftrightarrow x=1$

Για το πρόσημο της f΄ και την μονοτονία της f σχηματίζω τον πίνακα

x	0	1	+∞
f΄(x)	+	0	-
f	↗	μέγιστο	↘

Άρα η f έχει μέγιστο το $f(1)=a-1-a+1=0$

β. Η ανισότητα του **α)** ερωτήματος θέτοντας όπου x το $\sqrt{x-2}$ και όπου α το x-5 και θεωρώντας x>6 (τότε $\sqrt{x-2}>0$ και $x-5>1$) γίνεται

$(x-5)\left(\sqrt{x-2}\right)^{\frac{1}{x-5}} \leq \sqrt{x-2}+x-5-1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2}\right)^{\frac{1}{x-5}} \leq \frac{\sqrt{x-2}}{x-5}+\frac{x-6}{x-5}$

Αλλά για κάθε x>6 είναι $\sqrt{x-2}>1$ και αφού x-5>0 ισχύει $\left(\sqrt{x-2}\right)^{\frac{1}{x-5}}>1$

Οπότε $1<\left(\sqrt{x-2}\right)^{\frac{1}{x-5}} \leq \frac{\sqrt{x-2}}{x-5}+\frac{x-6}{x-5}$

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty} 1=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x-2}}{x-5}+\frac{x-6}{x-5}\right)=1$

Επομένως από κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-2}\right)^{\frac{1}{x-5}}=1$

γ. Η συνάρτηση f του **α** ερωτήματος για α=2005 γίνεται $f(x)=2005x^{\frac{1}{2005}}-x-2004$ και ισχύει $f(x)\leq 0$ για κάθε $x\in(0,\ +\infty)$

Επίσης $e^x>0$ για κάθε $x\in R$

Άρα για κάθε $x\in(0,\ +\infty)$ ισχύει $2005x^{\frac{1}{2005}}-x-2004<e^x$

ΘΕΜΑ 17$^{\text{Ο}}$ (Ανισότητα – μονοτονία – ανισότητα με δύο μεταβλητές)
Να αποδείξετε ότι

α. Για κάθε $x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $x>\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$

β. Η συνάρτηση $f(x)=\frac{\varepsilon\varphi x}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$

γ. Αν $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ τότε $\frac{\varepsilon\varphi a}{\varepsilon\varphi\beta}<\frac{\alpha}{\beta}$

Απόδειξη

α. Έστω $\varphi(x)=x-\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$

Είναι $\varphi'(x)=1-\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x=2\eta\mu^2 x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$

Αλλά φ συνεχής στο $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ οπότε φ ↑ στο $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right)$

Επομένως για $x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $\phi(x) > \phi(0) \Leftrightarrow x - \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow x > \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$

β. Είναι

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}x - \varepsilon\phi x}{x^2} = \frac{x - \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{x^2\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\phi(x)}{x^2\sigma\upsilon\nu^2 x} > 0 \text{ για κάθε } x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$$

άρα f ↑ στο $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$

γ. Η ζητούμενη, αφού $\varepsilon\phi\beta > 0$ και $\alpha > 0$, γίνεται ισοδύναμα $\frac{\varepsilon\phi\alpha}{\alpha} < \frac{\varepsilon\phi\beta}{\beta} \Leftrightarrow f(a) < f(\beta)$ αληθεύει αφού $0 < a < \beta < \frac{\pi}{2}$ και f ↑ στο $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

ΘΕΜΑ 18$^{\text{Ο}}$ (Μονοτονία – κοίλα – πλήθος ριζών)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$ και $g(x) = e^x \ln x$

α. Να αποδείξετε ότι $g''(x) = e^x f(x)$

β. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα και να βρείτε ένα διάστημα πλάτους $\frac{1}{2}$ στο οποίο περιέχεται

δ. Να αποδείξετε ότι η g έχει μοναδικό σημείο καμπής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α. Είναι $D_f = D_g = (0,\ +\infty)$ όπου f και g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες.

Έχουμε $g'(x) = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x}$ και

$$g''(x) = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x} + e^x \frac{1}{x} - e^x \frac{1}{x^2} = e^x(\ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}) = e^x f(x)$$

β. Έχουμε

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3} > 0 \quad \text{για κάθε } x \in D_f \quad \text{οπότε } f \uparrow$$

και $f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{6}{x^4} = \frac{-x^2 + 4x - 6}{x^4} < 0$ για κάθε $x \in D_f$

οπότε η f στρέφει τα κοίλα κάτω

γ. Είναι $f \uparrow$ οπότε η f(x)=0 έχει το πολύ μια ρίζα. Αρκεί, λοιπόν, να προσδιορίζουμε ένα διάστημα με πλάτος $\frac{1}{2}$, στα άκρα του οποίου, η f έχει ετερόσημες τιμές. Είναι $f(1) = \ln 1 + \frac{2}{1} - \frac{1}{1^2} = 1 > 0$ και επειδή η $f \uparrow$ θα ψάξω τιμή της f για x<1.

Είναι $f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}+\frac{2}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=-\ln 2+4-4=-\ln 2<0$ άρα στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ η f(x)=0 έχει την μοναδική της ρίζα. (αφού f συνεχής).

δ. Από **γ.** ερώτημα υπάρχει $x_0\in\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$ και $f\uparrow$ οπότε έχουμε τον πίνακα

x	0	x_0	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+
$e^x f(x)$ $g''(x)$	-	0	+
g		Σ Κ	

Άρα η g έχει μοναδικό σημείο καμπής.

ΘΕΜΑ 19$^{\text{Ο}}$ (Κοίλα)

Α. Να αποδείξετε ότι αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα άνω σε ένα διάστημα Δ, τότε $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ (1) για οποιαδήποτε $x_1,\ x_2\in\Delta$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-\ln(\ln x)$

α. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή

β. Να δείξετε ότι για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in(1,\ +\infty)$ ισχύει $\ln\frac{x_1+x_2}{2}\ge\sqrt{\ln x_1\ln x_2}$

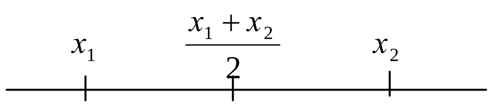
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Α. Η (1) είναι προφανής για $x_1=x_2$. Έστω τώρα $x_1\ne x_2$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορώ να υποθέσω ότι $x_1<x_2$.

