Κεφάλαιο 4^{ο}

Ολοκληρωτικός λογισμός

Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο αυτό θα πρέπει να είναι σε θέση:

1. Να γνωρίζει τις έννοιες παράγουσα ή αρχική συνάρτηση, αόριστο ολοκλήρωμα και να μπορεί να υπολογίζει απλά αόριστα ολοκληρώματα με τη βοήθεια των μεθόδων ολοκλήρωσης.

2. Να επιλύει προβλήματα στα οποία δίνεται ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους ως προς ένα άλλο και ζητείται η συνάρτηση που εκφράζει τη σχέση των δύο μεγεθών.

3. Να γνωρίζει τις στοιχειώδεις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος και να μπορεί να τις εφαρμόζει.

4. Να γνωρίζει το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού και να μπορεί να το εφαρμόζει στον υπολογισμό απλών ολοκληρωμάτων.

5. Να υπολογίζει τα εμβαδά επιπέδων χωρίων που ορίζονται από τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ : Τύποι - Βασικές έννοιες

Πίνακας Αόριστων Ολοκληρωμάτων		
$\int 0dx = c,\ c\in R$	$\int cdx = cx + c_1$	$\int \frac{1}{x}dx = \ell n\lvert x\rvert + c,\ c\in R$
$\int \alpha x^{\nu}dx = \alpha\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} + c,\ c\in R$	$\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + c,\ c\in R$	$\int e^{x}dx = e^{x} + c,\ c\in R$
$\int \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x + c,\ c\in R$	$\int \eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu x + c,\ c\in R$	$\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \varepsilon\varphi x + c,\ c\in R$
$\int \frac{1}{\eta\mu^2 x}dx = -\sigma\varphi x + c,\ c\in R$	$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + c,\ c\in R$	$\int \alpha^{x}dx = \frac{\alpha^{x}}{\ell n\alpha} + c,\ c\in R$

Θεώρημα: Αν f συνεχής στο Δ και $\alpha, x\in\Delta$ τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο Δ, δηλαδή $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \left[\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right]' = f(x)$.

Η συνάρτηση $F(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

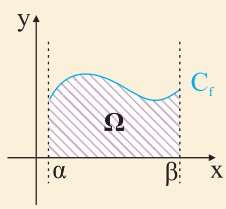
Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού (Θ.Θ.Ο.Λ.)

Αν $F(x)$ μια παράγουσα της f στο Δ και f συνεχής στο Δ και α,β ανήκουν στο Δ τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha) = [F(x)]_{\alpha}^{\beta}$$

1.α. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\ge 0$ τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από την C_f (γραφική παράσταση της f) τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ είναι

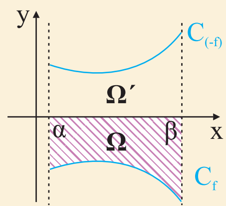
$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$



Παρατήρηση

Το χωρίο Ω ορίζεται και ως το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύουν $\alpha\le x\le\beta$ και $0\le y\le f(x)$.

β. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\le 0$ για τα $x\in[\alpha,\beta]$ τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\alpha$, $x=\beta$ είναι $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta}[-f(x)]dx$.

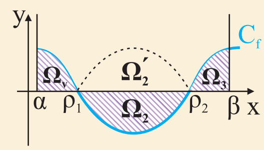


Ισοδύναμη έκφραση του $E(\Omega)$ **:**

Το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύουν $\alpha \le x \le \beta$ και $f(x) \le y \le 0$.

γ. Αν μια συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο τότε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι

$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx$.



Στο παράδειγμα του σχήματος είναι:

$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)+E(\Omega_3)=$

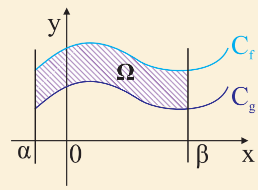
$=\int_{\alpha}^{\rho_1} f(x)dx+\int_{\rho_1}^{\rho_2}(-f(x))dx+\int_{\rho_2}^{\beta} f(x)dx$

2. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις δύο συνεχών συναρτήσεων f, g στο $[\alpha,\beta]$ και από τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ είναι $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx$.

Ειδικότερα:

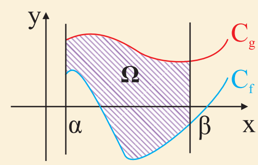
α. Αν $f(x) \ge g(x)$, $x \in [\alpha,\beta]$ τότε

$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)-g(x)]dx$



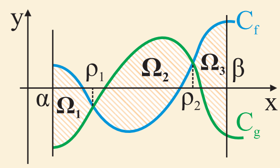
β. Αν $f(x) \le g(x)$, $x \in [\alpha,\beta]$ τότε

$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}[g(x)-f(x)]dx$



γ. Αν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο

τότε $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx$.



