ΤΡΙΩΡΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ : **ΑΝΑΛΥΣΗ: § 2.4, 2.5, 2.6, 2.7(Σχολικού βιβλίου)**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση **f** ορισμένη σ' ένα διάστημα **Δ** και x_o ένα εσωτερικό σημείο του **Δ**. Αν η **f** παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_o και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε δείξτε ότι $f'(x_o)=0$.

Μονάδες 10

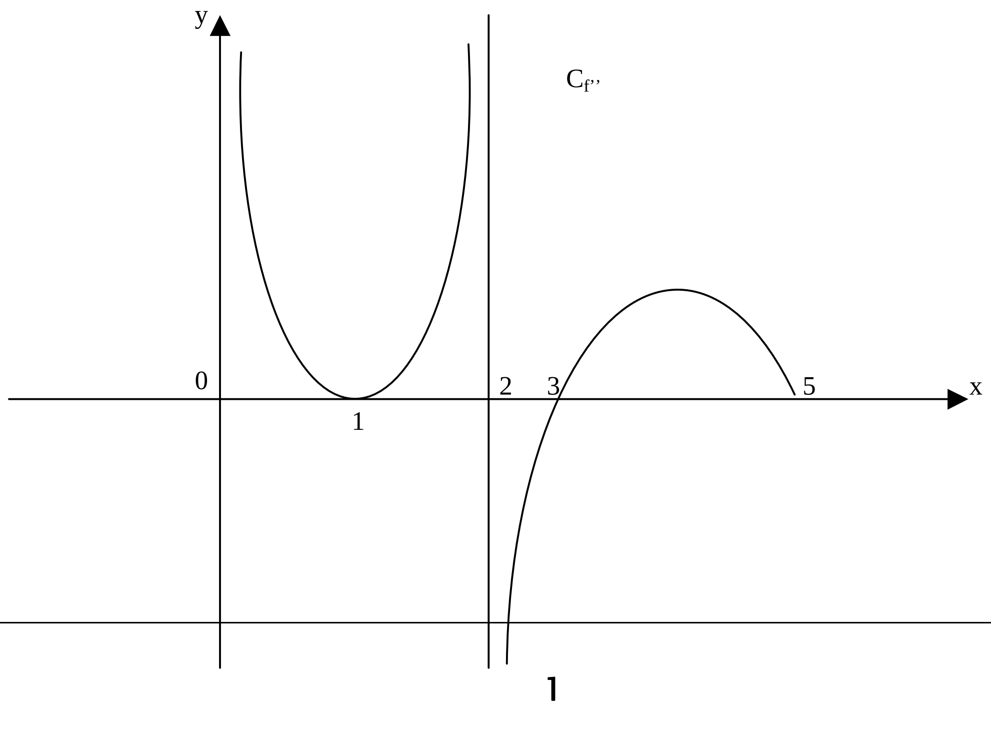
Β. Στις ακόλουθες προτάσεις, να σημειώσετε **Σ** για τις σωστές και **Λ** για τις λανθασμένες.

1. Αν **f** άρτια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη στο **R** τότε η **f'** έχει ρίζα στο $(-x,\ x)$ για κάθε $x>0$. **Σ Λ**
2. Αν **f**, **g** συνεχείς στο **R** και οι C_f, C_g τέμνονται στο σημείο με τετμημένη x_o και ισχύει $f'(x)=g'(x)$, $x\in(-\infty,x_o)\cup(x_o,+\infty)$ τότε $f(x)=g(x)$, $x\in R$. **Σ Λ**
3. Αν **F** αρχική της **f** στο **(α, β)** και η **F** παρουσιάζει τοπικό ακρότατο τότε η **f** έχει ρίζα. **Σ Λ**
4. Αν $f'(x_o)\neq 0$ τότε η **f** δεν παρουσιάζει εσωτερική θέση ακροτάτου. **Σ Λ**
5. Έστω **F** αρχική της **f** σ'ένα διάστημα **Δ**. Αν η **f** έχει το πολύ **3** ρίζες διαφορετικές στο **Δ** τότε η **F** έχει το πολύ **4** διαφορετικές ρίζες στο **Δ**.