Η σχέση (1) γίνεται ισοδύναμα

$$2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le f(x_1)+f(x_2)\Leftrightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)<f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\quad(2)$$



Αλλά $\frac{x_1+x_2}{2}-x_1=x_2-\frac{x_1+x_2}{2}>0$ αφού το $\frac{x_1+x_2}{2}$ είναι μέσο του διαστήματος με άκρα x_1 και x_2 . Οπότε

$$(2)\Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2}-x_1}\le \frac{f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2-\frac{x_1+x_2}{2}} \quad (3)$$

Για την f όμως εφαρμόζεται ΘΜΤ σε κάθε διάστημα που είναι υποσύνολο του Δ, αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ. Οπότε υπάρχουν $\xi_1\in\left(x_1,\ \frac{x_1+x_2}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ x_2\right)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2}-x_1}$ και $f'(\xi_1)=\frac{f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2-\frac{x_1+x_2}{2}}$ οπότε $(3)\Leftrightarrow f'(\xi_1)\le f'(\xi_2)$ που αληθεύει αφού $\xi_1<\xi_2$ και $f'\uparrow$.

Β.α. Πρέπει $\ln x>0\Leftrightarrow x>1$ οπότε $D_f=(1,\ +\infty)$

Έχουμε $f'(x)=-\frac{1}{\ln x}(\ln x)'=-\frac{1}{x\ln x}$ και $f''(x)=\frac{(x\ln x)'}{(x\ln x)^2}=\frac{\ln x+1}{(x\ln x)^2}>0$ για κάθε $x\in(1,\ +\infty)$. Άρα η f είναι κυρτή.

β. Η f είναι κυρτή, οπότε από **Α** ερώτημα προκύπτει ότι για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in(1,\ +\infty)$ ισχύει

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\Leftrightarrow -\ln\left(\ln\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{-\ln(\ln x_1)-\ln(\ln x_2)}{2}\Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\ln\frac{x_1+x_2}{2}\right)\ge\frac{\ln(\ln x_1\cdot\ln x_2)}{2}\Leftrightarrow\ln\left(\ln\frac{x_1+x_2}{2}\right)\ge\ln\sqrt{\ln x_1\ln x_2}\overset{\ln\uparrow}{\Leftrightarrow}\ln\frac{x_1+x_2}{2}\ge\sqrt{\ln x_1\ln x_2}$$

ΘΕΜΑ 20^Ο (Συνέχεια – de l' Hospital - εφαπτομένη)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{a^x+\beta^x+\gamma^x-3}{x}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ με $1\ne a,\beta,\gamma>0$.

Αν η f είναι συνεχής στο R.

α. Να αποδειχθεί ότι $a\cdot\beta\cdot\gamma=1$

β. Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(0,f(0)).

ΛΥΣΗ
α. Η f είναι συνεχής σε κάθε $x \neq 0$ ως πηλίκο συνεχών, ανεξάρτητα από τα α,β,γ.
Έχουμε

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{a^x + \beta^x + \gamma^x - 3}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\left(a^x + \beta^x + \gamma^x - 3\right)'}{(x)'} =$$

$$\lim_{x\to 0}\left(a^x \ln a + \beta^x \ln \beta + \gamma^x \ln \gamma\right) = \ln a + \ln \beta + \ln \gamma = \ln(a\beta\gamma)$$

Για να είναι η f συνεχής και στο 0 πρέπει $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \ln(\alpha\beta\gamma) = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma = 1$

β. Έχουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{a^x + \beta^x + \gamma^x - 3}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{a^x + \beta^x + \gamma^x - 3}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(a^x + \beta^x + \gamma^x - 3)'}{(x^2)'} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x \ln a + \beta^x \ln \beta + \gamma^x \ln \gamma}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(a^x \ln a + \beta^x \ln \beta + \gamma^x \ln \gamma)'}{(2x)'} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x \ln^2 a + \beta^x \ln^2 \beta + \gamma^x \ln^2 \gamma}{2} = \frac{1}{2}\left(\ln^2 a + \ln^2 \beta + \ln^2 \gamma\right)$$

Οπότε $f'(0) = \frac{1}{2}\left(\ln^2 a + \ln^2 \beta + \ln^2 \gamma\right)$.

Επομένως η εφαπτομένη της C_f στο Α(0,f(0)) είναι $\varepsilon : y = \frac{1}{2}\left(\ln^2 a + \ln^2 \beta + \ln^2 \gamma\right)x$

ΘΕΜΑ 21[o] (Απροσδιοριστία – κανόνας De l’ Hospital – μονοτονία – σύνολο τιμών)

Δίνεται ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x + x - x\ln x, & x > 0 \\ \lim\limits_{h\to a}\left(\dfrac{h-a}{2}\,\text{εφ}\,\dfrac{\pi h}{2a}\right), & x = 0 \quad (a \neq 0) \end{cases}$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

α. Να βρεθεί ο αριθμός α
β. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η f και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.
γ. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1 και x=e.

ΛΥΣΗ
α. Για το f(0) θέτω $h - a = x \Leftrightarrow h = x + a$ οπότε $h \to a \Leftrightarrow x \to 0$

Έχουμε $\lim\limits_{h\to a} \frac{h-a}{2}\,\text{εφ}\,\frac{\pi h}{2a} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{2} \cdot \text{εφ}\,\frac{\pi(x+a)}{2a} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{2}\,\text{εφ}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{2a}\right) =$

$$-\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}\sigma\varphi\frac{\pi x}{2a}=-\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2a}}{\eta\mu\frac{\pi x}{2a}}\overset{\frac{\pi x}{2a}=k}{=}-\lim_{k\to 0}\frac{\frac{2ak}{\pi}}{2}\frac{\sigma\upsilon\nu k}{\eta\mu k}=-\frac{a}{\pi}\lim_{k\to 0}\left(\frac{k}{\eta\mu k}\sigma\upsilon\nu k\right)=-\frac{a}{\pi}$$

Οπότε $f(0)=-\dfrac{a}{\pi}$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}(-x)=0$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x-x\ln x)=1$. Άρα πρέπει $-\dfrac{a}{\pi}=1\Leftrightarrow a=-\pi$

β. Είναι $f(x)=\begin{cases} e^x+x-x\ln x, & x>0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$.