Στο παράδειγμα του σχήματος είναι:

$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)+E(\Omega_3)=$

$\int_{\alpha}^{\rho_1}(f(x)-g(x))dx+\int_{\rho_1}^{\rho_2}(g(x)-f(x))dx+\int_{\rho_2}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$

ΘΕΩΡΙΑ 1 **Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε:**

- **όλες οι συναρτήσεις της μορφής**

$$G(x) = F(x) + c\,, \quad c \in \mathbf{R},$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

- **κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή**

$$G(x) = F(x) + c\,, \quad c \in \mathbf{R}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, με $c \in$ R, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, διότι :

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)\,, \text{ για κάθε } x \in \Delta\,.$$

- Έστω G μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε

$$G'(x) = F'(x)\,, \text{ για κάθε } x \in \Delta\,.$$

Άρα, σύμφωνα με γνωστό πόρισμα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε

$$G(x) = F(x) + c\,, \text{ για κάθε } x \in \Delta\,.$$

ΘΕΩΡΙΑ 2 **Αν $f(x) \geq 0$ και $\alpha < \gamma < \beta$ και η f είναι σ υ ν ε χ ή ς σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει:**

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx\,.$$

Πως ερμηνεύεται γεωμετρικά η παραπάνω ιδιότητα;

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η παραπάνω ιδιότητα δηλώνει ότι:

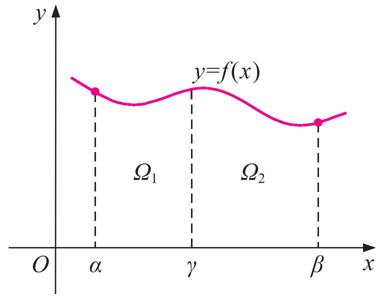
$$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)$$

αφού

$$E(\Omega_1)=\int_\alpha^\gamma f(x)dx\,,\quad E(\Omega_2)=\int_\gamma^\beta f(x)dx$$

και

$$E(\Omega)=\int_\alpha^\beta f(x)dx\,.$$



ΘΕΩΡΙΑ 3 **Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση**

$$F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt\,,\ x\in\Delta\,,$$

είναι μια παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή ισχύει:

$$\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)'=f(x)\,,\quad \text{για κάθε}\quad x\in\Delta\,.$$

Δώστε μια εποπτική ερμηνεία του παραπάνω θεωρήματος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Εποπτικά το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει (βλ. σχήμα) ως εξής:

$$F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} f(t)dt$$

$=$Εμβαδόν του χωρίου Ω.

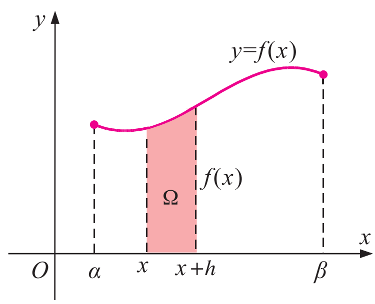
$\approx f(x)\cdot h\,,\quad$ για μικρά $\;h>0\,.$

Άρα, για μικρά $h>0$ είναι

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\approx f(x)\,,$$

οπότε

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$$



ΘΕΩΡΙΑ 4 **Αποδείξτε ότι $\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x))\cdot g'(x)$, με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν θέσουμε

$F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ τότε $F'(x)=f(x)$ και $\left(F(g(x))\right)'=F'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x)$

Δηλαδή:

$$\left(F(g(x))\right)'=\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x))\cdot g'(x).$$

ΘΕΩΡΙΑ 5 **Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε**

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε να ισχύει :

$$G(x)=F(x)+c \qquad (1)$$

Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε :

$G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt+c=c$, οπότε $c=G(\alpha)$. Επομένως,

$$G(x)=F(x)+G(\alpha) \qquad (2)$$

Από την (2), για $x=\beta$, έχουμε :

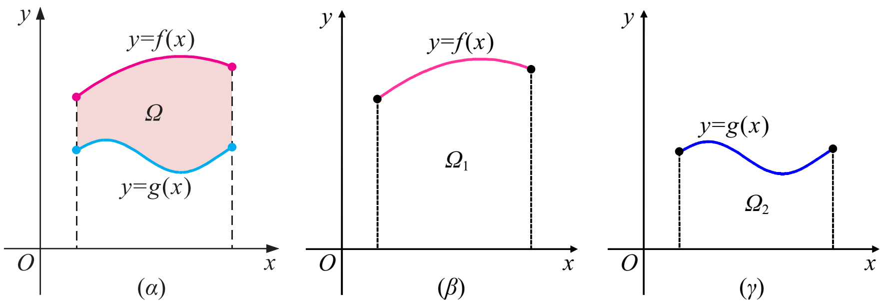
$$G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt+G(\alpha)$$

Άρα $$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha).$$

ΘΕΩΡΙΑ 6 **Έστω, τώρα, δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\geq g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$.Αποδείξτε ότι**

$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx\,.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Παρατηρούμε ότι

$$E(\Omega)=E(\Omega_1)-E(\Omega_2)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx-\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx\,.$$

Επομένως, $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$.

ΘΕΩΡΙΑ 7 **Έστω, τώρα, δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$. Αποδείξτε ότι**

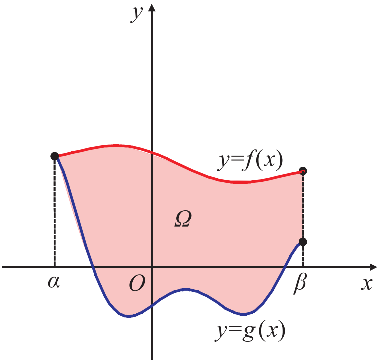
$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx\,.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

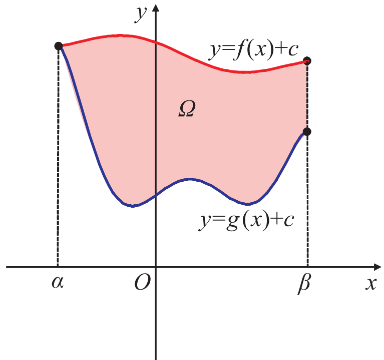
Πράγματι, επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει αριθμός $c\in\mathbb{R}^*$ τέτοιος ώστε :

$$f(x)+c\geq g(x)+c\geq 0\text{, για κάθε } x\in[\alpha,\beta]\,.$$

Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω'.



