ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

Α. α) Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] και $f(\alpha)\neq f(\beta)$ τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$.

(Μονάδες 7)

β) Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

(Μονάδες 8)

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ).

α) Η εξίσωση $|z-2+i|=|3-4i|$ παριστάνει κύκλο με κέντρο κ(2,-1) κι ακτίνα ρ=5.

(Μονάδες 2)

β) Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) και $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $f''(x_0)=0$, τότε η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο x_0.

(Μονάδες 2)

γ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] και $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$, τότε η f δεν έχει πραγματική ρίζα στο (α,β).

(Μονάδες 2)

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=1$.

(Μονάδες 2)

ε) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] και m, M η ελάχιστη και μέγιστη τιμή αντίστοιχα της f στο [α,β] τότε ισχύει $m(\beta-\alpha)\le\int_\alpha^\beta f(x)dx\le M(\beta-\alpha)$.

(Μονάδες 2)

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

Α. Έστω $z\in C$ με $z=x+yi$ για τον οποίο ισχύει: $2Re(z)=Im(z)-2$. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=Re^3(z)+|z|^2-3$.

(Μονάδες 10)

Β. α) Αν $z\in C$ να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζει η εξίσωση $|z-1|=|z+3-2i|$

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων α, $\beta\in R$ έτσι ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{(\alpha-1)x^2+\beta x+2}{x-3}$ να έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την παραπάνω ευθεία.

(Μονάδες 9)

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $F(x)=\int_1^x \left(\int_2^u e^{t-u}\ln t\,dt\right)du$ με x>1, u>1.

α) Να δείξετε ότι $F'(x)+F''(x)=\ln x$, x>1.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το εμβαδό Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων F΄, - F΄΄ κι από τις ευθείες x=λ, x=λ+1 με λ>1.

(Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)$.

(Μονάδες 8)

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [2,π] με f(2)=3 και f(π)=π+1. Αν η f έχει σύνολο τιμών το διάστημα [-2,5] να δείξετε ότι:

α) Υπάρχουν δύο τουλάχιστον τιμές x_1, $x_2\in(2,\pi)$ με $x_1\neq x_2$ ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

(Μονάδες 7)

β) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(2,\pi)$ ώστε $f''(\xi)=0$.

(Μονάδες 3)

γ) Υπάρχει στο διάστημα (2,π) τουλάχιστον μία ρίζα της εξίσωσης $f(x)\cdot(f'(x)-f^2(x))=x$.

(Μονάδες 4)

δ) Η ευθεία y=-x+π+3 τέμνει τη c_f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(2,\pi)$.

(Μονάδες 4)

ε) Υπάρχουν ξ_1, $\xi_2\in(2,\pi)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=1$.

(Μονάδες 7)

Λύσεις των Θεμάτων

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

Α. α) Βλ. σελ. 194 σχολ. βιβλίου

β) Βλ. σελ. 253 σχολ. βιβλίου

Β. α → Σ, β → Λ, γ → Λ, δ → Λ, ε → Σ.

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

Α. $2\text{Re}(z)=\text{Im}(z)-2 \Leftrightarrow 2x=y-2 \Leftrightarrow y=2x+2$.

Άρα $f(x)=\text{Re}^3(z)+|z|^2-3=x^3+x^2+y^2-3=x^3+x^2+(2x+2)^2-3=$
$=x^3+x^2+4x^2+8x+4-3=x^3+5x^2+8x+1$, $x\in R$.

$f'(x)=3x^2+10x+8$, $x\in R$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+10x+8=0 \Leftrightarrow x=-2$ ή $x=-\frac{4}{3}$

x	$-\infty$	-2	- 4/3	$+\infty$
f΄	+	–	+	
f	↑	↓	↑	
		Τ.Μ.	Τ.Ε.	

Η f έχει στη θέση x= -2 τοπικό μέγιστο με τιμή f(-2)= -3 και στη θέση $x=-\frac{4}{3}$ τοπικό ελάχιστο με τιμή $f\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{85}{27}$.

Β. α) Έστω z=x+yi με $x,y\in R$.

$|z-1|=|z+3-2i| \Leftrightarrow |x+yi-1|=|x+yi+3-2i| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2=x^2+6x+9+y^2-4y+4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4y=8x+12 \Leftrightarrow y=2x+3$

β) Πρέπει να ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=2$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-2x)=3$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\alpha-1)x^2+\beta x+2}{x^2-3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\alpha-1)x^2}{x^2}=\alpha-1$$

άρα $\alpha-1=2 \Leftrightarrow \alpha=3$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2+\beta x+2}{x-3}-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+\beta x+2-2x^2+6x}{x-3}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(\beta+6)x+2}{x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\beta+6)x}{x}=\beta+6$$

άρα $\beta+6=3 \Leftrightarrow \beta=-3$.

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

α) Έστω $g(u)=\int_2^u e^{t-u}\ln t\,dt=e^{-u}\int_2^u e^t\cdot\ln t\,dt$, $u>1$.

Η συνάρτηση $\int_2^u e^t\cdot\ln t\,dt$ είναι παραγωγίσιμη (επειδή $e^t\cdot\ln t$ συνεχής ως γινόμενο συνεχών) με $\left(\int_2^u e^t\cdot\ln t\,dt\right)'=e^u\cdot\ln u$, $u>1$.

