Μαθηματικά κατεύθυνσης

Επιλεγμένα θέματα για τους υποψήφιους μαθητές της Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου.

ΘΕΜΑ 1ο

Έστω f, g συναρτήσεις τέτοιες ώστε
$(x^2 - x + 1)\, g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in R$,

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-x^2+1}{x-1} = 2$$

και η f παραγωγίσιμη στο R.

Να αποδείξετε ότι:

α. Η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$ είναι $y = 4x - 4$.

β. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω συνάρτηση f, όχι πολυωνυμική, δύο φορές παραγωγίσιμη στο [1, 2] με $f(2) = 2f(1) + 2$, και $f''(x) \neq 2$, για κάθε $x \in (1, 2)$.

Να δείξετε ότι:

α. Η εξίσωση $x \cdot [f'(x) - 2x] = f(x) - x^2$ (1) έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (1, 2)$.

β. Η ρίζα x_0 της εξίσωσης (1) είναι μοναδική.

γ. Η εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = f(x) - x^2$ στο σημείο με τετμημένη x_0, διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ 1ο

α. Αν $h(x) = \dfrac{f(x)-x^2+1}{x-1}$, τότε

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1} h(x) = 2 \\ \text{και} \\ f(x) = (x-1)\cdot h(x) + x^2 - 1 \end{cases}$$

άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1)\cdot h(x) + x^2 - 1\right] = 0$

και επειδή η f συνεχής στο R, ως παραγωγίσιμη, είναι:

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0 = f(1)$ και

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot h(x) + x^2 - 1}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot h(x) + (x-1)(x+1)}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot[h(x)+x+1]}{x-1} = 2+2 = 4$$

έτσι $f'(1) = 4$.

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$ είναι:

$y - f(1) = f'(1)\,(x - 1) \Leftrightarrow$
$y = 4\,(x - 1) \Leftrightarrow$
$y = 4x - 4$

β. Έχουμε $(x^2 - x + 1)\cdot g(x) = f(x) \Leftrightarrow$

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^2-x+1},\ (1),\quad \text{αφού } x^2-x+1>0 \text{ για κάθε } x\in R$$

$$\text{τότε}\ \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)}{x^2-x+1} - f(0)}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)\cdot(x^2-x+1)}{x(x^2-x+1)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)+f(0)-f(0)\cdot(x^2-x+1)}{x(x^2-x+1)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}\cdot\frac{1}{x^2-x+1} + \frac{f(0)\cdot(-x^2+x)}{x(x^2-x+1)}\right] =$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}\cdot\frac{1}{x^2-x+1} + \frac{x\cdot f(0)\cdot(1-x)}{x(x^2-x+1)}\right] =$$

$f'(0) + f(0)$

Δηλαδή η g παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, με
$g'(0) = f'(0) + f(0)$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ 2ο ΘΕΜΑ

α. $x \cdot [f'(x) - 2x] = f(x) - x^2 \Leftrightarrow$
$x \cdot [f'(x) - 2x] - [f(x) - x^2] = 0 \Leftrightarrow$
$x \cdot [f(x) - x^2]' - x'[f(x) - x^2] = 0 \Leftrightarrow$ ($x\neq 0$, αφού $x\in(1,2)$)

$$\left[\frac{f(x)-x^2}{x}\right]' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(x) = \dfrac{f(x) - x^2}{x}$

με $x \in [1, 2]$

Η G είναι συνεχής στο [1, 2] και παραγωγίσιμη στο (1, 2) αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [1, 2] με

$$G'(x) = \frac{x[f'(x)-2x]-[f(x)-x^2]}{x^2}$$

Ακόμα:

$$G(1) = \frac{f(1)-1}{1} = f(1)-1$$

$$G(2) = \frac{f(2)-4}{2} = \frac{2f(1)+2-4}{2} = f(1)-1$$

Επομένως $G(1) = G(2)$.

Έτσι, από το θεώρημα του Rolle, υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (1, 2)$, ώστε
$G'(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{x_0[f'(x_0)-2x_0]-[f(x_0)-x_0^2]}{x_0^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_0[f'(x_0)-2x_0] = f(x_0)-x_0^2$$

Δηλαδή η εξίσωση
$x[f'(x) - 2x] = f(x) - x^2$
έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $x_0 \in (1, 2)$

β. Έστω ότι η εξίσωση
$x[f'(x) - 2x] = f(x) - x^2$
έχει δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in (1, 2)$ με $\rho_1 < \rho_2$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση
$h(x) = x[f'(x) - 2x] - f(x) + x^2$
Η h είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2), αφού f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\rho_1, \rho_2]$, με $h'(x) = x(f''(x) - 2)$.
Επίσης $h(\rho_1) = h(\rho_2) = 0$.
Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε,
$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi[f''(\xi) - 2] = 0 \Leftrightarrow$
$\xi = 0$ άτοπο, γιατί $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subset (1, 2)$
$\Leftrightarrow$ ή
$f''(\xi) = 2$ αδύνατο από την υπόθεση.
Άρα, η εξίσωση $h(x) = 0$ δεν μπορεί να έχει περισσότερες από μία ρίζες στο (1, 2).
Επομένως, η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

γ. Η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης
$g(x) = f(x) - x^2$ στο x_0
έχει εξίσωση:
$y - g(x_0) = g'(x_0) \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow$
$y - [f(x_0) - x_0^2] = [f'(x_0) - 2x_0] \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow$
$y = f(x_0) - x_0^2 + xf'(x_0) - 2x_0x - x_0f'(x_0) + 2x_0^2 \Leftrightarrow$
$y = [f'(x_0) - 2x_0]x + f(x_0) + x_0^2 - x_0f'(x_0)$ (2)
Πρέπει το σημείο O (0, 0) να επαληθεύει την (2).
Οπότε για $x = 0$ και $y = 0$ έχουμε από τη (2):
$0 = f(x_0) + x_0^2 - x_0f'(x_0)$
που ισχύει γιατί σύμφωνα με το ερώτημα α. ,
$x_0[f'(x_0) - 2x_0] = f(x_0) - x_0^2 \Leftrightarrow$
$x_0f'(x_0) - 2x_0^2 = f(x_0) - x_0^2 \Leftrightarrow$
$f(x_0) + x_0^2 - x_0f'(x_0) = 0$