(α)



(β)

Επομένως, έχουμε:

$$E(\Omega) = E(\Omega') = \int_\alpha^\beta [(f(x)+c)-(g(x)+c)]dx = \int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx\,.$$

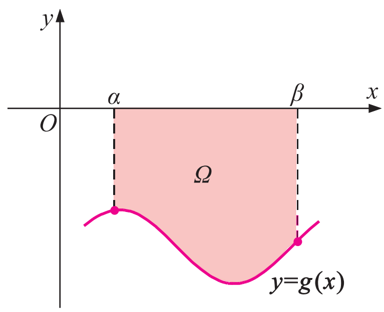
ΘΕΩΡΙΑ 8 **Αποδείξτε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g, με $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ δίνεται από τον τύπο $E(\Omega) = -\int_\alpha^\beta g(x)dx$.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=0$, έχουμε

$$E(\Omega) = \int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$$

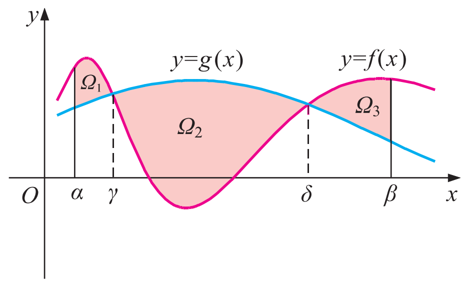
$$= \int_\alpha^\beta [-g(x)]dx = -\int_\alpha^\beta g(x)dx\,.$$



Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε:

$$E(\Omega) = -\int_\alpha^\beta g(x)dx$$

ΘΕΩΡΙΑ 9 **Όταν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, όπως στο επόμενο σχήμα, αποδείξτε ότι το εμβα-**



δόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι ίσο με $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|\,dx$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

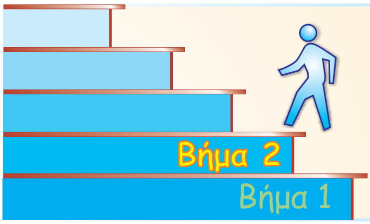
Είναι $E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)+E(\Omega_3)=$

$$=\int_\alpha^\gamma (f(x)-g(x))dx+\int_\gamma^\delta (g(x)-f(x))dx+\int_\delta^\beta (f(x)-g(x))dx$$

$$=\int_\alpha^\gamma |f(x)-g(x)|\,dx+\int_\gamma^\delta |f(x)-g(x)|\,dx+\int_\delta^\beta |f(x)-g(x)|\,dx$$

$$=\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|\,dx\ .$$

Επομένως , $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|\,dx$.

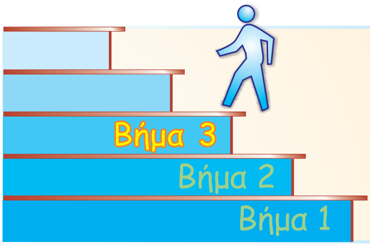


Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις “κλειδιά”

Α. Από το σχολικό βιβλίο

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

§ 3.1-3.2 Αόριστο ολοκλήρωμα	
-Ασκήσεις υπολογισμού	σελ. 316, ασκήσεις:1iv,vi,vii,2iv,v3 (Α΄ ομάδα)
	σελ. 317 ασκήσεις: 3,4,7
-Προβλήματα	σελ. 308, ασκήσεις:6 (Α΄ ομάδα)
	σελ. 308-309, ασκήσεις: 2,3 (Β΄ ομάδα)
§ 3.4-3.5 Ορισμένο ολοκλήρωμα	
-Ασκήσεις υπολογισμού	σελ. 339, ασκήσεις: 8,9
	σελ. 340, ασκήσεις: 11,12
	σελ. 352, ασκήσεις: 1,4
-Η συνάρτηση $\int_a^x f(t)dt$	σελ. 339, ασκήσεις:3,5,6
§ 3.6 Εμβαδόν επιπέδου χωρίου	σελ. 349, ασκήσεις: 3,4 (Α΄ ομάδα)
	σελ. 349-351, ασκήσεις: 1,2,5,9,12 (Β΄ ομάδα)
	σελ. 352, ασκήσεις: 5,6
	σελ. 353 ασκήσεις: 8,9
-Γενικές ασκήσεις	σελ. 353 άσκηση 10
-Ερωτήσεις κατανόησης	σελ. 354-359



Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. Να βρεθεί η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει:

(1) $f(1)=1$

(2) $f'(x)=\frac{1}{x}$**, για κάθε $x>0$**

Λύση:

Από την (2) έπεται ότι: για κάθε $x>0$, $f(x)=\int\frac{1}{x}dx=\ell nx+c$ (*)

όμως $f(1)=1\overset{(*)}{\Leftrightarrow}\ell n1+c=1\Leftrightarrow c=1$

Άρα η ζητούμενη συνάρτηση είναι $f(x)=\ell nx+1,\ \ x>0$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ell nx}{x^2},\ x>0$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $g(x)=\frac{\alpha\ell nx+\beta}{x},\ \ x>0$ να είναι αρχική (παράγουσα) της f στο $(0,+\infty)$.

