ΤΡΙΩΡΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ :Ανάλυση: § 1.8 ,§ 2.1 έως και §2.3 (Σχολικό)

ΘΕΜΑ 1°

Α. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}$, $\nu\in N-\{0,1\}$. Να δείξετε ότι η **f** είναι παραγωγίσιμη στο **R** και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$.

Μονάδες 10

Β. Δώστε τους ορισμούς πότε μια συνάρτηση **f** είναι συνεχής στο διάστημα **(α,β)** και πότε στο **[α,β]**.

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

1. Αν η **f** συνεχής στο x_o με $f(x)>0$ κοντά στο x_o τότε $f(x_o)>0$. Σ Λ

2. Αν η συνάρτηση $f:A\to R$ συνεχής και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in A$, τότε η **f** διατηρεί πάντα σταθερό πρόσημο στο **Α**. Σ Λ

3. Αν **f,g** συνεχείς συναρτήσεις στο $\Delta=[0,\ 1]$ με $f(\Delta)=g(\Delta)=[1,\ 2]$ τότε η συνάρτηση **f+g** έχει μέγιστη τιμή το **4**. Σ Λ

4. Αν **f,g** παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο κοινό τους x_0 τότε ισχύει
$$(f(x_0)+g(x_0))' = f'(x_0)+g'(x_0)$$
Σ Λ

5. Αν για την συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει $f^2(x)=x^2$ και είναι συνεχής τότε είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$. Σ Λ

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2°

Α.Δίνονται οι συναρτήσεις **f, g** συνεχείς στο **R** ώστε να ισχύουν:

$\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)+\dfrac{|x^2-1|}{x-1}\right)=3$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)g(x)-1}{x}=1$ και οι C_f, C_g δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Τότε :

α) Δείξτε ότι $f(0) = 4$ και $g(0) = \frac{1}{4}$.

Μονάδες 6

β) Να δειχθεί ότι: $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in R$.

Μονάδες 5

Β. Έστω $f: R \to R$ άρτια για την οποία ισχύουν ότι $f'(2)=5$ και η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(2,6)$

α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=-2$. **Μονάδες 7**

β) Να βρείτε το $f'(-2)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3°

Α. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{x^2+2x}{x^2+1}$, $x \in R$ και $g(x)=\frac{x+1+2\sqrt{x+1}}{x+2}$, για $x>-1$.

Να δείξετε ότι η κλίση της f στο σημείο $(2,f(2))$ είναι τετραπλάσια της κλίσης της g στο $(3, g(3))$.

Μονάδες 10

Β. α) Δείξτε ότι $e^x + e^{-x} \geq 2$ για κάθε $x \in R$

Μονάδες 5

β) Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ παραγωγίσιμη με $f(1)=0$ και η $g(x)= e^{f(x)} + e^{-f(x)}$. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της g στο σημείο της με τετμημένη $x=1$

Μονάδες 5

γ) Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = xe^{ημ(x-1)} + \frac{e^{ημ(1-x)}}{x}$, $x > 0$ Δείξτε ότι τα σημεία της είναι όλα πάνω από την εφαπτομένη της στο σημείο $M(1,h(1))$ εκτός του σημείου M. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 4°

Α. Έστω συνάρτηση $f: R \to R$, 1-1, που είναι παραγωγίσιμη στα $x_1=1$ και $x_2=2$ με $f'(1) = 2$ και $f'(2) = 1$ και $f(1)=2$.

α) Να δείξετε ότι $\lim_{x \to 1} \frac{f(f(x)) - f(2)}{x-1} = 2$. **Μονάδες 7**

β) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f \circ f$ στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$ περνάει από το σημείο $(f(2),1)$ δείξτε ότι $f(2)=1$.

Μονάδες 7

Β. Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ που είναι γνήσια αύξουσα και συνεχής. Αν $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$ τότε :

α) Να δείξετε ότι $f(1)=0$.

Μονάδες 4

γ) Αν $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-1}$ για $x\neq 1$ να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της g τέμνει την ευθεία (ε) $y=2x$ σε τουλάχιστον ένα σημείο με τετμημένη $x_o\in(0,1)$.

Μονάδες 7

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1°

Α. Σχολικό βιβλίο σελ. 224.

