Κεφάλαιο 4ο

Εκθετική - Λογαριθμική

Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο αυτό θα πρέπει:

- ✓ Να γνωρίζει τις συναρτήσεις $f(x)=\alpha^x$, $f(x)=\log_\alpha x$, τις βασικές τους ιδιότητες και να μπορεί να τις σχεδιάζει.
- ✓ Να μπορεί να επιλύει εκθετικές εξισώσεις, ανισώσεις και εκθετικά συστήματα.
- ✓ Να επιλύει προβλήματα εκθετικής μεταβολής.
- ✓ Να γνωρίζει την ισοδυναμία: $\alpha^x=\theta \Leftrightarrow x=\ell og_\alpha\theta$

  και ειδικότερα: $10^x=\theta \Leftrightarrow x=\ell og\theta$

  και $e^x=\theta \Leftrightarrow x=\ell n\theta$
- ✓ Να γνωρίζει τις ιδιότητες των λογαρίθμων και τις αποδείξεις αυτών.
- ✓ Να αποδεικνύει εκθετικές και λογαριθμικές ταυτότητες.

ΕΚΘΕΤΙΚΗ - ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ: Τύποι - Βασικές έννοιες

Ιδιότητες των δυνάμεων

• Έστω $\alpha,\beta>0$ και $x_1,x_2,\ x\in R$, τότε:		
i. $\alpha^{x_1}\cdot\alpha^{x_2}=\alpha^{x_1+x_2}$	**ii.** $\dfrac{\alpha^{x_1}}{\alpha^{x_2}}=\alpha^{x_1-x_2}$	**iii.** $\left(\alpha^{x_1}\right)^{x_2}=\alpha^{x_1\cdot x_2}$
iv. $(\alpha\cdot\beta)^x=\alpha^x\cdot\beta^x$	**v.** $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^x=\dfrac{\alpha^x}{\beta^x}$	

Επίσης ισχύουν:

- $\alpha^0=1,\ \alpha\in R^*$
- $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}},\ \ \mu\in Z,\ \ \nu\in N^*$
- $\alpha^{-\nu}=\dfrac{1}{\alpha^\nu},\ \nu\in N,\ \alpha\in R^*$
- Αν $x>0$ ορίζουμε: $0^x=0$.

Εκθετική συνάρτηση
Ορισμός

Ονομάζουμε εκθετική συνάρτηση με βάση α την συνάρτηση : $f:R\to R$ με $f(x)=\alpha^x$, όπου $0<\alpha\neq1$.

Παρατήρηση: Αν $\alpha=1$, τότε έχουμε την σταθερή συνάρτηση $f(x)=1$

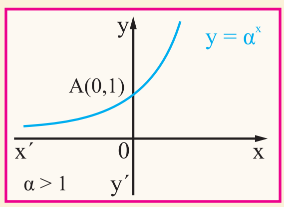
Ιδιότητες

- Πεδίο ορισμού: $A=R$
- Σύνολο τιμών: Το διάστημα $(0,+\infty)$
- Μονοτονία

I. Αν $\alpha>1$ είναι γνησίως αύξουσα στο R οπότε για κάθε $x_1,x_2\in R$ ισχύει η συνεπαγωγή:

Αν $x_1<x_2$ τότε $\alpha^{x_1}<\alpha^{x_2}$.

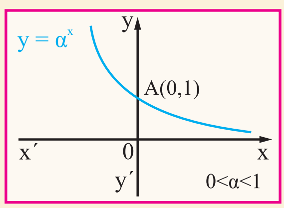
Στην περίπτωση αυτή η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$ τον αρνητικό ημιάξονα Ox΄



II. Αν $0<\alpha<1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R οπότε για κάθε $x_1,x_2\in R$ ισχύει η συνεπαγωγή:

Αν $x_1<x_2$ τότε $\alpha^{x_1}>\alpha^{x_2}$.

Στην περίπτωση αυτή η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ τον θετικό ημιάξονα Ox.



Για την συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ με $0<\alpha\neq 1$ και $x\in R$ ισχύει $\alpha^{x_1}=\alpha^{x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2$ για κάθε $x_1,x_2\in R$.

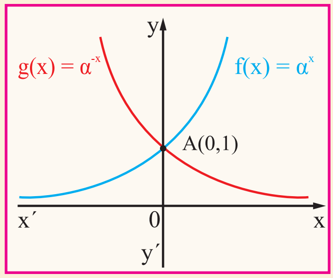
Επίσης η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0,1) ενώ δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα x΄x αφού $\alpha^x>0$ για κάθε $x\in R$.

Παρατήρηση

Για τις συναρτήσεις $f(x)=\alpha^x$ και $g(x)=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^x$ παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in R$ ισχύει:

$$g(x)=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^x=\frac{1}{\alpha^x}=\alpha^{-x}=f(-x)$$

Δηλαδή οι γραφικές τους παραστάσεις είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y΄y όπως φαίνεται στο σχήμα με $\alpha>1$.



Ο αριθμός e

Καθώς το ν αυξάνει απεριόριστα, οι όροι της ακολουθίας $\alpha_\nu=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$ προσεγγίζουν έναν άρρητο αριθμό που τον συμβολίζουμε με e και είναι $e\cong 2,718$.

Συμβολικά γράφουμε: $e=\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$.

Για την συνάρτηση με τύπο $f(x)=e^x$ ισχύουν όσα αναφέραμε παραπάνω για τη συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, $\alpha>1$ (αφού $\alpha=e=2,718.....>1$)

Ο νόμος της εκθετικής μεταβολής

Μια εκθετική συνάρτηση με βάση τον αριθμό e είναι η $Q(t)=Q_0\cdot e^{ct}$ που είναι γνωστή και ως **νόμος της εκθετικής μεταβολής** και χρησιμοποιείται για την μελέτη μεγεθών τα οποία μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου στην Φυσική, στη Βιολογία κλπ.

Το Q_0 είναι θετικός αριθμός και αποτελεί την τιμή της συνάρτησης Q για $t=0$.

Αν $c>0$ η συνάρτηση Q είναι γνησίως αύξουσα και δηλώνει τον νόμο της εκθετικής αύξησης.

Αν $c<0$ η συνάρτηση Q είναι γνησίως φθίνουσα και δηλώνει τον νόμο της εκθετικής απόσβεσης.

Η έννοια του λογάριθμου

Έστω η εξίσωση $\alpha^x = \theta,\ 1 \neq \alpha > 0,\ \theta > 0$. Η εξίσωση αυτή έχει μοναδική λύση αφού η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ είναι γνησίως μονότονη και το θ ανήκει στο σύνολο τιμών της. Την μοναδική αυτή λύση την συμβολίζουμε με $\ell og_\alpha \theta$ και την ονομάζουμε **λογάριθμο του θ ως προς βάση το α**.

Είναι δηλαδή: $\alpha^x = \theta \Leftrightarrow x = \ell og_\alpha \theta,\ 1 \neq \alpha > 0,\ \theta > 0$

Ισοδύναμα αυτό διατυπώνεται ως εξής :

Ο $\ell og_\alpha \theta$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον α για να βρούμε το θ.

- Από τον πιο πάνω ορισμό του λογαρίθμου προκύπτει αμέσως ότι αν $1 \neq \alpha > 0$ τότε για κάθε $x \in R$ και για κάθε $\theta > 0$ ισχύει: $\ell og_\alpha \alpha^x = x$ και $\alpha^{\ell og_\alpha \theta} = \theta$.
- Αφού είναι $\alpha^1 = \alpha$ τότε $\ell og_\alpha \alpha = 1$
- Αφού είναι $\alpha^0 = 1$ τότε $\ell og_\alpha 1 = 0$

Ιδιότητες λογαρίθμων

Αν $1 \neq \alpha > 0$ τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $\kappa \in R$ ισχύουν :

1. $\ell og_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \ell og_\alpha \theta_1 + \ell og_\alpha \theta_2$ **2.** $\ell og_\alpha\left(\dfrac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \ell og_\alpha \theta_1 - \ell og_\alpha \theta_2$

3. $\ell og_\alpha \theta^\kappa = \kappa \cdot \ell og_\alpha \theta$

Παρατήρηση 1

Επειδή για κάθε $\theta > 0$ ισχύει $\sqrt[\nu]{\theta} = \theta^{\frac{1}{\nu}}$ έχουμε : $\ell og_\alpha \sqrt[\nu]{\theta} = \ell og_\alpha \theta^{\frac{1}{\nu}} = \dfrac{1}{\nu} \ell og_\alpha \theta$.