Λύση:

Για να είναι η g αρχική της f στο $(0,+\infty)$ πρέπει και αρκεί για κάθε $x>0$,

$$g'(x)=f(x)\Leftrightarrow\frac{\alpha-\alpha\ell nx-\beta}{x^2}=\frac{\ell nx}{x^2}\Leftrightarrow\alpha-\alpha\ell nx-\beta=\ell nx\Leftrightarrow$$

$\alpha-\alpha\ell nx-\beta-\ell nx=0\Leftrightarrow(-\alpha-2)\ell nx+\alpha-\beta=0$ για κάθε $x>0$.

Άρα πρέπει $\begin{cases}-\alpha-1=0\\ \text{και}\\ \alpha-\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\ \text{και}\\ \beta=-1\end{cases}$. Δηλαδή $(\alpha,\beta)=(-1,-1)$

3. α. Να βρείτε τους $A, B \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει η σχέση

$$\frac{2x}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}-\{1,2\}.$$

β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{2x}{x^2-3x+2}dx$.

Λύση:

α. $\frac{2x}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}-\{1,2\}$

δηλ. $2x = A(x-2)+B(x-1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}-\{1,2\}$

ή $2x = (A+B)x-2A-B$, για κάθε $x \in \mathbb{R}-\{1,2\}$

οπότε $\begin{cases} A+B=2 \\ -2A-B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=4 \end{cases}$

β. $\int \frac{2x}{x^2-3x+2}dx \overset{\alpha)}{=} \int\left(\frac{-2}{x-1}+\frac{4}{x-2}\right)dx = -2\int\frac{1}{x-1}dx+4\int\frac{1}{x-2}dx =$

$= -2\ell n|x-1|+4\ell n|x-2|+c$

4. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

(1) $f(1)=2$ **(2)** $xf'(x)+f(x)=2x$**, για κάθε x>0**

α. Βρείτε την f. **β. Υπολογίστε το:** $\int f(x)dx$

Λύση:

α. Για κάθε $x>0$, $xf'(x)+f(x)=2x \Leftrightarrow (f(x)\cdot x)'=2x$ οπότε $f(x)\cdot x=\int 2xdx = x^2+c$,

για κάθε $x>0$ ή $f(x)=\frac{x^2+c}{x}$ $, x>0$ (*) όμως $f(1)=2 \Leftrightarrow 1+c=2 \Leftrightarrow c=1$.

Άρα $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ $, x>0$

β. $\int f(x)dx = \int\frac{x^2+1}{x}dx = \int\left(x+\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}x^2+\ell nx+c$

5. **Έστω** $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ **συνάρτηση παραγωγίσιμη στο** $(0,+\infty)$ **και τέτοια ώστε:** $\int f(x)e^x dx = x^x + c,\ c\in\mathbb{R}$

α. Να βρεθεί το: $I=\int e^x\cdot f'(x)dx$

β. Να προσδιορισθεί η f.

Λύση:

α. $I=\int e^x\cdot f'(x)dx = e^x f(x)-\int e^x f(x)dx \overset{\text{υποθ}}{=} e^x f(x)-(x^x+c)=$

$= e^x f(x) - x^x - c$

β. Αφού $\int f(x)e^x dx = x^x + c$, έπεται ότι $f(x)\cdot e^x = (x^x+c)'$, για κάθε $x>0$, δηλ.

$f(x)\cdot e^x = x^x(1+\ell nx)$, για κάθε $x>0$ ή $f(x)=e^{-x}\cdot x^x(1+\ell nx)$, για κάθε $x>0$.

6. **Έστω f συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στο R. Αν η F είναι μία αρχική της f στο R, δείξτε ότι:** $\int f(\alpha x+\beta)dx=\frac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta)+c,\quad \alpha\neq 0$

Λύση:

Αφού F μία αρχική της f στο R έπεται ότι $\int f(x)dx = F(x)+c$ (1) οπότε:

$$\int f(\alpha x+\beta)dx \underset{dx=\frac{1}{\alpha}dt}{\overset{\alpha x+\beta=t}{=}} \int f(t)\frac{1}{\alpha}dt = \frac{1}{\alpha}\int f(t)dt \overset{(1)}{=} \frac{1}{\alpha}F(t)+c = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta)+c$$

7. **Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **που ικανοποιούν τη συνθήκη :**

$$f'(\ell nx)=\begin{cases}1, & x\in(0,1]\\ x, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$$

Λύση:

Θέτοντας $\ell nx = t$ έχουμε: $f'(t)=\begin{cases}1, & t\le 0\\ e^t, & t>0\end{cases}$

και επομένως, ολοκληρώνοντας παίρνουμε: $f(t)=\begin{cases}t+c_1, & t\le 0\\ e^t+c_2, & t>0\end{cases}$

Η απαίτηση όμως της συνέχειας της f δίνει: $\lim\limits_{t\to 0^-} f(t)=\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)$

δηλ. $1+c_2=c_1$

Άρα οι ζητούμενες συναρτήσεις είναι: $f(x)=\begin{cases} x+1+c_2, & x\le 0 \\ e^x+c_2, & x>0 \end{cases}$, που προφανώς επαληθεύουν την αρχική συνθήκη.

