ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Άσκηση 1

α) Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$. Αν η f είναι συνεχής στο $\left[\alpha,\beta\right]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, να δείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=\eta$.

β) Έστω Α ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A;

Λύση

α) Έστω ότι $f(\alpha)<f(\beta)$ και $f(\alpha)<n<f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-n$, $x\in\left[\alpha,\beta\right]$ παρατηρούμε ότι:

Η g είναι συνεχής στο $\left[\alpha,\beta\right]$ και $g(\alpha)g(\beta)<0$, αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in\left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$ οπότε $f(x_0)=\eta$.

β) Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x\in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

Άσκηση 2

i. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

ii. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

iii. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα A και $x_0 \in A$. Πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0;

<u>Λύση</u>

i. Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν: έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

ii. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$.

iii. Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού A. Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$, όταν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Άσκηση 3

α) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

β) Τι ονομάζουμε σύνθεση gof δύο συναρτήσεων f,g με πεδία ορισμού A,B αντίστοιχα; Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της gof;

γ) Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Λύση

α) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$.

β) Αν f,g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g, και τη συμβολίζουμε με gof, τη συνάρτηση με τύπο $gof : A_1 \to \mathbb{R}$, όπου το πεδίο ορισμού A_1 της gof αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g.

Δηλαδή είναι το σύνολο $A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$. Είναι φανερό ότι η gof ορίζεται αν $A_1 \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

γ) Έστω οι συναρτήσεις f,g,h. Αν $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$ τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

Άσκηση 4

i. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ το $f(x_0)$;

ii. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano

iii. Πότε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

<u>Λύση</u>

i. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

παρουσιάζει στο x_0 ολικό ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

ii. Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και επιπλέον, ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

iii. Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση "1-1", όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Άσκηση 5

i. Να διατυπώσετε το θεώρημα της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής.

ii. Πότε μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

<u>Λύση</u>

i. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

ii. Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν α) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή β) Υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της $f(x_0)$, στο σημείο x_0.

Άσκηση 6

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα [α,β];

<u>Λύση</u>

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β).

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β], όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον $\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta)$.

Άσκηση 7

i. Τι ονομάζεται ακολουθία;

ii. Πότε μπορούμε να αναζητήσουμε τα όρια $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x)$;

<u>Λύση</u>

i. Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha : N^* \to \mathbb{R}$

ii. Για να έχει νόημα το όριο $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ πρέπει η f να είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$. Για να έχει νόημα το όριο $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ πρέπει η f να είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(-\infty,\beta)$.

Άσκηση 8

i. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano. Ποια είναι η γεωμετρική του ερμηνεία;

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $|\eta\mu x|$ και $|x|$. Πότε ισχύει η ισότητα;

<u>Λύση</u>

i. Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και επιπλέον, ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$. Δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

Η γεωμετρική ερμηνεία του Θ.Bolzano είναι ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

ii. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $|\eta\mu x|\le|x|$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=0$.

Άσκηση 9

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $x_0\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$.

<u>Λύση</u>

Έστω το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $x_0\in\mathbb{R}$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0\right)$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu\right)+\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}\right)+\ldots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0$$

$$=\alpha_\nu\lim_{x\to x_0}x^\nu+\alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0}x^{\nu-1}+\ldots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0$$

$$=\alpha_\nu {x_0}^\nu+\alpha_{\nu-1}{x_0}^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0=P(x_0)$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$

Άσκηση 10

Δίνεται η ρητή συνάρτηση $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$.

Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

<u>Λύση</u>

Είναι: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

Επομένως, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, εφόσον $Q(x_0) \neq 0$.

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$f(x) = -3e^{2x+1} - 5x + 3$.

α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

α) Η συνάρτηση έχει $D_f = \mathbb{R}$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1 \Rightarrow$

$e^{2x_1+1} < e^{2x_2+1} \Rightarrow -3e^{2x_1+1} > -3e^{2x_2+1}$

και $x_1 < x_2 \Rightarrow -5x_1 > -5x_2 \Rightarrow -5x_1 + 3 > -5x_2 + 3$

άρα $-3e^{2x_1+1} - 5x_1 + 3 > -3e^{2x_2+1} - 5x_2 + 3 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει σύνολο τιμών το:

$f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)$.

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-3e^{2x+1} - 5x + 3\right) =$

  $-3\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x+1} - 5\lim\limits_{x\to+\infty} x + 3 = -\infty - \infty + 3 = -\infty$

  (αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x+1} = e\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x)^2 = e(+\infty) = +\infty$).

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-3e^{2x+1} - 5x + 3) =$

  $-3\lim_{x\to-\infty} e^{2x+1} - 5\lim_{x\to-\infty} x + 3 = 0 + \infty + 3 = +\infty$

  (αφού $\lim_{x\to-\infty} e^{2x+1} = e\lim_{x\to-\infty}(e^2)^x = e\cdot 0 = 0$).

Επομένως είναι $f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty)$.

γ) Αφού το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ που περιέχει το 0, θα υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = 0$. Επειδή επιπλέον η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, η x_0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = 2x^{2011} + 5x - 7, x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

iii. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f.

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση f έχει $D_f = \mathbb{R}$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε:

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^{2011} < x_2^{2011} \Rightarrow 2x_1^{2011} < 2x_2^{2011}$

και $x_1 < x_2 \Rightarrow 5x_1 < 5x_2 \Rightarrow 5x_1 - 7 < 5x_2 - 7$ άρα

$2x_1^{2011} + 5x_1 - 7 < 2x_2^{2011} + 5x_2 - 7 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Εξάλλου $f(1) = 2 + 5 - 7 = 0$ και επομένως: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

iii. Είναι: $f(1) = 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε:

- Για κάθε $x < 1$, έχουμε: $f(x) < f(1) \Rightarrow f(x) < 0$
- Για κάθε $x > 1$, έχουμε: $f(x) > f(1) \Rightarrow f(x) > 0$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=4\sqrt{e^x-2}+3$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να ορίσετε την f^{-1}.

<u>Λύση</u>

i. Πρέπει: $e^x-2\geq 0 \Leftrightarrow e^x\geq 2 \Leftrightarrow x\geq \ln 2$

Άρα $D_f=\left[\ln 2,+\infty\right)$.

ii. Για κάθε $x_1,x_2\in[\ln 2,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2 \Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1}-2<e^{x_2}-2 \Rightarrow \sqrt{e^{x_1}-2}<\sqrt{e^{x_2}-2} \Rightarrow$$

$$4\sqrt{e^{x_1}-2}<4\sqrt{e^{x_2}-2} \Rightarrow 4\sqrt{e^{x_1}-2}+3<4\sqrt{e^{x_2}-2}+3 \Rightarrow$$

$$f(x_1)<f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\ln 2,+\infty)$. Οπότε αφού η f είναι και συνεχής (πράξεις συνεχών) το σύνολο τιμών της είναι:

$$f\left(\left[\ln 2,+\infty\right)\right)=\left[f\left(\ln 2\right),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)$$

Έχουμε:

$$f(\ln 2)=4\sqrt{e^{\ln 2}-2}+3=4\cdot 0+3=3$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(4\sqrt{e^x-2}+3)=+\infty$$

Άρα $f\left(\left[\ln 2,+\infty\right)\right)=\left[3,+\infty\right)$

iii. Η f είναι 1-1 ως γνήσια αύξουσα (ii) και επομένως αντιστρέφεται.

Για κάθε $x\in\left[\ln 2,+\infty\right)$ έχουμε: $f(x)=y \Leftrightarrow$

$$4\sqrt{e^x-2}+3=y \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{e^x-2}=\dfrac{y-3}{4} \\ \dfrac{y-3}{4}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} e^x-2=\left(\dfrac{y-3}{4}\right)^2 \\ y\geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\ln\left[\dfrac{(y-3)^2}{4}+2\right] \\ y\geq 3 \end{cases}.$$

Άρα $f^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{(x-3)^2}{4}+2\right)$ με $D_{f^{-1}}=\left[3,+\infty\right)$.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=2\ln(\sqrt{x-1}+1)+3$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1".

iii. Να ορίσετε την f^{-1}.

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(1+x)=2$.

<u>Λύση</u>

i. Πρέπει:

$$\left.\begin{cases} x-1\geq 0 \\ \text{και} \\ \sqrt{x-1}+1>0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow x\geq 1 \text{ άρα } D_f=[1,+\infty)$$

ii. Έστω $x_1,x_2\in[1,+\infty)$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2\ln(\sqrt{x_1-1}+1)+3=2\ln(\sqrt{x_2-1}+1)+3\Rightarrow$$

$$2\ln\sqrt{x_1-1}=2\ln\sqrt{x_2-1}\Rightarrow$$

$$\ln\sqrt{x_1-1}=\ln\sqrt{x_2-1}\Rightarrow x_1-1=x_2-1\Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι "1-1".

iii. Έχουμε:

$$f(x)=y\Leftrightarrow y=2\ln(\sqrt{x-1}+1)+3\Leftrightarrow \frac{y-3}{2}=\ln(\sqrt{x-1}+1)\Leftrightarrow$$

$e^{\frac{y-3}{2}}=\sqrt{x-1}+1\Leftrightarrow\left(e^{\frac{y-3}{2}}-1\right)^2=x-1$, πρέπει $e^{\frac{y-3}{2}}-1\geq 0$, επομένως

$$x=(e^{\frac{y-3}{2}}-1)^2+1,\ y\geq 3.$$

Άρα $f^{-1}(x)=(e^{\frac{x-3}{2}}-1)^2+1,\ x\in[3,+\infty)$

iv. $f^{-1}(1+x)=2 \Leftrightarrow (e^{\frac{x+1-3}{2}}-1)^2+1=2 \Leftrightarrow (e^{\frac{x-2}{2}}-1)^2=1 \Leftrightarrow$

$(e^{\frac{x-2}{2}}-1=1$ ή $e^{\frac{x-2}{2}}-1=-1) \Leftrightarrow$

$(e^{\frac{x-2}{2}}=2$ ή $e^{\frac{x-2}{2}}=0$ αδύνατον$) \Leftrightarrow \frac{x-2}{2}=\ln 2 \Leftrightarrow x=2\ln 2+2$.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-3x+2$.

i. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x\in\mathbb{R}$ για τον οποίο η συνάρτηση παίρνει την τιμή 2011.

iii. Να λύσετε την ανίσωση: $3x2^x+2^x<1$

Λύση

i. Η συνάρτηση έχει $D_f=\mathbb{R}$. Για κάθε x_1,x_2 με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}>\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$$

και $x_1<x_2\Rightarrow-3x_1>-3x_2\Rightarrow-3x_1+2>-3x_2+2$

άρα $\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}-3x_1+2>\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}-3x_2+2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x-3x+2\right]=$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x-3\lim\limits_{x\to-\infty}x+2=+\infty-(-\infty)-2=+\infty$, αφού $0<\frac{1}{2}<1$

οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x-3x+2\right]=$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x-3\lim\limits_{x\to+\infty}x+2=0-\infty+2=-\infty$, αφού $0<\frac{1}{2}<1$ οπότε

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, έχει σύνολο τιμών το:

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \to +\infty} f(x), \lim_{x \to -\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty)$$

Επειδή $2011 \in f(\mathbb{R})$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα, υπάρχει μοναδικός $x \in \mathbb{R}$ για τον οποίο η συνάρτηση παίρνει την τιμή 2011.

iii. Η ανίσωση γίνεται:

$$3x2^x + 2^x < 1 \Leftrightarrow 3x + 1 < \frac{1}{2^x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3x > 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x - 3x + 2 > 3 \Leftrightarrow f(x) > 3 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow x < 0$$

(αφού $f(0) = 3$) και f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=3x^{2011}+2x-5, x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα τη $x=1$.

iii. Να βρείτε το πρόσημο της f.