Για x>0 έχουμε $f'(x)=e^x+1-\ln x-1=e^x-\ln x$

Για $x\in(0,\ 1]$ είναι $\ln x\le 0\Leftrightarrow -\ln x\ge 0$ οπότε $f'(x)>0$

Για x>1 είναι $f''(x)=e^x-\dfrac{1}{x}>0$ αφού $e^x>e>1>\dfrac{1}{x}\Rightarrow e^x-\dfrac{1}{x}>0$ οπότε $f'\uparrow$ στο $[1,\ +\infty)$ (αφού είναι συνεχής στο $[1,\ +\infty)$) άρα για x>1 ισχύει $f'(x)>f'(1)\Leftrightarrow f'(x)>e$

Επομένως για κάθε x>0 ισχύει $f'(x)>0$

Αλλά f συνεχής στο $[0,\ +\infty)$ επομένως $f\uparrow$ στο $[0,\ +\infty)$

Το σύνολο τιμών της f είναι $f([0,\ +\infty))=[f(0),\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x))$

Έχουμε όμως $f(0)=1$ και

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x+x-x\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1+\frac{x}{e^x}-\frac{x\ln x}{e^x}\right)\right]$$

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x)'}{(e^x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x\ln x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+1}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x+1)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^x}=0$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty(1+0-0)=+\infty$. Επομένως $f([0,\ +\infty))=[1,\ +\infty)$

γ. Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E=\int_1^e|f(x)|dx=\int_1^e f(x)dx$ αφού f(x)>0 για κάθε x$\in[0,\ +\infty)$

Έχουμε $E=\int_1^e(e^x+x-x\ln x)dx=\int_1^e(e^x+x)dx+\int_1^e\left(\dfrac{x^2}{2}\right)\ln x dx=$

$$=\left[e^x+\frac{x^2}{2}\right]_1^e+\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}(\ln x)'dx=e^e+\frac{e^2}{2}-e-\frac{1}{2}+\frac{e^2\ln e}{2}-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$e^e+\frac{e^2}{2}-e-\frac{1}{2}+\frac{e^2}{2}-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e=e^e+e^2-e-\frac{1}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=e^e+\frac{3}{4}e^2-e-\frac{1}{4}$$

ΘΕΜΑ 22$^{\text{Ο}}$ (Ολοκλήρωμα – μονοτονία – σύνολο τιμών)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $(1,\ +\infty)$ για την οποία ισχύει $f(x)=-\dfrac{xf'(x)}{2}\ln x$ για κάθε $x\in(1,\ +\infty)$ και η γραφική της παράσταση τέμνει την ευθεία x=e στο σημείο της με τεταγμένη 4. Αν $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(1,\ +\infty)$

α. Να βρεθεί η συνάρτηση f

β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=a$ έχει μοναδική ρίζα στο (1, +∞) για οποιοδήποτε α∈(0, +∞).

ΛΥΣΗ

α. Η δοθείσα σχέση γίνεται

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{2}{x\ln x}\Leftrightarrow\left(\ln|f(x)|\right)'=\left(-2\ln|\ln x|\right)'\overset{\ln x>0}{\Leftrightarrow}\left(\ln|f(x)|\right)'=\left(\ln(\ln x)^{-2}\right)'\Leftrightarrow$$

$$\int(\ln|f(x)|)'dx=\int(\ln(\ln x)^{-2})'dx\Leftrightarrow\ln|f(x)|=\ln(\ln x)^{-2}+c\Leftrightarrow\ln|f(x)|=\ln(\ln x)^{-2}+\ln e^c\Leftrightarrow$$

$$|f(x)|=(\ln x)^{-2}\cdot e^c\qquad(1)$$

$$(1)\overset{x=e}{\Rightarrow}|f(e)|=(\ln e)^{-2}e^c\Leftrightarrow 4=e^c$$

Οπότε $|f(x)|=\dfrac{4}{\ln^2 x}$

Αλλά f συνεχής οπότε ή $f(x)=\dfrac{4}{\ln^2 x}$ για κάθε $x\in(1,\ +\infty)$ ή $f(x)=-\dfrac{4}{\ln^2 x}$ για κάθε $x\in(1,\ +\infty)$. (Διατηρεί πρόσημο αφού $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in D_f$)

Είναι όμως $f(e)=4>0$. Άρα $f(x)=\dfrac{4}{\ln^2 x}$ για κάθε $x\in(1,\ +\infty)$

β. Αρκεί να δείξουμε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $(0,\ +\infty)$ (για να έχει μια τουλάχιστο ρίζα η εξίσωση $f(x)=a,\quad a>0$) και f "1-1" (για να έχει μια το πολύ ρίζα). Είναι $f'(x)=-\dfrac{4(\ln^2 x)'}{(\ln x)^4}=-\dfrac{4\cdot 2\ln x(\ln x)'}{(\ln x)^4}=-\dfrac{8}{x\ln^3 x}<0$ αφού x>1.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα οπότε και "1-1". Το σύνολο τιμών της είναι $f((1,\ +\infty))=(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\ \lim\limits_{x\to1^+}f(x))$.

Αλλά $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{\ln^2 x}=0$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{4}{\ln^2 x} = +\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln x = 0$ και $\ln^2 x > 0$

Άρα $f((1,\ +\infty)) = (0,\ +\infty)$

Επομένως πράγματι η εξίσωση f(x)=α έχει μοναδική ρίζα στο $(1,\ +\infty)$ για κάθε $a \in (0,\ +\infty)$.

ΘΕΜΑ 23[ο] (Παράγωγος – διαφορική εξίσωση – κανόνας de l' Hospital – εξίσωση – εμβαδό)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,\ +\infty) \to R$ για την οποία ισχύουν $f'(1) = 1$ και $f(xy) = xf(y) + yf(x)$ για όλα τα $x, y \in (0,\ +\infty)$

α. Να αποδείξετε ότι

i. $f'(x) = 1 + \frac{f(x)}{x}$ για κάθε $x \in (0,\ +\infty)$

ii. $f(x) = x\ln x$ για κάθε $x \in (0,\ +\infty)$

β. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

γ. Να λύσετε την εξίσωση $2f(x) = x^2 - 1$

δ. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $h(x) = 2f(x)$, τη γραφική παράσταση της $g(x) = x^2 - 1$ και την ευθεία x=e.