Σ Λ

Μονάδες 10

Γ. Στο παρακάτω διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της πρώτης παραγώγου μιας συνάρτης **f** η οποία είναι συνεχής στο **[0,5]**.



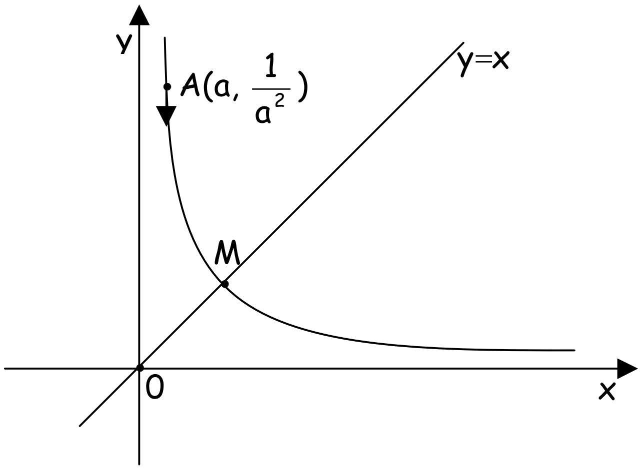
Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας μονοτονίας και χαρακτηρισμός των τοπικών ακροτάτων.

x	0	1	2	3	5
f'(x)					
f					

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2°

Α. Το σημείο ***Α*** κινείται όπως δείχνει το διπλανό σχήμα πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{f(x)=\frac{1}{x^2}}$, **x>0** και ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι **3cm/sec**. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του τη χρονική στιγμή κατά την οποία το ***Α*** διέρχεται από το **Μ**.



Μονάδες 8

Β. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $\mathbf{f(x)=\alpha x^{\kappa}+\beta x^{\mu}+\gamma x^{\nu}}$ **α, β, γ∈R, κ,μ,ν∈N***

Αν $\frac{\alpha}{\kappa+1}+\frac{\beta}{\mu+1}+\frac{\gamma}{\nu+1}=0$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον **ξ∈(0,1)** ώστε **f(ξ)=0**.

Μονάδες 7

Γ. i) Δίνεται συνάρτηση **f** δύο φορές παραγωγίσιμη στο **R** ώστε να ισχύει **f''(x)≠0** για κάθε **x∈R**. Δείξτε ότι η εξίσωση **f(x)=0** έχει το πολύ **2** ρίζες.

ii) Να λυθεί η εξίσωση: $\mathbf{(2007)^x=2006\cdot x+1}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3°

Α. Να βρείτε συνάρτηση **f** για την οποία ισχύουν **f(1)=ln2** και $\mathbf{f'(x)=\begin{cases} 2x+1, & x\le 0 \\ \frac{1}{x+1}, & x>0 \end{cases}}$.

Μονάδες 8

Β. Δίνεται **f** ορισμένη και παραγωγίσιμη στο **(–∞ ,0)**, με **f(x)>0**, για **x<0**, ώστε να ισχύουν **f(–1)=e** και **xf'(x)=(x–1)f(x), x<0**. Να βρείτε τη συνάρτηση **f**.

Μονάδες 9

Γ. Έστω συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^{\lambda x}}{x}$, $x>0$, $\lambda>0$

i) Να μελετηθεί η **f** ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να αποδειχθεί ότι: $ex \geq 2+\ln x$, $x>0$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Έστω **f** παραγωγίσιμη στο **R** ώστε να ισχύει $f^2(x)-6f(x^2)\leq -9$ για κάθε $x\in R$.

i) Να βρείτε τα **f(0), f(1)**

Μονάδες 4

ii) Να δείξετε ότι η C_f έχει δυο τουλάχιστον οριζόντιες εφαπτόμενες.

Μονάδες 6

Β. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Να δείξετε ότι

i) $f(\alpha)\neq f(\beta)$ **Μονάδες 3**

ii) Υπάρχει $x_o\in(\alpha,\beta)$ ώστε $5f(x_o)=2f(\alpha)+3f(\beta)$ **Μονάδες 6**

iii) Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε να ισχύει

$$\frac{3}{f'(\xi_1)}+\frac{2}{f'(\xi_2)}=\frac{5}{f'(\xi)}.$$

Μονάδες 6

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 260

Β. 1. Σ

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-x,x]$, $x>0$ και $f(-x)=f(x)$.

