# Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Επιλεγμένα θέματα για τους υποψήφιους μαθητές της Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου.

## ΘΕΜΑ 1ο

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(1)=2$. Να δείξετε ότι:

α. Η συνάρτηση g με $g(x)=\int_1^x f(t)dt$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε την εφαπτομένη της $C_g$ στο σημείο $A(1,g(1))$.

β. Αν $\alpha>1$ τότε $(\alpha-1)\cdot\int_0^1 f(t)dt<\int_1^\alpha f(t)dt$.

γ. Ισχύουν:

i) $\int_1^x\left(\int_1^u f(t)dt\right)du\geq(x-1)^2$, για κάθε $x\geq1$,

ii) $\int_1^x(x-t)\cdot f(t)dt\geq(x-1)^2$ για κάθε $x\geq1$.

## ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=2x+3+\dfrac{2e^x}{1+2e^x}$

α. Να δείξετε ότι η ευθεία ε:$\psi=2x+3$ είναι ασύμπτωτη της $C_f$ στο $-\infty$.

β. Να βρείτε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη $C_f$, την ε, τον άξονα ψ΄ψ και την ευθεία $x=\lambda$, $\lambda<0$.

γ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}E(\lambda)$.

δ. Αν το λ ελαττώνεται με ρυθμό 1μον./s, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(\lambda)$ τη χρονική στιγμή που είναι $\lambda=-\ell n3$.

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ 1ο ΘΕΜΑ

α. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως παραγωγίσιμη), οπότε η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως αρχική της f με $g'(x)=f(x)$.
Ακόμη η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και η g΄ είναι παραγωγίσιμη, δηλαδή η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g''(x)=f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
Είναι $g(1)=0$ και $g'(1)=f(1)=2$, οπότε η εξίσωση της εφαπτόμενης της $C_g$ στο $A(1,g(1))$ γράφεται:
$\psi-g(1)=g'(1)(x-1)\Leftrightarrow\psi=2(x-1)\Leftrightarrow\psi=2x-2$.

β. Η ζητούμενη ανισότητα $(\alpha-1)\cdot\int_0^1 f(t)dt<\int_1^\alpha f(t)dt$ με $\alpha>1$, γίνεται:

$$\int_0^1 f(t)dt<\frac{\int_1^\alpha f(t)dt}{\alpha-1}\Leftrightarrow\int_0^1 g'(t)dt<\frac{\int_1^\alpha g'(t)dt}{\alpha-1}\Leftrightarrow$$

$$\left[g(t)\right]_0^1<\frac{\left[g(t)\right]_1^\alpha}{\alpha-1}\Leftrightarrow\frac{g(1)-g(0)}{1-0}<\frac{g(\alpha)-g(1)}{\alpha-1}\qquad(1)$$

Η g ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής στα διαστήματα [0,1], [1,α] και παραγωγίσιμη στα (0,1) και (1,α).
Έτσι σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $x_1\in(0,1)$ και $x_2\in(1,\alpha)$ τέτοια ώστε να ισχύουν:

$$g'(x_1)=\frac{g(1)-g(0)}{1-0}\quad \kappa' \quad g'(x_2)=\frac{g(\alpha)-g(1)}{\alpha-1}.$$

Συνεπώς η (1) γράφεται $g'(x_1)<g'(x_2)$ με $x_1<x_2$, που ισχύει αφού η g΄ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ($g''(x)>0$) (2)

γ. i) Θεωρούμε τη συνάρτηση h με:

$$h(x)=\int_1^x\left(\int_1^u f(t)dt\right)du-(x-1)^2,\quad x\geq1.$$

Επειδή $g(u)=\int_1^u f(t)dt$ η h θα δίνεται από τον τύπο

$$h(x)=\int_1^x g(u)du-(x-1)^2,\quad x\geq1.$$

Η h είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά των παραγωγισίμων στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεων $\int_1^x g(u)du,(x-1)^2$ με