Β. Σχολικό βιβλίο σελ. 191.

Γ. 1–Λ Για παράδειγμα η $f(x)=x^2>0$ κοντά στο $x_o=0$ και συνεχής στο $x_o=0$ και $f(0)=0$.

2–Λ Γιατί μπορεί το σύνολο Α να είναι ένωση διαστημάτων

3–Λ Για να συμβαίνει αυτό πρέπει να υπάρχουν x_ε, $x_\mu\in[0,1]$ ώστε $1=f(x_\varepsilon)\leq f(x)\leq f(x_\mu)=2$ και $1=g(x_\varepsilon)\leq g(x)\leq g(x_\mu)=2$, που δεν ισχύει πάντα π.χ. αν η f είναι γν. φθίνουσα στο [0,1] και η g γν. αύξουσα στο [0,1].

.

4–Λ Γιατί $(f(x_o)+g(x_o))'=0$ και $f'(x_o)+g'(x_o)$ είναι το άθροισμα των τιμών της f' και g' για $x=x_o$.

5–Σ Η $f^2(x)=x^2$ έχει λύσεις τις $f(x)=x$, $f(x)=-x$

$f(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}$ $\quad f(x)=\begin{cases}x, & x<0\\ -x, & x\geq 0\end{cases}$ που όλες είναι παραγωγίσιμες στο $x_o=1$.

ΘΕΜΑ 2°

Α. **α)** Αφού f συνεχής στο R $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$ οπότε από

$\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)+\dfrac{|x^2-1|}{x-1}\right)=3$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x^2-1|}{x-1}=3$ ή

$f(0)+\dfrac{|-1|}{-1}=3 \Leftrightarrow f(0)-1=3 \Leftrightarrow f(0)=4.$

Από $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)g(x)-1}{x}=1$ αν $h(x)=\dfrac{f(x)g(x)-1}{x}$ με $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=1$ και

$f(x)g(x)-1=xh(x)$ ή $f(x)g(x)=xh(x)+1$ οπότε

$\lim\limits_{x\to 0}(f(x)g(x))=\lim\limits_{x\to 0}(xh(x)+1)$ ή $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}(xh(x))+1$

$f(0)g(0)=0+1$ (αφού g συνεχής στο R) $\quad 4g(0)=1 \Leftrightarrow g(0)=\dfrac{1}{4}$.

β) Αρκεί $f(x)-g(x)>0$. Επειδή C_f, C_g δεν έχουν κοινό σημείο $f(x)\neq g(x)$ για κάθε $x\in R$ ή $f(x)-g(x)\neq 0$, $x\in R$ και επειδή $f(x)-g(x)$ συνεχής σαν διαφορά συνεχών θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R και επειδή $f(0)-g(0)=4-\dfrac{1}{4}=\dfrac{15}{4}>0$ τότε $f(x)-g(x)>0$, για κάθε $x\in R$.

Β. α) Είναι από υπόθεση $f'(2)=5$ άρα $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=5$ (1) και $f(2)=6$

Θέτω $g(x)=\dfrac{f(x)-6}{x-2}$, οπότε $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=5$ και ισοδύναμα έχουμε $f(x)=g(x)(x-2)+6$,

απ όπου $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(g(x)(x-2)+6)=6$ (2)

Ακόμη είναι $\lim\limits_{x\to -2}f(x)\overset{x=-\psi}{=}\lim\limits_{\psi\to 2}f(-\psi)\underset{f(-2)=f(2)}{\overset{f \text{ άρτια άρα } f(-\psi)=f(\psi)}{=}}\lim\limits_{\psi\to 2}f(\psi)\overset{(2)}{=}6$ άρα

$\lim\limits_{x\to -2}f(x)=f(2)=f(-2)$ που σημαίνει ότι f συνεχής στο -2

β) για $x\neq -2$ έχουμε

$f'(-2)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}\overset{x=-\psi}{=}\lim\limits_{\psi\to 2}\dfrac{f(-\psi)-f(-2)}{-\psi+2}\overset{f \text{ άρτια άρα } f(-\psi)=f(\psi)}{=}\lim\limits_{\psi\to 2}\dfrac{f(\psi)-f(2)}{-(\psi-2)}=$

$=-\lim\limits_{\psi\to 2}\dfrac{f(\psi)-f(2)}{(\psi-2)}\overset{(1)}{=}-f'(2)=-5$

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Είναι η f παραγωγίσιμη στο R σαν πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων και η

$g(x)=\dfrac{x+1+2\sqrt{x+1}}{x+1+1}=\dfrac{\sqrt{x+1}^2+2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}^2+1}=f(\sqrt{x+1})$, οπότε η g παραγωγίσιμη,

σαν σύνθεση παραγωγισίμων $\sqrt{x+1}$, $x>-1$ και f στο R.

