Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Επιλεγμένα θέματα για τους υποψήφιους μαθητές της Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου.

ΘΕΜΑ 1ο
Αν για τη συνάρτηση f ισχύει η σχέση:

$$f\left(\frac{x+2y}{2x-y}\right) = y\cdot\sqrt{x}\cdot f(3x) + (y-2)f(3y) + x$$

για κάθε x, y $\in (0, +\infty)$ με $y \neq 2x$, τότε να υπολογίσετε:
α. Το f(3)
β. Τον τύπο της συνάρτησης f
γ. Το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

ΘΕΜΑ 2ο Δίνονται οι συναρτήσεις g, h: R→R για τις οποίες ισχύουν:
- f, g είναι “1-1” στο R
- $|g(x)| \le |h(x)|$ για κάθε $x \in R$
- $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \ell \in R, x_0 \in R$

Αν f: R→C συνάρτηση με τύπο f(x)=g(x)+ih(x), x∈R

α. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{2}\cdot|g(x)| \le |f(x)| \le \sqrt{2}|h(x)|, x \in R$
όπου $|f(x)|$ το μέτρο της f(x), x∈R
και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|$
β. Να δείξετε ότι η f είναι “1-1”.
γ. Αν g(x)=x, h(x)=2x και $|f(x+y)| = \sqrt{5}$, x,y∈R να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M (x,y).

ΘΕΜΑ 3ο
Έστω f, g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το R για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-\lambda x}{x-2} = 8 \text{ και } \lim_{x\to 2}\frac{(\lambda^2-\lambda)f(x)-8}{f(x)-2\lambda e^{x-2}} = \mu$$

α. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$
β. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{5+f(x)}-3}{x^2-4} = \frac{5}{12}$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ 1ο

α. Η σχέση της υπόθεσης για x = 1 = y γίνεται:
f(3) = f(3) - f(3) +1 ⇔ f(3) = 1

β. Η σχέση της υπόθεσης για x = y γίνεται:

$$f\left(\frac{3x}{x}\right) = x\sqrt{x}f(3x) + (x-2)f(3x) + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(3) = x\sqrt{x}f(3x) + (x-2)f(3x) + x \overset{\alpha.}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow f(3x)(x\sqrt{x} + x - 2) = 1 - x \quad (1)$$

Αν $x\sqrt{x} + x - 2 = 0$ τότε θέτοντας $\sqrt{x} = \omega > 0$ έχουμε:
$\omega^3 + \omega^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (\omega - 1)(\omega^2 + 2\omega + 2) = 0 \Leftrightarrow \omega = 1$
αφού $\omega^2 + 2\omega + 2 \neq 0$ επειδή $\Delta < 0$.
Έτσι $x\sqrt{x} + x - 2 = 0$ όταν x = 1.
Οπότε για $x \neq 1$ από (1) έχουμε:

$$f(3x) = \frac{1-x}{x\sqrt{x}+x-2} \quad (2)$$

Αν θέσουμε στη (2) όπου z = 3x $\Leftrightarrow x = \frac{z}{3}$ έχουμε

$$f(z) = \frac{1-\frac{z}{3}}{\frac{z}{3}\sqrt{\frac{z}{3}} + \frac{z}{3} - 2} \Leftrightarrow f(z) = \frac{3-z}{z\sqrt{\frac{z}{3}} + z - 6}$$

$$\text{οπότε } f(x) = \frac{3-x}{x\sqrt{\frac{x}{3}} + x - 6}$$

Έτσι ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x}{x\sqrt{\frac{x}{3}}+x-6}, & x > 0, x \neq 3 \\ 1, & x = 3 \text{ (από α.)} \end{cases}$$

γ. Για το $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \dfrac{3-x}{x\sqrt{\frac{x}{3}}+x-6}$ θέτουμε $\sqrt{x} = t$

οπότε $x \to 3 \Leftrightarrow t \to \sqrt{3}$

Έτσι για x κοντά στο 3 ισοδύναμα για t κοντά στο $\sqrt{3}$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{x\sqrt{\frac{x}{3}}+x-6} = \lim_{t\to\sqrt{3}}\frac{3-t^2}{t^2\frac{t}{\sqrt{3}}+t^2-6} =$$

$$= \lim_{t\to\sqrt{3}}\frac{-(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})\sqrt{3}}{(t-\sqrt{3})(t^2+2\sqrt{3}t+6)} =$$

$$= \lim_{t\to\sqrt{3}}\frac{-(t+\sqrt{3})\sqrt{3}}{t^2+2\sqrt{3}t+6} = \frac{-2\sqrt{3}^2}{15} = -\frac{2}{5}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ 2ο ΘΕΜΑ