8.α. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $\int (1-x)\cdot e^{-x}dx$

β. Βρείτε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **για την οποία ισχύει:**

$$f'(x)=\frac{1-x}{e^x},\ \textbf{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}$$

και της οποίας η γραφική παράσταση έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ **την ευθεία** $y=2$

Λύση:

α. $\int (1-x)e^{-x}dx=\int (x-1)\cdot\left(e^{-x}\right)'dx=(x-1)e^{-x}-\int e^{-x}dx=$

$=(x-1)e^{-x}+e^{-x}+c=xe^{-x}+c,\ c\in\mathbb{R}$

β. $f'(x)=\frac{1-x}{e^x}=(1-x)e^{-x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε $f(x)=\int (1-x)e^{-x}dx=x\cdot e^{-x}+c$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (*)

Όμως η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2$. Επομένως θα ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2\overset{(*)}{\Leftrightarrow}\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-x}+c\right)=2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right)+c=2\overset{\text{L'Hospital}}{\Leftrightarrow}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}+c=2\Leftrightarrow 0+c=2\Leftrightarrow c=2$$

Άρα η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $f(x)=x\cdot e^{-x}+2,\ x\in\mathbb{R}$

9. Να αποδείξετε ότι: $\int_0^{\pi/6}\frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{\sigma\upsilon\nu 2x}dx-\int_0^{\pi/6}\frac{\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu 2x}dx=\frac{\pi}{6}$

Λύση:

Είναι: $\int_0^{\pi/6}\frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{\sigma\upsilon\nu 2x}dx-\int_0^{\pi/6}\frac{\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu 2x}dx=\int_0^{\pi/6}\frac{\sigma\upsilon\nu^2x-\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu 2x}dx=$

$$=\int_0^{\pi/6}\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{\sigma\upsilon\nu 2x}dx=\int_0^{\pi/6}dx=\frac{\pi}{6}$$

10.α. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,α] (α>0) δείξτε ότι:

$$\int_0^{\alpha} f(x)dx=\int_0^{\alpha} f(\alpha-x)dx$$

β. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\eta\mu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}dx$

Λύση:

α. Είναι: $\int_0^{\alpha} f(\alpha-x)dx \overset{\alpha-x=t}{=} \int_{\alpha}^{0} f(t)(-dt)=-\int_{\alpha}^{0} f(t)dt=\int_{o}^{\alpha} f(t)dt$

β. Είναι: $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\eta\mu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}dx \overset{\alpha)}{=} \int_0^{\pi/2}\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}dx=I \quad (1)$$

Έχουμε: $2I=I+I\overset{(1)}{=}\int_0^{\pi/2}\frac{\eta\mu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}dx+\int_0^{\pi/2}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}dx$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}dx=\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow I=\frac{\pi}{4}$$

11. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο [1,2]. Αν η C_f διέρχεται από τα σημεία A(1,2) και B(2,1) να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος: $\int_1^2 x\left(2f(x)+xf'(x)\right)dx$

Λύση:

Επειδή $A(1,2)\in c_f \Leftrightarrow f(1)=2$, και $B(2,1)\in c_f \Leftrightarrow f(2)=1$

οπότε $\int_1^2 x\left(2f(x)+xf'(x)\right)dx=\int_1^2\left(2xf(x)+x^2f'(x)\right)dx$

$$=\int_1^2\left(x^2f(x)\right)'dx=\left[x^2f(x)\right]_1^2=$$

$$=2^2 f(2)-1^2 f(1)=4f(2)-f(1)=4\cdot 1-2=2$$

12. **Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και έστω F μία παράγουσα της f στο R. Αν ισχύει: $\int_0^x (x-t)f(t)dt = x-F(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρεθεί ο τύπος της f.**

Λύση:

Η δοθείσα σχέση ισοδύναμα γράφεται:

$$x\cdot\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t\cdot f(t)dt = x-F(x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Με παραγώγιση παίρνουμε:

$$\int_0^x f(t)dt + x\cdot f(x) - xf(x) = 1-f(x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

δηλ. $\int_0^x f(t)dt = 1-f(x)$ (1), για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Με νέα παραγωγιση έχουμε:

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=-f'(x)\Leftrightarrow f'(x)+f(x)=0$

$$\Leftrightarrow e^x\left(f'(x)+f(x)\right)=0 \Leftrightarrow \left(e^x f(x)\right)'=0$$

$$\Leftrightarrow e^x f(x)=c \Leftrightarrow f(x)=\frac{c}{e^x} \qquad (2)$$

Η σχέση (1) για $x=0$ δίνει: $f(0)=1\overset{(2)}{\Leftrightarrow} c=1$

Δηλ. τελικά λόγω της (2) ο ζητούμενος τύπος της f είναι: $f(x)=\frac{1}{e^x}=e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$

13. **Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R και τέτοια ώστε:**

(1) $f'(x)\geq 0 \quad, x\in\mathbb{R}$ **(2)** $f(0)=0$

Δείξτε ότι η εξίσωση $\int_0^{f(x)} u^2du+e^x-1=0$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα.

Λύση:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\int_0^{f(x)} u^2du+e^x-1$, $x\in\mathbb{R}$

Με απλή επαλήθευση διαπιστώνουμε ότι: $g(0)=\int_0^{f(0)} u^2du \overset{(2)}{=} \int_0^0 u^2du = 0$

δηλ. ότι η g έχει ρίζα τον αριθμό 0.

