Μαθηματικά Κατεύθυνσης

1ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η $f: R \to R$ για την οποία ισχύει η σχέση $3 \cdot f(x) - 2 \cdot f(-x) = 5x - 3$, για κάθε $x \in R$.

i) Να βρείτε τον τύπο της f

ii) Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} [(f(x) + 3) \cdot ημ\frac{1}{x}$

iii) Αν είναι $(gof)(x) = x^2 + 1$, για κάθε $x \in R$ να βρείτε τον τύπο της g

2ο ΘΕΜΑ

Έστω η συνεχής συνάρτηση f στο [α,β] και οι μιγαδικοί $z = f(β) - iβ^2$ και $w = f(α) + iα^2$ με $|w + \overline{z}| < |\overline{w} - z|$. Να δείξετε ότι

υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ \in (α,β)$ ώστε $f(ξ) = 0$.

3ο ΘΕΜΑ

Αν για την συνάρτηση $f: R \to R$ ισχύει $f^3(x) + f(x) + x = 4$, για κάθε $x \in R$ να δείξετε ότι:

i) Η f είναι συνάρτηση “1-1”

ii) Να βρείτε την f^{-1}

iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x) = f(1 - x)$

iv) Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} \left[(4 - f^{-1}(x)) \cdot ημ\frac{1}{x}\right]$

4ο ΘΕΜΑ

α) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} |z - 2| + \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4}, & x < 2 \\ |z + i| + x - \dfrac{5}{4}, & x \geq 2 \end{cases}$$

Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ να δείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού z κινείται σε ευθεία της οποίας να προσδιορίσετε την εξίσωση.

β) Από τους μιγαδικούς z του ερωτήματος (α) να βρεθεί εκείνος που έχει το ελάχιστο μέτρο

ΛΥΣΕΙΣ

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

i) Δίνεται ότι $3 \cdot f(x) - 2 \cdot f(-x) = 5x - 3$, για κάθε $x \in R$

Θέτουμε όπου x το -x και έχουμε $3 \cdot f(-x) - 2 \cdot f(x) = -5x - 3$, όπου λύνουμε το σύστημα

$$(Σ) \begin{cases} 3 \cdot f(x) - 2 \cdot f(-x) = 5x - 3 \\ 3 \cdot f(-x) - 2 \cdot f(x) = -5x - 3 \end{cases}$$ και παίρνουμε

$f(x) = x - 3$

ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[(f(x) + 3) \cdot ημ\frac{1}{x}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[(x - 3 + 3) \cdot ημ\frac{1}{x}\right]$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x \cdot ημ\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ημ\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$, θέτω $\frac{1}{x} = u$ οπότε

$\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{ημu}{u} = 1$

iii) Δίνεται $gof(x) = x^2 + 1$

$g(f(x)) = x^2 + 1 \Leftrightarrow g(x - 3) = x^2 + 1 \overset{x - 3 = ω}{\Longleftrightarrow} g(ω) = ω^2 + 6ω + 10$. Άρα $g(x) = x^2 + 6x + 10$ για κάθε $x \in R$

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

$|w + \overline{z}| < |\overline{w} - z| \Leftrightarrow$

$|f(α) + iα^2 + f(β) + iβ^2| < |f(α) - iα^2 - f(β) + iβ^2| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |(f(α) + f(β)) + i(α^2 + β^2)| < |(f(α) - f(β)) + i(β^2 - α^2)| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(f(α) + f(β))^2 + (α^2 + β^2)^2} < \sqrt{(f(α) - f(β))^2 + (β^2 - α^2)^2}$

$\Leftrightarrow f^2(α) + f^2(β) + 2f(α)f(β) + α^4 + 2α^2β^2 < f^2(α) + f^2(β) -$

$- 2f(α)f(β) + α^4 - 2α^2β^2 \Leftrightarrow 4f(α)f(β) < -4α^2β^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(α)f(β) < -α^2β^2 \Leftrightarrow f(α)f(β) < 0$

Η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Bolzano στο [α,β] άρα υπάρχει $ξ \in (α, β)$ τέτοιο ώστε $f(ξ)=0$

ΛΥΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

i) $f^3(x)+f(x)+x=4$ άρα $f^3(x)+f(x)=4-x$ (1) για κάθε $x \in R$.