α. Είναι f(x) = g(x) + ih(x), οπότε $|f(x)| = \sqrt{g^2(x)+h^2(x)}$

Αφού $|g(x)| \le |h(x)|$ θα ισχύει

$$\sqrt{2g^2(x)} \le \sqrt{g^2(x)+h^2(x)} \le \sqrt{2h^2(x)}$$

Έτσι $\sqrt{2}|g(x)| \le |f(x)| \le \sqrt{2}|h(x)| \quad (1)$

Ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{2}|g(x)| = \sqrt{2}\cdot\left|\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right| \overset{\text{ΥΠΟΘ.}}{=} \sqrt{2}|\ell|$

και $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{2}|h(x)| = \sqrt{2}\cdot\left|\lim\limits_{x\to x_0} h(x)\right| \overset{\text{ΥΠΟΘ.}}{=} \sqrt{2}|\ell|$

Από (1) και λόγω του κριτηρίου παρεμβολής έχουμε:
$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = \sqrt{2}|\ell| \in R$

β. Για κάθε $x_1, x_2 \in R$ έστω $f(x_1) = f(x_2)$, ισοδύναμα
$g(x_1) + ih(x_1) = g(x_2) + ih(x_2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x_1) = g(x_2) \\ \text{και} \\ h(x_1) = h(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ αφού g,h: "1-1"}$$

Οπότε η f είναι “1-1”.

γ. f(x+y) = g(x+y) + i h(x+y) = (x+y) + i 2(x+y).
Άρα $|f(x+y)| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(x+y)^2 + 4(x+y)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5(x+y)^2 = 5 \Leftrightarrow (x+y)^2 = 1$

Έτσι $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+1 \\ y=-x-1 \end{cases}$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M (x, y) είναι δύο ευθείες παράλληλες αφού $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ 3ο ΘΕΜΑ

α. Έστω $g(x) = \dfrac{f(x)-\lambda x}{x-2}$, με $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 8$
άρα $g(x)(x-2) = f(x) - \lambda x$ με
$\lim\limits_{x\to 2} g(x)(x-2) = \lim\limits_{x\to 2}(f(x)-\lambda x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2\lambda \quad (1)$

Έστω $h(x) = \dfrac{(\lambda^2-\lambda)f(x)-8}{f(x)-2\lambda e^{x-2}}$, με $\lim\limits_{x\to 2} h(x) = \mu$
άρα $h(x)(f(x)-2\lambda e^{x-2}) = (\lambda^2-\lambda)f(x) - 8$ με
$\lim\limits_{x\to 2}[h(x)(f(x)-2\lambda e^{x-2})] = \lim\limits_{x\to 2}[(\lambda^2-\lambda)f(x)-8] \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$
$\Leftrightarrow \mu(2\lambda - 2\lambda) = (\lambda^2-\lambda)2\lambda - 8 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\lambda(\lambda^2-\lambda) - 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - \lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lambda^3 - 8 - (\lambda^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda+4) - (\lambda-2)(\lambda+2) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda^2+\lambda+2) = 0$
Έτσι λ = 2 αφού $\lambda^2 + \lambda + 2 \neq 0$ γιατί $\Delta = -7 < 0$
Οπότε από (1) έχουμε: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2\cdot 2 = 4$

β. Είναι $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5+f(x)}-3}{x^2-4} =$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{5+f(x)}-3)(\sqrt{5+f(x)}+3)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{5+f(x)}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-4}{(x-2)(x+2)(\sqrt{5+f(x)}+3)}$$

με $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x+2)(\sqrt{5+f(x)}+3)} = \dfrac{1}{4\cdot(\sqrt{9}+3)} = \dfrac{1}{24}$

και $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-4}{(x-2)} \overset{\alpha.}{=} \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)(x-2)+\lambda x-4}{x-2} \overset{\lambda=2}{=}$

$= \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(g(x)+2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(g(x)+2) \overset{\alpha.}{=} 10$

Οπότε το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5+f(x)}-3}{x^2-4} = \dfrac{10}{24} = \dfrac{5}{12}$

ΚΥΠΡΙΑΝΟΣ ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