Όμως για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=\underbrace{f^2(x)}_{\geq 0}\cdot\underbrace{f'(x)}_{\geq 0}+\underbrace{e^x}_{>0}>0$

Άρα η g είναι γν. αύξουσα και επομένως ο αριθμός 0 θα είναι η μοναδική πραγματική ρίζα της g και κατ' επέκταση της δοσμένης εξίσωσης.

14. **Έστω $\alpha<\beta$ και $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής με την ιδιότητα**

$I=\int_\alpha^\beta f(x)dx\neq 0$. **Δείξτε ότι: υπάρχει** $\xi\in(\alpha,\beta)=\int_\alpha^\xi f(x)dx=\frac{I}{\nu}\cdot I$ **όπου**

$\nu\in N^*-\{1\}$

Λύση:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\int_\alpha^x f(t)dt-\frac{1}{\nu}I$ $,x\in[\alpha,\beta]$ για την οποία παρατηρούμε ότι:

- g συνεχής στο $[\alpha,\beta]$
- $g(\alpha)=-\frac{1}{\nu}I$
- $g(\beta)=\int_\alpha^\beta f(t)dt-\frac{1}{\nu}I \overset{\text{υποθ.}}{=} I-\frac{1}{\nu}I$

Οπότε $g(\alpha)\cdot g(\beta)=-\frac{1}{\nu}I\left(I-\frac{1}{\nu}I\right)=-\frac{1}{\nu}I^2+\frac{1}{\nu^2}I^2=-\frac{1}{\nu}I^2\underbrace{\left(\frac{1}{\nu}-1\right)}_{<0}<0$

Άρα σύμφωνα με το θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta):g(\xi)=0\Leftrightarrow\int_\alpha^\xi f(t)dt=\frac{1}{\nu}I$

15. **Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και αντιστρέψιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο [α,β].**

Να δείξετε ότι: $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)}\frac{tdt}{f'(f^{-1}(t))}$

Λύση:

Εκτελώντας το μετ/μό $f^{-1}(t)=u$ έπεται ότι $t=f(u)$ και άρα $dt=f'(u)du$.

Έτσι $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)}\frac{tdt}{f'(f^{-1}(t))}=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f(u)}{f'(u)}f'(u)du=\int_{\alpha}^{\beta}f(u)du$

16. Βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία: για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\int_0^x e^{-t}\cdot f(x-t)dt$.

Λύση:

Με την αντ/ση $x-t=u$ έχουμε $du=-dt$ οπότε η δοθείσα σχέση ισοδύναμα γράφεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-\int_x^0 e^{u-x}\cdot f(u)du$

ή για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+e^{-x}\int_0^x e^u\cdot f(u)du$

δηλ. για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $e^x f(x)=e^x\cdot x^2+\int_0^x e^u\cdot f(u)du$

Παραγωγίζοντας τώρα την τελευταία σχέση, έχουμε:

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $e^x f(x)+e^x f'(x)=2xe^x+x^2e^x+e^x f(x)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^x f'(x)=e^x\left(x^2+2x\right)\Leftrightarrow f'(x)=\left(x^2+2x\right)$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+c \qquad \text{(I)}$$

Όμως από τη σχέση της υπόθεσης προκυπτει ότι $f(0)=0$ και έτσι από την (I) κατ' ανάγκη θα είναι $c=0$. Επομένως $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2$, $x\in\mathbb{R}$

17.α. Αν η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμη και παραγωγίσιμη με την f' συνεχή, δείξτε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx+\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)}f^{-1}(x)dx=\beta f(\beta)-\alpha f(\alpha)$$

β. Έστω η συνάρτηση: $f(x)=\eta\mu x+2x,\quad 0\le x\le\pi$

i. Δείξτε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

ii. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $\int_0^{2\pi} f^{-1}(x)dx$

Λύση:

α. Θέτοντας $f^{-1}(x)=t$ έχουμε $x=f(t)$ άρα $dx=f'(t)dt$ οπότε:

$$\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx=\int_\alpha^\beta tf'(t)dt=\left[tf(t)\right]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta f(t)dt=\beta f(\beta)-\alpha f(\alpha)-\int_\alpha^\beta f(t)dt$$

και άρα $\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx=\beta f(\beta)-\alpha f(\alpha)$

β.i. Για κάθε $x\in[0,\pi]$, $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x+2>0$ δηλ. η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\pi]$ και άρα αντιστρέψιμη σ' αυτό.

ii. Λόγω του (α) ερωτήματος και επειδή η $f(x)=\eta\mu x+2x$ αντιστρέψιμη, έχουμε:

$$\int_0^\pi f(x)dx+\int_0^{2\pi} f^{-1}(x)dx=2\pi^2 \quad ή \quad \int_0^\pi(\eta\mu x+2x)dx+\int_0^{2\pi} f^{-1}(x)dx=2\pi^2$$

δηλαδή $\left[-\sigma\upsilon\nu x+x^2\right]_0^\pi+\int_0^{2\pi} f^{-1}(x)dx=2\pi^2$,

επομένως $-\sigma\upsilon\nu\pi+\pi^2+1+\int_0^{2\pi} f^{-1}(x)dx=2\pi^2$ και άρα $\int_0^{2\pi} f^{-1}(x)dx=\pi^2-2$

18. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$\left|\int_x^{nx} f(t)dt\right|\le x^{2n}, \textbf{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \textbf{ όπου η } n\in N^*-\{1\}$$

Να αποδείξετε ότι: $f(0)=0$

Λύση:

Εξ' υποθέσεως έπεται ότι: για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $-x^{2n}\le\int_x^{nx} f(t)dt\le x^{2n}$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x)=\int_x^{nx} f(t)dt-x^{2n}$, $x\in\mathbb{R}$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο R και μάλιστα για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

$$g'(x) = -f(x) + n \cdot f(nx) - 2nx^{2n-1}$$

Όμως η σχέση (1) δίνει ότι: για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) \le 0 = g(0)$ δηλαδή ο αριθμός 0 είναι (εσωτερική) θέση τοπικού μεγίστου της g, και επομένως (θ. Fermat) $g'(0) = 0 \Leftrightarrow -f(0) + nf(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)\cdot(n-1) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$, (αφού $n \neq 1$).