Άρα από Θ.Rolle $f'(x_o)=0$, $x_o\in(-x,x)$

2. Σ

$f'(x)=g'(x)$, $x\in(-\infty,x_o)\cup(x_o,+\infty)$. Από ΣΘΜΤ ισχύει

$f(x)=g(x)+c_1$, $x<x_o \to \lim\limits_{x\to x_o-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_o-} g(x)+c_1$

$f(x)=g(x)+c_2$, $x>x_o \to \lim\limits_{x\to x_o+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_o+} g(x)+c_2$

$f(x_o)=g(x_o)+c_1 \Leftrightarrow c_1=0$

$f(x_o)=g(x_o)+c_2 \Leftrightarrow c_2=0$

Άρα $\left.\begin{array}{l} f(x)=g(x),\ x\neq x_o \\ f(x_o)=g(x_o)\end{array}\right\}\Rightarrow f(x)=g(x), x\in R.$

3. Σ

Η F είναι παραγωγίσιμη στο $(α,β)$ και έστω x_o θέση τοπικού ακροτάτου.
Από Θ.Fermat $F'(x_o)=0 \Leftrightarrow f(x_o)=0$.

4. Λ

π.χ $f(x)=x^2$ $f'(x)=2x$ $f'(2)=4\neq 0$
Η f όμως έχει ολικό ελάχιστο στο $x_o=0$

5. Σ

Αν η F είχε 5 διαφορετικές ρίζες στο Δ τότε από Θ.Rolle η $F'=f$ θα είχε τουλάχιστον 4 διαφορετικές ρίζες στο Δ. (Άτοπο)

Γ.

x	0		1		2		3		5
f'(x)		+	0	+		−	0	+	
f		↗		↗		↘		↗	
	ΤΕ				ΤΜ		ΤΕ		ΤΜ

ΘΕΜΑ 2°

Α. Είναι $y_A(t)=\dfrac{1}{a^2(t)}$ και $y'_A(t)=-\dfrac{2a(t)a'(t)}{a^4(t)}=-\dfrac{2a'(t)}{a^3(t)}$.

Έστω t_o η χρονική στιγμή κατά την οποία το σημείο Α διέρχεται από το Μ, οπότε θα ισχύει $a(t_o)=\dfrac{1}{a^2(t_o)} \Leftrightarrow a^3(t_o)=1 \Leftrightarrow a(t_o)=1$

Ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι: $y'_A(t_o)=-\dfrac{2a'(t_o)}{a^3(t_o)}=-\dfrac{2\cdot 3}{1}=-6$ cm/sec.

Β. Έστω $F(x)=\dfrac{α}{k+1}x^{k+1}+\dfrac{β}{μ+1}x^{μ+1}+\dfrac{γ}{ν+1}x^{ν+1}$, $x\in R$ τότε

$F'(x)=f(x)$ Η F παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ άρα και συνεχής.
$F(0)=0$
$F(1)=\dfrac{α}{k+1}+\dfrac{β}{μ+1}+\dfrac{γ}{ν+1}=0$ (Υποθ.) άρα από Θ.Rolle θα υπάρχει $ξ\in(0,1)$ ώστε
$F'(ξ)=0 \Leftrightarrow f(ξ)=0$.

Γ. i) Έστω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις τουλάχιστον ρίζες τις $ρ_1<ρ_2<ρ_3$ τότε $f(ρ_1)=f(ρ_2)=f(ρ_3)=0$.
Από Θ.Rolle για την f και τα διαστήματα $[ρ_1,ρ_2]$,$[ρ_2,ρ_3]$ θα υπάρχουν $x_1\in(ρ_1,ρ_2)$, $x_2\in(ρ_2,ρ_3)$ ώστε $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$.
Από Θ.Rolle για την f' και το $[x_1,x_2]$ θα υπάρχει $ξ\in(x_1,x_2)$ ώστε $f''(ξ)=0$ άτοπο αφού $f''(x)\neq 0$, $x\in R$ άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ 2 ρίζες.

ii) Προφανείς ρίζες της εξίσωσης $2007^x-2006x-1=0$ (Ι) οι αριθμοί 0 και 1.
Έστω $f(x)=2007^x-2006x-1$, $x\in R$.
$f'(x)=2007^x\cdot\ln 2007-2006$

$f''(x)=2007^x\ln^2 2007\neq 0$ για κάθε $x\in R$ άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ δύο ρίζες.