$h'(x)=g(x)-2(x-1)$, $x\geq1$.
Η h΄ είναι παραγωγίσιμη με $h''(x)=g'(x)-2$, $x\geq1$.
Η g΄ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε για $x>1$ έχουμε:

$$g'(x)>g'(1)\overset{\alpha.}{\Leftrightarrow}f(x)>f(1)\overset{\upsilon\pi o\theta.}{\Leftrightarrow}f(x)>2\Leftrightarrow g'(x)-2>0,$$

άρα $h''(x)>0$ δηλαδή η h΄ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ αφού είναι και συνεχής σ΄ αυτό ως παραγωγίσιμη.

Για $x>1$ θα ισχύει:

$$h'(x)>h'(1)\Leftrightarrow h'(x)>g(1)-2\cdot0\Leftrightarrow h'(x)>0,$$

άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ αφού είναι και συνεχής σ΄ αυτό ως παραγωγίσιμη.
Επομένως για $x\geq1$ έχουμε:

$$h(x)\geq h(1)\Leftrightarrow\int_1^x\left(\int_1^u f(t)dt\right)du\geq(x-1)^2,\quad x\geq1.$$

ii) Από (i) έχουμε:

$$\int_1^x u'\cdot\left(\int_1^u f(t)dt\right)du\geq(x-1)^2,\quad x\geq1$$

$$\left[u\cdot\int_1^u f(t)dt\right]_1^x-\int_1^x u\cdot f(u)du\geq(x-1)^2$$

$$x\cdot\int_1^x f(t)dt-0-\int_1^x u\cdot f(u)du\geq(x-1)^2$$

$$\int_1^x x\cdot f(t)dt-\int_1^x t\cdot f(t)dt\geq(x-1)^2$$

$$\int_1^x(x-t)f(t)dt\geq(x-1)^2,\quad x\geq1$$

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ 2ο ΘΕΜΑ

α. Είναι

$$f(x)=2x+3+\frac{2e^x}{1+2e^x}\Leftrightarrow f(x)-(2x+3)=\frac{2e^x}{1+2e^x},$$

άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x+3)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2e^x}{1+2e^x}=\dfrac{2\cdot0}{1+2\cdot0}=0$

αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$. Οπότε η ευθεία ε:$\psi=2x+3$ είναι (πλάγια) ασύμπτωτη της $C_f$ στο $-\infty$.

β. Έχουμε ότι $f(x)-(2x+3)=\dfrac{2e^x}{1+2e^x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου Ω είναι:

$$E(\lambda)=\int_\lambda^0\frac{2e^x}{1+2e^x}dx=\int_\lambda^0\left[\ln(1+2e^x)\right]'dx=$$

$$\left[\ln(1+2e^x)\right]_\lambda^0=\ln3-\ln(1+2e^\lambda)\ \tau.\mu$$

γ. $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\left[\ln3-\ln\left(1+2e^\lambda\right)\right]=$

$\ln3-\ln\left(1+2\cdot0\right)==\ln3$

αφού $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}e^\lambda=0$.

δ. Είναι $\lambda=\lambda(t)$ αφού το λ εξαρτάται από το t, άρα το εμβαδόν του χωρίου Ω την χρονική στιγμή t θα είναι:
$E(t)=\ell n3-\ell n(1+2e^{\lambda(t)})$.
Συνεπώς ο ρυθμός μεταβολής του είναι:

$$E'(t)=-\frac{2e^{\lambda(t)}}{1+2e^{\lambda(t)}}\cdot\lambda'(t)$$

Αν για $t=t_0$ είναι $\lambda=-\ell n3$ τότε:

$$E'(t_0)=-\frac{2e^{-\ln3}}{1+2e^{-\ln3}}\cdot(-1)=\frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1+2\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}}=\frac{2}{5}\text{μον./s}$$

ΚΥΠΡΙΑΝΟΣ ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