Λυμένα θέματα στους Μιγαδικούς αριθμούς

1. Δίνονται οι μιγαδικοί z, w και $u = z \cdot w$.

α) Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός z είναι φανταστικός αν και μόνο αν ισχύει $z = -\bar{z}$.

β) Αν για τους z και w ισχύει: $|z + \bar{w}| = |\bar{z} - w|$, να δείξετε ότι ο αριθμός $u = z \cdot w$ είναι φανταστικός.

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι $w = 2 + i$, να βρείτε τον γεωμετρικός τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.

ΛΥΣΗ

α) Αν $z = \alpha + \beta i,\ \alpha, \beta \in R$ τότε:

$z = -\bar{z} \Leftrightarrow \alpha + \beta i = -(\alpha - \beta i) \Leftrightarrow \alpha + \beta i = -\alpha + \beta i \Leftrightarrow 2\alpha = 0 \Leftrightarrow$

$\alpha = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow$ z είναι φανταστικός.

β) $|z + \bar{w}| = |\bar{z} - w|$ υψώνοντας στο τετράγωνο έχουμε:

$|z + \bar{w}|^2 = |\bar{z} - w|^2 \Leftrightarrow (z + \bar{w})(\overline{z + \bar{w}}) = (\bar{z} - w)(\overline{\bar{z} - w}) \Leftrightarrow$

$(z + \bar{w})(\bar{z} + w) = (\bar{z} - w)(z - \bar{w}) \Leftrightarrow z\bar{z} + zw + \overline{zw} + w\bar{w} = z\bar{z} - zw - \overline{zw} + w\bar{w} \Leftrightarrow$

$2zw = -2\overline{zw} \Leftrightarrow zw = -\overline{zw} \Leftrightarrow u = -\bar{u}$ που σημαίνει ότι ο zw είναι φανταστικός.

γ) Αν $w = 2 + i$ και $z = x + yi,\ x,y \in R$ τότε:

$u = zw = (x + yi)(2 + i) = 2x + xi + 2yi + yi^2 = (2x - y) + (x + 2y)i$

Αφού ο u είναι φανταστικός, ισχύει:

$\mathrm{Re}(u) = 0 \Leftrightarrow 2x - y = 0 \Leftrightarrow y = 2x$. Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων

των μιγαδικών z είναι η ευθεία $y = 2x$.

2. Έστω $f(z) = |z| - i\bar{z},\ z \in C$.

α) Να λύσετε την εξίσωση: $f(z) = 2 - i$.

β) Αν $|f(|z|)| = \sqrt{2}$ να βρείτε το $|z|$.

γ) Αν $|z| = 1$ να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του $w = f(z)$ είναι κύκλος που διέρχεται από την αρχή αξόνων.

ΛΥΣΗ

α) $f(z)=2-i \Leftrightarrow |z|-i\bar{z}=2-i$

Αν $z=x+yi$ τότε $\sqrt{x^2+y^2}-i(x-yi)=2-i \Leftrightarrow$

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-y\right)-xi=2-i \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}-y=2\\ x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{1+y^2}=y+2\\ x=1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1+y^2=y^2+4y+4, \quad y\geq -2\\ x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-\frac{3}{4}\\ x=1\end{cases}.$$ Άρα $z=1-\frac{3}{4}i$.

β) $f(|z|)=|z|-i|\bar{z}|=|z|-i|z|=(1-i)|z|$, οπότε $|f(|z|)|=|1-i||z|=\sqrt{2}|z|$.

Άρα $\sqrt{2}|z|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |z|=1$

γ) Αν $|z|=1$ τότε:

$w=1-i\bar{z} \Leftrightarrow -i\bar{z}=w-1$ οπότε $|w-1|=|-i\bar{z}| \Leftrightarrow |w-1|=|\bar{z}|=|z|=1$

άρα $|w-1|=1$.

Η τελευταία σχέση εκφράζει μια εξίσωση κύκλου που επαληθεύεται.

3. Δίνεται ο μιγαδικός $z\neq 2i$ και έστω $f(z)=\dfrac{5-12i-2iz}{z-2i}$.

Θεωρούμε ακόμη τους μιγαδικούς $z_1=z+3i$ και $z_2=f(z)+3i$.

α) Να βρεθεί ο z_1 αν $z_1=z_2$

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(z)=5+2i$

γ) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z όταν ο $f(z)$ είναι πραγματικός.

