Μαθηματικά Κατεύθυνσης

1º ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x+\ln(e^x-1)$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.
β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.
γ) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=1$

2º ΘΕΜΑ

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R και η f' είναι 1-1. Να δείξετε ότι η κάθε εφαπτομένη της Cf έχει ένα μοναδικό κοινό σημείο με την Cf.

3º ΘΕΜΑ

α) Αν για τον μιγαδικό Z ισχύει $e^{|z-i|x} \geq |z+1|\, x+1$, για κάθε $x \in R$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του Z.
β) Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων α, β ώστε η Cf να είχε ασύμπτωτη στο $+\infty$, στο γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος (α) όπου $f(x) = \dfrac{\alpha x^2+2\beta x-3}{x+1}$

γ) Για τις τιμές των α,β που βρήκατε να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ Cf, του άξονα $x'x$ και ευθειών $x=0$ και $x=2$.

4º ΘΕΜΑ

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f,g στο R με $f(0)=2008$. Αν ισχύει για κάθε $x \in R: f(x)\cdot g(x) = e^{2x}$ και τότε $f'(x)\cdot g'(x) = e^{2x}$ να βρεθούν οι τύποι των f,g.

ΛΥΣΕΙΣ

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Θα πρέπει $e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$, άρα $A=(0,+\infty)$.
Η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = 1+\frac{1}{e^x-1}(e^x-1)' = \frac{e^x-1}{e^x-1}+\frac{e^x}{e^x-1} = \frac{2e^x-1}{e^x-1} > 0$$

για κάθε $x>0$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.
β) f γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ άρα

$$f(A) = \left(\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty,+\infty) = R$$

γ) Παρατηρώ ότι το $1 \in f(A)$ άρα η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,+\infty)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα άρα η ρίζα μοναδική.

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Έστω (ε) μια τυχαία εφαπτομένη της Cf στο $M(x_0,f(x_0))$, τότε $(\varepsilon): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Οι τετμημένες των σημείων τομής της (ε) και της Cf προκύπτουν από τις λύσεις της εξίσωσης $f(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ (1) η οποία έχει προφανή λύση την $x=x_0$. Έστω ότι έχει και δεύτερη λύση x_1 με $x_1 \neq x_0$, τότε ισχύει

$$f(x_1) = f'(x_0)(x_1-x_0)+f(x_0) \Leftrightarrow \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = f'(x_0) \quad (2)$$

Από Θ.Μ.Τ. στο $[x_1,x_0]$ ή $[x_0,x_1]$ υπάρχει $\xi \in (x_1,x_0)$ ή (x_0,x_1) ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$.

Από (2) προκύπτει ότι $f'(\xi) = f'(x_0) \Rightarrow \xi=x_0$ (f' 1-1)

Άτοπο αφού $\xi \in (x_1,x_0)$ ή (x_0,x_1).

ΛΥΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) Δίνεται ότι $e^{|z-i|x} \geq |z+1|\,x+1 \Leftrightarrow e^{|z-i|x}-|z+1|\,x-1 \geq 0$.

Θεωρούμε ότι $g(x) = e^{|z-i|x}-|z+1|\,x-1,\ x\in R$, άρα ισχύει

$g(x) \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq g(0)$.

Άρα η g εμφανίζει τοπικό ελάχιστο στο $x=0$, είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ οπότε από Θ.Fermat ισχύει $g'(0)=0$.
Άρα $g'(x) = e^{|z-i|x}\cdot|z-1|-|z+1|$ οπότε

$$g'(0)=0 \Leftrightarrow |z-i| = |z+1| \quad (z=x+yi)$$

$$\Leftrightarrow |x+(y-1)i| = |(x+1)+yi| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2y+1 = x^2+2x+1+y^2 \Leftrightarrow y=-x$$

β) Η $y=-x$ είναι είναι πλάγια ασύμπτωτη της Cf στο $+\infty$) άρα $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lambda = -1$ και $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x) = 0$
Οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^2+2\beta x-3}{x^2+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^2}{x^2} = \alpha = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha x^2+2\beta x-3}{x+x}+x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+2\beta x-3+x^2+x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(2\beta+1)x-3}{x+1} =$$

$$2\beta+1=0 \Leftrightarrow \beta=-\frac{1}{2}$$

Άρα η $f(x) = \dfrac{-x^2-x-3}{x+1} = -\dfrac{x^2+x+3}{x+1}$

γ) Παρατηρώ ότι $f(x) = -\dfrac{x^2+x+3}{x+1} < 0$ για κάθε $x\in[0,2]$
άρα

$$E(\Omega) = -\int_0^2 -\frac{x^2+x+3}{x+1}dx = \int_0^2 \frac{x(x+1)+3}{x+1}dx =$$

$$= \int_0^2\left(x+\frac{3}{x+1}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2}+3\cdot\ln(x+1)\right]_0^2 = 2+3\ln 3$$

ΛΥΣΗ 4ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Ισχύει ότι $f(x)\cdot g(x) = e^{2x} \neq 0$ άρα για κάθε $x\in R$ είναι

$f(x) \neq 0$ και $g(x) \neq 0$.

Οπότε $f(x)\cdot g(x) = e^{2x} \Leftrightarrow g(x) = \dfrac{e^{2x}}{f(x)}$ συνεπώς

$$g'(x) = \frac{(e^{2x})'\cdot f(x)-e^{2x}\cdot f'(x)}{f^2(x)} = \frac{2e^{2x}\cdot f(x)-e^{2x}\cdot f'(x)}{f^2(x)} \quad (1)$$

Η σχέση $f'(x)\cdot g'(x) = e^{2x}$ λόγω της (1) γράφεται

$$f'(x)\cdot\frac{2e^{2x}\cdot f(x)-e^{2x}\cdot f'(x)}{f^2(x)} = e^{2x} \Leftrightarrow f'(x)\cdot\frac{2f(x)-f'(x)}{f^2(x)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2f(x)f'(x)-[f'(x)]^2 = f^2(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)+[f'(x)]^2-2f(x)\cdot f'(x)=0 \Leftrightarrow [f(x)-f'(x)]^2=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow f(x)-f'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=f'(x) \Leftrightarrow f(x)=C\cdot e^x,\ x\in R$ είναι

$f(0)=2008 \Leftrightarrow C\cdot e^0=2008 \Leftrightarrow C=2008$.

Άρα $f(x) = 2008\,e^x$.

Οπότε $f(x)\cdot g(x) = e^{2x} \Leftrightarrow g(x) = \dfrac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow g(x) = \dfrac{e^x}{2008},\ x\in R$

ΚΥΠΡΙΑΝΟΣ ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