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση έχει $D_f=\mathbb{R}$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$x_1<x_2\Rightarrow x_1^{2011}<x_2^{2011}\Rightarrow 3x_1^{2011}<3x_2^{2011}$

και $x_1<x_2\Rightarrow 2x_1<2x_2\Rightarrow 2x_1-5<2x_2-5$.

Άρα $3x_1^{2011}+2x_1-5<3x_2^{2011}+2x_2-5\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Έχουμε: $f(1)=0$ άρα $x=1$ ρίζα της $f(x)=0$ και επειδή η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

iii. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και $x=1$ η μοναδική της ρίζα, τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα για κάθε $x<1$ ισχύει $f(x)<f(1)=0$, ενώ για κάθε $x>1$ ισχύει $f(x)>f(1)=0$.

Άσκηση 7

Να βρείτε το $\lim_{x\to 1} f(x)$, όταν:

i. $\lim_{x\to 1} \frac{2x-1}{f(x)} = +\infty$

ii. $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{4x+3} = -\infty$

iii. $\lim_{x\to 1} \left[f(x)(3x+4) \right] = +\infty$

<u>Λύση</u>

i. Θέτουμε $\frac{2x-1}{f(x)} = g(x)$ και επειδή $\lim_{x\to 1} g(x) = +\infty$ είναι $g(x) \neq 0$ για τιμές κοντά στο 1.

Επίσης: $\frac{2x-1}{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{2x-1}{g(x)}$

Οπότε: $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{2x-1}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \left[(2x-1)\frac{1}{g(x)} \right] = 0$

ii. Θέτουμε: $\frac{f(x)}{4x+3} = h(x)$, οπότε $f(x) = (4x+3)h(x)$

Επίσης $\lim_{x\to 1} h(x) = -\infty$

Άρα $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \left[(4x+3)h(x) \right] = 7 \cdot (-\infty) = -\infty$

iii. Θέτουμε:

$f(x)(3x+4) = \kappa(x)$, οπότε $\lim_{x\to 1} \kappa(x) = +\infty$

Επίσης $3x+4 \neq 0$ για τιμές κοντά στο 1, οπότε $f(x) = \frac{k(x)}{3x+4}$

Άρα $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \left[\frac{1}{3x+4} k(x) \right] = \frac{1}{7}(+\infty) = +\infty$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:[1,5]$ της οποίας η γραφική παράσταση περνάει από τα σημεία $A(1,8)$ και $B(5,12)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παίρνει την τιμή $\frac{29}{3}$

iii. Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1,5)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0)=\frac{2f(2)+3f(3)+4f(4)}{9}$$

Λύση

i. Είναι: $f(1)=8$ και $f(5)=12$ και αφού γνησίως μονότονη θα είναι γνησίως αύξουσα ($1<5$ και $f(1)<f(5)$).

ii. Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[1,5]$ άρα έχει σύνολο τιμών το:

$$f\left([1,5]\right)=\left[f(1),f(5)\right]=[8,12]$$

$$\frac{29}{3}\in f\left([1,5]\right)$$

iii. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x_1,x_2\in D_f$ με $x_1<x_2$ θα είναι $f(x_1)<f(x_2)$.
Έτσι έχουμε:

$$1<2<5 \Leftrightarrow f(1)<f(2)<f(5) \Leftrightarrow 8<f(2)<12 \Leftrightarrow 16<2f(2)<24$$

$$1<3<5 \Leftrightarrow f(1)<f(3)<f(5) \Leftrightarrow 8<f(3)<12 \Leftrightarrow 24<3f(3)<36$$

$$1<4<5 \Leftrightarrow f(1)<f(4)<f(5) \Leftrightarrow 8<f(4)<12 \Leftrightarrow 32<4f(4)<48$$

οπότε:

$$72<2f(2)+3f(3)+4f(4)<108 \Leftrightarrow$$

$$8<\frac{2f(2)+3f(3)+4f(4)}{9}<12$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει $x_0\in(1,5)$ τέτοιο ώστε:
$f(x_0)=\frac{2f(2)+3f(3)+4f(4)}{9}$ και αφού f γνησίως αύξουσα θα είναι μοναδικό.

Άσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\ln(3e^x+1)-2$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να ορίσετε την f^{-1}.

iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<f^{-1}(\ln 5-2)-2$.

<u>Λύση</u>

i. Για να ορίζεται η f, πρέπει: $3e^x+1>0$ που αληθεύει για κάθε $x\in R$. Άρα, το πεδίο ορισμού της είναι: $D_f=\mathbb{R}$

ii. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2}\Rightarrow 3e^{x_1}<3e^{x_2}\Rightarrow 3e^{x_1}+1<3e^{x_2}+1\Rightarrow$$

$$\ell n(3e^{x_1}+1)<\ell n(3e^{x_2}+1)\Rightarrow \ell n(3e^{x_1}+1)-2<\ell n(3e^{x_2}+1)-2\Rightarrow$$

$$f(x_1)<f(x_2).$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα $1-1$ οπότε αντιστρέφεται.

iii. Έχουμε:

$$f(x)=y\Leftrightarrow y+2=\ell n(3e^x+1)\Leftrightarrow e^{y+2}=3e^x+1\Leftrightarrow$$

$$e^x=\frac{e^{y+2}-1}{3},\frac{e^{y+2}-1}{3}>0 \text{ οπότε } x=\ell n\frac{1}{3}(e^{y+2}-1), y>-2.$$

Άρα $f^{-1}(x)=\ln\frac{1}{3}(e^{x+2}-1), x\in\left(-2,+\infty\right)$

iv. Έχουμε:

$$f(x)<f^{-1}(\ln 5-2)-2\Leftrightarrow \ln\left(3e^x+1\right)-2<\ln\frac{1}{3}\left(e^{\ln 5}-1\right)-2\Leftrightarrow$$

$$\ln\left(3e^x+1\right)<\ln\frac{4}{3}\Leftrightarrow 3e^x+1<\frac{4}{3}\Leftrightarrow 9e^x+3<4\Leftrightarrow$$

$$e^x<\frac{1}{9}\Leftrightarrow x<\ln\frac{1}{9}\Leftrightarrow x<-\ln 9$$

Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = -2x^3 - 3x - 1$

i. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 2$

iv. Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x) \geq x - 1$

Λύση

i. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow -2x_1^3 > -2x_2^3$$

και

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -3x_1 > -3x_2 \Rightarrow -3x_1 - 1 > -3x_2 - 1$$

άρα

$$-2x_1^3 - 3x_1 - 1 > -2x_2^3 - 3x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. Η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα και $1-1$ οπότε αντιστρέφεται.

iii. $f^{-1}(x) = 2 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}\left(x\right)\right) = f(2) \Leftrightarrow x = -23$

iv. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, θα ισχύει:

$$f^{-1}(x) \geq x + 1 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right) \geq f\left(x+1\right) \Leftrightarrow$$

$$x \geq -2\left(x^3 + 3x^2 + 3x + 1\right) - 3\left(x+1\right) - 1 \Leftrightarrow$$

$$2x^3 + 6x^2 + 10x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow \text{(Σχήμα Horner)}$$

$\left(x+1\right)\cdot\left(2x^2 + 4x + 6\right) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ (αφού $2x^2 + 4x + 6 > 0$ διότι $\Delta = 16 - 48 = -32 < 0$)

Άσκηση 11

Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f(f(x))+f(x)=3x+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(1)=3$

i. Να βρείτε το $f^{-1}(1)$.

ii. Να βρείτε το $f(3)$

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x)=3$

iv. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+x}{f\left(f\left(x\right)\right)+f(x)-2}$

<u>Λύση</u>

i. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και $1-1$, οπότε αντιστρέφεται. Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(1)$ στη δοθείσα σχέση και έχουμε:

$$f\left(f\left(f^{-1}(1)\right)\right)+f\left(f^{-1}(1)\right)=3f^{-1}\left(1\right)+2\Leftrightarrow$$

$$f(1)+1=3f^{-1}(1)+2\Leftrightarrow 4-2=3f^{-1}(1)\Leftrightarrow f^{-1}(1)=\frac{2}{3}$$

ii. Για $x=1$ η δοθείσα σχέση γίνεται:

$$f\left(f\left(1\right)\right)+f(1)=3\cdot 1+2\Leftrightarrow f(3)+3=5\Leftrightarrow f(3)=2$$

iii. Είναι:

$f^{-1}(x)=3\Leftrightarrow x=f(3)\Leftrightarrow x=2$ (από ii)

iv. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+x}{f\left(f(x)\right)+f(x)-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+x}{3x}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

αφού είναι: $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right| = \frac{|\sigma\upsilon\nu x|}{|x|} \le \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{|x|} \le \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \le \frac{1}{|x|}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|} = 0$

Οπότε από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$. Όμοια και για το $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x}$.

