ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να δείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

Μονάδες 12

Β.1. Έστω η συνάρτηση f(x) = ημx. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$f'(x) = \text{συν}x .$$

Μονάδες 8

Β.2. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α,β] και συνεχής στο (α,β], τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α,β] μία μέγιστη τιμή.

Μονάδα 1

β. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

Μονάδα 1

γ. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$, τότε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Μονάδα 1

δ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε

$$\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx .$$

Μονάδα 1

ε. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε f(x) > 0 κοντά στο x_0 .

Μονάδα 1

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(\nu) = i^{\nu} z$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

α. Να δείξετε ότι f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0 .

Μονάδες 7

β. Αν $|z| = \rho$ και Arg(z) = θ, να δείξετε ότι

$$f(13) = \rho\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right].$$

Μονάδες 8

γ. Αν $|z| = 2$ και Arg(z) = $\frac{\pi}{3}$, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών 0, z και f(13).

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης fog είναι 1-1.

α. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.

Μονάδες 7

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση:
$g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

Μονάδες 18

ΘΕΜΑ 4ο

α. Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο [α, β].
Να αποδείξετε ότι αν h(x) > g(x) για κάθε x ∈ [α, β], τότε και

$$\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx .$$

Μονάδες 2

β. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 0 .$$

ι) Να εκφραστεί η f΄ ως συνάρτηση της f.

Μονάδες 5

ιι) Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < x f'(x)$, για κάθε x > 0.

Μονάδες 12

iii) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x = 0, x = 1 και τον άξονα x΄x, να δείξετε ότι

$$\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2}f(1) \quad .$$

Μονάδες 6

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^{o}

Α. Σχολικό Βιβλίο σελ. 334 – 335.

Β.1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 224 – 225.

Β.2. α $\to$ Λ
β $\to$ Λ
γ $\to$ Σ
δ $\to$ Σ
ε $\to$ Σ

ΘΕΜΑ 2^{o}

α. $f(\nu) = i^{\nu} . z,\ \nu \in N^*$

$f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0$

$i^3 \cdot z + i^8 \cdot z + i^{13} \cdot z + i^{18} \cdot z = 0$

$(i^3 + i^8 + i^{13} + i^{18})z = 0$

$(-i + 1 + i - 1)z = 0$

β. $z = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$

$f(13) = i^{13} \cdot z = iz = (\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + i\eta\mu\frac{\pi}{2})\rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) =$

$= \rho[\sigma\upsilon\nu(\theta + \frac{\pi}{2}) + i\eta\mu(\theta + \frac{\pi}{2})]$

γ. $|z| = 2$

$z = 2(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + i\eta\mu\frac{\pi}{3}) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{1 + i\sqrt{3}}$

$f(13) = 2\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\right] = 2\left[\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} + i\eta\mu\frac{5\pi}{6}\right] =$

$= 2\left[\sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\eta\mu\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\left[-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} + i\eta\mu\frac{\pi}{6}\right] =$

$= 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right] = -\sqrt{3} + i$

Έστω O(0, 0) B(1, $\sqrt{3}$) Γ(-$\sqrt{3}$, 1)

|ΟΒ| = 2

|ΟΓ| = 2

|ΒΓ| = $\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}-1\right)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Παρατηρώ ότι το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\text{ΟΒΓ}}$ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο διότι:

$|ΟΒ|^2 + |ΟΓ|^2 = 2^2 + 2^2 = 8 = |ΒΓ|^2$

άρα $E_{ΟΒΓ} = \frac{1}{2} 2 \cdot 2 = 2$ τμ.

<u>$2^{ος}$ τρόπος για τον υπολογισμό του εμβαδού</u>

(ΟΒΓ) = $\frac{1}{2}\left|\det\left(\vec{ΟΒ}, \vec{ΟΓ}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|1+3| = 2$ τμ.

<u>ΘΕΜΑ 3^{ο}</u>

α. Για κάθε $x_1, x_2 \in R$ με $g(x_1) = g(x_2)$ τότε

$f(g(x_1)) = f(g(x_2))$

$(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$

και επειδή η $f \circ g$ είναι 1–1 θα είναι: $x_1 = x_2$

οπότε η g είναι 1-1.