Παρατήρηση 2

Η ιδιότητα 1 ισχύει γενικά για ν θετικούς αριθμούς $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_\nu$.

Δηλαδή: $\ell og_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \cdots \cdot \theta_\nu) = \ell og_\alpha \theta_1 + \ell og_\alpha \theta_2 + \cdots + \ell og_\alpha \theta_\nu$

Παρατήρηση 3

Από την ιδιότητα 2 προκύπτει ότι: $\ell og_\alpha \dfrac{1}{\theta} = -\ell og_\alpha \theta$.

Δεκαδικοί λογάριθμοι

Οι λογάριθμοι με βάση το 10 ονομάζονται δεκαδικοί ή κοινοί λογάριθμοι.

Είναι δηλαδή $10^x = \theta \Leftrightarrow x = \ell og\theta,\ \ \theta > 0$

Για αυτούς τους λογαρίθμους ισχύουν τα εξής :

1. $\ell og10^x = x$ και $10^{\ell og\theta} = \theta$ **2.** $\ell og10 = 1$ και $\ell og1 = 0$

3. $\ell og(\theta_1 \cdot \theta_2) = \ell og\theta_1 + \ell og\theta_2$ **4.** $\ell og\left(\dfrac{\theta_1}{\theta 2}\right) = \ell og\theta_1 - \ell og\theta_2$

5. $\ell og\theta^\kappa = \kappa \cdot \ell og\theta$

6. $\ell og\sqrt[\nu]{\theta} = \ell og\theta^{\frac{1}{\nu}} = \dfrac{1}{\nu}\ell og\theta$ όπου $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $\kappa \in R$.

Φυσικοί λογάριθμοι

Στα μαθηματικά είναι πολύ χρήσιμοι και οι λογάριθμοι με βάση τον αριθμό e. Οι λογάριθμοι αυτοί ονομάζονται **φυσικοί ή νεπέρειοι λογάριθμοι**.

Ο νεπέριος λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ, συμβολίζεται με $\ln\theta$ και όχι με $\ell og_e\theta$.

Είναι δηλαδή: $e^x = \theta \Leftrightarrow x = \ln\theta,\ \ \theta > 0$

Για αυτούς τους λογαρίθμους ισχύουν τα εξής:

1. $\ell ne^x = x$ και $e^{\ell n\theta} = \theta$ **2.** $\ell ne = 1$ και $\ell n1 = 0$

3. $\ell n(\theta_1 \cdot \theta_2) = \ell n\theta_1 + \ell n\theta_2$ **4.** $\ell n\left(\dfrac{\theta_1}{\theta 2}\right) = \ell n\theta_1 - \ell n\theta_2$

5. $\ell n\theta^\kappa = \kappa \cdot \ell n\theta$ **6.** $\ell n\sqrt[\nu]{\theta} = \ell n\theta^{\frac{1}{\nu}} = \dfrac{1}{\nu}\ell n\theta$ όπου $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $\kappa \in R$

Αλλαγή Βάσης

Αν $1 \neq \alpha > 0$ και $1 \neq \beta > 0$ τότε για κάθε $\theta > 0$ ισχύει: $\ell og_\beta\theta = \dfrac{\ell og_\alpha\theta}{\ell og_\alpha\beta}$

Παρατήρηση 4

Είναι $\ell og\theta = \dfrac{\ell n\theta}{\ell n10}$ και $\ell n\theta = \dfrac{\ell og\theta}{\ell oge}$

Αποδείξεις ιδιοτήτων λογαρίθμων

ΘΕΩΡΙΑ 1 **Αν $\alpha>0$ και $\alpha\neq 1$ τότε για οποιοδήποτε $\theta_1,\theta_2,\theta>0$ και $\kappa\in\mathbb{R}$ ισχύει:** $\boldsymbol{\log_\alpha(\theta_1\theta_2)=\log_\alpha\theta_1+\log_\alpha\theta_2}$

Απόδειξη

Έστω $\log_\alpha\theta_1=x_1$ και $\log_\alpha\theta_2=x_2$. Από τον ορισμό του λογαρίθμου έχουμε:

$$\alpha^{x_1}=\theta_1 \quad \text{και} \quad \alpha^{x_2}=\theta_2$$

Οπότε: $\alpha^{x_1}\alpha^{x_2}=\theta_1\theta_2$ ή $\alpha^{x_1+x_2}=\theta_1\theta_2$

Από ορισμό έχουμε: $\log_\alpha(\theta_1\theta_2)=x_1+x_2=\log_\alpha\theta_1+\log_\alpha\theta_2$

ΘΕΩΡΙΑ 2 $\boldsymbol{\log_\alpha\dfrac{\theta_1}{\theta_2}=\log_\alpha\theta_1-\log_\alpha\theta_2}$

Απόδειξη

Όμοια με την (1). Έστω $\log_\alpha\theta_1=x_1$ και $\log_\alpha\theta_2=x_2$ έχουμε από ορισμό:

$$\alpha^{x_1}=\theta_1 \quad \text{και} \quad \alpha^{x_2}=\theta_2$$

Οπότε διαιρώντας: $\dfrac{\alpha^{x_1}}{\alpha^{x_2}}=\dfrac{\theta_1}{\theta_2}$ ή $\alpha^{x_1-x_2}=\dfrac{\theta_1}{\theta_2}$

Οπότε και πάλι από ορισμό: $\log_\alpha\dfrac{\theta_1}{\theta_2}=x_1-x_2=\log_\alpha\theta_1-\log_\alpha\theta_2$

ΘΕΩΡΙΑ 3 $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \log_\alpha \theta$

Απόδειξη

Έστω $\log_\alpha \theta = x$ και από ορισμό έχουμε $\alpha^x = \theta$ υψώνουμε και τα δύο μέλη της ισότητας εις την κ οπότε έχουμε :

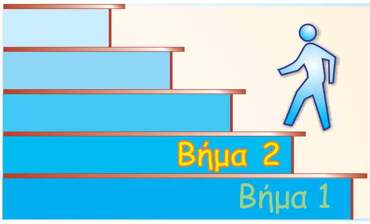
$$\alpha^{x^\kappa} = \theta^\kappa \quad \text{ή} \quad \alpha^{\kappa x} = \theta^\kappa$$

και από ορισμό ισχύει :

$$\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa x = \kappa \log_\alpha \theta$$

Παρατήρηση:

Επειδή για $\theta > 0$ ισχύει $\sqrt[\nu]{\theta} = \theta^{\frac{1}{\nu}}$ έχουμε: $\log_\alpha \sqrt[\nu]{\theta} = \log_\alpha \theta^{\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{\nu}\log_\alpha \theta$

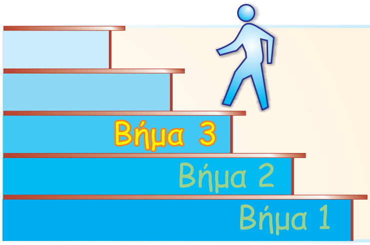


Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις "κλειδιά"

Α. Από το σχολικό βιβλίο

ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.

§ 4.1	Α΄ Ομάδα:	2, 3, 4, 5, 6, 7
	Β΄ Ομάδα:	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8
§ 4.2	Α΄ Ομάδα:	1, 2, 3, 4, 5, 6
	Β΄ Ομάδα:	1, 2, 3, 4, 5
§ 4.3	Α΄ Ομάδα:	5, 6, 7
	Β΄ Ομάδα:	3, 5, 6, 7, 8, 10



Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\left(\dfrac{\alpha+8}{3-\alpha}\right)^x$, **με** $x\in\mathbb{R}$

α. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα βρείτε το α.

β. Για την μεγαλύτερη ακέραια τιμή του α να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης: $g(x)=f(x-2)-1$

γ. Βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση C_g της g τέμνει τους άξονες.