Άσκηση 12

Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\sqrt{x}+\eta\mu(x-1)}{x^2-1}=2$

i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f περνάει από το σημείο $M(1,1)$

ii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|3f(x)-2|-1}{x^2-1}$

<u>Λύση</u>

i. Θέτουμε: $g(x)=\dfrac{f(x)-\sqrt{x}+\eta\mu(x-1)}{x^2-1}\Leftrightarrow f(x)=(x^2-1)g(x)+\sqrt{x}-\eta\mu(x-1).$

Έτσι έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left[g(x)(x^2-1)+\sqrt{x}-\eta\mu(x-1)\right]=1$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα ισχύει: $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$

Άρα η γραφική της παράσταση περνάει από το σημείο $M(1,1)$

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\left[3f(x)-2\right]=1>0$, οπότε $3f(x)-2>0$, κοντά στο x_0

Άρα

$$\lim_{x\to 1}\frac{|3f(x)-2|-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3f(x)-3}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3\left(x^2-1\right)g(x)+3\sqrt{x}-3\eta\mu(x-1)-3}{x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[3g(x)\right]+\lim_{x\to 1}\frac{3\left(\sqrt{x}-1\right)}{(x-1)(x+1)}-3\lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu(x-1)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=6+\frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\left(x-1\right)}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}-\frac{3}{2}\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=$$

$$=6+\frac{3}{4}-\frac{3}{2}=\frac{21}{4}$$

Άσκηση 13

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2\ln\frac{x+1}{1-x} + 3$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

iii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να μελετήσετε την f^{-1} ως προς τη συνέχεια.

iv. Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

<u>Λύση</u>

i. Για να ορίζεται η f, πρέπει:

$$\frac{x+1}{1-x} > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x|^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της είναι το: $D_f = (-1,1)$

ii. Η f είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων f_2 και f_1 με $f_1(x) = 2\ln x + 3$ και $f_2(x) = \frac{x+1}{1-x}$, αφού για κάθε $x \in (-1,1)$, ισχύει:

$$(f_1 o f_2)(x) = f_1(f_2(x)) = 2\ln f_2(x) + 3 = 2\ln\frac{x+1}{1-x} + 3$$

iii. Για κάθε $x_1, x_2 \in (-1,1)$ με $f(x_1) = f(x_2)$ έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2\ln\frac{x_1+1}{1-x_1} + 3 = 2\ln\frac{x_2+1}{1-x_2} + 3 \Rightarrow \frac{x_1+1}{1-x_1} = \frac{x_2+1}{1-x_2} \Rightarrow$$

$$x_1 - x_1x_2 + 1 - x_2 = x_2 + 1 - x_1x_2 - x_1 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Άρα η f αντιστρέφεται.

- Είναι:

$$f(x) = y \Rightarrow y = 2\ln\frac{x+1}{1-x} + 3 \Rightarrow \frac{x+1}{1-x} = e^{\frac{y-3}{2}} \Rightarrow$$

$$x+1=e^{\frac{y-3}{2}}-x\cdot e^{\frac{y-3}{2}}\Rightarrow(1+e^{\frac{y-3}{2}})\cdot x=e^{\frac{y-3}{2}}-1\Rightarrow x=\frac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{e^{\frac{y-3}{2}}+1}$$

Επειδή:

$$-1<x<1\Rightarrow-1<\frac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{e^{\frac{y-3}{2}}+1}<1\Rightarrow\frac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{e^{\frac{y-3}{2}}+1}<1$$

και $\frac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{e^{\frac{y-3}{2}}+1}>-1$

ή $-1<1$ και $2e^{\frac{y-3}{2}}>0$ που αληθεύουν για κάθε $y\in\mathbb{R}$, παίρνουμε:

$$f^{-1}(x)=\frac{e^{\frac{x-3}{2}}-1}{e^{\frac{x-3}{2}}+1},x\in\mathbb{R}$$

- Η f^{-1} είναι συνεχής ως πηλίκο των συνεχών συναρτήσεων $f_1(x)=e^{\frac{x-3}{2}}-1$ και $f_2(x)=e^{\frac{x-3}{2}}+1$. Η f_1 είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών $g_1(x)=e^x-1$ και $g_2(x)=\frac{x-3}{2}$

  Πράγματι για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει:

  $$\left(g_1og_2\right)(x)=g_1\left(g_2\left(x\right)\right)=e^{\frac{x-3}{2}}-1=f_1(x)$$

  Η f_2 είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών $h_1(x)=e^x+1$ και $h_2(x)=\frac{x-3}{2}$.

  Πράγματι για κάθε $x\in R$, ισχύει:

  $$\left(h_1oh_2\right)(x)=h_1\left(h_2(x)\right)=e^{\frac{x-3}{2}}+1=f_2(x)$$

iv. Είναι:

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1^-}(2\ln\frac{x+1}{1-x}+3)$$

Αν θέσουμε $u=\frac{x+1}{1-x}$ και αφού για $x\to1^-\Leftrightarrow u\to+\infty$, θα έχουμε:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{u\to +\infty} (2\ln u + 3) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \left(2\ln\frac{x+1}{1-x} + 3\right)$$

Αν θέσουμε $u = \frac{x+1}{1-x}$ και αφού για $x \to -1^+ \Leftrightarrow u \to 0$, έχουμε

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{u\to 0}\left(2\ln u + 3\right) = -\infty$$

Άσκηση 14

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=\ln\dfrac{x+2}{2-x}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της fog.

ii. Να βρείτε συνάρτηση h για την οποία να ισχύει: $(hog)(x)=x$.

iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι περιττή.

<u>Λύση</u>

i. Για να ορίζεται η g , πρέπει: $\dfrac{x+2}{2-x}>0\Leftrightarrow x\in(-2,2)$. Άρα το πεδίο ορισμού της g είναι το:

$D_g=(-2,2)$.

Επίσης έχουμε: $D_f=\mathbb{R}^*$ οπότε το πεδίο ορισμού της fog είναι:

$D_{fog}=\left\{x\in(-2,2)\,/\,\ell n\dfrac{x+2}{2-x}\neq 0\right\}=\left\{x\in(-2,2)\,/\,\dfrac{x+2}{2-x}\neq 1\right\}=$

$\{x\in(-2,2)\,/\,x\neq 0\}=(-2,0)\cup(0,2)$.

ii. Ισχύει $(hog)(x)=x\Leftrightarrow h(g(x))=x\Leftrightarrow h\left(\ln\dfrac{x+2}{2-x}\right)=x$ (1)

Θέτουμε $u=\ln\dfrac{x+2}{2-x}$, οπότε έχουμε:

$u=\ln\dfrac{x+2}{2-x}\Leftrightarrow\dfrac{x+2}{2-x}=e^u\Rightarrow 2e^u-xe^u=x+2\Rightarrow x=\dfrac{2e^u-2}{e^u+1}$ αφού $e^u+1\neq 0$, για κάθε $u\in\mathbb{R}$.

Άρα η (1) γίνεται: $h(u)=\dfrac{2e^u-2}{e^u+1}$ ή $h(x)=\dfrac{2e^x-2}{e^x+1}$.

iii.

- Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $-x\in\mathbb{R}$.
- Για κάθε $x\neq 0$ έχουμε: $h(-x)=\dfrac{2e^{-x}-2}{e^{-x}+1}=\dfrac{\dfrac{2}{e^x}-2}{\dfrac{1}{e^x}+1}=\dfrac{2-2e^x}{1+e^x}=-\dfrac{2e^x-2}{1+e^x}=-h(x).$

  Άρα η h περιττή.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1

Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται στο $A(2,-1)$.
- $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 5$ είναι δύο διαδοχικές ρίζες της $g(x) = 0$.

Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β) $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,5)$.

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(3)\cdot x^4 + 2x^2 + 1}{g(2)\cdot x^3 + 5} = -\infty$

<u>Λύση</u>

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1)\cdot f(x_2) < 0$.

Τότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ που είναι άτοπο.

Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β) Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(-1,5)$ και $g(x) \neq 0$ στο $(-1,5)$ αφού -1 και 5 είναι διαδοχικές ρίζες της $g(x) = 0$.

Άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1,5)$. Επίσης $g(2) = -1 < 0$. Οπότε $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,5)$.

γ) Είναι: $f(2) = -1 < 0$. Άρα από α) είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε $f(3) < 0$. Επίσης από β) $g(2) < 0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(3)\cdot x^4 + 2x^2 + 1}{g(2)\cdot x^3 + 5} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{f(3)}{g(2)} \cdot x \right) = -\infty$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$f(x)=2x^4+3\ln x+1$.

i. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

iii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική ρίζα.

iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $\lambda>0$ για τον οποίο ισχύει:

$$\lambda^4+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda}$$

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση f έχει $D_f=(0,+\infty)$. Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με

$x_1<x_2$ έχουμε: $x_1<x_2\Rightarrow x_1{}^4<x_2{}^4\Rightarrow 2x_1{}^4<2x_2{}^4$ και

$x_1<x_2\Rightarrow \ln x_1<\ln x_2\Rightarrow 3\ln x_1<3\ln x_2\Rightarrow 3\ln x_1+1<3\ln x_2+1$

άρα $2x_1{}^4+3\ln x_1+1<2x_2{}^4+3\ln x_2+1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

ii. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ άρα έχει σύνολο τιμών το:

$f((0,+\infty))=(\lim\limits_{x\to0^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))$.

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(2x^4+3\ln x+1)=0-\infty+1=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^4+3\ln x+1)=(+\infty)+(+\infty)+1=+\infty$

Επομένως είναι: $f((0,+\infty))=(-\infty,+\infty)$.

iii. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, άρα η εξίσωση $f(x)=\alpha$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$, έχει μοναδική ρίζα.

iv. Έχουμε:

$$\lambda^4 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow 2\lambda^4 + 1 = 3(\ln 1 - \ln\lambda) \Leftrightarrow$$

$$2\lambda^4 + 1 = -3\ln\lambda \Leftrightarrow 2\lambda^4 + 3\ln\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow f(\lambda) = 0$$

Αρκεί να δείξουμε λοιπόν ότι υπάρχει μοναδικό $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε $f(\lambda) = 0$. Αυτό ισχύει αφού $0 \in f((0,+\infty))$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση: $2f^3(x)-3=2x-3f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ii. Αν το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

iv. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

Λύση

i. $2f^3(x)-3=2x-3f(x)\Leftrightarrow 2f^3(x)+3f(x)=2x+3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $x=x_0$ είναι $2f^3(x_0)+3f(x_0)=2x_0+3$.

Αφαιρώντας κατά μέλη, έχουμε:

$$2\left[f^3(x)-f^3(x_0)\right]+3\left[f(x)-f(x_0)\right]=2(x-x_0)\Leftrightarrow$$

$$2\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\right]+3\left[f(x)-f(x_0)\right]=2(x-x_0)\Leftrightarrow$$

$$f(x)-f(x_0)=\frac{2(x-x_0)}{2\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\right]+3}$$

Αφού $2f^2(x)+2f(x)f(x_0)+2f^2(x_0)+3\neq 0,$ διότι είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς $f(x)$ με διακρίνουσα:

$$\Delta=4f^2(x_0)-4\cdot 2(2f^2(x_0)+3)=4f^2(x_0)-16f^2(x_0)-24=$$

$$-12f^2(x_0)-24=-12\left[f^2(x_o)+2\right]<0$$

Άρα: $\left|f(x)-f(x_0)\right|=\dfrac{2\left|x-x_0\right|}{2f^2(x)+2f(x)f(x_0)+2f^2(x_0)+3}\leq 2\left|x-x_0\right|$.