β. Έχουμε: $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$

επειδή η g είναι 1-1 (από το α. ερώτημα) η παραπάνω είναι ισοδύναμη με:

$f(x) + x^3 - x = f(x) + 2x - 1$
$x^3 - x = 2x - 1$
$x^3 - 3x + 1 = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x^3 - 3x + 1, \quad x \in R$.
$h'(x) = 3x^2 - 3$

- Η h είναι συνεχής στο $[-2, -1]$ ως πολυωνυμική.
- $h(-2) = -1, \quad h(-1)= 3$ οπότε $h(-2) \cdot h(-1) < 0$

Άρα από θεώρημα Bolzano η $h(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-2, -1)$ και επειδή f αύξουσα η ρίζα μοναδική.

Όμοια εφαρμόζουμε το Bolzano στο $[-1, 0]$.
Η h γνήσια φθίνουσα.
$h(-1) = 3 \qquad h(0) = 1 \qquad h(-1)\, h(0) > 0$
Η h δεν έχει ρίζα.

Όμοια εφαρμόζουμε θ. Bolzano στο διάστημα $[0, 1]$
Η h γνήσια φθίνουσα
$h(0) = 1 \qquad h(1) = -1 \qquad h(0)\, h(1) < 0$
Η h έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 1)$.

Η h στο $[1, 2]$ γνήσια αύξουσα.
$h(1) = -1 \qquad h(2) = 3 \qquad h(1)\, h(2) < 0$
Η h έχει μοναδική θετική ρίζα στο $(1, 2)$.

Επειδή η h τρίτου βαθμού οι τρεις μοναδικές ρίζες της εξίσωσης:
$x^3 - 3x + 1 = 0$
$x_1 \in (-2, -1)$ η f αύξουσα, άρα 1-1 μοναδική ρίζα το x_1
$x_2 \in (0, 1)$ η f φθίνουσα, άρα 1-1 μοναδική ρίζα το x_2
$x_3 \in (1, 2)$ η f αύξουσα, άρα 1-1 μοναδική ρίζα το x_3

δηλαδή δύο θετικές και μία αρνητική.

ΘΕΜΑ 4^o

α. $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

$h(x) - g(x) > 0$

Άρα $\int_{\alpha}^{\beta} (h(x) - g(x))dx > 0$

$$\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx > 0$$

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx}$$

β.i) Παραγωγίζοντας τη σχέση $f(x) - e^{-f(x)} = x - 1$ έχουμε:

$$f'(x) - e^{-f(x)} \cdot \left(-f(x)\right)' = (x-1)'$$

$$f'(x) + f'(x) \cdot e^{-f(x)} = 1$$

$$f'(x)\left(1 + e^{-f(x)}\right) = 1$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}}} \qquad x \in R$$

ii) $$f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}} > 0$$

$$f''(x) = \frac{f'(x) \cdot e^{-f(x)}}{\left(1 + e^{-f(x)}\right)^2} > 0$$ για κάθε $x \in R$.

Άρα f΄ γνησίως αύξουσα στο R.

Η f στο [0, x] συνεχής ως παραγωγίσιμη.

Η f στο (0, x) παραγωγίσιμη.

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, x)$ ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}, \qquad \left(f(0) = 0\right)$$

$$f'(\xi) = \frac{f(x)}{x} \qquad (1)$$

Όμως $\xi \in (0, x) \Rightarrow 0 < \xi < x \Rightarrow f'(0) < f'(\xi) < f'(x) \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow f'(0) < \frac{f(x)}{x} < f'(x) \overset{x>0}{\Rightarrow} x \cdot f'(0) < f(x) < x \cdot f'(x) \Rightarrow$$

$$\overset{f'(0)=\frac{1}{2}}{\Rightarrow} \boxed{\frac{1}{2}x < f(x) < x \cdot f'(x)}$$

iii) Από προηγούμενο ερώτημα f(x) > 0, για κάθε x > 0.

Άρα E = $\int_0^1 f(x)dx$

Από προηγούμενο ερώτημα:

$\frac{x}{2} < f(x) < x \cdot f'(x)$ για x > 0

$$\overset{4\alpha}{\Rightarrow} \int_0^1 \frac{x}{2}dx < \int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 x \cdot f'(x)dx \Rightarrow \left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^1 < \mathrm{E} < [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^1 < \mathrm{E} < 1f(1) - \mathrm{E} \Rightarrow \frac{1}{4} < \mathrm{E} < f(1) - \mathrm{E}$$

Άρα $\mathrm{E} < f(1) - \mathrm{E} \Rightarrow 2\mathrm{E} < f(1) \Rightarrow \mathrm{E} < \frac{1}{2}f(1)$

Επομένως $\boxed{\frac{1}{4} < \mathrm{E} < \frac{1}{2}f(1)}$