Οπότε $g'(x)=f'(\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1})'=\dfrac{f'(\sqrt{x+1})}{2\sqrt{x+1}}$, οπότε $g'(3)=\dfrac{f'(2)}{4}\Leftrightarrow f'(2)=4g'(3)$.

Ή (2ος τρόπος)

f παραγωγίσιμη στο R σαν πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$f'(x)=\dfrac{(2x+2)(x^2+1)-2x(x^2+2x)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2x^3+2x+2x^2+2-2x^3-4x^2}{(x^2+1)^2}=$

$\dfrac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}$ άρα $f'(2)=\dfrac{-8+4+2}{25}=-\dfrac{2}{25}$ g παραγωγίσιμη στο R σαν πηλίκο

παραγωγισίμων συναρτήσεων με $g'(x)=\dfrac{(1+\frac{1}{\sqrt{x+1}})(x+2)-(x+1+2\sqrt{x+1})}{(x+2)^2}$

$g'(3)=\dfrac{(1+\frac{1}{2})5-(4+4)}{25}=\dfrac{5+\frac{5}{2}-8}{25}=\dfrac{\frac{5}{2}-3}{25}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{25}$ άρα $f'(2)=4\cdot(-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{25})=4g'(3)$

Β. α) Είναι $e^x+e^{-x}\geq 2\Leftrightarrow e^x+\dfrac{1}{e^x}\geq 2$ $(e^x>0,\ x\in R)$

$(e^x)^2+1\geq 2e^x\Leftrightarrow (e^x)^2-2e^x+1\geq 0\Leftrightarrow (e^x-1)^2\geq 0$ που ισχύει για κάθε $x\in R$.

β) Η $g(x)=e^{f(x)}+e^{-f(x)}$ παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ των $f(x)$, e^x παραγωγισίμων στο R με

$g'(x)=(e^{f(x)}+e^{-f(x)})'=(e^{f(x)})'+(e^{-f(x)})'=$

$=e^{f(x)}f'(x)+e^{-f(x)}(-f(x))'=e^{f(x)}f'(x)-e^{-f(x)}f'(x)=f'(x)(e^{f(x)}-e^{-f(x)})$ από όπου

$g'(1)=(e^{f(1)}-e^{-f(1)})f'(1)\overset{f(1)=0}{=}(e^0-e^0)f'(1)=0$

$g(1)=e^{f(1)}+e^{-f(1)}=e^0+e^0=1+1=2$ επομένως η εφαπτομένη της g στο σημείο $x_o=1$ είναι

$y-2=0(x-1)$ ή $y=2$

γ) Είναι $h(x)=xe^{\eta\mu(x-1)}+\dfrac{e^{\eta\mu(1-x)}}{x}=e^{\ln x}e^{\eta\mu(x-1)}+\dfrac{e^{-\eta\mu(x-1)}}{e^{\ln x}}=$
$=e^{\ln x+\eta\mu(x-1)}+e^{-(\ln x+\eta\mu(x-1))}$

Για $f(x)=\ln x+\eta\mu(x-1)$ με $f(1)=\ln 1+\eta\mu 0=0$, παραγωγίσιμη για $x>0$ σαν άθροισμα των παραγωγισίμων $\ln x$ και $\eta\mu(x-1)$ σύμφωνα με το (β) θα έχει εφαπτομένη. Η h στο $M(1,h(1))$ την $y=2$ και σύμφωνα με το (α) $h(x)\ge 2$ για κάθε $x>0$.

