ΤΡΙΩΡΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ : Μιγαδικοί: § 2.1, 2.2, 2.3 Σχολικού βιβλίου

Ανάλυση: § 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 (Σχολικού βιβλίου)

ΘΕΜΑ 1

Α. Έστω πολυώνυμο $P(x)=a_\nu x^\nu+a_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+a_1x+a_0$ με $a_\nu \neq 0$, $\nu\in N^*$ και $x_0\in R$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$.

(Μονάδες 10)

Β. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

(Μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας (Σ) **Σωστό** ή (Λ) **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1)	Αν η εξίσωση $x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει ρίζα τον αριθμό $1+i$ τότε θα έχει και το $1-i$.	Σ Λ
2)	Για κάθε z_1, $z_2\in C$ ισχύει $Re(z_1+z_2)=Re(z_1)+Re(z_2)$.	Σ Λ
3)	Αν η συνάρτηση f: $A\to R$ έχει αντίστροφη f^{-1} τότε $f\circ f^{-1}$ και $f^{-1}\circ f$ είναι ίσες συναρτήσεις.	Σ Λ
4)	Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.	Σ Λ
5)	Έστω μια συνάρτηση f: $A\to R$ με $A\subseteq R$ που είναι "1–1" στο A, τότε f γνήσια μονότονη στο A.	Σ Λ

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ότι ο μιγαδικός $w=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2+\beta z+\gamma=0$, όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί.

α) Να αποδείξετε ότι $\beta=1$ και $\gamma=1$.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $w^3=1$ και $w^2=\overline{w}$

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το σύνολο των εικόνων του μιγαδικού z για τον οποίο ισχύει

$$|z-w| = \left|\frac{1}{w^{31}}+\overline{w}^{31}\right|$$

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 3

Α. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: R \to R$ ώστε να ισχύει $f(1+f(x))=x+f(x)$ για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι

α. Η f είναι "1–1"

β. $f(0)=-1$ και $f(1)\neq 0$. (Μονάδες 10)

Β. Έστω συνάρτηση f: $R \to R$ για την οποία ισχύει $f(x+h)=f(x)+f(h)$, για κάθε x, $h \in R$ και $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=2008$. Να δείξετε ότι:

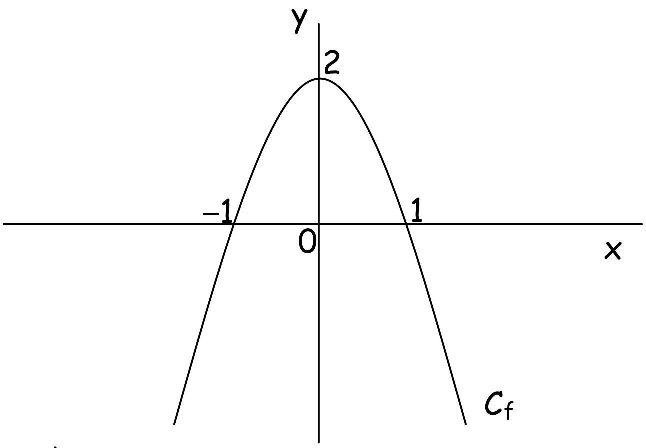
α) $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ (Μονάδες 4)

β) $\lim_{x\to 0}\frac{|-2f(x)+x^3-2|-|f(x)+2|}{x}=2008$ (Μονάδες 5)

γ) $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=2008$ (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Α. Δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο πιο κάτω σχήμα:



Βάση του σχήματος

α) Να λυθεί η εξίσωση $f(|x-2|-1)=0$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης $g(x)=f(f(x))$ στο διάστημα $[-1,0]$.

(Μονάδες 5)

Β. Θεωρούμε την συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ που ικανοποιεί την σχέση $f(x)\cdot e^{f(x)}=x$ για κάθε $x\geq 0$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\geq 0$.

(Μονάδες 3)

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα.

(Μονάδες 7)

γ) Να λυθεί η ανίσωση $(f(x))^2\leq (f(1)+f(2))\cdot f(x)-f(1)\cdot f(2)$.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1°

Α. *Θεωρία σελ. 167*

Β. *Θεωρία σελ. 141*

Γ. α→Λ όταν οι β, $\gamma\in R$ τότε έχει συζυγείς μιγαδικές ρίζες η 2ου βαθμού εξίσωση.