Τελικά η εξίσωση $f(x)=0$ δηλαδή η εξίσωση (Ι) έχει για ρίζες μόνο τους αριθμούς 0 και 1.

ΘΕΜΑ 3^o

Α. Για $x<0$ ισχύει $f'(x)=2x+1$ οπότε

$f(x)=x^2+x+c_1$ (1)

Για $x>0$ ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$ οπότε

$f(x)=\ln(x+1)+c_2$ (2)

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ με $f'(0)=1$ άρα και συνεχής στο $x_o=0$ δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$.

(1)$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+x+c_1)\Rightarrow f(0)=c_1$

(2)$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln(x+1)+c_2)\Rightarrow f(0)=c_2$

Είναι $f(1)=\ln 2 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \ln 2=\ln 2+f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$.

Άρα $f(x)=\begin{cases} x^2+x & ,x\le 0 \\ \ln(x+1) & ,x>0 \end{cases}$

Β. Είναι $xf'(x)=(x-1)f(x)\Leftrightarrow xf'(x)=xf(x)-f(x)\Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=xf(x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (xf(x))'=xf(x)$, $x<0$ (1)

Θεωρούμε $g(x)=-xf(x)$, $x<0$ οπότε θα ισχύει $g'(x)=g(x)$ και από γνωστή εφαρμογή ότι: $g(x)=ce^x\Leftrightarrow -xf(x)=ce^x$, $x<0$.

Για $x=-1$ έχουμε:

$f(-1)=ce^{-1}\Leftrightarrow e=ce^{-1}\Leftrightarrow c=e^2$.

Άρα $-xf(x)=e^{x+2}\Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{e^{x+2}}{x}$, $x<0$.

Γ. i) Είναι $f'(x)=\dfrac{\lambda e^{\lambda x}x-e^{\lambda x}}{x^2}=\dfrac{e^{\lambda x}(\lambda x-1)}{x^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \lambda x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\lambda}$

x	0		1/λ		+∞
f′(x)	‖	−	0	+	
f	‖	↘		↗	

$f'(x)>0 \Leftrightarrow \lambda x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{\lambda}$ $\qquad f'(x)<0 \Leftrightarrow \lambda x-1<0 \Leftrightarrow x<\frac{1}{\lambda}$

Η f είναι ↓ στο $(0,\frac{1}{\lambda}]$ και f↑ στο $[\frac{1}{\lambda},+\infty]$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $\frac{1}{\lambda}$ που είναι το $f(\frac{1}{\lambda})=\frac{e^{\lambda\frac{1}{\lambda}}}{\frac{1}{\lambda}}=\lambda e$

ii) Από το (i) ερώτημα ισχύει

$f(x)\geq f(\frac{1}{\lambda}) \Leftrightarrow \frac{e^{\lambda x}}{x}\geq \lambda e \Leftrightarrow e^{\lambda x}\geq \lambda e x$

Για $\lambda=e$ ισχύει $e^{ex}\geq e^2x \Leftrightarrow \ln e^{ex}\geq \ln(e^2x) \Leftrightarrow ex\geq \ln e^2+\ln x \Leftrightarrow ex\geq 2+\ln x$ $x>0$.

ΘΕΜΑ 4°

Α. i) Έχουμε: $f^2(x)-6f(x^2)+9\leq 0$ για κάθε $x\in R$ (Ι)
Από (Ι) και για $x=0$: $f^2(0)-6f(0)+9\leq 0 \Leftrightarrow$
$(f(0)-3)^2\leq 0 \Leftrightarrow (f(0)-3)^2=0 \Leftrightarrow f(0)=3$ (1)
Από (Ι) και για $x=1$: $f^2(1)-6f(1)+9\leq 0 \Leftrightarrow$
$(f(1)-3)^2\leq 0 \Leftrightarrow (f(1)-3)^2=0 \Leftrightarrow f(1)=3$ (2)