ΛΥΣΗ

α. i. Δίνεται $f(xy) = xf(y) + yf(x) \overset{x=y=1}{\Rightarrow} f(1) = f(1) + f(1) \Leftrightarrow f(1) = 0$

Επίσης δίνεται $f'(1) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 1} \frac{f(h) - f(1)}{h-1} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 1} \frac{f(h)}{h-1} = 1$

Είναι $f'(x) = \lim\limits_{w\to x} \frac{f(w) - f(x)}{w - x}$

Θέτουμε $\frac{w}{x} = h \Leftrightarrow w = hx$ οπότε $w \to x \Leftrightarrow h \to 1$ και

$$f'(x) = \lim_{h\to 1} \frac{f(hx) - f(x)}{hx - x} = \lim_{h\to 1} \frac{hf(x) + xf(h) - f(x)}{hx - x} =$$

$$\lim_{h\to 1}\left(\frac{f(x)(h-1)}{x(h-1)} + \frac{xf(h)}{x(h-1)}\right) = \frac{f(x)}{x} + f'(1) = \frac{f(x)}{x} + 1$$

ii. Έχουμε

$$f'(x) = 1 + \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f'(x) - \frac{f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \frac{f'(x)x - f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{1}{x}$$

Οπότε $\int \left(\frac{f(x)}{x}\right)' dx = \int \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \ln|x| + c \overset{x>0}{\Leftrightarrow} f(x) = x\ln x + cx$ (1)

Είναι $f'(x) = \ln x + 1 + c$ οπότε $f'(1) = 1 + c$

Αλλά $f'(1) = 1 \Leftrightarrow 1 + c = 1 \Leftrightarrow c = 0$

Άρα (1) $\Leftrightarrow f(x) = x\ln x$

β. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}(-x)=0$

γ. Η ζητούμενη εξίσωση γίνεται $2f(x)-x^2+1=0$

Έστω $\phi(x)=2f(x)-x^2+1=2x\ln x-x^2+1$

Είναι $\phi'(x)=2\ln x+2-2x$ και $\phi''(x)=\dfrac{2}{x}-2$

x	0 1 $+\infty$
φ΄΄(x)	+ 0 -
φ΄	↗ μέγιστο ↘

Οπότε $\phi'(x)\le 0$ για κάθε $x\in(0,\ +\infty)$ με το “=” να ισχύει μόνο για x=1. Επομένως η φ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση. Άρα η εξίσωση φ(x)=0 έχει το πολύ μια ρίζα.

Είναι φανερό όμως ότι $\phi(1)=2\cdot 1\ln 1-1^2+1=0$. Άρα η εξίσωση φ(x)=0 έχει μοναδική ρίζα την x=1.

δ. Η εξίσωση $h(x)=g(x)$ γίνεται

$2f(x)=x^2-1\Leftrightarrow \phi(x)=0\Leftrightarrow x=1$ μοναδική ρίζα

Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E=\int_1^e |h(x)-g(x)|dx$

Αλλά $h(x)-g(x)=\phi(x)$ και $\phi\downarrow$ οπότε για x≥1 ισχύει φ(x)≤0

Άρα

$$E=\int_1^e(-h(x)+g(x))dx=\int_1^e(-2x\ln x+x^2-1)dx=-\int_1^e(x^2)'\ln x dx+\int_1^e(x^2-1)dx=$$

$$-\left[x^2\ln x\right]_1^e+\int_1^e x^2(\ln x)'dx+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^e=-e^2\ln e+1^2\ln 1+\int_1^e x^2\frac{1}{x}dx+\frac{e^3}{3}-e-\left(\frac{1^3}{3}-1\right)=$$

$$-e^2+\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e+\frac{e^3}{e}-e+\frac{2}{3}=-e^2+\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{e^3}{3}-e+\frac{2}{3}=\frac{e^3}{3}-\frac{e^2}{2}-e+\frac{1}{6}$$

ΘΕΜΑ 24^{O} (Θ.Μ.Τ. – Ολοκλήρωμα με αντικατάσταση)

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $2f(2x)-f(x)=2x$ (1), $x\in R$ και η συνάρτηση $F(x)=x\int_1^2 f(xt)dx-x^2+3$, $x\in R$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1\in(0,\ 1)$ και $x_2\in(1,\ 2)$ τέτοια ώστε $f'(x_1)+2f'(x_2)=2$.

β. Να αποδείξετε ότι η F είναι σταθερή και να βρείτε την τιμή της.

γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_1^4 f(x)dx$

ΛΥΣΗ

α. (1) $\overset{x=0}{\Rightarrow} 2f(0)-f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$

$(1)\overset{x=1}{\Rightarrow} 2f(2)-f(1)=2$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R οπότε εφαρμόζεται ΘΜΤ σε κάθε διάστημα. Επομένως υπάρχουν $x_1\in(0,\ 1)$ και $x_2\in(1,\ 2)$ τέτοια ώστε

$f'(x_1)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)$ και

$f'(x_2)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=f(2)-f(1)\Leftrightarrow 2f'(x_2)=2f(2)-2f(1)$

Οπότε $f'(x_1)+2f'(x_2)=2$

β. Για το ολοκλήρωμα $I_1=x\int_1^2 f(xt)dt=\int_1^2 f(xt)xdt$ θέτουμε $u=xt=g(t)$ οπότε $u_1=g(1)=x,\ \ u_2=g(2)=2x$ και $du=xdt$ οπότε $I_1=\int_x^{2x} f(u)du$

Οπότε $F(x)=\int_x^{2x} f(u)du-x^2+3$

Έχουμε $F'(x)=\left(\int_1^{2x} f(u)du-\int_1^{x} f(u)du-x^2+3\right)'=$

$f(2x)(2x)'-f(x)-2x=2f(2x)-f(x)-2x\overset{(1)}{=}0$

Οπότε F σταθερή

Επομένως για κάθε $x\in R$ ισχύει $F(x)=F(0)=0\int_1^2 f(0)dt-0^2+3=3$

γ. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε

$F(x)=\int_x^{2x} f(u)du-x^2+3\Leftrightarrow \int_x^{2x} f(u)du=x^2$ (2)

$$\left.\begin{array}{l}(2)\overset{x=1}{\Rightarrow}\int_1^2 f(u)du=1\\[2ex](2)\overset{x=2}{\Rightarrow}\int_2^4 f(u)du=4\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}\int_1^4 f(x)dx=5\Leftrightarrow I=5$$

ΘΕΜΑ 25ο (Μονοτονία – σύνολο τιμών – εμβαδό)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{\eta\mu x}$, $x\in(0,\ \pi)$

α. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f

γ. Να αποδειχθεί ότι το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την C_f τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=\dfrac{\pi}{3}$ και $x=\dfrac{\pi}{2}$ είναι $E=\dfrac{1}{2}\ln 3$.