ΛΥΣΗ

α) $z_1=z_2 \Leftrightarrow f(z)=z \Leftrightarrow \dfrac{5-12i-2iz}{z-2i}=z \Leftrightarrow 5-12i-2iz=z^2-2iz \Leftrightarrow$

$z^2=5-12i$

Έστω $z=x+yi$ τότε $z^2=x^2-y^2+2xyi$ οπότε $\begin{cases}x^2-y^2=5 & (1)\\ 2xy=-12 & (2)\end{cases}$

Από **(2)** έχω x,y ετερόσημοι.

Όμως $\left(x^2-y^2\right)^2=25 \Leftrightarrow x^4+y^4-2x^2y^2=25$ και $4x^2y^2=144$

Οπότε προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$x^4+y^4+2x^2y^2=169 \Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)^2=169 \Leftrightarrow x^2+y^2=13$ **(3)**

$$\left.\begin{matrix}(1)\\(3)\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}2x^2=18\\2y^2=8\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}x=\pm3\\y=\pm2\end{matrix}\right\} \overset{x,y\ \epsilon\tau\epsilon\rho}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{matrix}z=3-2i\\ \text{ή}\\ z=-3+2i\end{matrix}\right.$$

Οπότε $z_1=3+i$ ή $z_1=-3+5i$

β) $f(z)=5+2i \Leftrightarrow 5-12i-2iz=(z-2i)(5+2i) \Leftrightarrow$

$5-12i-2iz=5z+2iz-10i+4 \Leftrightarrow (5+4i)z=1-2i \Leftrightarrow$

$$z=\frac{1-2i}{5+4i}=\frac{(1-2i)(5-4i)}{25+16}=\frac{5-4i-10i-8}{41}=-\frac{3}{41}-\frac{14}{41}i$$

γ) f(z) πραγματικός

$\Leftrightarrow \operatorname{Im} f(z)=0 \Leftrightarrow 2\operatorname{Im} f(z)i=0 \Leftrightarrow f(z)-\overline{f(z)}=0 \Leftrightarrow$

$$f(z)=\overline{f(z)} \Leftrightarrow \frac{5-12i-2iz}{z-2i}=\frac{5+12i+2i\bar{z}}{\bar{z}+2i} \Leftrightarrow$$

$5\bar{z}+10i-12i\bar{z}+24-2iz\bar{z}+4z=5z+12iz+2iz\bar{z}-10i+24+4\bar{z} \Leftrightarrow$

$4iz\bar{z}+12i(z+\bar{z})+(z-\bar{z})-20i=0 \Leftrightarrow 2\left(x^2+y^2\right)+12x+y-10=0 \Leftrightarrow$

$$x^2+y^2+6x+\frac{1}{2}y-5=0 \Leftrightarrow (x+3)^2+\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=5+9+\frac{1}{16} \Leftrightarrow$$

$$(x+3)^2+\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{225}{16}$$

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος κέντρου $K\left(-3,-\frac{1}{4}\right)$ και ακτίνας $\rho=\frac{15}{4}$.

4. Δίνονται οι μιγαδικοί z και $w=\frac{z+3i}{z+3}$, με $z\neq-3$.

α) Αν $z=x+yi$, $x,y\in R$ να γράψετε τον w στην μορφή $\alpha+\beta i$.

β) Να δείξετε ότι αν ο w είναι πραγματικός τότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία $y=-x-3$.

γ) Να δείξετε ότι αν $|w|=2$, τότε η εικόνα του z κινείται σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

ΛΥΣΗ

α) $w=\dfrac{x+yi+3i}{x+yi+3}=\dfrac{x+(y+3)i}{(x+3)+yi}=\dfrac{[x+(y+3)i][(x+3)-yi]}{(x+3)^2+y^2}=$

$$=\frac{x(x+3)-xyi+(x+3)(y+3)i-(y+3)yi^2}{(x+3)^2+y^2}=$$

$$=\frac{x(x+3)+y(y+3)}{(x+3)^2+y^2}+\frac{-xy+(x+3)(y+3)}{(x+3)^2+y^2}i$$

Έτσι $\operatorname{Re}(w)=\dfrac{x^2+y^2+3x+3y}{(x+3)^2+y^2}$, $\operatorname{Im}(w)=\dfrac{3x+3y+9}{(x+3)^2+y^2}$

β) Ο w είναι πραγματικός, αν και μόνο αν,
$\operatorname{Im}(w)=0 \Leftrightarrow 3x+3y+9=0 \Leftrightarrow y=-x-3$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία y = –x – 3, με εξαίρεση το σημείο (–3, 0), αφού πρέπει $z+3\neq 0 \Leftrightarrow z+3+yi\neq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\neq -3$ και $y\neq 0$.