Λύση:

α. Η εκθετική συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα όταν η βάση της είναι μεγαλύτερη απο το 1 δηλαδή :

$$\frac{\alpha+8}{3-\alpha}>1\Leftrightarrow(3-\alpha)^2\cdot\frac{\alpha+8}{3-\alpha}>(3-\alpha)^2\Leftrightarrow(3-\alpha)\cdot(\alpha+8)>(3-\alpha)^2\Leftrightarrow$$

$$(3-\alpha)\cdot(\alpha+8)-(3-\alpha)^2>0\Leftrightarrow(3-\alpha)\cdot(\alpha+8-3+\alpha)>0\Leftrightarrow(3-\alpha)\cdot(2\alpha+5)>0$$

Το πρόσημο του γινομένου $(3-\alpha)\cdot(2\alpha+5)$ φαίνεται στον επόμενο πίνακα:

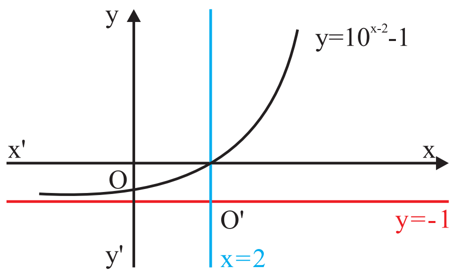
α	$-\infty$		$-5/2$		3		$+\infty$
(3-α)(2α+5)		−	0	+	0	−	

Άρα $\alpha\in\left(-\dfrac{5}{2}\,,\,3\right)$.

β. Αφού $-\dfrac{5}{2}<\alpha<3$, η μεγαλύτερη ακέραια τιμή του είναι το 2. Για $\alpha=2$ είναι

$f(x)=10^x$ και $g(x)=10^{x-2}-1$, με $x\in\mathbb{R}$, άρα η γραφική παράσταση της g είναι η γραφική παράσταση της εκθετικής $y=10^x$ που όμως είναι μετατοπισμένη.

- Κατακόρυφα προς τα κάτω κατά 1 μονάδα.
- Οριζόντια προς τα δεξιά κατά 2 μονάδες.



γ. • Για να βρούμε τα σημεία τομής της C_g με τον $x'x$, λύνουμε την εξίσωση $g(x)=0$:

$$g(x)=0 \Leftrightarrow 10^{x-2}-1=0 \Leftrightarrow 10^{x-2}=1 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

Άρα η C_g τέμνει τον $x'x$ στο $A(2\,,0)$

• Για να βρούμε το σημείο τομής της C_g με τον $y'y$, βρίσκουμε το:

$$g(0)=10^{-2}-1=\frac{1}{100}-1=-\frac{99}{100}$$

Άρα η C_g τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $B\left(0\,,-\frac{99}{100}\right)$.

2. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\left(4^{\alpha}+2^{\alpha+1}\right)^{x}$ **με** $x\in\mathbb{R}$

α. Αν το σημείο M(1,3) ανήκει στην γραφική παράσταση της f, βρείτε το α.

β. Λύστε την εξίσωση: $f(x-1)+f(2x+1)=28$

γ. Αν οι αριθμοί $f(1)$ **,** $f\left(\eta\mu^2 x\right)$**,** $f\left(\sigma\upsilon\nu^2 2x\right)$ **είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π. βρείτε το x.**

Λύση

α. Το σημείο $M(1\,,3)$ ανήκει στην C_f άρα:

$$f(1)=3 \Leftrightarrow 4^{\alpha}+2^{\alpha+1}=3 \Leftrightarrow 2^{2\alpha}+2\cdot 2^{\alpha}-3=0$$

Θέτουμε $y=2^{\alpha}$ και η εξίσωση γίνεται:

$y^2+2y-3=0 \Leftrightarrow y=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow y=\frac{-2\pm 4}{2} \Leftrightarrow y=1$ ή $y=-3$ (που απορρίπτεται αφού y>0)

$y=1 \Leftrightarrow 2^{\alpha}=1=2^{0} \Leftrightarrow \alpha=0$.

Οπότε $f(x)=\left(4^{0}+2^{1}\right)^{x}=3^{x}$, με $x\in\mathbb{R}$.

β. Λύνουμε την εξίσωση: $3^{x-1}+3^{2x+1}=28 \Leftrightarrow 3\cdot 3^{2x}+\frac{1}{3}\cdot 3^{x}-28=0$

Θέτουμε: $3^x=y>0$ και η εξίσωση γίνεται:

$$3y^2+\frac{1}{3}y-28=0 \Leftrightarrow 9y^2+y-84=0 \Leftrightarrow y=\frac{-1\pm\sqrt{3025}}{18} \Leftrightarrow y=\frac{-1\pm 55}{18} \Leftrightarrow$$

$y=3$ ή $y=-\frac{28}{9}$

$y=3 \Leftrightarrow 3^x=3^1 \Leftrightarrow x=1$ (που απορρίπτεται)

γ. Έχουμε: $f(1)=3^1=3$

$f(\eta\mu^2 x)=3^{\eta\mu^2 x}$

$f(\sigma\upsilon\nu^2 2x)=3^{\sigma\upsilon\nu^2 2x}$

Οι αριθμοί 3 , $3^{\eta\mu^2 x}$, $3^{\sigma\upsilon\nu^2 2x}$ είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π. άρα:

$$\left(3^{\eta\mu^2 x}\right)^2=3\cdot 3^{\sigma\upsilon\nu^2 2x} \Leftrightarrow 3^{2\eta\mu^2 x}=3^{1+\sigma\upsilon\nu^2 2x} \Leftrightarrow 2\eta\mu^2 x=1+\sigma\upsilon\nu^2 2x \Leftrightarrow$$

$$2\cdot\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}=1+\sigma\upsilon\nu^2 2x \Leftrightarrow 1-\sigma\upsilon\nu 2x=1+\sigma\upsilon\nu^2 2x \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 2x+\sigma\upsilon\nu 2x=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x\cdot(\sigma\upsilon\nu 2x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$\sigma\upsilon\nu 2x=0$ ή $\sigma\upsilon\nu 2x=-1 \Leftrightarrow$

$2x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2}$ ή $2x=2\kappa\pi\pm\pi \Leftrightarrow$

$x=\kappa\pi\pm\frac{\pi}{4}$ ή $x=\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2}$, $\kappa\in Z$

3. Δίνεται Γ.Π. α_ν στην οποία ισχύουν $\alpha_6=8\alpha_3$ και $S_5=93$.

α. Βρείτε την πρόοδο.

β. Λύστε την εξίσωση: $\lambda^{x-2}-\alpha_1^{\,x-3}-\lambda^{x-3}+\alpha_1^{\,x-4}=0$

γ. Αν ρ η ρίζα της εξίσωσης δείξτε ότι:

i. $\sigma\upsilon\nu\rho x=8\sigma\upsilon\nu^4 x-8\sigma\upsilon\nu^2 x+1$

ii. Λύστε την εξίσωση: $16\sigma\upsilon\nu^4 x-16\sigma\upsilon\nu^2 x=-2$

Λύση:

α. Ισχύει: $\alpha_6 = 8\alpha_3 \Leftrightarrow \alpha_1\lambda^5 = 8\alpha_1\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^3 = 8 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt[3]{8} = 2$

Ακόμα: $S_5 = 93 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha_1(\lambda^5 - 1)}{\lambda - 1} = 93 \Leftrightarrow 31\alpha_1 = 93 \Leftrightarrow \alpha_1 = 3$

β. Λύνουμε την εξίσωση:

$$2^{x-2} - 3^{x-3} - 2^{x-3} + 3^{x-4} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\cdot 2^x - \frac{1}{27}\cdot 3^x - \frac{1}{8}\cdot 2^x + \frac{1}{81}\cdot 3^x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{27}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x - \frac{1}{8} + \frac{1}{81}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x = 0$$

Θέτουμε: $y = \left(\dfrac{3}{2}\right)^x > 0$ και η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{27}\cdot y - \frac{1}{8} + \frac{1}{81}\cdot y = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{27}\cdot y - \frac{1}{81}\cdot y \Leftrightarrow \frac{1}{8} = \frac{2}{81}\cdot y \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{81}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \Leftrightarrow x = 4$$