19. **Έστω συνάρτηση** $f:[0,c] \to \mathbb{R}\,(c>0)$ **με την** f'' **συνεχή και τέτοια ώστε:**

για κάθε $x \in [0,c], x \cdot f''(x) = f'(c)$

Δείξτε ότι υπάρχει: $\xi \in (0,c): f'(\xi) = 0$

Λύση:

Από τη δοθείσα σχέση με ολοκλήρωση παίρνουμε: $\int_0^c x \cdot f''(x)dx = c \cdot f'(c)$

δηλ. $[x \cdot f'(x)]_0^c - \int_0^c f'(x)dx = c \cdot f'(c)$ ή $cf'(c) - [f(x)]_0^c = c \cdot f'(c)$ οπότε $f(c) = f(0)$

Για την f λοιπόν παρατηρούμε ότι:
- f συνεχής στο $[0,c]$
- f παραγωγίσιμη στο $(0,c)$
- $f(0) = f(c)$

Άρα σύμφωνα με το θ. Rolle υπάρχει: $\xi \in (0,c): f'(\xi) = 0$

20. **Έστω** $f:[0,\alpha] \to \mathbb{R}, (\alpha > 0)$ **κυρτή συνάρτηση με** $f(0) = f'(0) = 1$

α. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη 0.

β. Αποδείξτε ότι: $f(x) \ge x+1$, **για κάθε** $x \in [0,\alpha]$.

γ. Δείξτε ότι: $\int_0^\alpha f(x)dx > \alpha$

Λύση:

α. Η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι: $y - f(0) = f'(0)(x-0)$ δηλ. λόγω των υποθέσων $y = x+1$.

β. Λόγω της κυρτότητας της f στο $[0,\alpha]$ και του ερωτήματος **α.** έπεται ότι: για κάθε $x \in [0,\alpha]$, $f(x) \ge x+1$

γ. Από το β) έπεται ότι: $\int_0^\alpha f(x)dx \ge \int_0^\alpha (x+1)dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^\alpha = \frac{\alpha^2}{2} + \alpha > \alpha$

21. **Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ τέτοια ώστε:**

$$f(x)=2+\int_1^x \frac{t}{f(t)}dt\text{ , για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

i. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση:

i. Από την υπόθεση διαπιστώνουμε ότι: $\begin{cases} f \quad \text{συνεχής στο } \mathbb{R} \\ \quad\quad \text{και} \\ f(x)\neq 0,\text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \end{cases}$

Άρα η f διατηρεί πρόσημο στο R και επειδή $f(1)=2+\int_1^1 \frac{t}{f(t)}dt=2+0=2>0$,

έπεται ότι: $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii. Από την υπόθεση με παραγώγιση προκύπτει: Για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x)=\frac{x}{f(x)}\Leftrightarrow f'(x)f(x)=x\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}f^2(x)\right)'=\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\Leftrightarrow\frac{1}{2}f^2(x)=\frac{1}{2}x^2+c \quad \text{(I)}$$

Όμως από την (I) για $x=1$ έχουμε: $\frac{1}{2}f^2(1)=\frac{1}{2}\cdot 1+c\overset{\text{i)}}{\Leftrightarrow}\frac{1}{2}2^2=\frac{1}{2}+c\Leftrightarrow c=\frac{3}{2}$

άρα από την (I) έπεται ότι: για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $\frac{1}{2}f^2(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}\Leftrightarrow f^2(x)=x^2+3$

και επειδή $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ συμπεραίνουμε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+3}$.

22.α. **Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και τέτοια ώστε:**

$$f(x)\geq 0\text{, για κάθε } x\in[\alpha,\beta]$$

Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$ να αποδείξετε ότι: $f(x)=0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

β. Αν για τη συνεχή στο R συνάρτηση f ισχύει:

$$\int_0^1 f^2(x)dx+\frac{1}{3}=\int_0^1 2xf(x)dx$$

να αποδείξετε ότι: $f(x)=x$, για κάθε $x\in[0,1]$

Λύση:

α. Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι παντού μηδέν στο [α,β]. Τότε επειδή $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ θα ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$ άτοπο λόγω της υπόθεσης. Άρα $f(x)=0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

β. $\int_0^1 f^2(x)dx+\frac{1}{3}=\int_0^1 2xf(x)dx \Leftrightarrow \int_0^1 (f(x)-x)^2 dx=0$. $\left(\text{διότι } \frac{1}{3}=\int_0^1 x^2dx\right)$

Όμως $(f(x)-x)^2\geq 0$, για κάθε $x\in[0,1]$ οπότε λόγω του α) θα είναι:

$f(x)-x=0$, για κάθε $x\in[0,1]$ δηλ. $f(x)=x$, για κάθε $x\in[0,1]$.