ΛΥΣΗ

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0, π) με $f'(x)=\dfrac{-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$

Σχηματίζουμε τον πίνακα

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π
f΄(x)	-	0	+
f	↘	ελάχιστο	↗

Άρα $f\downarrow$ στο $(0,\ \dfrac{\pi}{2}]$, $f\uparrow$ στο $[\dfrac{\pi}{2},\ \pi)$

Στο $\dfrac{\pi}{2}$ η f έχει ελάχιστο το $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{\eta\mu\frac{\pi}{2}}=1$

β. Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\eta\mu x}=+\infty$ αφού $\eta\mu x>0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu x=0$

Οπότε $f((0,\ \pi))=[1,\ +\infty)$ (Δεν χρειάζεται το $\lim\limits_{x\to\pi} f(x)$ αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$)

γ. Είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\left[\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\eta\mu x}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\dfrac{2\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}{2}\cdot\frac{1}{\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}dx=$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(\varepsilon\varphi\frac{x}{2})'\cdot\frac{1}{\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\ln\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right)\right)'dx=\left[\ln\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\ln(\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4})-\ln\left(\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}\right)=\ln 1-\ln\frac{\sqrt{3}}{3}=-\ln\sqrt{3}+\ln 3=-\frac{1}{2}\ln 3+\ln 3=\frac{1}{2}\ln 3$$

Β΄ τρόπος

$$E=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\eta\mu x}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$$

Θέτω $u=\sigma\upsilon\nu x=g(x)$ οπότε $du=-\eta\mu x dx\Leftrightarrow -du=\eta\mu x dx$

$u_1=g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ και $u_2=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=0$

Οπότε

$$E=\int_{\frac{1}{2}}^{0}\left(-\frac{1}{1-u^2}\right)du=-\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{u^2-1}du$$

Θα βρω α, β∈R τέτοια ώστε

$$\frac{1}{u^2-1}=\frac{a}{u-1}+\frac{\beta}{u+1}\Leftrightarrow 1=a(u+1)+\beta(u-1)\Leftrightarrow$$

$$1=(a+\beta)u+a-\beta\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases}a+\beta=0\\ \alpha-\beta=1\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ \beta=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

Οπότε $E=-\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\frac{1}{2}}{u-1}-\frac{\frac{1}{2}}{u+1}\right)du=-\frac{1}{2}\left[\ln|u-1|-\ln|u+1|\right]_0^{\frac{1}{2}}=$

$$-\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}\left(-\ln 2-\ln 3+\ln 2\right)=\frac{1}{2}\ln 3$$

ΘΕΜΑ 26^{O} Εφαπτομένη – ανισότητα – εμβαδό

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3\ln x$

α. Να δειχθεί ότι υπάρχει ένα μόνο σημείο Α της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x΄x, το οποίο και να βρεθεί.

β. Να δειχθεί $\ln x^{x^3}\geq-\frac{1}{3e}$ για κάθε $x\in(0,\ +\infty)$

γ. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα x΄x και την ευθεία $x=x_A$ όπου x_A η τετμημένη του σημείου Α του πρώτου ερωτήματος .

ΛΥΣΗ

α. Είναι $D_f=(0,\ +\infty)$ όπου f παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=3x^2\ln x+x^2=x^2(3\ln x+1)$$

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0\Leftrightarrow 3\ln x+1=0\Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{3}}\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ μοναδική λύση. Οπότε σε ένα μόνο σημείο η εφαπτομένη είναι παράλληλη του x΄x.

Είναι $f\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)=\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)^3\ln e^{-\frac{1}{3}}=-\frac{1}{3}e^{-1}=-\frac{1}{3e}$. Επομένως το ζητούμενο σημείο είναι $A\left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}},-\frac{1}{3e}\right)$.

β. Για το πρόσημο της f΄ και την μονοτονία της f σχηματίζουμε τον πίνακα

x	0		$e^{-\frac{1}{3}}$		$+\infty$
f΄(x)		-	0	+	
f		↘	ελάχ	↗	

Άρα για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $f(x)\geq f(e^{-\frac{1}{3}})\Leftrightarrow x^3\ln x\geq -\frac{1}{3e}\Leftrightarrow \ln x^{x^3}\geq -\frac{1}{3e}$

γ. Λύνω την $f(x)=0\Leftrightarrow x^3\ln x=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x=0\Leftrightarrow x=1$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=\int_{e^{-\frac{1}{3}}}^{1}|f(x)|dx=\int_{e^{-\frac{1}{3}}}^{1}|x^3\ln x|dx\overset{\ln x\leq 0}{=}-\int_{e^{-\frac{1}{3}}}^{1}\left(\frac{x^4}{4}\right)'\ln x dx=-\left[\frac{x^4}{4}\ln x\right]_{e^{-\frac{1}{3}}}^{1}+\int_{e^{-\frac{1}{3}}}^{1}\frac{x^4}{4}(\ln x)'dx=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln 1+\frac{\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)^4}{4}\ln e^{-\frac{1}{3}}+\int_{e^{-\frac{1}{3}}}^{1}\frac{x^4}{4}\frac{1}{x}dx=-\frac{1}{3}\cdot\frac{e^{-\frac{4}{3}}}{4}+\left[\frac{x^4}{16}\right]_{e^{-\frac{1}{3}}}^{1}=-\frac{e^{-\frac{4}{3}}}{12}+\frac{1}{16}-\frac{(e^{-\frac{1}{3}})^4}{16}=$$

$$-\frac{e^{-\frac{4}{3}}}{12}+\frac{1}{16}-\frac{e^{-\frac{4}{3}}}{16}=\frac{-7+3e^{\frac{4}{3}}}{48e^{\frac{4}{3}}}=\frac{3e\sqrt[3]{e}-7}{48e\sqrt[3]{e}}$$

ΘΕΜΑ 27^{O} (Κοίλα - Εμβαδό)

α. Δίνεται η τρεις φορές παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f για την οποία $f^{(3)}(x)>0$ για κάθε $x\in R$, $f^{(3)}(0)\geq 0$ και $f''(0)=0$. Να δειχτεί ότι η f είναι κοίλη στο $(-\infty,\ 0]$ και κυρτή στο $[0,\ +\infty)$.

β. Να μελετηθεί ως προς τα κοίλα η συνάρτηση $f(x)=-e^{-x}-3-x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$

γ. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=0 και x=1.

ΛΥΣΗ

α. Αφού η f΄΄ είναι παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής. Για το πρόσημο της $f^{(3)}$ και την μονοτονία της f΄΄ σχηματίζουμε τον πίνακα.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f^{(3)}(x)$		+		+	
f΄΄			↗		

Αλλά $f''(x)=0$ οπότε για x>0 ισχύει $f''(x)>0$ και για x<0 ισχύει $f''(x)<0$
Επομένως στο $(-\infty,\ 0]$ η f είναι κοίλη και στο $[0,\ +\infty)$ η f είναι κυρτή.