γ.i. $\sigma\upsilon\nu\rho x = \sigma\upsilon\nu 4x = 2\sigma\upsilon\nu^2 2x - 1 = 2\cdot(2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1)^2 - 1 =$

$$= 2\cdot(4\sigma\upsilon\nu^4 x - 4\sigma\upsilon\nu^2 x + 1) - 1 = 8\sigma\upsilon\nu^4 x - 8\sigma\upsilon\nu^2 x + 2 - 1 =$$

$$= 8\sigma\upsilon\nu^4 x - 8\sigma\upsilon\nu^2 x + 1$$

ii. Λύνουμε την εξίσωση:

$$16\sigma\upsilon\nu^4 x - 16\sigma\upsilon\nu^2 x = -2 \Leftrightarrow 8\sigma\upsilon\nu^4 x - 8\sigma\upsilon\nu^2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 4x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu 4x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 4x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}}{4},\quad \kappa\in\mathbb{Z}$$

4. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln(x+\alpha) + \beta$

i. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x΄x στο $A(e-2\,,\,0)$ και τον y′y στο $B\left(0\,,\,\ln\dfrac{2}{e}\right)$ βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

ii. Βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

iii. Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f.

iv. Βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας $y=e^{f(x)}$ με την γραφική παράσταση του πολυωνύμου: $q(x)=\dfrac{x^3+x^2+x}{e}$

Λύση:

i. • Το σημείο $B\left(0\ ,\ \ln\dfrac{2}{e}\right)\in C_f \Leftrightarrow f(0)=\ln\dfrac{2}{e}\Leftrightarrow$

$$\ln\alpha+\beta=\ln\frac{2}{e}\Leftrightarrow \ln\alpha+\ln e^{\beta}=\ln\frac{2}{e}\Leftrightarrow \ln\left(\alpha e^{\beta}\right)=\ln\frac{2}{e}\Leftrightarrow \alpha e^{\beta}=\frac{2}{e}\Leftrightarrow \alpha=\frac{2}{e^{\beta+1}}$$

• Το σημείο $A(e-2\ ,0)\in C_f \Leftrightarrow f(e-2)=0\Leftrightarrow$

$$\ln(e-2+\alpha)+\beta=0\Leftrightarrow \ln(e-2+\alpha)=-\beta\Leftrightarrow$$

$$\ln(e-2+\alpha)=\ln\left(e^{-\beta}\right)\Leftrightarrow e-2+\alpha=e^{-\beta}\Leftrightarrow$$

$$e-2+\frac{2}{e^{\beta+1}}=\frac{1}{e^{\beta}}\Leftrightarrow e-2+\frac{2}{e^{\beta}\cdot e}=\frac{1}{e^{\beta}}$$

Θέτουμε: $y=e^{\beta}$ και η εξίσωση γίνεται:

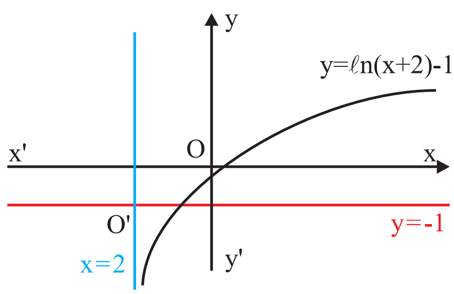
$$e-2+\frac{2}{e\cdot y}=\frac{1}{y}\Leftrightarrow e\cdot(e-2)\cdot y+2=e\Leftrightarrow$$

$$e\cdot(e-2)\cdot y=e-2\Leftrightarrow y=\frac{1}{e}\Leftrightarrow e^{\beta}=e^{-1}\Leftrightarrow\beta=-1$$

Οπότε $\alpha=\dfrac{2}{e^0}=2$ και $f(x)=\ln(x+2)-1$

ii. Λύνουμε την ανίσωση $x+2>0\Leftrightarrow x>-2$, άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $(-2,+\infty)$.

iii. Η γραφική παράσταση της f είναι η γραφική παράσταση της $y=\ln x$ η οποία όμως είναι μετατοπισμένη:
- Κατακόρυφα προς τα κάτω κατά 1 μονάδα.
- Οριζόντια προς τα αριστερά κατά 2 μονάδες.



iv. Ισχύει: $y=e^{f(x)}=e^{\ln(x+2)-1}=e^{\ln(x+2)-\ln e}=e^{\ln\left(\frac{x+2}{e}\right)}=\dfrac{x+2}{e}$

Οπότε λύνουμε την εξίσωση: $\dfrac{x^3+x^2+x}{e}=\dfrac{x+2}{e}\Leftrightarrow x^3+x^2-2=0$

Για το $G(x)=x^3+x^2-2$ εφαρμόζουμε το σχήμα Horner στη θέση 1 και έχουμε:

1	1	0	-2	1
	1	2	2	
1	2	2	0	

Άρα $(x-1)\cdot(x^2+2x+2)=0\Leftrightarrow x=1$.

5.α. Δίνονται $x,\ y>0$ και $\nu\in\mathbb{N}^*$ ώστε $\ln x-\ln y=\nu$. Βρείτε συναρτήσει του ν τις παραστάσεις:

$$\ln\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2\right],\quad \ln\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\right)$$

$$\ln\left(\sqrt[\nu]{x}\right)-\ln\left(\sqrt[\nu]{y}\right),\quad \frac{\ln(xy)}{\ln(x^\nu)+\ln(y^\nu)}$$

β.i. Αν ισχύει: $\ln y+\eta\mu^2 x=\sigma\upsilon\nu^2 x$, βρείτε το y.

ii. Αν οι αριθμοί e^{10}, y, $e^{8\sigma\upsilon\nu x}$ είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π., βρείτε το x.

Λύση:

α. Ισχύουν:

- $\ln\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]=2\ln\left(\frac{x}{y}\right)=2\cdot(\ln x-\ln y)=2\nu$
- $\ln\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\right)=\ln\left[\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}\right]=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{2}\cdot(\ln x-\ln y)=\frac{\nu}{2}$
- $\ln\left(\sqrt[\nu]{x}\right)-\ln\left(\sqrt[\nu]{y}\right)=\frac{1}{\nu}\cdot\ln x-\frac{1}{\nu}\cdot\ln y=\frac{1}{\nu}\cdot(\ln x-\ln y)=\frac{1}{\nu}\cdot\nu=1$
- $\dfrac{\ln(xy)}{\ln(x^\nu)+\ln(y^\nu)}=\dfrac{\ln x+\ln y}{\nu\ln x+\nu\ln y}=\dfrac{\ln x+\ln y}{\nu\cdot(\ln x+\ln y)}$

β.i. Ισχύει:

$$\ln y + \eta\mu^2 x = \sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow \ln y = \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x \Leftrightarrow \ln y = \sigma\upsilon\nu 2x \Leftrightarrow$$
$$\ln y = \ln\left(e^{\sigma\upsilon\nu 2x}\right) \Leftrightarrow y = e^{\sigma\upsilon\nu 2x}$$

ii. Οι αριθμοί e^{10} , y , $e^{8\sigma\upsilon\nu x}$,είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. άρα

$$\left(e^{\sigma\upsilon\nu 2x}\right)^2 = e^{10} \cdot e^{8\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow e^{2\sigma\upsilon\nu 2x} = e^{10+8\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu 2x = 8\sigma\upsilon\nu x + 10 \Leftrightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu 2x - 4\sigma\upsilon\nu x - 5 = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 - 4\sigma\upsilon\nu x - 5 = 0 \Leftrightarrow$$
$$2\sigma\upsilon\nu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu x - 6 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x - 3 = 0$$

Θέτουμε: $y = \sigma\upsilon\nu x$ και η εξίσωση γίνεται:

$$y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow$$

$y = 3$ ή $y = -1 \Leftrightarrow$

Απορρίπτεται $\sigma\upsilon\nu x = -1 = \sigma\upsilon\nu\pi \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \pi \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