Οπότε $-2\left|x-x_0\right|\leq f(x)-f(x_0)\leq 2\left|x-x_0\right|$

Αλλά $\lim\limits_{x\to x_0}\left[-2\left|x-x_0\right|\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\left[2\left|x-x_0\right|\right]=0$ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, θα ισχύει:

$\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) - f(x_0)] = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

ii. Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $f^3(x_1) = f^3(x_2) \Rightarrow 2f^3(x_1) = 2f^3(x_2)$.

Επίσης $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3f(x_1) = 3f(x_2)$ και προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε:

$2f^3(x_1) + 3f(x_1) = 2f^3(x_2) + 3f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow x_1 = x_2$.

Άρα η f είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται. Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f που είναι το $\mathbb{R}$.

Είναι: $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Οπότε: $2f^3(x) + 3f(x) = 2x + 3 \Leftrightarrow 2y^3 + 3y = 2f^{-1}(y) + 3$

Άρα $f^{-1}(x) = \dfrac{2x^3 + 3x - 3}{2}, x \in \mathbb{R}$

iii. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = f^{-1}(0) = \dfrac{2 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0 - 3}{2} = -\dfrac{3}{2}$

iv. Η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και η f, οπότε τα κοινά τους σημεία είναι στην $y = x$.

$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{2x^3 + 3x - 3}{2} = x$

$\Leftrightarrow 2x^3 + 3x - 3 = 2x \Leftrightarrow 2x^3 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

<u>Παρατήρηση</u>: Τις προτάσεις

Α) Αν η f είναι γνησίως μονότονη τότε και η f^{-1} είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας.

Β) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$, (αν υπάρχουν), βρίσκονται στην ευθεία $y = x$.

<u>Πρέπει να τις αποδεικνύουμε για να τις χρησιμοποιήσουμε σε μία άσκηση.</u>

Άσκηση 4

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\left[-1,2\right]\to\mathbb{R}$ και ο μιγαδικός αριθμός:

$z=\dfrac{2f(-1)+f(2)i}{1-i}$ για τον οποίο ισχύει ότι $\text{Im}(z)=\dfrac{3}{2}$ και $\text{Re}(z)\neq\dfrac{5}{2}$.

i. Να γράψετε τον z στη μορφή $\kappa+\lambda i,\ \kappa,\lambda\in\mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι: $2f(-1)+f(2)=3$.

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\alpha\in(-1,2)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(\alpha)+1}{\alpha-2}+\frac{2-f(\alpha)}{\alpha+1}=0$$

<u>Λύση</u>

i. Είναι:

$$z=\frac{\left[2f(-1)+f(2)i\right](1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{\left[2f(-1)-f(2)\right]+\left[2f(-1)+f(2)\right]i}{2}=$$

$$\frac{2f(-1)-f(2)}{2}+\frac{2f(-1)+f(2)}{2}i$$

ii. $\text{Im}(z)=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\dfrac{2f(-1)+f(2)}{2}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow 2f(-1)+f(2)=3$

iii. Για $\alpha\neq2$ και $\alpha\neq1$ η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$\frac{f(\alpha)+1}{\alpha-2}+\frac{2-f(\alpha)}{\alpha+1}=0\Leftrightarrow\left(\alpha+1\right)\left[f(\alpha)+1\right]+(\alpha-2)\left[2-f(\alpha)\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\alpha f(\alpha)+\alpha+f(\alpha)+1+2\alpha-\alpha f(\alpha)-4+2f(\alpha)=0\Leftrightarrow 3f(\alpha)+3\alpha-3=0\ .$$

Έστω $g(x)=3f(x)+3x-3$. Η g είναι συνεχής στο $\left[-1,2\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης:

$$g(-1)=3f(-1)+3(-1)-3=3\left[f(-1)-2\right]$$

$$g(2)=3f(2)+3\cdot2-3=3f(2)+3=3\left[3-2f(-1)\right]+3=$$

$12-6f(-1)=-6\left[f(-1)-2\right]$

Παρατηρούμε ότι: $g(-1)\cdot g(-2)=-18[f(-1)-2]^2\leq 0$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $g(-1)\cdot g(2)=0 \Leftrightarrow \left(g(-1)=0 \text{ ή } g(2)=0\right)$, τότε $f(-1)=2$ οπότε και $f(2)=-1$ (απο το (ii)). Τότε όμως θα είναι $z=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}i$ ΑΤΟΠΟΝ από την υπόθεση. Άρα θα είναι

- $g(-1)\cdot g(2)<0$ τότε από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\alpha\in(-1,2)$ τέτοιο, ώστε

  $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow 3f(\alpha)+3\alpha-3=0 \Leftrightarrow$

  $(\alpha+1)\left[f(\alpha)+1\right]+(\alpha-2)\left[2-f(\alpha)\right]=0 \Leftrightarrow$

  $\frac{f(\alpha)+1}{\alpha-2}+\frac{2-f(\alpha)}{\alpha+1}=0$

Δηλαδή το $\alpha\in(-1,2)$ είναι ρίζα και της αρχικής εξίσωσης.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1,0)$ και $B(2,3)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να βρείτε το πρόσημο της f.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(2e^x+1)=3$.

iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(3x+5)\le 0$.

<u>Λύση</u>

i. Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη και με $-1<2$ είναι $f(-1)=0<f(2)=3$, η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Είναι: $f(-1)=0$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (άρα και 1-1) η τιμή που μηδενίζει την f είναι μοναδική. Επομένως για:

$$x<-1\Rightarrow f(x)<f(-1)\Rightarrow f(x)<0$$

$$x>-1\Rightarrow f(x)>f(-1)\Rightarrow f(x)>0.$$

Άρα $f(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$.

iii. Αφού η f είναι 1-1 έχουμε:

$$f(2e^x+1)=3\Leftrightarrow f(2e^x+1)=f(2)\Leftrightarrow 2e^x+1=2\Leftrightarrow$$

$$2e^x=1\Leftrightarrow e^x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\ln\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\ln 2$$

iv. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε:

$$f(3x+5)\le 0\Leftrightarrow f(3x+5)\le f(-1)\Leftrightarrow 3x+5\le -1\Leftrightarrow 3x\le -6\Leftrightarrow x\le -2.$$

Άσκηση 6

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί: $z_1 = 2+2i, z_2 = 2-2i$ και $z = \eta\mu x \cdot z_1 - x z_2, x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$

Αν $f(x) = \dfrac{|z|^2}{z_1 z_2 x^2}$ να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ii. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

<u>Λύση</u>

i. Είναι: $z = \eta\mu x(2+2i) - x(2-2i) = (2\eta\mu x - 2x) + (2\eta\mu x + 2x)i$, οπότε

$|z|^2 = (2\eta\mu x - 2x)^2 + (2\eta\mu x + 2x)^2 =$

$4\eta\mu^2 x + 4x^2 - 8x\eta\mu x + 4\eta\mu^2 x + 4x^2 + 8x\eta\mu x = 8\eta\mu^2 x + 8x^2$

$z_1 z_2 = (2+2i)(2-2i) = 4+4 = 8$

Επομένως $f(x) = \dfrac{8\eta\mu^2 x + 8x^2}{8x^2} = \left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2 + 1$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8\eta\mu^2 x + 8x^2}{8x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2 + 1\right] = 0+1 = 1$

αφού $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right| = \dfrac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \dfrac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{|x|} \leq \dfrac{\eta\mu x}{x} \leq \dfrac{1}{|x|}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{|x|} = 0, \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{|x|} = 0$ οπότε, λόγω του κριτηρίου παρεμβολής, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 0$.

ii. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2 + 1\right] = 1^2 + 1 = 2$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)^2 + 1\right] = \lim\limits_{\frac{1}{x}=y\to 0}\left[\left(\dfrac{\eta\mu y}{y}\right)^2 + 1\right] = 2$

Άσκηση 7

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = 2x + \dfrac{2i}{x+i}, x \in \mathbb{R}$.

i. Να γραφεί ο μιγαδικός αριθμός z στη μορφή $\alpha + \beta i$.

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{Re}(z)$.

iii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{1}{2} \text{Im}(z) \eta\mu x \right]$

<u>Λύση</u>

i. Είναι: $z = 2x + \dfrac{2i}{x+i} = 2x + \dfrac{2i(x-i)}{x^2+1} = 2x + \dfrac{2xi+2}{x^2+1} =$

$$\left(2x + \frac{2}{x^2+1}\right) + \frac{2x}{x^2+1} i$$

ii. $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{Re}(z) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x + \dfrac{2}{x^2+1}\right) = -\infty + 0 = -\infty$

iii. Για $x > 0$, έχουμε: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{1}{2} \text{Im}(z) \eta\mu x \right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2x}{x^2+1} \eta\mu x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x \eta\mu x}{x^2+1} =$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x \eta\mu x}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = 0 \cdot 1 = 0$$

Αφού $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right| = \dfrac{|\eta\mu x|}{|x|} \le \dfrac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{|x|} \le \dfrac{\eta\mu x}{x} \le \dfrac{1}{|x|}$ και

$$\lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{|x|} \right) = 0$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε και $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 0$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[-3,3]$ για την οποία ισχύει $3x^2+4f^2(x)=27$ για κάθε $x\in[-3,3]$.

i. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(-3,3)$.

iii. Να βρεθεί ο τύπος της f.

iv. Αν επιπλέον $f(1)=\sqrt{6}$ να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}{x}$.

<u>Λύση</u>

i. Αν ρ ρίζα της $f(x)=0$, τότε έχουμε:
$3\rho^2+4f^2(\rho)=27 \Leftrightarrow \rho^2=9 \Leftrightarrow \rho=3$ ή $\rho=-3$.

ii. Επειδή η συνάρτηση f, ως συνεχής στο $[-3,3]$, είναι συνεχής στο $(-3,3)$ και δεν μηδενίζεται στο διάστημα αυτό, διατηρεί πρόσημο στο $(-3,3)$.

iii.