γ)

$$|w|=2 \Leftrightarrow \frac{|z+3i|}{|z+3|}=2 \Leftrightarrow |z+3i|=2|z+3| \Leftrightarrow |x+(y+3)i|=2|(x+3)+yi| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2+(y+3)^3}=2\sqrt{(x+3)^2+y^2}.$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο: $x^2+(y+3)^2=4\left[(x+3)^2+y^2\right]\Leftrightarrow$

$x^2+y^2+6y+9=4x^2+24x+36+4y^2 \Leftrightarrow$

$3x^2+3y^2+24x-6y+27=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+8x-2y+9=0$

Επειδή $8^2+(-2)^2-4\cdot 9=64+4-36=32>0$, η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο κ(4, 1) και ακτίνα $R=\dfrac{\sqrt{32}}{2}=2\sqrt{2}$.

Λυμένα θέματα στις Συναρτήσεις & Όρια

1. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού και τιμών το R. Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει: $(f(x))^5 + f(x) + x = 0$ **(1)**, να αποδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη και έπειτα να βρείτε την f^{-1}

ΛΥΣΗ

Αν $x_1, x_2 \in R$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε είναι: $(f(x_1))^5 = (f(x_2))^5$, οπότε είναι και $(f(x_1))^5 + f(x_1) = (f(x_2))^5 + f(x_2)$.

Επομένως λόγω της **(1)** θα είναι $-x_1 = -x_2$ ή $x_1 = x_2$.

Άρα η f είναι συνάρτηση 1 – 1, οπότε είναι και αντιστρέψιμη. Επειδή $f(R) = R$ και για κάθε $x \in R$ ισχύει $(f(x))^5 + f(x) + x = 0$ έχουμε:

$\left[f\left(f^{-1}(x)\right)\right]^5 + f\left(f^{-1}(x)\right) + f^{-1}(x) = 0$, $x \in R$ ή

$x^5 + x + f^{-1}(x) = 0$ ή $f^{-1}(x) = -x^5 - x$, $x \in R$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει

$f^3(x) + f(x) + \frac{1}{2}x = 0$ **(1)** για κάθε $x \in R$.

α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι «1 – 1»,

β) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f^{-1}

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}\left(x^3 - x\right) = f^{-1}(3 - 3x)$

ΛΥΣΗ

α. Είναι **(1)** $\Leftrightarrow f^3(x) + f(x) = -\frac{1}{2}x$ **(2)**

Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $f^3(x_1) = f^3(x_2)$ οπότε

$f^3(x_1) + f(x_1) = f^3(x_2) + f(x_2) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} -\frac{1}{2}x_1 = -\frac{1}{2}x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Άρα η f είναι «1 – 1»

β. Έστω $f(x) = y$ τότε $x = f^{-1}(y)$ οπότε η **(1)** γίνεται

$$y^3 + y + \frac{1}{2} f^{-1}(y) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = -2y^3 - 2y$$

Άρα $f^{-1}(y) = -2y^3 - 2y$ ή $f^{-1}(x) = -2x^3 - 2x$

γ. Η f^{-1} είναι «1 – 1» οπότε η εξίσωση γίνεται

$$x^3 - x = 3 - 3x \Leftrightarrow x^3 + 2x - 3 = 0$$

1	**0**	**2**	**–3**	**x=1**
///	1	1	3	
1	1	3	**0**	

Οπότε $\begin{cases} x = 1 \\ \text{ή} \\ x^2 + x + 3 = 0 \ \text{αδύνατο} \end{cases}$ Άρα $x = 1$

3. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο R η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$x^2 \le (f(x))^2 - 2xf(x) + \eta\mu^2 x \le \eta\mu^2 x, \quad x \in R \quad \textbf{(1)}$$

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

ΛΥΣΗ

Για κάθε $x \in R$ έχουμε από την **(1)** $x^2 - \eta\mu^2 x \le (f(x))^2 - 2xf(x) \le 0$ ή