Είναι $F(x)=\int_1^x g(u)du$ όπου g συνεχής (ως παραγωγίσιμη)

άρα $F'(x)=g(x)=e^{-x}\int_2^x e^t\cdot\ln t\,dt$, $x>1$

$F''(x)=-e^{-x}\int_2^x e^t\cdot\ln t\,dt+e^{-x}\cdot e^x\cdot\ln x=-e^{-x}\int_2^x e^t\cdot\ln t\,dt+\ln x$, $x>1$

άρα $F'(x)+F''(x)=\ln x$.

β) Στο διάστημα $(1,+\infty)$ η συνάρτηση $F'(x)+F''(x)=\ln x$ είναι συνεχής και παίρνει θετικές τιμές

άρα $E(\lambda)=\int_\lambda^{\lambda+1}(F'(x)+F''(x))dx=\int_\lambda^{\lambda+1}\ln x\,dx=[x\ln x-x]_\lambda^{\lambda+1}=$

$=(\lambda+1)\cdot\ln(\lambda+1)-(\lambda+1)-\lambda\cdot\ln\lambda+\lambda=$
$=\lambda\cdot\ln(\lambda+1)+\ln(\lambda+1)-\lambda-1-\lambda\cdot\ln\lambda+\lambda=$
$=\lambda\cdot\ln\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right)+\ln(\lambda+1)-1=\lambda\cdot\ln\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)+\ln(\lambda+1)-1$

γ) • $$\lim_{\lambda\to+\infty}\left[\lambda\cdot\ln\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\right]=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)}{\frac{1}{\lambda}}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\left[\ln\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\right]'}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)'}=$$

$$=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{\lambda}}\cdot\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right)}{-\frac{1}{\lambda^2}}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda}{\lambda+1}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda}{\lambda}=1$$

• $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\ln(\lambda+1)=+\infty$

άρα $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=1+\infty-1=+\infty$

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

α) Η f είναι παραγωγίσιμη (άρα συνεχής) στο [2,π] κι έχει ελάχιστη τιμή m= -2 και μέγιστη τιμή Μ=5. Αφού f(2)=3 και f(π)=π+1 ισχύει ότι οι θέσεις των ολικών ακροτάτων της f είναι εσωτερικά σημεία του [2,π], επομένως υπάρχουν x_1, $x_2 \in (2,\pi)$ ώστε $f(x_1)= -2=m$ και $f(x_2)=5=M$ όπου $x_1 \neq x_2$(αν $x_1=x_2$ τότε $f(x_1)=f(x_2)$ άρα -2=5 άτοπο). Αφού f παραγωγίσιμη έχουμε από θεώρημα Fermat ότι $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

β) Αφού $x_1 \neq x_2$ θεωρώ ότι $x_1<x_2$ (ομοίως αν $x_2<x_1$). Στο διάστημα $[x_1,x_2] \subseteq (2,\pi)$ η f΄ είναι παραγωγίσιμη (άρα συνεχής) και $f'(x_1)=f'(x_2)$, άρα από θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1,x_2) \subseteq (2,\pi)$ ώστε $f''(\xi)=0$.

γ) Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot\left(f'(x)-f^2(x)\right)-x$, $x \in [x_1,x_2] \subseteq (2,\pi)$. Η g είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως πράξεις μεταξύ των συνεχών συναρτήσεων f, f΄, x και

$g(x_1)=f(x_1)\cdot\left(f'(x_1)-f^2(x_1)\right)-x_1=-2[0-(-2)^2]-x_1= -2(-4)-x_1=8-x_1>0$ αφού $x_1 \in (2,\pi)$ και

$g(x_2)=f(x_2)\cdot(f'(x_2)-f^2(x_2))-x_2=5(0-5^2)-x_2= -125-x_2<0$ αφού $x_2 \in (2,\pi)$.

Άρα $g(x_1)\cdot g(x_2)<0$, επομένως υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (2,π) για την εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)\cdot(f'(x)-f^2(x))=x$.

δ) Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x)=f(x)+x-\pi-3$, $x \in [2,\pi]$ η οποία είναι συνεχής (πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων) και $h(2)=f(2)+2-\pi-3=3+2-\pi-3=2-\pi<0$,
$h(\pi)=f(\pi)+\pi-\pi-3=\pi+1-3=\pi-2>0$, άρα $h(2)\cdot h(\pi)<0$ επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2,\pi)$ ώστε $h(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)= -x_0+\pi+3$ άρα το x_0 είναι κοινό σημείο της C_f με την ευθεία $y=-x+\pi+3$.

ε) Αφού f παραγωγίσιμη στο [2,π] εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[2,x_0]$, $[x_0,\pi] \subseteq [2,\pi]$ ισχύει ότι υπάρχει $\xi_1 \in (2,x_0)$ και $\xi_2 \in (x_0,\pi)$, άρα $\xi_1 \neq \xi_2$, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_0)-f(2)}{x_0-2}=\frac{-x_0+\pi+3-3}{x_0-2}=\frac{\pi-x_0}{x_0-2} \text{ και}$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\pi)-f(x_0)}{\pi-x_0}=\frac{\pi+1+x_0-\pi-3}{\pi-x_0}=\frac{x_0-2}{\pi-x_0}$$

άρα $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=1$.