- Αν $f(x)<0$, τότε από τη σχέση $3x^2+4f^2(x)=27$ έχουμε:

$$f(x)=-\frac{\sqrt{27-3x^2}}{2},\ x\in[-3,3]$$

- Αν $f(x)>0$, τότε από τη σχέση $3x^2+4f^2(x)=27$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{\sqrt{27-3x^2}}{2},\ x\in[-3,3]$$

iv. $f(1)=\sqrt{6}>0$ άρα από το ερώτημα (Γ3) έχουμε:

$$f(x)=\frac{\sqrt{27-3x^2}}{2},\ x\in[-3,3].$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sqrt{27-3x^2}}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{27-3x^2}-3\sqrt{3}}{2x}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{27-3x^2-27}{2x(\sqrt{27-3x^2}+3\sqrt{3})}=\lim_{x\to 0}\frac{-3x}{2(\sqrt{27-3x^2}+3\sqrt{3})}=0$$

Άσκηση 9

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$\sqrt{x^2+2x+9}\le 3+xf(x)\le x^8\eta\mu\frac{2}{x}+\frac{x}{3}+3$ για κάθε $x>0$. Να βρείτε:

i. Το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{2x}$.

ii. Το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}x^7\eta\mu\frac{2}{x}$.

iii. Το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

iv. Το $f(0)$.

<u>Λύση</u>

i. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+2x+9-9}{2x\left(\sqrt{x^2+2x+9}+3\right)}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x+2)}{2x\left(\sqrt{x^2+2x+9}+3\right)}=\frac{1}{6}$

ii. Επειδή $\left|\eta\mu\frac{2}{x}\right|\le 1$ για κάθε $x\ne 0$, έχουμε:

$\left|x^7\eta\mu\frac{2}{x}\right|=\left|x^7\right|\cdot\left|\eta\mu\frac{2}{x}\right|\le\left|x^7\right|\Leftrightarrow-\left|x^7\right|\le x^7\eta\mu\frac{2}{x}\le\left|x^7\right|$

Αλλά $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\left|x^7\right|\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left|x^7\right|=0$

Οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^7\eta\mu\frac{2}{x}\right)=0$

iii. Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$\sqrt{x^2+2x+9}\le 3+xf(x)\le x^8\eta\mu\frac{2}{x}+\frac{x}{3}+3\Leftrightarrow$

$$\frac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{x} \le f(x) \le \frac{x^8\eta\mu\frac{2}{x}+\frac{x}{3}}{x}$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{x} = 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{2x} = \frac{1}{3}$ (από i ερώτημα).

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^8\eta\mu\frac{2}{x}+\frac{x}{3}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^7\eta\mu\frac{2}{x}+\frac{1}{3}\right) = 0+\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ (από ii ερώτημα)

Άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{3}$

iv. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, είναι συνεχής και στο $x=0$. Άρα $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{3}$.

Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(fof)(x)+2f(x)=2x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(2)=5$.

i. Να βρείτε το $f(5)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να βρείτε το $f^{-1}(2)$.

iv. Να λύσετε την εξίσωση: $f\left(f^{-1}(2x^2+7x)-1\right)=2$.

Λύση

i. Η σχέση $(fof)(x)+2f(x)=2x+1$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε για $x=2$ έχουμε:

$f(f(2))+2f(2)=2\cdot 2+1 \Leftrightarrow f(5)+10=5 \Leftrightarrow f(5)=-5$

ii. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε έχουμε:

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f(f(x_1))=f(f(x_2))$ (επειδή η f είναι συνάρτηση) και

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2f(x_1)=2f(x_2)$

άρα $f(f(x_1))+2f(x_1)=f(f(x_2))+2f(x_2)\Rightarrow 2x_1+1=2x_2+1\Rightarrow x_1=x_2$

οπότε η f είναι $1-1$, άρα αντιστρέφεται.

iii. Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(2)$ και έχουμε:

$f(f(f^{-1}(2)))+2f(f^{-1}(2))=2f^{-1}(2)+1\Rightarrow f(2)+4=2f^{-1}(2)+1\Rightarrow$

$5+4-1=2f^{-1}(2)\Rightarrow f^{-1}(2)=4$.

iv. Έχουμε:

$f(f^{-1}(2x^2+7x)-1)=2\Leftrightarrow f^{-1}(2x^2+7x)-1=f^{-1}(2)\Leftrightarrow$

$f^{-1}(2x^2+7x)=5\Leftrightarrow 2x^2+7x=f(5)\Leftrightarrow 2x^2+7x+5=0\Leftrightarrow$

$x_1=-1$ ή $x_2=-\frac{5}{2}$.

Άσκηση 11

Δίνονται η συνάρτηση $f:[2,5]\to\mathbb{R}$, ο μιγαδικός αριθμός $z=\dfrac{f(2)-i}{2+f(5)i}$ και η συνάρτηση g με $g(x)=2f(2x+1)+f(x+1)$.

i. Να γράψετε τον z στη μορφή $\alpha+\beta i$.

ii. Αν ο z είναι φανταστικός να αποδείξετε ότι $f(5)=2f(2)$.

iii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g.

<u>Λύση</u>

i. Είναι:

$$z=\frac{f(2)-i}{2+f(5)i}=\frac{[f(2)-i][2-f(5)i]}{4+f^2(5)}=\frac{2f(2)-f(5)}{4+f^2(5)}-\frac{f(2)f(5)+2}{4+f^2(5)}i$$

ii. z φανταστικός άρα $\mathrm{Re}(z)=0\Leftrightarrow\dfrac{2f(2)-f(5)}{4+f^2(5)}=0\Leftrightarrow f(5)=2f(2)$.

iii. Πρέπει:

$$\left\{\begin{array}{c}2\le 2x+1\le 5\\ \kappa\alpha\iota\\ 2\le x+1\le 5\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}1\le 2x\le 4\\ \kappa\alpha\iota\\ 1\le x\le 4\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}\le x\le 2\\ \kappa\alpha\iota\\ 1\le x\le 4\end{array}\right\}\Leftrightarrow 1\le x\le 2.$$

Άρα $D_g=[1,2]$.

Άσκηση 12

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=2|z-xi|+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου z μιγαδικός με $|z|=2$ και $-2<\mathrm{Im}(z)<2$. Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x)=2\sqrt{x^2-2\,\mathrm{Im}(z)\cdot x+4}+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii. Η f είναι συνεχής.

iii. Υπάρχει $x_0\in(0,5)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=6$

<u>Λύση</u>

i. Είναι: $|z-xi|^2=(z-xi)(\overline{z}+xi)=|z|^2+zxi-x\overline{z}i+x^2 \Leftrightarrow$

$|z-xi|^2=x^2+(z-\overline{z})xi+4 \Leftrightarrow$

$|z-xi|=\sqrt{x^2-2\,\mathrm{Im}(z)x+4.}$

Άρα $f(x)=2\sqrt{x^2-2\,\mathrm{Im}(z)x+4}+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (Αφού Δ<0,από υπόθεση, επειδή $-2<\mathrm{Im}(z)<2$)

ii. Η f είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $f_1(x)=x^2-2\,\mathrm{Im}(z)x+4$ και $f_2(x)=2\sqrt{x}+1$

Γιατί για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει: $(f_2 o f_1)(x)=f_2(f_1(x))=2\sqrt{x^2-2\,\mathrm{Im}(z)x+4}+1=f(x)$

iii. Είναι: $f(0)=5$ και $f(5)=2|z-5i|+1\geq 2\big||z|-|5i|\big|+1=7$

Επίσης η f είναι συνεχής στο $[0,5]$ (από ii), άρα σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών η f παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(0)=5$ και 7 (αφού $f(5)\geq 7$). Επομένως υπάρχει $x_0\in(0,5)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=6$

Άσκηση 13

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x)=\alpha^{2x}+2\alpha^x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}, \alpha\in\mathbb{R}^*$.

i. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

ii. Αν $f(0)=-2$ να βρείτε τον τύπο της f.

iii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2f(x)-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}, \alpha<2$.

iv. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2f(x)-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}, \alpha>3$

<u>Λύση</u>

i. Είναι $f^2(x)=\alpha^{2x}+2\alpha^x+1=\left(\alpha^x+1\right)^2\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

ii. Επειδή $f(0)=-2$ είναι $f(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα $f(x)=-\left(\alpha^x+1\right)=-\alpha^x-1$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2f(x)-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2\alpha^x-2-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x\cdot\left[-2\left(\dfrac{\alpha}{3}\right)^x-2\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-1\right]}{3^x\cdot\left[3\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+4\right]}=\dfrac{-1}{4}$, αφού $0<\dfrac{\alpha}{3}<1, 0<\dfrac{1}{3}<1$ και $0<\dfrac{2}{3}<1$ άρα

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\alpha}{3}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=0$

iv. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2f(x)-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2\alpha^x-2-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x\cdot\left[-2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^x-2\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-\left(\dfrac{3}{2}\right)^x\right]}{2^x\left[3+4\left(\dfrac{3}{2}\right)^x\right]}=-\infty$, αφού $\dfrac{\alpha}{2}>1, \dfrac{3}{2}>1$ και $0<\dfrac{1}{2}<1$ άρα

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=+\infty$

Άσκηση 14

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x^4+1\le 4f(x)\le x^4+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{4}\le f(0)\le\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2}\le f(1)\le\frac{3}{4}$.

ii. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)\right]$.

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5 f\left(\frac{1}{x}\right)+4\eta\mu 3x}{2x^2+3\eta\mu x}$.

iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[0,1]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)-\xi=0$.

Λύση

i. Η σχέση $x^4+1\le 4f(x)\le x^4+2$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Για $x=0$, έχουμε:

$$1\le 4f(0)\le 2\Leftrightarrow \frac{1}{4}\le f(0)\le\frac{1}{2}$$

Για $x=1$, έχουμε:

$$2\le 4f(1)\le 3\Leftrightarrow \frac{1}{2}\le f(1)\le\frac{3}{4}$$

ii. Για $x\ne 0$, θέτουμε όπου x το $\frac{1}{x}$ στη δοσμένη σχέση και έχουμε:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^4+1\le 4f\left(\frac{1}{x}\right)\le\left(\frac{1}{x}\right)^4+2\Leftrightarrow\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x^4\le x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)\le\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x^4$$

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x^4\right)=\frac{1}{4}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x^4\right)=\frac{1}{4}$

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{4}$

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5 f\left(\frac{1}{x}\right)+4\eta\mu 3x}{2x^2+3\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)+4\frac{\eta\mu 3x}{x}}{2x+3\frac{\eta\mu x}{x}}=\frac{\frac{1}{4}+4\cdot 3}{0+3}=\frac{49}{12}$$

αφού $\lim_{x\to 0} x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{4}$ (από ii), $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{3x}=3\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=3\cdot 1=3$

iv. Έστω $g(x)=f(x)-x$

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$. Επίσης ισχύει:

$g(0)\cdot g(1)=f(0)\cdot[f(1)-1]<0$ αφού $\frac{1}{4}\le f(0)\le\frac{1}{2}\Rightarrow f(0)>0$ και $\frac{1}{2}\le f(1)\le\frac{3}{4}\Rightarrow f(1)<1$.