β. Έχουμε $f'(x)=e^{-x}-1+x+\dfrac{x^2}{2}$, $f''(x)=-e^{-x}+1+x$ και $f^{(3)}(x)=e^{-x}+1>0$ και $f''(0)=0$ άρα από **α)** ερώτημα η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty,\ 0]$ και άνω στο $[0,\ +\infty)$.

γ. Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E=\int_0^1 |f(x)|dx$. Είναι $f''\uparrow$ και $f''(0)=0$ οπότε για x>0 ισχύει $f''(x)>0$. Αλλά f΄ συνεχής στο $[0,\ +\infty)$ οπότε $f'\uparrow$ στο $[0,\ +\infty)$. Όμως f΄(0)=0 οπότε για x>0 ισχύει f΄(x)>0. Αλλά f συνεχής στο $[0,\ +\infty)$ οπότε $f\uparrow$ στο $[0,\ +\infty)$. Επομένως για $0\le x\le 1$ ισχύει $f(0)\le f(x)\le f(1)$.

Είναι $f(0)=-4$ και $f(1)=-e^{-1}-3-1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}=-\dfrac{1}{e}-4+\dfrac{4}{6}=-\dfrac{1}{e}-4+\dfrac{2}{3}<0$

άρα για κάθε $x\in[0,\ 1]$ είναι f(x)<0.

Οπότε $E=\int_0^1(-f(x))dx=\int_0^1(e^{-x}+3+x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6})dx=$

$$\left[-e^{-x}+3x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24}\right]_0^1=-e^{-1}+3+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{24}+1=$$

$$-\frac{1}{e}+4+\frac{12-4-1}{24}=-\frac{1}{e}+4+\frac{7}{24}=\frac{103e-24}{24}$$

ΘΕΜΑ 28^{O} (Συνάρτηση οριζόμενη από ολοκλήρωμα)
Θεωρούμε την συνεχή στο διάστημα [α, β] συνάρτηση f για την οποία ισχύει f(x)>0 για κάθε $x\in[a,\ \beta]$. Να αποδείξετε ότι

α. Για την συνάρτηση $h(x)=\int_a^x f(t)dt\int_x^\beta f(t)dt$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο [α, β]
β. Αν ξ∈(α, β) με h΄(ξ)=0 τότε η ευθεία x=ξ χωρίζει το χωρίο που καθορίζεται από την C_f τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=α και x=β σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
α. Η h είναι παραγωγίσιμη στο [α, β] με

$$h'(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)'\int_x^\beta f(t)dt+\int_\alpha^x f(t)dt\left(\int_x^\beta f(t)dt\right)'=f(x)\int_x^\beta f(t)dt-f(x)\int_a^x f(t)dt$$

Επίσης
$$\left.\begin{array}{l} h(a)=\int_a^a f(t)dt\int_a^\beta f(t)dt=0 \\ h(\beta)=\int_\alpha^\beta f(t)dt\int_\beta^\beta f(t)dt=0 \end{array}\right\}\Rightarrow h(a)=h(\beta)$$

Άρα για την h ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο [α, β]

β. Η f έχει θετικές τιμές στο [α, β] οπότε αρκεί $\int_{\alpha}^{\xi} f(x)dx = \int_{\xi}^{\beta} f(x)dx$

Αλλά $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi)\int_{\xi}^{\beta} f(t)dt - f(\xi)\int_{\alpha}^{\xi} f(t)dt = 0 \overset{f(\xi)\neq 0}{\Leftrightarrow} \int_{\alpha}^{\xi} f(t)dt = \int_{\xi}^{\beta} f(t)dt$

ΘΕΜΑ 29^{O} (Μιγαδικοί, ασύμπτωτες, εμβαδό)
Δίνεται ο σταθερός μιγαδικός $w \neq 0$.
α. Να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M(z) του μιγαδικού επιπέδου, για τους οποίους ισχύει

$|z|^2 - 2\begin{vmatrix} \mathrm{Re}(z) & \mathrm{Im}(z) \\ -\mathrm{Im}(w) & \mathrm{Re}(w) \end{vmatrix} = 0$ (1) είναι κύκλος με κέντρο την εικόνα του w.

β. Αν $|w| = 4$ και ρ η ακτίνα του παραπάνω κύκλου, τότε να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=xlnx, την ασύμπτωτη στο +∞ της συνάρτησης $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} - x$, την κατακόρυφη ασύμπτωτη της συνάρτησης $\phi(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 7}{x - e}$ και την ευθεία x=ρ.

ΛΥΣΗ
α. Έστω $w = a + \beta i$ και $z = x + yi$ τότε

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2\begin{vmatrix} x & y \\ -\beta & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2\beta y = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 = a^2 + \beta^2 \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-\beta)^2 = |w|^2$$

που παριστάνει κύκλο με κέντρο K(α, β) δηλαδή την εικόνα του w.

β. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + 2x + 2 - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x + 2} + x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1} = \frac{2+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{2}{2} = 1$$

Οπότε η ασύμπτωτη της C_g στο +∞ είναι η y=1
Επίσης $D_y = R - \{e\}$ όπου φ συνεχής και

$\lim_{x\to e^+} \phi(x) = \lim_{x\to e^+}\left(\dfrac{1}{x-e}(2x^2 - 5x + 7)\right) = +\infty\left(2e^2 - 5\cdot e + 7\right) = +\infty$ άρα η x=e μοναδική κατακόρυφη ασύμπτωτη. Ακόμη $|w| = 4$ οπότε ρ=4. Άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι $E = \int_e^4 |f(x) - 1| dx$. Αλλά για $x \geq e$ ισχύει $f(x) \geq e$ οπότε

$$E=\int_e^4 (f(x)-1)dx=\int_e^4\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x dx-\int_e^4 dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_e^4-\int_e^4\frac{x^2}{2}(\ln x)'dx-(4-e)=$$

$$8\ln 4-\frac{e^2}{2}-\int_e^4\frac{x}{2}dx-4+e=8\ln 4-\frac{e^2}{2}-\left[\frac{x^2}{4}\right]_e^4-4+e=8\ln 4-\frac{e^2}{2}-4+\frac{e^2}{4}-4+e=$$

$$8\ln 4-\frac{e^2}{4}+e-8$$

ΘΕΜΑ 30

ΘΕΜΑ 30^{O} (Μονοτονία - Ολοκλήρωμα)
Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο R συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν $f'(x)=3e^{3e^x-1+x-f(x)}$ για κάθε x∈R και f(0)=2, και $g'(x)=2g(x)-2$ για κάθε x∈R και η γραφική παράσταση της g τέμνει τον y΄y στο ίδιο σημείο που τον τέμνει και η f ενώ βρίσκεται όλη πάνω από την ευθεία y=1.
α. Να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως αύξουσες.
β. Να βρεθούν οι συναρτήσεις f και g και να δειχθεί ότι οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν δύο κοινά σημεία.
γ. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g.