6.i. Δίνεται η συνάρτηση:

$$\mathbf{f(x) = \frac{\alpha \cdot e^x}{\beta \cdot x^2 + 1}} \quad \textbf{με} \quad \mathbf{x \in \mathbb{R}}$$

ώστε $f(0) = 1$ και $f(1) = \frac{e}{2}$. Βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ii. Δείξτε ότι: $\mathbf{f(x) = e^{x - \ln(x^2+1)}}$ **με $x \in \mathbb{R}$**

iii. Λύστε την εξίσωση: $\mathbf{x - \ln[f(x)] = 3\ln\left(\sqrt[3]{2} \cdot x\right)}$

Λύση:

i. Ισχύουν:
- $f(0) = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$
- $f(1) = \frac{e}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha \cdot e}{\beta + 1} = \frac{e}{2} \Leftrightarrow \frac{e}{\beta + 1} = \frac{e}{2} \Leftrightarrow$

  $\beta + 1 = 2 \Leftrightarrow \beta = 1$

ii. Για $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x}{e^{\ln(x^2+1)}} = e^{x - \ln(x^2+1)}$

iii. Λύνουμε την εξίσωση:

$$x-\ln[f(x)]=3\ln\left(\sqrt[3]{2}\cdot x\right)\Leftrightarrow \ (\mu\varepsilon\ \ x>0)\ \ x-\ln\left[e^{x-\ln\left(x^2+1\right)}\right]=\ln\left(2x^3\right)\Leftrightarrow$$

$$x-x+\ln\left(x^2+1\right)=\ln\left(2x^3\right)\Leftrightarrow \ln\left(x^2+1\right)=\ln\left(2x^3\right)\Leftrightarrow 2x^3=x^2+1\Leftrightarrow$$

$$2x^3-x^2-1=0$$

Για το $q(x)=2x^3-x^2-1$ εφαρμόζουμε το σχήμα Horner στη θέση 1

[το 1 το βρήκαμε γιατι οι συντελεστές του $q(x)$ έχουν άθροισμα 0]

και έχουμε:

2	-1	0	-1	1
	2	1	1	
2	1	1	0	

Δηλαδή $q(x)=(x-1)\cdot\left(2x^2+x+1\right)$.

Άρα η εξίσωση γίνεται: $(x-1)\cdot\left(2x^2+x+1\right)=0\Leftrightarrow$

$x=1$ ή $2x^2+x+1=0$ που είναι αδύνατη

7. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{\ln x}{1-\ln x}$

i. Βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=1$

iii. Βρείτε τα διαστήματα του x στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω απο τον άξονα x΄x.

iv. Αν α_ν Γ.Π. με $\alpha_1=f\left(e^2\right)$, $\lambda=-f\left(e^3\right)$, βρείτε ποιος όρος της είναι το: $-\dfrac{81}{8}$

Λύση:

i. Το πεδίο ορισμού της f θα προκύψει απο την λύση του συστήματος:

$$\begin{cases}x>0\\1-\ln x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\1\neq\ln x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x\neq e\end{cases}\Leftrightarrow 0<x\neq e$$

Το πεδίο ορισμού της f είναι το: $x\in(0,e)\cup(e,+\infty)$

ii. Για να βρούμε τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y=1$, λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x)=1\Leftrightarrow\frac{\ln x}{1-\ln x}=1\Leftrightarrow \ln x=1-\ln x\Leftrightarrow 2\ln x=1\Leftrightarrow \ln x=\frac{1}{2}=\ln e^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x=\sqrt{e}$$

Άρα $A\left(\sqrt{e}\,,1\right)$ το κοινό σημείο της C_f και της ευθείας $y=1$

iii. Για να βρούμε τα διαστήματα του x στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω απο τον άξονα $x'x$ λύνουμε την ανίσωση:

$$f(x)>0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{1-\ln x}>0 \Leftrightarrow \ln x\cdot(1-\ln x)>0$$

Θέτουμε: $y=\ln x$ και η ανίσωση γίνεται: $y\cdot(1-y)>0$

Λύνουμε την εξίσωση: $y\cdot(1-y)=0 \Leftrightarrow y=0$ ή $y=1$

Το πρόσημο του $y\cdot(1-y)$ φαίνεται στον επόμενο πίνακα:

y	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y(1-y)		−	0	+	0	−	

Άρα: $0<y<1 \Leftrightarrow 0<\ln x<1 \Leftrightarrow \ln 1<\ln x<\ln e \Leftrightarrow x\in(1\,,e)$

iv. Ισχύουν: $\alpha_1=f(e^2)=\dfrac{\ln e^2}{1-\ln e^2}=\dfrac{2}{1-2}=-2$

$$\lambda=-f(e^3)=\frac{-\ln e^3}{1-\ln e^3}=\frac{-3}{1-3}=\frac{3}{2}$$

Έστω $\alpha_\nu=-\dfrac{81}{8} \Leftrightarrow \alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1}=-\dfrac{81}{8} \Leftrightarrow$

$$-2\cdot\lambda^{\nu-1}=-\frac{81}{8} \Leftrightarrow \lambda^{\nu-1}=\frac{81}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\nu-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{4} \Leftrightarrow \nu-1=4 \Leftrightarrow \nu=5$$

8.i. Αν $\alpha,\beta>0$, δείξτε ότι: $\alpha^{\log\beta}=\beta^{\log\alpha}$

ii. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=9^{\log x}-8\cdot x^{\log 3}-9$, με $x>0$

Λύστε την εξίσωση: $f(x)=0$

Λύση:

i. $\alpha^{\log\beta}=\beta^{\log\alpha} \Leftrightarrow \log\left(\alpha^{\log\beta}\right)=\log\left(\beta^{\log\alpha}\right) \Leftrightarrow \log\beta\cdot\log\alpha=\log\alpha\cdot\log\beta$ Αληθές

ii. Για $x>0$ ισχύει: $f(x)=9^{\log x}-8\cdot x^{\log 3}-9 \Leftrightarrow f(x)=3^{2\log x}-8\cdot 3^{\log x}-9$

[διότι $x^{\log 3}=3^{\log x}$ λόγω του (i)]

Οπότε τώρα λύνουμε την εξίσωση: $f(x)=0 \Leftrightarrow 3^{2\log x}-8\cdot 3^{\log x}-9=0$

Θέτουμε: $y=3^{\log x}>0$ και η εξίσωση γίνεται:

$$y^2-8y-9=0 \Leftrightarrow y=\frac{-(-8)\pm\sqrt{100}}{2} \Leftrightarrow y=\frac{8\pm 10}{2} \Leftrightarrow$$

$y=9$ ή $\underbrace{y=-1}_{\text{απορρίπτεται}} \Leftrightarrow$

$$3^{\log x}=9=3^2 \Leftrightarrow \log x=2=\log\left(10^2\right) \Leftrightarrow x=100$$

9. Δίνεται Γ.Π. α_ν με $\alpha_1=\ln\alpha$ και $\lambda=\ln\beta$, με $\alpha,\beta>0$ ενώ ισχύουν:

$$\alpha_5=16 \quad \text{και} \quad S_6=9S_3$$

α. Βρείτε τα α, β.

β.i. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x)=\ln\left(\dfrac{\beta^x-1}{\alpha^x+5}\right)$

ii. Λύστε την εξίσωση: $f(x)=2\ln 2$

iii. Λύστε την ανίσωση: $f(x)>0$

Λύση:

α. • Ισχύει: $\alpha_5=16 \Leftrightarrow \alpha_1\cdot\lambda^4=16$

• Ακόμα ισχύει:

$$S_6=9S_3 \Leftrightarrow \frac{\alpha_1\cdot(\lambda^6-1)}{\lambda-1}=9\cdot\frac{\alpha_1\cdot(\lambda^3-1)}{\lambda-1} \Leftrightarrow (\lambda^3-1)\cdot(\lambda^3+1)=9\cdot(\lambda^3-1)$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3+1=9 \Leftrightarrow \lambda^3=8 \Leftrightarrow \lambda=\sqrt[3]{8}=2$$

Οπότε $\alpha_1=\dfrac{16}{\lambda^4}=\dfrac{16}{2^4}=1$. Άρα $\alpha_1=1$.