$2x^2 - \eta\mu^2 x \le (f(x))^2 - 2xf(x) + x^2 \le x^2$ ή

$2x^2 - \eta\mu^2 x \le (f(x) - x)^2 \le x^2$ **(2)**

Άρα είναι $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = \lim\limits_{x\to 0}(2x^2 - \eta\mu^2 x) = 0$ οπότε από τη **(2)** προκύπτει και

$$\lim_{x\to 0}(f(x) - x)^2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}|f(x) - x| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}(f(x) - x) = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(f(x) - x) + \lim_{x\to 0} x = 0 + 0 = 0$$

4. Για τη συνεχή στο [-1, 1] συνάρτηση f, ισχύει

$xf(x)=2-\sqrt{1-x^2}-συνx$ **(1)** για κάθε $x\in[-1,1]$.

α) Να βρείτε το f(0)

β) Να βρείτε το $α\in R$ ώστε η συνάρτηση

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\in[-1,0)\cup(0,1]\\ α, & x=0\end{cases}$$ να είναι συνεχής.

γ) Για την τιμή του α που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να δείξετε ότι η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [-1, 1].

ΛΥΣΗ

α) $(1)\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} f(x)=\dfrac{2-\sqrt{1-x^2}-συνx}{x}$ οπότε

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{1-x^2}-συνx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{1-συνx}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x^2)}{x\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}+0=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}=\frac{0}{2}=0$$ αλλά f συνεχής στο 0, οπότε f(0) = 0.

β) Η g είναι συνεχής στο $[-1,0)\cup(0,1]$ ως πηλίκο συνεχών.

Επίσης

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{1-x^2}-συνx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-συνx}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x^2)}{x^2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}+\lim_{x\to 0}\frac{1-συν^2x}{x^2(1+συνx)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}+\lim_{x\to 0}\left(\frac{ημ^2x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+συνx}\right)=$$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$. Άρα πρέπει $α=1$.

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[-1,1]$.

Είναι g(0) = 1 ≠ 0.

Επίσης $2-\sqrt{1-x^2}-συνx=1-\sqrt{1-x^2}+1-συνx$

Αλλά για $x\neq 0$ ισχύει $1-\sqrt{1-x^2}>0$ και $1-συνx\geq 0$ οπότε

$1-\sqrt{1-x^2}+1-συνx>0\Leftrightarrow xf(x)>0$ οπότε $f(x)\neq 0$. Άρα για $x\neq 0$ ισχύει $g(x)\neq 0$. Επομένως $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[-1,1]$.

5. Για τις συναρτήσεις f, g που είναι ορισμένες στο R ισχύει:
$(f(x))^2 + (g(x))^2 = 2xf(x)$ για κάθε $x \in R$.
Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

ΛΥΣΗ

Για κάθε $x \in R$ ισχύει: $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 2xf(x)$ ή

$(f(x))^2 - 2xf(x) + x^2 + (g(x))^2 = x^2$ ή $(f(x) - x)^2 + (g(x))^2 = x^2$ **(1)**

- Για κάθε $x \in R$ όμως ισχύει:
  $|g(x)|^2 = (g(x))^2 \le (f(x) - x)^2 + (g(x))^2$ και λόγω της **(1)** έχουμε:
  $|g(x)|^2 \le x^2$ ή $|g(x)| \le |x|$ και επειδή είναι $\lim_{x\to 0}|x| = 0$ έχουμε και
  $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.
- Για κάθε $x \in R$ όμως ισχύει:
  $(f(x) - x)^2 \le (f(x) - x)^2 + (g(x))^2 = x^2$ (λόγω της **(1)**), οπότε
  $|f(x) - x| \le |x|$ ή $-|x| \le f(x) - x \le |x|$ ή $x - |x| \le f(x) \le x + |x|$ και
  επειδή $\lim_{x\to 0}(x - |x|) = (x + |x|)$ έχουμε: $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

6. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ = [0, 1] και ισχύει $-1 < f(x) \le 0$ για κάθε $x \in Δ$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $x_0 \in [0, 1)$, τέτοιο ώστε $f(x_0)^2 + f(x_0) + x_0 = 0$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = (f(x))^2 + f(x) + x,\ x \in [0, 1]$.