ΛΥΣΗ

α. Για κάθε x∈R ισχύει $3e^{3e^x+x-1-f(x)}>0\Leftrightarrow f'(x)>0$ άρα $f\uparrow$ στο R. Δίνεται g(x)>1 για κάθε x∈R $\Leftrightarrow 2g(x)-2>0\Leftrightarrow g'(x)>0$ άρα $g\uparrow$ στο R.
β. Είναι

$$f'(x)=3e^{3e^x+x-1-f(x)}\Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)}=3e^x e^{3e^x-1}\Leftrightarrow$$

$$(e^{f(x)})'=(e^{3e^x-1})'\Leftrightarrow\int(e^{f(x)})'dx=\int(e^{3e^x-1})'dx\Leftrightarrow e^{f(x)}=e^{3e^x-1}+c\qquad(1)$$

$$(1)\overset{x=0}{\Rightarrow}e^{f(0)}=e^{3e^0-1}+c\Leftrightarrow e^2=e^2+c\Leftrightarrow c=0\quad \text{οπότε}$$

$$e^{f(x)}=e^{3e^x-1}\Leftrightarrow f(x)=3e^x-1$$

Επίσης

$$g'(x)=2(g(x)-1)\overset{g(x)>1}{\Leftrightarrow}\frac{(g(x)-1)'}{g(x)-1}=2\Leftrightarrow$$

$$\left(\ln|g(x)-1|\right)'=(2x)'\overset{g(x)>1}{\Leftrightarrow}\int(\ln(g(x)-1))'dx=\int(2x)'dx$$

$$\Leftrightarrow\ln(g(x)-1)=2x+c\qquad(2)$$

$$(2)\overset{x=0}{\Rightarrow}\ln(g(0)-1)=0+c\Leftrightarrow c=0\quad \text{οπότε}$$

$$\ln(g(x)-1)=2x\Leftrightarrow g(x)-1=e^{2x}\Leftrightarrow g(x)=e^{2x}+1$$

Η εξίσωση $f(x)=g(x)$ γίνεται

$$3e^x-1=e^{2x}+1\Leftrightarrow e^{2x}-3e^x+2=0\overset{e^x=y}{\Leftrightarrow}y^2-3y+2=0\Leftrightarrow$$

$$y=1\ \acute{\eta}\ y=2\Leftrightarrow e^x=1\ \acute{\eta}\ e^x=2\Leftrightarrow x=0\ \acute{\eta}\ x=\ln 2$$

Άρα οι C_f και C_g έχουν δύο κοινά σημεία.

γ. $E=\int_0^{\ln 2}|f(x)-g(x)|dx=\int_0^{\ln 2}|3e^x-1-e^{2x}-1|dx=\int_0^{\ln 2}|-e^{2x}+3e^x-2|dx$

Είναι $-e^{2x}+3e^x-2=-(e^x-1)(e^x-2)$

x	$-\infty$		0		ln2		$+\infty$
e^x-1		-	0	+		+	
e^x-2		-		-	0	+	
$-(e^x-1)(e^x-2)$		-	0	+	0	-	

Άρα $E=\int_0^{\ln 2}(-e^{2x}+3e^x-2)dx=\left[-\frac{e^{2x}}{2}+3e^x-2x\right]_0^{\ln 2}=$

$-\frac{e^{2\ln 2}}{2}+3e^{\ln 2}-2\ln 2-\left(-\frac{e^0}{2}+3e^0-2\cdot 0\right)=-2+6-2\ln 2+\frac{1}{2}-3=\frac{3}{2}-2\ln 2$

Παρατήρηση

Το **α** ερώτημα θα μπορούσε να λυθεί μετά το **β** και με χρήση αυτού.

ΘΕΜΑ 31$^{\text{Ο}}$ (Bolzano – Rolle – De l' Hospital – Ολοκλήρωμα)

Δίνεται η συνάρτηση $\phi(x)=x\ln x$, x>0 και έστω $a=\lim\limits_{x\to 0}\phi(x)$. Δίνεται ακόμη η τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $[0,\ +\infty)$ συνάρτηση g με θετικές τιμές στο διάστημα (0, 1) για την οποία ισχύουν $\int_0^2 g(x)dx<0,\quad g(a)=0$ και $g'(0)=0$.

Δίνεται ακόμη συνάρτηση $f:[a,\ +\infty)\to R$ με

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{ex^2}\displaystyle\int_0^x g(t)dt, & x>a\\[2ex] 0, & x=a\end{cases}$$

α. Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση f

β. Να δειχθεί ότι υπάρχει ρ∈(1, 2) τέτοιο ώστε $f(\rho)=0$

γ. Να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0

δ. Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(0,\ +\infty)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$

ΛΥΣΗ

α. Αρχικά $a=\lim\limits_{x\to 0}\phi(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}(-x)=0$

οπότε g(0)=0 και $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{ex^2}\int_0^x g(t)dt, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$

Η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο (0, +∞) ως γινόμενο παραγωγίσιμων με $f'(x)=-\frac{2}{ex^3}\int_o^x g(t)dt+\frac{g(x)}{ex^2}$ οπότε και συνεχής. Για τη συνέχεια στο 0 έχουμε f(0)=0 και

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x g(t)dt}{ex^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x g(t)dt\right)'}{(ex^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{2ex}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(g(x))'}{(2ex)'}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{2e}\overset{(*)}{=}\frac{g'(0)}{2e}=0$$

οπότε f συνεχής στο 0. Άρα f συνεχής στο $[0, +\infty)$.

* g τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ οπότε g΄ συνεχής στο 0.

β. Η $f(x)=\frac{1}{ex^2}\int_0^x g(t)dt$ είναι συνεχής στο [1, 2].

Επίσης $f(1)\cdot f(2)=\frac{1}{e}\int_0^1 g(t)dt\cdot\frac{1}{4e}\int_0^2 g(t)dt<0$ αφού $\int_0^2 g(t)dt<0$ και $\int_0^1 g(t)dt>0$ επειδή g(x)>0 στο (0, 1) και g συνεχής στο [0, 1]. Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ρ∈(1, 2) τέτοιο ώστε f(ρ)=0.