Όμως $\alpha_1=\ln\alpha \Leftrightarrow$ και $\lambda=\ln\beta \Leftrightarrow$

$1=\ln\alpha \Leftrightarrow$ $\quad 2=\ln\beta \Leftrightarrow$

$\alpha=e$ $\quad \ln e^2=\ln\beta \Leftrightarrow$

$\beta=e^2$

β. Άρα έχουμε: $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)$, οπότε:

i. Το πεδίο ορισμού της f θα προκύψει απο την λύση της ανίσωσης:

$$e^{2x}-1>0 \Leftrightarrow e^{2x}>e^{0} \Leftrightarrow 2x>0 \Leftrightarrow x\in(0,+\infty),$$

που είναι και το πεδίο ορισμού της f

ii. $f(x)=2\ln 2 \Leftrightarrow$

$$\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{x}+5}\right)=\ln(2^{2}) \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^{x}+5}=4 \Leftrightarrow e^{2x}-1=4e^{x}+20 \Leftrightarrow e^{2x}-4e^{x}-21=0$$

Θέτουμε $e^{x}=y>0$ και η εξίσωση γίνεται:

$$y^{2}-4y-21=0 \Leftrightarrow y=\frac{-(-4)\pm\sqrt{100}}{2} \Leftrightarrow y=\frac{4\pm 10}{2} \Leftrightarrow$$

$y=7$ ή $y=-3$, που απορρίπτεται

$$e^{x}=7 \Leftrightarrow e^{x}=e^{\ln 7} \Leftrightarrow x=\ln 7$$

$$f(x)>0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{x}+5}\right)>\ln 1 \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^{x}+5}>1 \Leftrightarrow e^{2x}-1>e^{x}+5 \Leftrightarrow e^{2x}-e^{x}-6>0$$

Θέτουμε: $e^{x}=y>0$ και η ανίσωση γίνεται: $y^{2}-y-6>0$

Λύνουμε την εξίσωση: $y^{2}-y-6=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow y=\dfrac{1\pm 5}{2} \Leftrightarrow$

$y=3$ ή $y=-2$

Το πρόσημο του $y^{2}-y-6$ φαίνεται στον διπλανό πίνακα:

y	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y^2-y-6		+	0	−	0	+	

Είναι: $y>3 \Leftrightarrow e^{x}>3=e^{\ln 3} \Leftrightarrow x>\ln 3$

10. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$\mathbf{q(x)=(\ln\alpha\cdot x)^{3}-6x^{2}+\ln(e^{10}\cdot\alpha)\cdot x-6 \quad με \quad \alpha>0}$$

α. Αν το $x-1$ είναι παράγοντας του $q(x)$ βρείτε το α.

β. Για την τιμή που βρήκατε για το α λύστε τις εξισώσεις :

$$\mathbf{q(x)=0 \quad και \quad q(2^{x})=0}$$

γ. Βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση του $q(x)$ βρίσκεται κάτω απο τον άξονα x΄x.

Λύση:

α. Το $x-1$ είναι παράγοντας του $q(x)$ άρα το 1 είναι ρίζα του $q(x)$ οπότε:

$q(1)=0 \Leftrightarrow (\ln\alpha)^3-6+\ln\left(e^{10}\cdot\alpha\right)-6=0 \Leftrightarrow (\ln\alpha)^3-6+\ln\left(e^{10}\right)+\ln\alpha-6=0 \Leftrightarrow$

$(\ln\alpha)^3+\ln\alpha-6+10-6=0 \Leftrightarrow (\ln\alpha)^3+\ln\alpha-2=0$

Θέτουμε: $y=\ln\alpha$ και η εξίσωση γίνεται: $y^3+y-2=0$

Για το $G(y)=y^3+y-2$ εφαρμόζουμε το σχήμα Horner στη θέση 1 (το 1 το βρήκαμε επειδή το άθροισμα των συντελεστών ειναι 0) και έχουμε:

1	0	1	-2	1
	1	1	2	
1	1	2	0	

Δηλαδή: $G(y)=(y-1)\cdot\left(y^2+y+2\right)$, άρα η εξίσωση γίνεται:

$(y-1)\cdot\left(y^2+y+2\right)=0 \Leftrightarrow y-1=0$ ή $y^2+y+2=0 \Leftrightarrow$
αδύνατη

$y=1 \Leftrightarrow \ln\alpha=1=\ln e \Leftrightarrow \boxed{\alpha=e}$

β. Ισχύουν: $\ln\alpha=\ln e=1$ και $\ln\left(e^{10}\cdot\alpha\right)=\ln\left(e^{10}\cdot e\right)=\ln\left(e^{11}\right)=11$

Άρα λύνουμε την εξίσωση: $q(x)=0 \Leftrightarrow x^3-6x^2+11x-6=0$

Για το $q(x)=x^3-6x^2+11x-6$ εφαρμόζουμε το σχήμα Horner στη θέση 1 [το 1 το βρηκαμε διοτι $q(1)=0$] και έχουμε:

1	-6	11	-6	1
	1	-5	6	
1	-5	6	0	

Δηλαδή $q(x)=(x-1)\cdot\left(x^2-5x+6\right)$

Άρα η εξίσωση γίνεται $(x-1)\cdot\left(x^2-5x+6\right)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$ ή $x=3$

γ. • Το πρόσημο του $q(x)$ φαίνεται στο επόμενο πίνακα:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
q(x)		–	0	+	0	–	0	+	

• Άρα $q(x)>0 \Leftrightarrow x\in(1,2)\cup(3,+\infty)$

11. **Λύστε τις εξισώσεις:**

i. $2x^3-3x^2-11x+6=0$

ii. $2e^{3x}-3e^{2x}-11e^x+6=0$

iii. $2(\ln x)^3-3(\ln x)^2-11\ln x+6=0$

iv. $2συν^3x+3ημ^2x-11συνx+3=0$

Λύση:

i. Για το $q(x)=2x^3-3x^2-11x+6$ εφαρμόζουμε το σχήμα Horner στη θέση -2 (το -2 το βρήκαμε γιατι διαιρεί το 6) και έχουμε:

2	-3	-11	6	-2
	-4	1	-6	
2	-7	3	$\boxed{0}$	

Άρα $q(x)=(x+2)\cdot(2x^2-7x+3)$ οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$(x+2)\cdot(2x^2-7x+3)=0 \Leftrightarrow x+2=0 \quad ή \quad 2x^2-7x+3=0 \Leftrightarrow$$

$$x=-2 \quad ή \quad x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{25}}{4} \Leftrightarrow x=-2 \ ή \ x=\frac{7\pm5}{4} \Leftrightarrow x=-2 \ ή \ x=3 \ ή \ x=\frac{1}{2}$$

ii. Θέτουμε: $y=e^x>0$ και η εξίσωση γίνεται:

$$2y^3-3y^2-11y+6=0 \Leftrightarrow y=-2 \quad ή \quad y=3 \quad ή \quad y=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\text{αδύνατη} \qquad e^x=3 \quad ή \quad e^x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$e^x=e^{\ln 3} \quad ή \quad e^x=e^{\ln\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x=\ln 3 \ \ ή \ \ x=-\ln 2$$

iii. Θέτουμε $y=\ln x$ με $x>0$ και η εξίσωση γίνεται:

$$2y^3-3y^2-11y+6=0 \Leftrightarrow$$

$$y=-2 \quad ή \quad y=3 \quad ή \quad y=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\ln x=-2 \quad ή \quad \ln x=3 \quad ή \quad \ln x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\ln x=\ln e^{-2} \quad ή \quad \ln x=\ln e^3 \quad ή \quad \ln x=\ln e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{1}{e^2} \quad ή \quad x=e^3 \quad ή \quad x=\sqrt{e}$$

iv. $2\sigma\upsilon\nu^3x+3\eta\mu^2x-11\sigma\upsilon\nu x+3=0\Leftrightarrow$

$2\sigma\upsilon\nu^3x+3\cdot(1-\sigma\upsilon\nu^2x)-11\sigma\upsilon\nu x+3=0\Leftrightarrow$
$2\sigma\upsilon\nu^3x+3-3\sigma\upsilon\nu^2x-11\sigma\upsilon\nu x+3=0\Leftrightarrow$
$2\sigma\upsilon\nu^3x-3\sigma\upsilon\nu^2x-11\sigma\upsilon\nu x+6=0$