ii) Έστω $h(x)=f^2(x)-6f(x^2)+9$, $x\in R$ τότε από (Ι) έχουμε $h(x)\leq h(0)$ για κάθε $x\in R$ καθώς και $h(x)\leq h(1)$ για κάθε $x\in R$ δηλ η h παρουσιάζει στις θέσεις 0 και 1 ολικό μέγιστο και επειδή είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=2f(x)f'(x)-6f'(x^2)2x$ από Θ.Fermat θα ισχύουν

$$\begin{cases} h'(0)=0 \\ \text{και} \\ h'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2f(0)f'(0)-6f'(0)\cdot 2\cdot 0=0 \\ 2f(1)f'(1)-6f'(1^2)\cdot 2\cdot 1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cdot 3f'(0)=0 \\ 2\cdot 3f'(1)-6f'(1)2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 6f'(0)=0 \\ \text{και} \\ -6f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(0)=0 \\ \text{και} \\ f'(1)=0 \end{cases}$$

Άρα η C_f δέχεται στα σημεία (0,3), (1,3) οριζόντιες εφαπτόμενες.

Β. i) Έστω $f(\alpha)=f(\beta)$ τότε από Θ.Rolle για την f και το $[\alpha,\beta]$ θα υπάρχει $x_1\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(x_1)=0$ άτοπο. (Αφού $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$), άρα τελικά $f(\alpha)\neq f(\beta)$.

ii) Έστω $h(x)=5f(x)-2f(\alpha)-3f(\beta)$, $x\in[\alpha,\beta]$.
Η h συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πράξεις συνεχών

$h(\alpha)=5f(\alpha)-2f(\alpha)-3f(\beta)=3[f(\alpha)-f(\beta)]$

$h(\beta)=5f(\beta)-2f(\alpha)-3f(\beta)=-2[f(\alpha)-f(\beta)]$ άρα

$h(\alpha)h(\beta)=-6[f(\alpha)-f(\beta)]^2<0$ οπότε από Θ.Bolzano θα υπάρχει $x_o\in(\alpha,\beta)$ ώστε $h(x_o)=0 \Leftrightarrow 5f(x_o)=2f(\alpha)+3f(\beta)$.

iii) Από Θ.Μ.Τ. για την f και το $[\alpha,\beta]$ θα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi)}=\frac{\beta-\alpha}{f(\beta)-f(\alpha)} \Leftrightarrow \frac{5}{f'(\xi)}=\frac{5(\beta-\alpha)}{f(\beta)-f(\alpha)} \quad (1)$$

Από Θ.Μ.Τ για την f και τα $[\alpha,x_o]$, $[x_o,\beta]$ θα υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,x_o)$, $\xi_2\in(x_o,\beta)$ ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_o)-f(\alpha)}{x_o-\alpha} \overset{ii)}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1)=\frac{\frac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5}-f(\alpha)}{x_o-\alpha} \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi_1)=\frac{\frac{3f(\beta)-3f(\alpha)}{5}}{x_o-\alpha} \Leftrightarrow \frac{f'(\xi_1)}{1}=\frac{3[f(\beta)-f(\alpha)]}{5(x_o-\alpha)} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_1)}=\frac{5(x_o-\alpha)}{3[f(\beta)-f(\alpha)]} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{f'(\xi_1)}=\frac{5(x_o-\alpha)}{f(\beta)-f(\alpha)} \quad (2)$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f(x_o)}{\beta-x_o}=\frac{f(\beta)-\frac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5}}{6-x_o}=\frac{2(f(\beta)-f(\alpha))}{5(\beta-x_o)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{5(\beta-x_o)}{2(f(\beta)-f(\alpha))} \Leftrightarrow \frac{2}{f'(\xi_2)}=\frac{5(\beta-x_o)}{f(\beta)-f(\alpha)} \quad (3)$$

Από (2)+(3): $\dfrac{3}{f'(\xi_1)}+\dfrac{2}{f'(\xi_2)}=\dfrac{5x_0-5\alpha+5\beta-5x_o}{f(\beta)-f(\alpha)}=\dfrac{5(\beta-\alpha)}{f(\beta)-f(\alpha)}\overset{(1)}{=}\dfrac{5}{f'(\xi)}$.