Τότε για κάθε $x_1, x_2 \in R$ με $f(x_1)=f(x_2)$ έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} f^3(x_1) = f^3(x_2) \\ f(x_1) = f(x_2) \end{array}\right\} (+)\ αρα\ f^3(x_1) + f(x_1) = f^3(x_2) + f(x_2) \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$4 - x_1 = 4 - x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Άρα η f είναι “1-1”.

ii) Αν θέσουμε $y=f(x)$ τότε η $f^3(x)+f(x)+x=4$ γίνεται $y^3+y+x=4 \Leftrightarrow x=4-y^3-y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = 4 - y^3 - y$ ή $f^{-1}(x) = -x^3-x+4$, $x \in R$ ($f(R)=R$).

iii) $f(e^x) = f(1-x)$

Επειδή η f είναι “1-1” άρα $e^x=1-x \Leftrightarrow e^x+x-1=0$

Προφανής ρίζα $x=0$ διότι $e^0+0-1=1-1=0$

Η συνάρτηση h με $h(x)=e^x+x-1$ είναι γνήσια αύξουσα διότι για κάθε $x_1,x_2 \in R$ με

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1$

και $e^{x1} < e^{x2}$

προσθέτοντας κατά μέλη έχω

$$e^{x1} + x_1 - 1 < e^{x2} + x_2 - 1 \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2),$$

άρα η h είναι “1-1” οπότε $x=0$ μοναδική ρίζα.

iv) Είναι

$$(4 - f^{-1}(x))\,ημ\frac{1}{x} = (4+x^3+x-4)\,ημ\frac{1}{x} = (x^3+x)\,ημ\frac{1}{x}$$

ισχύει

$$\left|(x^3 + x)ημ\frac{1}{x}\right| \leq |x^3 + x| \Leftrightarrow -|x^3 + x| \leq (x^3 + x)ημ\frac{1}{x} \leq |x^3 + x|$$

το $\lim\limits_{x \to 0} |x^3 + x| = 0$,

άρα από κριτήριο παρεμβολής και $\lim\limits_{x \to 0} (x^3+x)\,ημ\frac{1}{x} = 0$

ΛΥΣΗ 4ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) Αφού f συνεχής στο $x_o=2$

Άρα $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$ (1)

Είναι

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \left(|z-2| + \frac{2x^2 - 5x+2}{x^2 - 4}\right) =$$

$$= |z-2| + \lim_{x \to 2^-} \frac{2(x-2)\,(x - \frac{1}{2})}{(x-2)\,(x+2)} = |z-2| + \lim_{x \to 2^-} \frac{2x - 1}{x+2} = |z-2| + \frac{3}{4}$$

Είναι

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(|z+i| + x - \frac{5}{4}\right) = |z+i| + 2 - \frac{5}{4} = |z+i| + \frac{3}{4} = f(2)$$

Άρα λόγω της (1) θα πρέπει

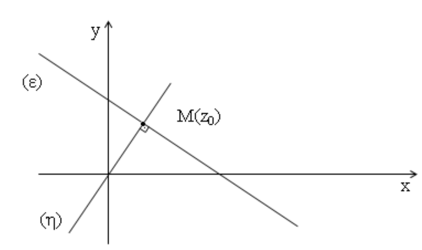
$|z-2| + \frac{3}{4} = |z+i| + \frac{3}{4} \Leftrightarrow |z-2| = |z+i| \overset{z=x+y1}{\Longleftrightarrow}$

$|(x-2) + yi| = |x+(y+1)\,i| \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \Leftrightarrow$

$4x+2y-3=0$

Σχόλιο: Η εικόνα του z κινείται στη μεσοκάθετη του τμήματος AB όπου A(2,0), B(0,-1) που είναι οι εικόνες των μιγαδικών $z_1=2+0i$, $z_2=0-1i$ βάσει της ισότητας $|z-2| = |z+i|$.

β)



(η) ⊥ (ε) $λ_ε \cdot λ_η = -1 \Leftrightarrow -2 \cdot λ_η = -1 \Leftrightarrow λ_η = 1/2$

άρα (η) : $y = 1/2 \cdot x$

Λύνω το (Σ) $\begin{cases} 4x + 2y - 3 = 0 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3/5 \\ y = 3/10 \end{cases}$

άρα ο $z_0 = \frac{3}{5} + \frac{3}{10}i$ έχει το ελάχιστο μέτρο

ΚΥΠΡΙΑΝΟΣ ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