β→Σ ισχύει από τον ορισμό της πρόσθεσης μιγαδικών.

γ→Λ γιατί έχουν διαφορετικά πεδία ορισμού η $f^{-1}of$ το A και η fof^{-1} το f(A).

δ→Λ π.χ $f(x)=\frac{|x|}{x}$ και $g(x)=\frac{x}{|x|}$ με $x\neq 0$ $\frac{f(x)}{g(x)}=1$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ ενώ δεν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$

ε→Λ π.χ η $f(x)=\begin{cases} x, & x\leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ είναι "1–1" στο R δεν είναι γνήσια μονότονη στο R.

ΘΕΜΑ 2°

α) *Αφού ο μιγαδικός* $w=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ *είναι ρίζα*

της $z^2+\beta z+\gamma=0$ με β, $\gamma\in R$ θα είναι ως γνωστόν και ο $\overline{w}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Σύμφωνα τώρα με τους τύπους Vietta θα έχουμε ότι

$w+\overline{w}=-\beta$ και $w\cdot\overline{w}=\gamma$ οπότε αντίστοιχα θα ισχύει

$2(-\frac{1}{2})=-\beta$ και $(-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=\gamma$ απ όπου προκύπτει

β=1 και **γ=1**

β) (1ος τρόπος)

Λόγω (α) επειδή β=1 και γ=1 ο w είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2+z+1=0$

άρα ισχύει $w^2+w+1=0$ (1) επομένως

$w^2=-w-1$ οπότε $w^3=ww^2=w(-w-1)=-w^2-w=1$ λόγω (1)

τώρα επειδή $w^3=1 \Leftrightarrow w^2w=1 \Leftrightarrow w^2=\frac{1}{w}$ και

επειδή από Vietta $w\overline{w}=1 \Leftrightarrow \overline{w}=\frac{1}{w}$ προκύπτει $w^2=\overline{w}$

(2ος τρόπος)

$w^3=(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^3=(-\frac{1}{2})^3-3(-\frac{1}{2})^2 i\frac{\sqrt{3}}{2}+3(-\frac{1}{2})(i\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(i\frac{\sqrt{3}}{2})^2=....=1$

$w^2=(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})^2=(-\frac{1}{2})^2+2(-\frac{1}{2})i\frac{\sqrt{3}}{2}+(i\frac{\sqrt{3}}{2})^2=...=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\overline{w}$

γ) Είναι $w^{31}=w^{30}w=(w^3)^{10}w=w$ (αφού $w^3=1$ από (α))

$\overline{w}^{31}=(w^2)^{31}$ (αφού είναι $w^2=\overline{w}$ από (α))
$=w^{62}=w^{60}w^2=(w^3)^{20}w^2=w^2$

άρα $\left|\frac{1}{w^{31}}+\overline{w}^{31}\right|=\left|\frac{1}{w}+w^2\right|=\frac{|1+w^3|}{|w|}$ επειδή $w^3=1$ και $|w|=1$

$=\frac{|1+1|}{2}=2$

οπότε θα έχουμε $|z-w|=2$ ή $\left|z-\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|=2$

που σημαίνει ότι οι εικόνες του z είναι σημεία κύκλου κέντρου $K(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$ ακτίνας 2.

ΘΕΜΑ 3ο

Α. α) Για $x_1, x_2\in R$ με $f(x_1)=f(x_2)$ έχουμε ότι ισχύει

$1+f(x_1)=1+f(x_2)$ οπότε και

$f(1+f(x_1))=f(1+f(x_2))$ και λόγω υπόθεσης

$x_1+f(x_1)=x_2+f(x_2)$

και αφού $f(x_1)=f(x_2)$ προκύπτει ότι $x_1=x_2$ επομένως f είναι συνάρτηση "1–1".

β) Για x=0 στην $f(1+f(x))=x+f(x)$ έχουμε

$f(1+f(0))=f(0)$ επειδή f "1–1"

$1+f(0)=0$ άρα

$f(0)=-1$

Έστω τώρα ότι $f(1)=0$ τότε για x=1

στην $f(1+f(x))=x+f(x)$ έχουμε

$f(1+f(1))=1+f(1)$ οπότε

$f(1)=1$ και αφού υποθέσαμε ότι $f(1)=0$ προκύπτει ότι 0=1

άτοπο άρα $f(1)\neq 0$.