ΘΕΜΑ 4ο

Α. α) **(1ος τρόπος)**

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(f(x))-f(2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(f(x))-f(f(1))}{x-1}$

και επειδή f "1–1", $x\neq 1$ ισχύει $f(x)\neq f(1)$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{f(f(x))-f(f(1))}{f(x)-f(1)}\cdot\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\right)=L$

απ' όπου $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2$ και

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(f(x))-f(f(1))}{f(x)-f(1)}\overset{u=f(x)}{=}\lim\limits_{u\to 2}\dfrac{f(u)-f(2)}{u-2}=f'(2)=1$

Άρα $L=1\cdot 2=2$

(2ος τρόπος)

Επειδή η f παραγωγίσιμη στο $x_1=1$ με $f'(1)=2$ και για $f(1)=2$ η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_2=2$ με $f'(2)=1$, η $f\circ f$ παραγωγίσιμη στο $x_1=1$ με

$(f\circ f)'(1)=f'(f(1))\cdot f'(1)=f'(2)\cdot f'(1)=2$, όμως

$(f\circ f)'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(f\circ f)(x)-(f\circ f)(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(f(x))-f(f(1))}{x-1}$

οπότε $2=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(f(x))-f(2)}{x-1}$.

β) Από (α) $(f\circ f)'(1)=2$ οπότε η εφαπτομένη της $f\circ f$ στο $M(1,f(f(1)))$ ή $M(1,f(2))$ είναι

$\psi-f(2)=2\cdot(x-1)$ και αφού περνάει από το $(f(2),1)$, έχουμε:

$1-f(2)=2\cdot(f(2)-1)\Leftrightarrow 1-f(2)=2f(2)-2\Leftrightarrow$

$3f(2)=3\Leftrightarrow f(2)=1$

A. α) Επειδή f συνεχής στο R άρα και $x_o=1$ είναι

$$f(1)=\lim_{x\to 1} f(x) \overset{x\neq 0}{=} \lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)}{x-1}\cdot(x-1)\right)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1}(x-1)=1\cdot 0=0$$

β) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $\frac{f(x)}{x-1}=2x$ έχει λύση στο (0, 1), γι αυτό:

($1^{ος}$ τρόπος)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\frac{f(x)}{x-1}-2x,\ x\in[0,1)$

που είναι συνεχής στο [0, 1) σαν πράξεις μεταξύ συνεχών με $h(0)=\frac{f(0)}{-1}-0=$

$=-f(0)>0$ γιατί αφού f γνήσια αύξουσα $f(0)<f(1)=0$ οπότε $f(0)<0$.

Επίσης είναι $\lim_{x\to 1^-} h(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{x-1}-\lim_{x\to 1^-}(2x)=1-2=-1<0$ άρα υπάρχει α κοντα στο 1 που $h(a)<0$ οπότε επειδή $h(a)<0<h(0)$ και h(x) συνεχής από Θ.Ε.Τ υπάρχει $x_o\in(0,a)\subseteq(0,1)$ ώστε $h(x_o)=0$

($2^{ος}$ τρόπος)

Η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x-1}$ ορίζεται στο [0,1) και είναι συνεχής, αφού είναι πηλίκο των συνεχών f στο R, άρα και στο [0,1) και και της x–1 στο R άρα και στο [0,1) και επειδή $\lim_{x\to 1} g(x)=1$, θεωρούμε την $\varphi(x)=\begin{cases} g(x), 0\le x<1 \\ 1, \quad x=1\end{cases}$ που είναι συνεχής στο [0,1].

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x)=2x \Leftrightarrow g(x)-2x=0$ έχει λύση στο (0,1) ή $\varphi(x)-2x=0$ έχει λύση στο (0,1). Έτσι θεωρούμε την $h(x)=\varphi(x)-2x$ στο [0,1] που είναι συνεχής σαν διαφορά συνεχών με

$h(1)=\varphi(1)-2=1-2=-1<0$

$h(0)=\varphi(0)-0=g(0)=\frac{f(0)}{0-1}=-f(0)$

και επειδή f γνήσια αύξουσα με $0<1$ ισχύει $f(0)<f(1)=0$ οπότε $-f(0)>0$, δηλαδή $h(0)>0$, άρα $h(0)\cdot h(1)<0$, οπότε σύμφωνα με Θ.Β. υπάρχει $x_o\in(0,1)$ ώστε $h(x_o)=0$, δηλαδή η $h(x)=0$, άρα και η αρχική έχει λύση στο (0,1).