Μαθηματικά Κατεύθυνσης

1ο ΘΕΜΑ

$f(x)=\frac{\ln x-\ln\alpha}{x-\alpha}$ να δειχθεί ότι η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $(0,\alpha)$.

2ο ΘΕΜΑ

Έστω η συνάρτηση $f: R\to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f(0)=f'(0)=1$ και για κάθε $x\in R$ ισχύει $f''(x)<f'(x)$.
Δείξτε ότι για κάθε $x\in R$ ισχύει $f(x)\le e^x$.

3ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R\to R$ με $f'(x)=e^{x^2}$ για κάθε $x\in R$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\cdot f(x)}{e^{x^2}}$.

4ο ΘΕΜΑ

Έστω η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ παραγωγίσιμη στο [α,β] με f' συνεχή στο [α,β] για την οποία ισχύει ότι $\int_\alpha^\beta f(x)\cdot e^x dx=0$ και $\int_\alpha^\beta f'(x)\cdot e^x dx=0$

α) Δείξτε ότι $f(\alpha)\cdot e^\alpha=f(\beta)\cdot e^\beta$

β) Δείξτε ότι υπάρχει $x_o\in(\alpha,\beta)$: $f(x_0)=-f'(x_o)$

ΛΥΣΕΙΣ

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,α) με

$$f'(x)=\frac{(\ln x-\ln\alpha)'\cdot(x-\alpha)-(x-\alpha)'(\ln x-\ln\alpha)}{(x-\alpha)^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{x}\cdot(x-\alpha)-(\ln x-\ln\alpha)}{(x-\alpha)^2}=\frac{1-\frac{\alpha}{x}-\ln x+\ln\alpha}{(x-\alpha)^2}$$

Το πρόσημο της παραγώγου εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από το πρόσημο του αριθμητή. Θεωρούμε και συνάρτηση g με $g(x)=1-\frac{\alpha}{x}-\ln x+\ln\alpha,\ x\in(0,\alpha)$

Η g είναι συνεχής στο (0,α] και παραγωγίσιμη στο (0,α)με

$$g'(x)=0+\frac{\alpha}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{\alpha-x}{x^2}$$

Για κάθε $x\in(0,\alpha)$ είναι $g'(x)=\frac{\alpha-x}{x^2}>0$ και έτσι η g είναι γνήσια αύξουσα στο (o,α] άρα $g_{max}=g(\alpha)=0$ και ακόμη $g(x)<g(\alpha)\Leftrightarrow g(x)<0$.

Οπότε $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-\alpha)^2}<0$ άρα η g είναι γνήσια φθίνουσα στο (0, α).

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

$f(x)\le e^x\Leftrightarrow\frac{f(x)}{e^x}\le\frac{e^x}{e^x}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{e^x}-1\le 0$ (;)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}-1,\ x\in R$ έχουμε:

$$g'(x)=\frac{f'(x)\cdot e^x-f(x)\cdot e^x}{(e^x)^2}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x},\ x\in R$$

Το πρόσημο της g' εξαρτάται από το πρόσημο της $\Phi(x)=f'(x)-f(x)$. Είναι $\Phi'(x)=f''(x)-f'(x)\Leftrightarrow\Phi'(x)<0$ (διότι $f''(x)<f'(x)$). Άρα η Φ είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

Για x=0 είναι $\varphi(0)=f'(0)-f(0)=1-1=0$

Συνοπτικά

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Φ΄	↘		↘
Φ	+	0	-

Άρα $g'(x)=\frac{\Phi(x)}{e^x}=0\Leftrightarrow\Phi(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

Οπότε έχουμε συνοπτικά τον πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g΄(x)	+	0	-
g(x)	↗	max	↘

Για $x\le0$ είναι $g(x)\le g(0)\Leftrightarrow g(x)\le 0$

Για $x\ge0$ είναι $g(x)\le g(0)\Leftrightarrow g(0)\le 0$ οπότε για κάθε $x\in R$

$g(x)\le g(0)\Leftrightarrow\frac{f(x)}{e^x}-1\le 0\Leftrightarrow f(x)\le e^x,\ x\in R$

ΛΥΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Η συνάρτηση $\frac{x\cdot f(x)}{e^{x^2}}$ είναι ορισμένη στο R.

Για το όριο στο $+\infty$, έχουμε ότι για κάθε x>0, η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο [0,x], οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,x)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Leftrightarrow f(x)-f(0)=x\cdot f'(\xi)$

$\Leftrightarrow f(x)=f(0)+xf'(\xi)\Leftrightarrow f(x)=f(0)+x\cdot e^{\xi^2}$

Όμως $e^{\xi^2}>e^0$ άρα ισχύει ότι

$f(x)=f(0)+xe^{\xi^2}>f(0)+xe^0\Leftrightarrow f(x)>f(0)+x$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(0)+x)=+\infty$ άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\,f'(x)+f(x)}{2xe^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2f'(x)+xf''(x)}{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}{(2+4x^2)e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+2x^2}{2+4x^2}=\frac{1}{2}$$

ΛΥΣΗ 4ου ΘΕΜΑΤΟΣ

$$\int_\alpha^\beta f'(x)\cdot e^x dx=0\Leftrightarrow\left[f(x)\cdot e^x\right]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta f(x)\cdot(e^x)'dx=0$$

$$\Leftrightarrow f(\beta)\cdot e^\beta-f(\alpha)\cdot e^\alpha-\int_\alpha^\beta f(x)\cdot e^x dx=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\beta)\cdot e^\beta-f(\alpha)\cdot e^\alpha=0\Leftrightarrow f(\beta)\cdot e^\beta=f(\alpha)\cdot e^\alpha$$

β) Έστω η συνάρτηση $g(x)=f(x)e^x$, $x\in[\alpha,\beta]$

- g συνεχής στο [α,β] ως γινόμενο συνεχών
- g παραγωγίσιμη στο (α,β) με $g'(x)=f'(x)e^x+f(x)e^x$
- g(α)=g(β) (από (α) ερώτημα)

άρα από θεώρημα Rolle υπάρχει

$x_0\in(\alpha,\beta)$: $g'(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)e^{x_0}+f(x_0)e^{x_0}=0$

$\Leftrightarrow f'(x_0)+f(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)=-f(x_0)$

ΚΥΠΡΙΑΝΟΣ ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