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)-\xi=0$

Άσκηση 15

i.Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x)-4}{x}=2,$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

ii. Δίνεται η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$xg(x)+2\le 2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x,$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$, αν είναι γνωστό ότι υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f^2(x)+\eta\mu^2(2x)}{\varepsilon\varphi^2x+x^2g(x)}$

<u>Λύση</u>

i. Θέτουμε: $h(x)=\dfrac{2f(x)-4}{x}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{xh(x)+4}{2}$

Έτσι, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xh(x)+4}{2}=2$$

ii. Είναι:

$xg(x)+2\le 2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε έχουμε: $xg(x)\le 2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x-2$

- Αν $x>0$, τότε: $g(x)\le\dfrac{2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x-2}{x}\Leftrightarrow g(x)\le\dfrac{2(\sigma\upsilon\nu x-1)}{x}-\dfrac{\eta\mu x}{x}+1$ και

  επομένως $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\le 2\cdot 0-1+1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\le 0.$

- Αν $x<0$, τότε: $g(x)\ge\dfrac{2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x-2}{x}\Leftrightarrow g(x)\ge\dfrac{2(\sigma\upsilon\nu x-1)}{x}-\dfrac{\eta\mu x}{x}+1$ και επομένως

  $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\ge 2\cdot 0-1+1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\ge 0.$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2f^2(x)+\eta\mu^2(2x)}{\epsilon\phi^2x+x^2g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\left[f^2(x)+\dfrac{\eta\mu^2(2x)}{x^2}\right]}{x^2\left[\left(\dfrac{\epsilon\phi x}{x}\right)^2+g(x)\right]}=\frac{4+4}{1+0}=8.$$

Αφού $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2(2x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}4\dfrac{\eta\mu^2(2x)}{(2x)^2}=4\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu(2x)}{(2x)}\right)^2=4\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu u}{u}\right)^2=4$ και

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\epsilon\phi x}{x}\right)^2=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2=1$$

Άσκηση 16

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $3f(x)+2f^3(x)=4x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1}.

ii. Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}, αν γνωρίζετε ότι αυτά βρίσκονται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y=x$.

iv. Να λυθεί η εξίσωση: $f\left(2e^{x-1}\right)=f\left(3-x\right)$.

<u>Λύση</u>

i. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε έχουμε:

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f^3(x_1)=f^3(x_2)\Rightarrow 2f^3(x_1)=2f^3(x_2)$

και $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 3f(x_1)=3f(x_2)$

άρα $2f^3(x_1)+3f(x_1)=2f^3(x_2)+3f(x_2)\Rightarrow 4x_1+1=4x_2+1$

οπότε η f είναι $1-1$, άρα αντιστρέφεται.

Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ στη δοθείσα σχέση και έχουμε:

$$3f\left(f^{-1}(x)\right)+2\left[f\left(f^{-1}(x)\right)\right]^3=4f^{-1}(x)+1\Rightarrow$$

$$3x+2x^3=4f^{-1}(x)+1\Rightarrow$$

$$f^{-1}(x)=\frac{2x^3+3x-1}{4}.$$

ii. Για κάθε $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$x_1<x_2\Rightarrow x_1^3<x_2^3\Rightarrow 2x_1^3<2x_2^3$

και $x_1<x_2\Rightarrow 3x_1<3x_2\Rightarrow 3x_1-1<3x_2-1$

άρα

$$2x_1^3+3x_1-1<2x_2^3+3x_2-1\Rightarrow\frac{2x_1^3+3x_1-1}{4}<\frac{2x_2^3+3x_2-1}{4}\Rightarrow$$

$f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$,

οπότε f^{-1} γνησίως αύξουσα.

iii. Έχουμε:

$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow$

$$\frac{2x^3+3x-1}{4} = x \Leftrightarrow 2x^3 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

iv. Η f είναι $1-1$, οπότε έχουμε:

$f(2e^{x-1}) = f(3-x) \Leftrightarrow 2e^{x-1} = 3-x \Leftrightarrow 2e^{x-1} + x - 3 = 0$ (1)

Η (1) έχει προφανή ρίζα την $x=1$.

Έστω $g(x) = 2e^{x-1} + x - 3$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow e^{x_1-1} < e^{x_2-1} \Rightarrow 2e^{x_1-1} < 2e^{x_2-1}$

και $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 3 < x_2 - 3$

άρα $2e^{x_1-1} + x_1 - 3 < 2e^{x_2-1} + x_2 - 3 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$

Οπότε g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επομένως η ρίζα $x=1$ είναι μοναδική.

Άσκηση 17

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ και ο μιγαδικός αριθμός $z=f(x)+2(\eta\mu x)i$, τέτοιος ώστε: $|z|^2-2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z)+3x=x^2+10$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-2\eta\mu x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f αν $f(0)=\sqrt{10}$.

iii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+\sigma\upsilon\nu x-1-\sqrt{10}}{x}$

<u>Λύση</u>

i. Είναι:

$$|z|^2=x^2-3x+2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z)+10 \Leftrightarrow$$

$$f^2(x)+4\eta\mu^2 x=x^2-3x+4f(x)\eta\mu x+10 \Leftrightarrow$$

$$\left[f(x)-2\eta\mu x\right]^2=x^2-3x+10 \quad (1)$$

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση g δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο, τότε θα υπάρχουν $x_1,x_2\in R$ τέτοια ώστε: $g(x_1)g(x_2)<0$
Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(x_1,x_2\right)$ ώστε $g(x_0)=0$.

Οπότε: $g(x_0)=0\Rightarrow g^2(x_0)=0\overset{(1)}{\Rightarrow} {x_0}^2-3x_0+10=0$ που είναι άτοπο ($\Delta=-31<0$)

ii. Είναι: $f(0)=\sqrt{10}>0$, άρα από (i) έχουμε: $f(x)=\sqrt{x^2-3x+10}+2\eta\mu x$

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{10}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-3x+10}+2\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{10}-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-3x+10}-\sqrt{10}}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{2\eta\mu x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3x}{x\left(\sqrt{x^2-3x+10}+\sqrt{10}\right)}+2\cdot 1+0=\frac{-3}{2\sqrt{10}}+2$$

Άσκηση 18

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x+1}-1$ και $g(x)=2-x$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g.

ii. Να ορισθεί η συνάρτηση fog.

iii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

iv. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης fofog.

Λύση

i. Για να ορίζεται η f, πρέπει: $x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$

Άρα το πεδίο ορισμού της είναι το: $D_f=[-1,+\infty)$.

Το πεδίο ορισμού της g είναι το: $D_g=\mathbb{R}$ (πολυωνυμική)

ii. Το πεδίο ορισμού της fog είναι:

$$D_{fog}=\{x\in\mathbb{R}/2-x\geq -1\}=\{x\in\mathbb{R}/x\leq 3\}=(-\infty,3]\neq\varnothing$$

Άρα για κάθε $x\in(-\infty,3]$ έχουμε:

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{2-x+1}-1=\sqrt{3-x}-1$$

iii. Για κάθε $x_1,x_2\in[-1,+\infty)$ έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\sqrt{x_1+1}-1=\sqrt{x_2+1}-1\Rightarrow x_1=x_2.$$

Άρα, η f αντιστρέφεται.

Έστω $f(x)=y\Leftrightarrow y=\sqrt{x+1}-1\Leftrightarrow y+1=\sqrt{x+1}$, (πρέπει $y\geq -1$) $\Leftrightarrow x=(y+1)^2-1$ οπότε $f^{-1}(x)=(x+1)^2-1$ με $x\geq -1$

iv. Για κάθε $x_1,x_2\in[-1,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow x_1+1<x_2+1\Rightarrow\sqrt{x_1+1}-1<\sqrt{x_2+1}-1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$x_1 < x_2 \Rightarrow 2 - x_1 > 2 - x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$.

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα.

$D_{fofog} = D_{fo(fog)} = \left\{x \in (-\infty, 3] / \sqrt{3-x} - 1 \geq -1\right\} = (-\infty, 3] \neq \varnothing$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 3]$ με

$x_1 < x_2 \overset{\text{g γν. φθίνουσα}}{\Rightarrow} g(x_1) > g(x_2) \overset{\text{f γν. αύξουσα}}{\Rightarrow} f(g(x_1)) > f(g(x_2)) \Rightarrow$

$f\left(f\left(g\left(x_1\right)\right)\right) > f\left(f\left(g\left(x_2\right)\right)\right)$.

Άρα η συνάρτηση fofog είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 3]$.

Άσκηση 19

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+\kappa\eta\mu x}{x-x^2}, & x<0 \\ \lambda, & x=0 \\ \sqrt{8x^2+x+16}-3x, & x>0 \end{cases}$

i. Να βρείτε τα κ,λ.

ii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

iii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2\ln(8x+1)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

<u>Λύση</u>

i. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0=0$

f : συνεχής στο $x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2x+\kappa\eta\mu x}{x-x^2}\right)=\lim_{x\to0^-}\frac{2+\kappa\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x}}{1-x}=\frac{2+\kappa\cdot1}{1}=2+\kappa$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\sqrt{8x^2+x+16}-3x\right)=4$$

$f(0)=\lambda$

Άρα: $\lambda=4$ και $2+\kappa=4\Leftrightarrow\kappa=2$

ii. Για $\kappa=2$ και $\lambda=4$ έχουμε: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+2\eta\mu x}{x-x^2}, & x<0 \\ 4, & x=0 \\ \sqrt{8x^2+x+16}-3x, & x>0 \end{cases}$ οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{8x^2+x+16}-3x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{8x^2+x+16-9x^2}{\sqrt{8x^2+x+16}+3x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(-1+\frac{1}{x}+\frac{16}{x^2}\right)}{x\left(\sqrt{8+\frac{1}{x}+\frac{16}{x^2}}+3\right)} = (+\infty)\left(\frac{-1}{\sqrt{8}+3}\right) = -\infty$$

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+2\eta\mu x}{x-x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2+2\frac{\eta\mu x}{x}}{1-x} = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{1-x}\left(2+2\frac{\eta\mu x}{x}\right)\right] = 0,$$

αφού: $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \le \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow \frac{-1}{|x|} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \frac{1}{|x|}$

και $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|} = 0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$

iv. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2\ln(8x+1),\ x \in [0,1]$

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ (ως σύνθεση και αποτέλεσμα πράξεων συνεχών)

Επίσης:

$g(0) = f(0) = 4 > 0$

$g(1) = f(1) - 2\ln 9 = 2 - 2\ln 9 = 2\ln\frac{e}{9} < 0$

Άρα από το θεώρημα Bolzano έχουμε ότι η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2\ln(8x+1)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Άσκηση 20

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{4(x^3-2x^2)}, & x\in(-\infty,0)\cup(0,2) \\ \\ \dfrac{\kappa x+1}{2(x^2-4)}, & x\in(2,+\infty) \end{cases}$ και η $g:\mathbb{R}-\{0,1\}\to\mathbb{R}$

για την οποία ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x\cdot g(x)+2x}{3x}=5$ και $g(x+3)=g(x)+f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Να βρείτε:

i. Το κ αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

ii. Το όριο $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

iii. Το όριο $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$.

iv. Το όριο $\lim\limits_{x\to 3}g(x)$.