Θέτουμε $y=\sigma\upsilon\nu x$ με $x\in[-1,1]$ και η εξίσωση γίνεται

$2y^3-3y^2-11y+6=0\Leftrightarrow$ $y=-2$ ή $y=3$ ή $y=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

αδύνατη αδύνατη $\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow$

$x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3}$ με $\kappa\in\mathbb{Z}$

12. **Ένας βιολόγος μελετώντας την ανάπτυξη ενός είδους βακτηριδίων παρατηρεί ότι:**

- **σε 2 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης τα βακτηρίδια ήταν 400**
- **σε 4 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης τα βακτηρίδια ήταν 3200**

Ενώ ο τύπος που δίνει τον αριθμό των βακτηριδίων είναι: $\mathbf{q(t)=A\cdot 2^{\beta t}}$, **με** $\mathbf{t\geq 0}$ **τον χρόνο σε ώρες με Α,Β θετικές σταθερές.**

i. Βρείτε τις σταθερές Α και Β

ii. Βρείτε σε πόσα λεπτά ο αρχικός πληθυσμός των βακτηριδίων θα έχει διπλασιαστεί

iii. Λύστε την ανίσωση: $\mathbf{Q[q(t)]^2-5A\cdot 2^{2t+3}-500\geq 0}$

Λύση:

i. Ισχύει: $q(2)=400\Leftrightarrow A\cdot 2^{2\beta}=400$ και
$q(4)=3200\Leftrightarrow A\cdot 2^{4\beta}=3200$

Οπότε με διαίρεση κατα μέλη έχουμε:

$$\frac{A\cdot 2^{4\beta}}{A\cdot 2^{2\beta}}=\frac{3200}{400}\Leftrightarrow 2^{2\beta}=8=2^3\Leftrightarrow 2\beta=3\Leftrightarrow \boxed{\beta=\frac{3}{2}}$$

Άρα: $A\cdot 2^{2\cdot\frac{3}{2}}=400\Leftrightarrow 8A=400\Leftrightarrow \boxed{A=50}$

ii. Ισχύει $q(t)=50\cdot 2^{\frac{3}{2}\cdot t}$ με $t\ge 0$

Αν λοιπόν t ο χρόνος που χρειάζεται για να διπλασιαστεί ο αριθμός των βακτηριδίων τότε:

$$q(t)=2q(0)\Leftrightarrow 50\cdot 2^{\frac{3}{2}\cdot t}=2\cdot 50\Leftrightarrow 2^{\frac{3}{2}\cdot t}=2^{1}\Leftrightarrow$$

$\frac{3}{2}\cdot t=1\Leftrightarrow t=\frac{2}{3}$ της ώρας άρα σε $\frac{2}{3}\cdot 60=40$ λεπτά θα έχει διπλασιαστεί ο αρχικός πληθυσμός των βακτηριδίων

iii. Λύνουμε την ανίσωση:

$$[q(t)]^2-5A\cdot 2^{2t+3}-500\ge 0\Leftrightarrow 2500\cdot 2^{3t}-5\cdot 50\cdot 8\cdot 2^{2t}-500\ge 0\Leftrightarrow$$

$$2500\cdot 2^{3t}-2000\cdot 2^{2t}-500\ge 0\Leftrightarrow 5\cdot 2^{3t}-4\cdot 2^{2t}-1\ge 0$$

Θέτουμε: $\boxed{y=2^{t}>0}$ και η ανίσωση γίνεται:

$$5y^3-4y^2-1\ge 0\overset{*}{\Leftrightarrow} y\ge 1\Leftrightarrow 2^{t}\ge 2^{0}\Leftrightarrow t\ge 0$$

$*$ Για το $q(y)=5y^3-4y^2-1$ εφαρμόζουμε το σχήμα Horner στη θέση 1

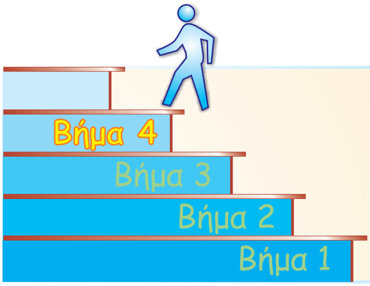
[το 1 το βρήκαμε διότι οι συντελεστές του $q(y)$ έχουν άθροισμα 0]

5	-4	0	-1	1
	5	1	1	
5	1	1	$\boxed{0}$	

Δηλαδή $q(y)=(y-1)\cdot(5y^2+y+1)$.

Το πρόσημο του $q(y)$ φαίνεται στον επόμενο πίνακα:

y	$-\infty$		1		$+\infty$
q(y)		$-$	0	$+$	



Λύνουμε μόνοι μας

1. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\left(\dfrac{\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}\right)^x$ με $x\in\mathbb{R}$ και $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$

i. Δείξτε οτι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

ii. Αν $f(1)+f(-1)=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ βρείτε το α

iii. Για την τιμή που βρήκατε για το α, λύστε την εξίσωση: $f(4x)+f(2x)=\dfrac{4}{9}$

2. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\ln x$ με $x>0$

i. Λύστε την εξίσωση: $x^3+[e-f(e)]\cdot x^2-\left[e+e^2\cdot f\left(e^2\right)\right]\cdot x+2e^2=0$

ii. Μεταξύ της μικρότερης και της μεγαλύτερης ρίζας της πιο πάνω εξίσωσης να παρεμβάλλεται ν (με $\nu\in\mathbb{N}^*$) αριθμούς $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ ώστε όλοι μαζί να είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. και να ισχύει: $7x_\nu+3x_1=0$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3.α. Αν $0<\alpha,\beta\neq 1$ και ισχύει: $2\log(\alpha+\beta)=\log(20+\alpha^2+\beta^2)$

Δείξτε ότι: $\alpha\cdot\beta=10$

β. Δίνεται το πολυώνυμο: $q(x)=x^3+\log\alpha\cdot x^2-2\log\beta\cdot x-3$

το οποίο όταν διαιρεθεί με το x-2 αφήνει υπόλοιπο 17. Βρείτε τα α,β.

γ. Λύστε τις εξισώσεις: $q(x)=17$ και $q(3\varepsilon\varphi x-1)=17$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. Έστω $x, y, z>0$ και $\alpha=\ln\frac{x}{y}$, $\beta=\ln\frac{y}{z}$, $\gamma=\ln\frac{z}{x}$.

Δείξτε ότι:

α. $\alpha+\beta+\gamma=0$

β. $\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta+\varepsilon\varphi\gamma=\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta\cdot\varepsilon\varphi\gamma$

γ. Αν οι $εφα$, $εφβ$, $εφγ$ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. με $εφβ \neq 0$ δείξτε ότι $εφα \cdot εφγ = 3$

δ. Αν το πολυώνυμο $q(x) = x^3 + εφ^3α \cdot x^2 + εφ^2α \cdot εφγ \cdot x - 5$ έχει παράγοντα το x-1 βρείτε το α.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5.α. Δίνεται ακολουθία: $α_ν = \ln\sqrt{e^5 \cdot 2^ν}$ με $ν \in \mathbb{N}^*$

i. Δείξτε ότι η $α_ν$ είναι Α.Π. .

ii. Δείξτε ότι: $S_{40} = \ln\left(e^{100} \cdot 2^{410}\right)$

iii. Ποιος όρος της προόδου ισούται με: $\frac{5}{2} + \ln 16$

β. Αν $β_ν$ με $ν \in \mathbb{N}^*$ Γ.Π. με $β_1 = α_1 + \ln\sqrt{\frac{1}{2e^3}}$ και $λ = \log\left(10^5\right)$ βρείτε ποιος όρος της ισούται με 125.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6.α. Υπολογίστε το άθροισμα: $2+8+32+\ldots\ldots+2048$

β. Αν ισχύει: $\ln(\rho^2)+\ln(\rho^8)+\ln(\rho^{32})+\ldots\ldots+\ln(\rho^{2048})=2730$, βρείτε το ρ

γ. Αν το $x-\rho$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου

$$q(x)=e^{2\alpha-3}\cdot x^3+e^{\alpha-2}\cdot x^2-2,$$ βρείτε το α.