γ. Έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x g(t)dt}{ex^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{3ex^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{6ex}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)}{6e}=\frac{g''(0)}{6e}\in R$$ άρα f

παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=\frac{g''(0)}{6e}$

δ. Στο διάστημα [0, ρ] ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f οπότε υπάρχει ξ∈(0, ρ) άρα και ξ∈(0, +∞) τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

ΘΕΜΑ 32ο (“1-1” – αντιστροφή – μονοτονία από αντίστροφη – όριο - εμαδό)

Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(R)=R$ για την οποία $f^5(x)+f^3(x)+x=5$ (1) για κάθε $x\in R$.

α. Να δειχθεί ότι η f είναι “1-1”

β. Να βρεθεί η αντίστροφη της f

γ. Αν μια συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ τότε για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in R$ ισχύει η ισοδυναμία $x_1<x_2 \Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)$

δ. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η f

ε. Να λυθεί η εξίσωση f(x)=0

στ. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ζ. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f τους άξονες x΄x και y΄y.

ΛΥΣΗ

α. Έστω $x_1,x_2\in R$ με $f(x_1)=f(x_2)$ τότε

$$\left\{\begin{matrix} f^5(x_1)=f^5(x_2) \\ f^3(x_1)=f^3(x_2) \\ 3f(x_1)=3f(x_2) \end{matrix}\right\}$$ οπότε

$$f^5(x_1)+f^3(x_1)+3f(x_1)=f^5(x_2)+f^3(x_2)+3f(x_2)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}5-x_1=5-x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι “1-1”

β. Είναι $f(R)=R$ οπότε $D_{f^{-1}}=R$

Έστω $f(x)=y$ τότε $f^{-1}(y)=x$ οπότε

(1) $\Leftrightarrow y^5+y^3+3y+f^{-1}(y)=5\Leftrightarrow f^{-1}(y)=-y^5-y^3-3y+5$

Άρα $f^{-1}:R\to R$ με $f^{-1}(x)=-x^5-x^3-3x+5$

γ. Έστω $x_1,\ x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$. Τότε αφού g↓ ισχύει $g(x_1)>g(x_2)$

Αντίστροφα

Έστω $x_1,x_2\in\Delta$ με $g(x_1)>g(x_2)$

Αν $x_1\geq x_2$ τότε αφού $g\downarrow$ θα είναι $g(x_1)\leq g(x_2)$ άτοπο

Άρα $x_1<x_2$

Επομένως για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\Delta$ ισχύει η ισοδυναμία $x_1<x_2\Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)$

δ. Είναι $(f^{-1})'(x)=-5x^4-3x^2-3<0$ για κάθε $x\in R$ οπότε η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

Έστω $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$

Επειδή το σύνολο τιμών της f^{-1} (πεδίο ορισμού της f) είναι το R, υπάρχουν $y_1,y_2\in R$ τέτοιο ώστε $f^{-1}(y_1)=x_1$ και $f^{-1}(y_2)=x_2$

Οπότε $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)\overset{f^{-1}\downarrow}{\Leftrightarrow}y_1>y_2\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$ άρα $f\downarrow$ στο R

ε. $f(x)=0 \Leftrightarrow f^{-1}(0)=x$. Αλλά $f^{-1}(0)=5$ οπότε x=5
Άρα η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα x=5

στ. Είναι $D_f = R=(-\infty,+\infty)$ και $f\downarrow$ οπότε $f(R)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)$

Αλλά $f(R)=D_{f^{-1}} = R=(-\infty,+\infty)$. Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

ζ. Οι συμμετρικές γραμμές των C_f, $y'y$, $x'x$ ως προς την ευθεία y=x είναι οι $C_{f^{-1}}$, $x'x$, $y'y$ αντίστοιχα. Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι ίσο (λόγω συμμετρίας) με το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις $C_{f^{-1}}$, $x'x$, $y'y$.

Είναι $f^{-1}(x)=0 \Leftrightarrow -x^5-x^3-3x+5=0 \Leftrightarrow x=1$ φανερή ρίζα και μάλιστα μοναδική αφού $f^{-1}\downarrow$.

Άρα είναι $E=\int_0^1 f^{-1}(x)dx=\int_0^1 \left|-x^5-x^3-3x+5\right|dx$

Είναι $f^{-1}(1)=0$ και $f^{-1}\downarrow$ οπότε στο [0, 1] είναι $f^{-1}(x)\ge 0$ άρα

$$E=\int_0^1(-x^5-x^3-3x+5)dx=\left[-\frac{x^6}{6}-\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+5x\right]_0^1=-\frac{1}{6}-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+5=\frac{-2-3-18+60}{12}=\frac{37}{12}$$

ΘΕΜΑ 33^{O} ΘΜΤ – μονοτονία - ολοκλήρωμα
Δίνεται η παραγωγίσιμη στο [-α, α] (α>0) συνάρτηση f. Αν η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα να αποδείξετε ότι :

α. $f(x)>(x+a)f'(a)+f(-a)$ για κάθε $x\in(-a,\ a]$

β. $\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)dx \ge af'(a)+f(-a)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α. Η f είναι συνεχής στο [-α, x] και παραγωγίσιμη στο (-α, x) οπότε από ΘΜΤ υπάρχει ξ∈(-α, x) τέτοιο ώστε f΄(ξ)=$\frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)} \Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{f(x)-f(-a)}{x+a}$

Αλλά ξ<x και x≤α. Επίσης $f'\downarrow$ οπότε $f'(\xi)>f'(a) \Leftrightarrow \frac{f(x)-f(-a)}{x+a}>f'(a) \Leftrightarrow$

$\overset{x>-a\Leftrightarrow x+a>0}{\Leftrightarrow} f(x)-f(-a)>(x+a)f'(a) \Leftrightarrow f(x)>(x+a)f'(a)+f(-a)$ (1)

β. Η (1) γίνεται $f(x)-(x+a)f'(a)-f(-a)>0$ για κάθε $x\in(-a,\ a]$

Έστω $g(x)=f(x)-(x+a)f'(a)-f(-a) \quad x\in[-a,\ a]$

Είναι g(x)>0 για κάθε $x\in(-a,\ a]$ και $g(-a)=0$ οπότε $\int_{-a}^{a} g(x)dx>0 \Leftrightarrow$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx - f'(a)\int_{-a}^{a}(x+a)dx - f(-a)\int_{-a}^{a}dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx > f'(a)\left[\frac{x^2}{2}+ax\right]_{-a}^{a} + f(-a)(a+a) \Leftrightarrow$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx > f'(a)\left(\frac{a^2}{2}+a^2-\left(\frac{(-a)^2}{2}+a(-a)\right)\right)+2af(-a) \Leftrightarrow$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx > 2a^2 f'(a)+2af(-a) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)dx > af'(a)+f(-a)$$