- Η συνάρτηση h(x) είναι συνεχής στο [0, 1] ως άθροισμα των συνεχών συναρτήσεων $(f(x))^2$, $f(x)$ και x.
- $h(0) = (f(0))^2 + f(0) = f(0)\cdot(f(0) + 1) \le 0$, αφού για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει $-1 < f(x) \le 0$.
- $h(1) = (f(1))^2 + f(1) + 1 > 0$ αφού είναι $x^2 + x + 1 > 0$ για κάθε $x \in R$. .

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

i) Αν f(0) = 0, τότε $(f(0))^2 + f(0) = 0$ και συνεπώς $x_0 = 0$.

ii) Αν f(0) < 0, τότε $h(0)h(1) < 0$ και σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστο ένα $x_0 \in (0, 1)$ με $h(x_0) = 0$.

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [0, 1)$ τέτοιο ώστε:
$(f(x_0))^2 + f(x_0) + x_0 = 0$

7. Έστω μια συνάρτηση f: R→R τέτοια ώστε: $f^3(x)+2x^2f(x)=3ημ^3x$ **(1)**

για κάθε x∈R. Αν $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=α$ τότε:

α) Να δείξετε ότι α = 1.

β) Να βρείτε τα όρια: i) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(ημx)}{x}$,

ii) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(f(x))}{x}$ και

iii) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x^2-x)}{x^2-3x+2}$.

ΛΥΣΗ

α) Για x≠ 0 διαιρούμε με x^3 την **(1)** οπότε έχουμε: $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^3+2\dfrac{f(x)}{x}=3\left(\dfrac{ημx}{x}\right)^3$ και υπολογίζοντας τα όρια των δυο μελών παίρνουμε: $α^3+2α=3 \Leftrightarrow α=1$.

β) Παρατηρούμε ότι σε περιοχή του 0 έχουμε

i) $\dfrac{f(ημx)}{x}=\dfrac{f(ημx)}{ημx}\cdot\dfrac{ημx}{x}$ όπου $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(ημx)}{ημx}$ για $y=ημx$ γίνεται $\lim\limits_{yx\to0}\dfrac{f(y)}{y}=1$.

ii) $\dfrac{f(f(x))}{x}=\dfrac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\dfrac{f(x)}{x}$ όπου $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(x\dfrac{f(x)}{x}\right)=0\cdot1=0$ και $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(f(x))}{x}$ για $y=f(x)$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(y)}{y}=1$.

iii)

$$\frac{f(x^2-x)}{x^2-3x+2}=\frac{f(x^2-x)}{x^2-x}\cdot\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}=\frac{f(x^2-x)}{x^2-x}\cdot\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)}=$$

$$=\frac{f(x^2-x)}{x^2-x}\cdot\frac{x}{x-2}$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι σε περιοχή του 1 είναι:

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x^2-x)}{x^2-3x+2}=1\cdot(-1)=-1.$$

8. Έστω μια συνάρτηση f: R→R, που είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής. Αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$.

α) Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{f(\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x}$

β) Να δείξετε ότι: f(1) = 0

γ) Να βρείτε την τιμή του k, ώστε η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x-1}, & x\neq 1\\ k, & x=1\end{cases}$

να είναι συνεχής στο R.

δ) Για την τιμή του k = 1 να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της g τέμνει την ευθεία (ε): y = 2x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(0, 1)$.

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι σε περιοχή του $\dfrac{\pi}{2}$ έχουμε:

$$\frac{f(\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{f(\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\cdot\sigma\upsilon\nu x=\frac{f(\eta\mu x)}{1-\eta\mu^2 x}\cdot\sigma\upsilon\nu x=-\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x-1}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}$$

όπου για y = ημx έχουμε $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x-1}=\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{f(y)}{y-1}=1$.

Άρα $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{f(\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x}=-1\cdot 0=0$.

β) Επειδή f συνεχής στο 1 έχουμε:

$$f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}(x-1)\cdot\frac{f(x)}{x-1}=0\cdot 1=0$$

γ) $g(1)=\lim\limits_{x\to 1}g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$ άρα k = 1.

δ) Εφαρμόζουμε θεώρημα Bolzano για την h(x) = g(x) – 2x στο [0, 1].
Παρατηρούμε ότι: h(0) = g(0) = –f(0) όμως f γνησίως αύξουσα στο R, οπότε: $f(0)<f(1)=0$. Επομένως h(0) > 0. Ακόμα είναι:
$h(1)=g(1)-2=-1<0$.
Άρα h(0)h(1) < 0 και επομένως υπάρχει $x_0\in(0, 1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0$