δ. Μεταξύ των α και ρ να παρεμβάλλετε 9 αριθμούς ώστε όλοι μαζί να είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. .

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

7. Δίνεται Γ.Π. α_ν με $\alpha_1=e$ και $\alpha_5=e^3$ και θετικούς όρους

α. Βρείτε τον γενικό όρο α_ν της Γ.Π.

β. Βρείτε την ακολουθία $\beta_\nu=\ln(\alpha_\nu)$ με $\nu\in\mathbb{N}^*$ και δείξτε οτι είναι Α.Π.

γ. Υπολογίστε τα αθροίσματα: **i.** $K=\beta_6+\beta_7+\beta_8+\beta_9+\beta_{10}$

ii. $\Lambda=\beta_4+\beta_8+\beta_{12}+\ldots+\beta_{44}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

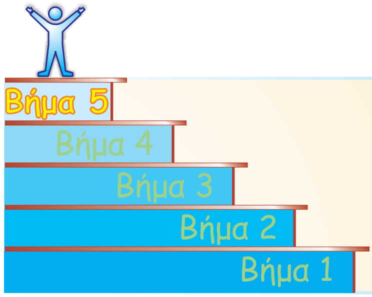
8.α. **Λύστε την ανίσωση:** $x^3 - 4x^2 + x + 6 \geq 0$

β. **Βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων**

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 6} \quad \text{και} \quad g(x) = \ln\left(x^3 - 4x^2 + x + 6\right)$$

γ. **Αν η εκθετική συνάρτηση:** $h(x) = \left(\alpha^3 - 4\alpha^2 + \alpha + 7\right)^x$, **είναι γνησίως αύξουσα στο R βρείτε το α.**

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....



Ελέγχουμε τη γνώση μας

Θέμα 1ο

α. Αν $0<\alpha\neq 1$ και $x,y>0$ και $\kappa\in R$, δείξτε ότι:

$$\ell og_{\alpha}(xy)=\ell og_{\alpha}x+\ell og_{\alpha}y$$

$$\ell og_{\alpha}(x^{\kappa})=\kappa\ell og_{\alpha}x$$

(Μονάδες 5)

β.i. Αν α_{ν} Γ.Π. με θετικούς όρους και λόγο $\lambda>0$, δείξτε ότι η ακολουθία $\beta_{\nu}=\ell n(\alpha_{\nu})$ είναι Α.Π.

(Μονάδες 10)

ii. Αν $0<\alpha,\beta,\gamma\neq 1$ δείξτε την ισοδυναμία:

α, β, γ διαδοχικοί όροι Γ.Π. $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\ell n\alpha},\dfrac{1}{\ell n\beta},\dfrac{1}{\ell n\gamma}$ διαδοχικοί όροι Α.Π.

(Μονάδες 10)

....

....

....

Θέμα 2ο

Αν η συνάρτηση $f(x)=\ell og_{\alpha}x$ με $x>0$ και $\alpha=\dfrac{2\kappa+1}{\kappa-3}$ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

i. Βρείτε το κ. *(Μονάδες 5)*

ii. Για την μικρότερη θετική ακέραια τιμή του κ να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\ell og_{\alpha}(x-1)-2$ στο $(1,+\infty)$. *(Μονάδες 10)*

iii. Λύστε την εξίσωση: $\ell og\left(g(x)\right)=1$ *(Μονάδες 10)*

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x)=\dfrac{1}{4}\ell og_{\alpha}x^3-3x^2+11-\ell og\left(\dfrac{9-8\alpha}{10}\right)$

i. Βρείτε το α.

(Μονάδες 5)

ii. Αν το $x-2$ είναι παράγοντας του P(x), δείξτε ότι $\alpha=1$.

(Μονάδες 10)

iii. Αν $\alpha=1$, βρείτε το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων P(x) και $Q(x)=x^3-8$.

(Μονάδες 10)

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Θέμα 4ο

Η αξία του διαμαντιού “Ροζ Πάνθηρ” σε $t \geq 0$ χρόνια από σήμερα δίνεται από την συνάρτηση: $Q(t) = 520 - 50 \cdot 10^{-t/2}$ χιλιάδες ευρώ.

α. Βρείτε την σημερινή αξία του πάνθηρα.

(Μονάδες 5)

β. Δείξτε ότι η αξία του πάνθηρα διαρκώς αυξάνεται.

(Μονάδες 5)

γ. Αν με σκληρη οικονομία καταφέρουμε να μαζέψουμε 519.000 € μετά από πόσα χρόνια θα είμαστε σε θέση να αγοράσουμε τον πάνθηρα;

(Μονάδες 5)

δ. Εκφράστε τον χρόνο $t \geq 0$ συναρτήσει της αξίας Q(t).

(Μονάδες 10)

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Θέμα 1º

α. Δείξτε ότι: $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta$

$$\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$$

(Μονάδες 2)

....

....

....

....

....

....

....

β.i. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\rho\eta\mu(\omega x)+\beta$ με $\rho,\omega>0$. Γράψτε ποια είναι η ελάχιστη θετική περίοδος.

(Μονάδες 3)

ii. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(2\alpha-1)^x$ με $x\in R$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. Βρείτε το α.

(Μονάδες 5)

iii. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=4\alpha x^3+3\beta x^2+2\gamma x+\delta$, με $4\alpha+3\beta+2\gamma+\delta=0$. Δείξτε ότι το $x-1$ είναι παράγοντας του P(x).

(Μονάδες 5)

iv. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\ell nx+\alpha$ με $x>0$, η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο του με τετμημένη $\frac{1}{e\sqrt{e}}$. Βρείτε το α.

(Μονάδες 5)

v. Αν α_ν Γ.Π. με θετικούς όρους και $\alpha_\mu=\kappa\alpha_1$, δείξτε ότι: $(\mu-1)\ell og\lambda=\ell og\kappa$, με $\kappa,\lambda>0$, λ ο λόγος της προόδου και $\mu\in N^*$.

(Μονάδες 5)

....

....

....

....

....

....

....

Θέμα 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2x^2+x+\rho$.

i. Αν η γραφική παράσταση του P(x) τέμνει τον άξονα y΄y στο –2, δείξτε ότι $\rho=-2$.

(Μονάδες 5)

ii. Λύστε την εξίσωση $P(x)=0$ *(Μονάδες 10)*

iii. Αν το $x+\ell n\alpha-\ell n^2\alpha$ είναι παράγοντας του P(x), βρείτε το α. *(Μονάδες 10)*

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Θέμα 3ο

Δίνονται οι ακολουθίες: $\begin{cases}\alpha_\nu=3\nu+1\\ \beta_\nu=2^{\nu-1}\end{cases}$ με $\nu\in\mathbb{N}^*$.

i. Δείξτε ότι η α_ν είναι Α.Π. και η β_ν είναι Γ.Π. *(Μονάδες 5)*

ii. Βρείτε το άθροισμα: $S=(4+1)+(7+2)+(10+4)+\ldots+(31+512)$

(Μονάδες 10)

iii. Μεταξύ των β_2 και α_{17} παρεμβάλλονται οι αριθμοί $x_1<x_2<x_3<\ldots<x_\mu$ και όλοι μαζί είναι διαδοχικοί όροι μιας Α.Π. γ_ν με διαφορά ω΄.

α. Δείξτε ότι: $\omega' = \dfrac{50}{\mu+1}$

β. Αν ο έκτος ενδιάμεσος είναι ο έκτος όρος της Γ.Π. β_ν , βρείτε τα ω΄ και μ.

(Μονάδες 10)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Θέμα 4ο

α. Αν $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ και οι αριθμοί $\ell n\dfrac{1}{8}$, $\ell n(\eta\mu x)$, $-\ell n(\sigma\upsilon\nu 2x)$ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π., βρείτε το x.

(Μονάδες 10)

β. Αν οι αριθμοί -12, $2^x - 1$, $4^{x-1} - 2^{x-2}$ είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π., βρείτε το x.

(Μονάδες 15)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....