<u>Λύση</u>

i. Είναι: $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-5x+6}{4(x^3-2x^2)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-2)(x-3)}{4x^2(x-2)}=-\dfrac{1}{16}$

$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\kappa x+1}{2(x-2)(x+2)}$

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 2^+}(\kappa x+1)=2\kappa+1$

και $\lim\limits_{x\to 2^+}2(x-2)(x+2)=0$

Αν $2\kappa+1\neq 0\Leftrightarrow \kappa\neq -\dfrac{1}{2}$ τότε το $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=+\infty$ ή $-\infty$.

Αν $2\kappa+1=0\Leftrightarrow \kappa=-\dfrac{1}{2}$ τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{-\frac{1}{2}x+1}{2(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-(x-2)}{4(x-2)(x+2)} = -\frac{1}{16}.$$

Δηλαδή υπάρχει το $\lim_{x\to 1} f(x)$ αν και μόνο αν $\kappa = -\frac{1}{2}$

ii. Είναι: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-5x+6}{4\left(x^3-2x^2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x-2\right)\left(x-3\right)}{4x^2\left(x-2\right)} = -\infty$

iii. Θέτουμε:

$h(x) = \frac{\eta\mu x g(x)+2x}{3x} \Leftrightarrow \eta\mu x g(x) = 3xh(x)-2x$ και για $x \neq 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{3xh(x)-2x}{\eta\mu x} = 3{\cdot}5\lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}} - 2\lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}} = 15-2 = 13$$

iv. Είναι: $\lim_{x\to 3} g(x) \overset{x=u+3}{=} \lim_{u\to 0} g(u+3) = \lim_{u\to 0}\left[g(u)+f(u)\right] = 13+(-\infty) = -\infty$

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$f(x) = -2x^5 - |z|x^3 + 2|z|^5$, $x \in \mathbb{R}, z \in C^*$

α) Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, |z|)$.

δ) Αν $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-f(x) + 2|z|^5}{\eta\mu^3 x} = 1$, να βρείτε την καμπύλη του μιγαδικού επιπέδου, στην οποία ανήκουν οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού z.

<u>Λύση</u>

α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^5 < x_2^5 \Rightarrow -2x_1^5 > -2x_2^5$ και

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow -|z|x_1^3 > -|z|x_2^3 \Rightarrow$

$-|z|x_1^3 + 2|z|^5 > -|z|x_2^3 + 2|z|^5$.

Άρα $-2x_1^5 - |z|x_1^3 + 2|z|^5 > -2x_2^5 - |z|x_2^3 + 2|z|^5 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει σύνολο τιμών το:

$f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \right)$. Είναι:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-2x^5 - |z|x^3 + 2|z|^5 \right) =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-2x^5 \right) = -2\left(+\infty \right) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-2x^5 - |z|x^3 + 2|z|^5 \right) =$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(-2x^5\right) = -2\left(-\infty\right) = +\infty$$

Επομένως είναι: $f(R) = \left(-\infty, +\infty\right)$

γ) Για τη συνεχή συνάρτηση f στο $\left[0,|z|\right]$, ισχύουν:

- $f(0) = 2|z|^5 > 0$
- $f\left(|z|\right) = -2|z|^5 - |z|^4 + 2|z|^5 = -|z|^4 < 0$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0,|z|\right)$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,|z|\right)$ η ρίζα είναι μοναδική.

δ) $\lim_{x\to 0}\dfrac{-f(x) + 2|z|^5}{\eta\mu^3 x} =$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^5 + |z|x^3 - 2|z|^5 + 2|z|^5}{\eta\mu^3 x} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(2x^2 + |z|\right)}{\eta\mu^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2 + |z|}{\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^3} = \frac{|z|}{1} = 1$$

Άρα οι εικόνες του z στο μιγαδικό επίπεδο, ανήκουν στο μοναδιαίο κύκλο.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=3\ln 2x+e^{3x}+4x-2$.

i. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία την f.

ii. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=e^{\frac{3}{2}}$

iv. Να βρείτε τον πραγματικό θετικό αριθμό μ για το οποίο ισχύει:

$$3\ln 4\mu-3\ln(2\mu^2+2)-4(\mu^2+1)=e^{3(\mu^2+1)}-e^{6\mu}-8\mu$$

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση f έχει $D_f=(0,+\infty)$. Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$x_1<x_2 \Rightarrow 2x_1<2x_2 \Rightarrow \ln 2x_1<\ln 2x_2 \Rightarrow 3\ln 2x_1<3\ln 2x_2$

και $x_1<x_2 \Rightarrow 3x_1<3x_2 \Rightarrow e^{3x_1}<e^{3x_2}$

και

$x_1<x_2 \Rightarrow 4x_1<4x_2 \Rightarrow 4x_1-2<4x_2-2.$

Άρα $3\ln 2x_1+e^{3x_1}+4x_1-2<3\ln 2x_2+e^{3x_2}+4x_2-2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

ii. Είναι:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(3\ln 2x+e^{3x}+4x-2)=-\infty+1+0-2=-\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to 0}\ln 2x=\lim\limits_{u\to 0}\ln u=-\infty$, και $\lim\limits_{x\to 0} e^{3x}=\lim\limits_{u\to 0} e^{u}=1$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(3\ln 2x+e^{3x}+4x-2)=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln 2x=\lim\limits_{u\to +\infty}\ln u=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to +\infty} e^{3x}=\lim\limits_{u\to +\infty} e^{u}=+\infty$

iii. $f(x)=e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$, (αφού η f γνησίως αύξουσα άρα και 1-1) και η ρίζα είναι μοναδική.

iv. Είναι:

$$3\ln 4\mu-3\ln(2\mu^2+2)-4(\mu^2+1)=e^{3(\mu^2+1)}-e^{6\mu}-8\mu \Leftrightarrow$$

$$3\ln 4\mu+e^{6\mu}+8\mu=3\ln 2(\mu^2+1)+e^{3(\mu^2+1)}+4(\mu^2+1) \Leftrightarrow$$

$$3\ln 2\cdot(2\mu)+e^{3(2\mu)}+4\cdot(2\mu)-2=3\ln 2(\mu^2+1)+e^{3(\mu^2+1)}+4(\mu^2+1)-2 \Leftrightarrow$$

$f(2\mu)=f(\mu^2+1) \Leftrightarrow \mu^2+1=2\mu \Leftrightarrow \mu=1$ (Διπλή ρίζα).

Άσκηση 3

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι συνθήκες:

- $|3\eta\mu x-2xf(x)|\le\frac{1}{2}x^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- $4f(x)+3f(x+1)=2x^2-2013$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

ii. Να βρείτε το $f(1)$.

iii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x-1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

<u>Λύση</u>

i. Ισχύει: $|3\eta\mu x-2xf(x)|\le\frac{1}{2}x^2,\ x\in\mathbb{R}$

- Για $x>0$, έχουμε: $|3\eta\mu x-2xf(x)|\le\frac{1}{2}x^2\Leftrightarrow-\frac{1}{2}x^2\le3\eta\mu x-2xf(x)\le\frac{1}{2}x^2\Leftrightarrow$

  $-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\frac{\eta\mu x}{x}\le f(x)\le\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}$

  αλλά: $\lim\limits_{x\to0^+}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\frac{3}{2}$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\frac{3}{2}$

- Για $x<0$, έχουμε: $\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\le f(x)\le-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}$ αλλά $\lim\limits_{x\to0^-}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\frac{3}{2}$

  και $\lim\limits_{x\to0^-}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\frac{3}{2}$

  οπότε λόγω του κριτηρίου παρεμβολής έχουμε:

  $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\frac{3}{2}$

  Άρα $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\frac{3}{2}$ και επομένως $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\frac{3}{2}$.

ii. Η σχέση $4f(x)+3f(x+1)=2x^2-2013$ ισχύει για κάθε $x\in R$ άρα και για $x=0$ οπότε έχουμε: $4f(0)+3f(1)=-2013$. Αλλά f συνεχής οπότε:

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{3}{2}.$$

Άρα $4\cdot\frac{3}{2}+3f(1)=-2013 \Leftrightarrow f(1)=-673$.

iii. Αρκεί να υπάρχει $x_o\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=g(x_0)\Leftrightarrow f(x_0)-g(x_0)=0$
Έστω $h(x)=f(x)-g(x),\ x\in[0,1]$. Είναι:

$$h(0)=f(0)-g(0)=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}>0$$

$$h(1)=f(1)-g(1)=-673<0$$

Οπότε: $h(0)h(1)=-\frac{673}{2}<0$

Επειδή η h είναι συνεχής στο [0,1], ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων, από το θεώρημα Bolzano συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=g(x_0)$.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = -2|z| + \sqrt{2x - 3|z|}$, $z \in C$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν μόνο ένα κοινό σημείο πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y = x$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.

iv. Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 ανήκουν στον προηγούμενο γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $7|z_1 - z_2| \le 2$.

Λύση

i. Πρέπει:

$2x - 3|z| \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \dfrac{3}{2}|z|$.

Άρα $D_f = \left[\dfrac{3}{2}|z|, +\infty\right)$

ii. Για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 - 3|z| < 2x_2 - 3|z| \Rightarrow$

$\sqrt{2x_1 - 3|z|} < \sqrt{2x_2 - 3|z|} \Rightarrow -2|z| + \sqrt{2x_1 - 3|z|} = -2|z| + \sqrt{2x_2 - 3|z|} \Rightarrow$

$f(x_1) < f(x_2)$.

Οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

iii. Η f είναι γνησίως αύξουσα άρα για κάθε $x \in D_f$ έχουμε:

$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow -2|z| + \sqrt{2x - 3|z|} = x \Leftrightarrow$

$\sqrt{2x - 3|z|} = 2|z| + x \Leftrightarrow 2x - 3|z| = 4|z|^2 + x^2 + 4|z|x \Leftrightarrow$

$x^2 + 2\left(2|z| - 1\right)x + 4|z|^2 + 3|z| = 0$

Πρέπει: $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ (αφού οι $C_f, C_{f^{-1}}$ έχουν μόνο ένα κοινό σημείο)

$$4\left(4|z|^2-4|z|+1\right)-16|z|^2-12|z|=0 \Leftrightarrow |z|=\frac{1}{7}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο $0(0,0)$ και ακτίνα $\rho=\frac{1}{7}$

iv. Αφού οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 ανήκουν στον προηγούμενο γεωμετρικό τόπο ισχύει:

$$|z_1-z_2| \le 2\cdot\frac{1}{7} \Leftrightarrow 7|z_1-z_2| \le 2$$

Άσκηση 5

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και ο μιγαδικός αριθμός $z=1+f(2)i$ για τον οποίο ισχύει $|z+9i|=3|z+i|$.

Να αποδείξετε ότι:

i. $|z|=3$

ii. $f^2(2)=8$

iii. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε: $3x_0f^2(x_0)+9=8^{x_0}$.

<u>Λύση</u>

i. Είναι:

$$|z+9i|=3|z+i|\Leftrightarrow|z+9i|^2=9|z+i|^2\Leftrightarrow\left(z+9i\right)\left(\overline{z}-9i\right)=9\left(z+i\right)\left(\overline{z}-i\right)\Leftrightarrow$$

$$|z|^2-9zi+9\overline{z}i+81=9|z|^2-9zi+9\overline{z}i+9\Leftrightarrow$$

$$8|z|^2=72\Leftrightarrow|z|=3$$

ii. Είναι: $|z|=3\Leftrightarrow|1+f(2)i|^2=9\Leftrightarrow1+f^2(2)=9\Leftrightarrow f^2(2)=8$

iii. Έστω $g(x)=3xf^2(x)-8^x+9$

Η g είναι συνεχής στο $\left[0,2\right]$. Επίσης $g(0)=8>0$ και $g(2)=6f^2(2)-64+9=-7<0$.

Άρα $g(0)\cdot g(2)<0$, οπότε λόγω του θεωρήματος του Bolzano, υπάρχει $x_0\in\left(0,2\right)$ ώστε $g(x_0)=0\Leftrightarrow3x_0f^2(x_0)+9=8^{x_0}$

Άσκηση 6

Δίνεται συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}+|z+3i|, & \text{αν } x<1 \\ \\ \dfrac{1}{4}\eta\mu\dfrac{(x-1)}{x-1}+|z-1+4i|, & \text{αν } x>1 \end{cases}$

Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ τότε:

i. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.

ii. Να βρείτε το σημείο του γεωμετρικού τόπου που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\alpha \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $4e^{\alpha+1}=15\alpha|z|+1$.

<u>Λύση</u>

i. Αφού υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ θα ισχύει: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

Είναι: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}+|z+3i|\right)=$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}+|z+3i|=\dfrac{1}{4}+|z+3i|$

και

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\dfrac{1}{4}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}+|z-1+4i|\right]=\dfrac{1}{4}+|z-1+4i|$ διότι $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$

Άρα

$\dfrac{1}{4}+|z+3i|=\dfrac{1}{4}+|z-1+4i| \Leftrightarrow |z+3i|^2=|z-1+4i|^2 \Leftrightarrow$

$(z+3i)(\overline{z}-3i)=(z-1+4i)(\overline{z}-1-4i) \Leftrightarrow$

$|z|^2-3zi+3\overline{z}i+9=|z|^2-z-4zi-\overline{z}+1+4i+4\overline{z}i-4i+16 \Leftrightarrow$

$zi-\overline{z}i=-z-\overline{z}+8 \Leftrightarrow$

$(z-\overline{z})i+z+\overline{z}=8 \Leftrightarrow$

$-2y+2x=8 \Leftrightarrow x-y-4=0$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία με εξίσωση: $x-y-4=0$

ii. Έστω $M(x_0, y_0)$ το ζητούμενο σημείο του γεωμετρικού τόπου. Το σημείο M είναι το σημείο τομής των ευθειών $\varepsilon_1 : x-y-4=0$ και της ε_2, κάθετης προς την ευθεία από την αρχή των αξόνων. Έχουμε:

$\lambda\varepsilon_1 \lambda\varepsilon_2 = -1 \Leftrightarrow \lambda\varepsilon_2 = -1$, οπότε $\varepsilon_2 : y=-x$.

$$\left\{\begin{matrix} x-y-4=0 \\ y=-x \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left(x=2 \text{ και } y=-2\right)$$

Άρα $M(2,-2)$

iii. Έστω $g(x)=4e^{x+1}-15x|z|-1$.

Είναι: $g(0)=4e-1>0$

$|z| \geq d(0,\varepsilon_1)=2\sqrt{2} \Rightarrow$

$-15|z| \leq -30\sqrt{2} \Rightarrow 4e^2-15|z| \leq 4e^2-30\sqrt{2} \Rightarrow$

$4e^2-15|z|-1 \leq 4e^2-30\sqrt{2}-1 \Rightarrow g(1)<0.$

Άρα λόγω του θεωρήματος του Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\alpha \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow 4e^{\alpha+1}=15\alpha|z|+1$

Άσκηση 7

Δίνεται η συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση και οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 3f(2) + 2i$ και $z_2 = 2f(4) + 3i$.

i. Να βρεθεί το $\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)$.

ii. Να βρεθεί το $\mathrm{Im}(z_1\overline{z}_2)$

iii. Αν ο $z_1\overline{z}_2$ είναι φανταστικός αριθμός να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια μόνο ρίζα στο $(2,4)$

iv. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) > 0$ αν είναι γνωστό ότι ο $z_1\overline{z}_2$ είναι πραγματικός.

Λύση

i. Είναι:

$$z_1\overline{z}_2 = \left[3f(2)+2i\right]\left[2f(4)-3i\right] = \left[6f(2)f(4)+6\right] + \left[-9f(2)+4f(4)\right]i$$

Άρα $\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) = 6f(2)f(4) + 6$

ii. Από (i) έχουμε: $\mathrm{Im}(z_1\overline{z}_2) = -9f(2) + 4f(4)$

iii.Επειδή $z_1\overline{z}_2$ φανταστικός θα ισχύει: $\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) = 0 \Leftrightarrow f(2)\cdot f(4) = -1$ (από (i))
Η f είναι συνεχής στο $\left[2,4\right]$.

Άρα λόγω του θεωρήματος Bolzano η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2,4)$
και επειδή είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα είναι μοναδική.

iv. Αφού $z_1\overline{z}_2$ πραγματικός, θα ισχύει $\mathrm{Im}(z_1\overline{z}_2) = 0 \Leftrightarrow f(2) = \frac{4}{9}f(4)$ (από (ii)).

Άρα $\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) = 6f(2)f(4) + 6 = \frac{8}{3}f^2(4) + 6 > 0$

Άσκηση 8

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ τέτοια ώστε: $\kappa\eta\mu^2 x = x^2 f(x) + \sqrt{1+\eta\mu^2 x} - \lambda$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1) και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$

i. Να βρείτε τα κ και λ

ii. Αν $\kappa = 1$ και $\lambda = 1$ να βρείτε την f.

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}$.

<u>Λύση</u>

i. $A \in C_f$, άρα $f(0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda = 1$

Η σχέση (1) για $\lambda = 1$ γίνεται: $\kappa\eta\mu^2 x = x^2 f(x) + \sqrt{1+\eta\mu^2 x} - 1$ και για $x \neq 0$ έχουμε:

$f(x) = \frac{\kappa\eta\mu^2 x + 1 - \sqrt{1+\eta\mu^2 x}}{x^2}$ οπότε:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left[\kappa \cdot \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)^2 \right] + \lim_{x \to 0} \frac{-\eta\mu^2 x}{x^2 \left(1 + \sqrt{1+\eta\mu^2 x} \right)} = \kappa - \frac{1}{2}$$

Αλλά η f είναι συνεχής στο 0, οπότε:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \kappa - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \kappa = 1$$

ii. Η σχέση (1) για $\kappa = \lambda = 1$ γίνεται: $\eta\mu^2 x = x^2 f(x) + \sqrt{1+\eta\mu^2 x} - 1$.

Για $x \neq 0$ η τελευταία γίνεται: $f(x) = \frac{\eta\mu^2 x + 1 - \sqrt{1+\eta\mu^2 x}}{x^2}$.

Επίσης έχουμε: $f(0) = \frac{1}{2}$

Άρα $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu^2 x + 1 - \sqrt{1+\eta\mu^2 x}}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x+1-\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}{x^2\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right]+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}{x^2\sigma\upsilon\nu x}=$$

$$1+\lim_{x\to 0}\frac{-\eta\mu^2 x}{x^2\sigma\upsilon\nu x(1+\sqrt{1+\eta\mu^2 x})}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Άσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{x^3\cdot 2^x+3\cdot 2^x-4}{2^x}$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

iii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$ για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

i. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$, αφού $2^x\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Είναι:

$$f(x)=\frac{x^3\cdot 2^x+3\cdot 2^x-4}{2^x}=x^3+3-4\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε: $x_1<x_2\Rightarrow x_1^{\,3}<x_2^{\,3}\Rightarrow x_1^{\,3}+3<x_2^{\,3}+3$

και $x_1<x_2\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}>\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}\Rightarrow -4\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}<-4\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$,

αφού η συνάρτηση $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα

$$x_1^{\,3}+3-4\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}<x_2^{\,3}+3-4\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x^3+3-4\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]=(-\infty)+3-4(+\infty)=-\infty\,,$$

αφού $0<\dfrac{1}{2}<1$ οπότε: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=+\infty$.

iii. Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^3 + 3 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^x\right] = (+\infty) + 3 - 4\cdot 0 = +\infty$,

αφού $0 < \frac{1}{2} < 1$ οπότε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$.

iv. Η f είναι συνεχής (πράξεις συνεχών), είναι και γνησίως αύξουσα άρα
$f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty)$.

Το $\kappa \in \mathbb{R}$ περιλαμβάνεται στο σύνολο τιμών της f , οπότε η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα είναι μοναδική.