Β. α) Αν $g(h)=\frac{f(h)}{h}$ για $h\neq 0$ τότε $\lim_{h\to 0}g(h)=2008$

και επειδή $f(h)=h\cdot g(h)$ θα ισχύει ότι

$\lim_{h\to 0}f(h)=\lim_{h\to 0}h\cdot g(h)=0\cdot 2008=0$

β) Έχουμε $\lim_{x\to 0}(|-2f(x)+x^3-2|-|f(x)+2|)=|-0+0-2|-|0+2|=2-2=0$

και $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ επομένως εδώ έχουμε μορφή $\frac{0}{0}$ και πρώτα διώχνουμε τα απόλυτα ως εξής: επειδή $\lim\limits_{x\to 0}(-2f(x)+x^3-2) = -2 < 0$ θα είναι $-2f(x)+x^3-2<0$ κοντά στο $x_o=0$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+2) = 2 > 0$ θα είναι $f(x)+2>0$ κοντά στο $x_o=0$ επομένως η $g(x)=\frac{|-2f(x)+x^3-2|-|f(x)+2|}{x}$ κοντά στο $x_o=0$ παίρνει την μορφή

$$g(x)=\frac{2f(x)-x^3+2-(f(x)+2)}{x}=\frac{2f(x)-x^3+2-f(x)-2}{x}$$

$$=\frac{f(x)-x^3}{x}=\frac{f(x)}{x}-x^2$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim\limits_{x\to 0} x^2=2008$ (από υπόθεση $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=2008$)

γ) Επειδή $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=\lim\limits_{h\to 0} f(x_o+h)$ ως γνωστόν από την θεωρία θα έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

Αφού $f(x+h)=f(x)+f(h)$ έχουμε ίσο με

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2)+f(h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$$
$$=2008$$

ΘΕΜΑ 4ο

Α.α) επειδή βάσει του σχήματος η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x΄x μόνο στα σημεία -1 και 1 θα ισχύει $f(|x-2|-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2|-1=-1 \\ ή \\ |x-2|-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2|=0 \\ ή \\ |x-2|=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ ή \\ x-2=2 \text{ ή } x-2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow$ x=2 ή x=4 ή x=0.

β) $-1\le x_1<x_2\le 0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(-1)\le f(x_1)<f(x_2)\le f(0) \Leftrightarrow 0\le f(x_1)<f(x_2)\le 2 \overset{f\downarrow[0,2]}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow f(0)\ge f(f(x_1))>f(f(x_2))\ge f(2) \Leftrightarrow 2\ge f(f(x_1))>f(f(x_2))\ge f(2)$

Άρα η $g(x)=(f\circ f)(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0]$.

Β.α) Επειδή $x\ge 0$ από $f(x)e^{f(x)}=x$ έχουμε $f(x)e^{f(x)}\ge 0$ και αφού $e^{f(x)}>0$ για κάθε x θα ισχύει $f(x)\ge 0$ για $x\in[0,+\infty)$.

β) Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2\in[0,+\infty)$ ώστε για $x_1<x_2$ να ισχύει

$$f(x_1)\ge f(x_2)\ge 0 \quad (1)$$

τότε θα ισχύει και $e^{f(x_1)} = e^{f(x_2)} > 0$ (2) οπότε πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε $e^{f(x_1)}f(x_1) = e^{f(x_2)}f(x_2)$ άρα $x_1 \geq x_2$ άτοπο

Άρα για κάθε x_1, $x_2 \in [0,+\infty)$ με $x_1 < x_2$ θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ που σημαίνει ότι f είναι γνήσια αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

γ) Έχουμε $(f(x))^2 \leq (f(1)+f(2))f(x) - f(1)f(2) \Leftrightarrow f^2(x) - (f(1)+f(2))f(x) - f(1)f(2) \leq 0$ με $f(x)=\psi$ έχουμε $\psi^2 - (f(1)+f(2)\psi - f(1)f(2)) \leq 0$ (1)
επειδή οι ρίζες του τριωνύμου είναι f(1), f(2) με $f(1) < f(2)$ (αφού $1<2$ και f γνήσια αύξουσα) η (1) ισχύει μόνο όταν $f(1) \leq \psi \leq f(2)$ οπότε $f(1) \leq f(x) \leq f(2)$ και αφού f γνήσια αύξουσα $1 \leq x \leq 2$.