23. **Δίνεται η συνάρτηση** $f(x)=-3x^2+6x$ **και η ευθεία** $(\varepsilon): y=(6-3\alpha)x$ **,** $\alpha\in(0,2)$

α. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζουν η C_f και ο άξονας των x.

β. Να βρείτε την τιμή του α για την οποία η ευθεία (ε) χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Λύση:

α. $f(x)=0\Leftrightarrow -3x^2+6x=0\Leftrightarrow -3x(x-2)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=2$

Δηλαδή οι αριθμοί 0 και 2 είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα των x . Το πρόσημο της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f		−	0	+	0	−	

Επομένως το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E(\Omega)=\int_0^2|f(x)|dx=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(-3x^2+6x)dx=\left[-x^3+3x^2\right]_0^2=4\text{ τ.μ.}$$

β. $f(x)=(6-3\alpha)x\Leftrightarrow -3x^2+3\alpha x=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=\alpha$

Δηλαδή οι αριθμοί 0 και α είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με την ευθεία (ε). Το πρόσημο της διαφοράς $f(x)-(6-3\alpha)x=-3x^2+3\alpha x$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x		0		α	
$-3x^2+3\alpha x$	−	0	+	0	−

Επομένως το εμβαδόν του χωρίου Ω_1 που περικλείεται από την C_f και την (ε) είναι:

$$E(\Omega_1)=\int_0^{\alpha}\left|f(x)-(6-3\alpha)x\right|dx=\int_0^{\alpha}\left(-3x^2+3\alpha x\right)dx=\left[-x^3+\frac{3\alpha x^2}{2}\right]_0^{\alpha}=\frac{\alpha^3}{2}$$

Επομένως η (ε) χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία αν και μόνο αν ισχύει :

$$E(\Omega_1)=\frac{1}{2}E(\Omega)\Leftrightarrow\frac{\alpha^3}{2}=\frac{1}{2}4\Leftrightarrow\alpha=\sqrt[3]{4}$$

24. Έστω η συνάρτηση $f(x)=xe^{-x^2}$.

α. Να υπολογίσετε το εμβαδό Ε(λ), του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τις ευθείες $x=1, x=\lambda, (\lambda>1)$ και τον άξονα των x.

β. Να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda\to\infty}E(\lambda)$.

Λύση:

α. Παρατηρούμε οτι η f είναι συνεχής στο [1,λ] και ισχύει: $f(x)>0$, για κάθε $x\in[1,\lambda]$. Επομένως :

$$E(\lambda)=\int_1^{\lambda}f(x)dx=\int_1^{\lambda}xe^{-x^2}dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_1^{\lambda}=-\frac{1}{2}e^{-\lambda^2}+\frac{1}{2}e^{-1}=\frac{1}{2e}-\frac{1}{2e^{\lambda^2}}$$

β. $$\lim_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{1}{2e}-\frac{1}{2e^{\lambda^2}}\right)=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{2e}-\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{2e^{\lambda^2}}=\frac{1}{2e}-0=\frac{1}{2e}$$

25. Έστω η συνάρτηση $f(x)=9x^2\ell nx$

α. Να βρεθεί το εμβαδό Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=1$ και $x=\lambda$, $(\lambda>1)$

β. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $\lambda\in(1,e)$ τέτοιος ώστε: $E(\lambda)=17$

Λύση:

α. Παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής στο [1,λ] και επίσης $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[1,\lambda]$.

Επομένως: $E(\lambda)=\int_1^{\lambda}f(x)dx=\int_1^{\lambda}9x^2\ell nxdx=\int_1^{\lambda}(3x^3)'\ell nxdx=$

$$= \left[3x^3 \ell n x\right]_1^\lambda - \int_1^\lambda 3x^3 \frac{1}{x} dx = 3\lambda^3 \ell n\lambda - \int_1^\lambda 3x^2 dx =$$

$$= 3\lambda^3 \ell n\lambda - \left[x^3\right]_1^\lambda = 3\lambda^3 \ell n\lambda - \lambda^3 + 1$$

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(\lambda) = E(\lambda) - 17 = 3\lambda^3 \ell n\lambda - \lambda^3 - 16,\quad \lambda \in [1, e]$

Για τη g παρατηρούμε ότι :

- g συνεχής στο $[1, e]$,
- $g(1)g(e) = (-1-16)(3e^3 - e^3 - 16) = -17(2e^3 - 16) < 0$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η g έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, e)$ (1)

Όμως για κάθε $\lambda \in (1, e)$, $g'(\lambda) = 9\lambda^2 \ell n\lambda + 3\lambda^3 \frac{1}{\lambda} - 3\lambda^2 = 9\lambda^2 \ell n\lambda > 0$

Άρα $g \uparrow (1, e)$ (2). Από τις (1) και (2)συμπεραίνουμε ότι:

υπάρχει μοναδικό $\lambda \in (1, e) : g(\lambda) = 0 \Leftrightarrow E(\lambda) - 17 = 0 \Leftrightarrow E(\lambda) = 17$

26. Δίνεται η συνάρτηση: $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ **με** $f(x) = \eta\mu x + x,\ x \in [0, \pi]$

α. Δείξτε ότι η f είναι αντιστρέψιμη .

β. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των C_f και $C_{f^{-1}}$.

Λύση:

α. Για κάθε $x \in (0, \pi)$ είναι $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x + 1 > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0,π] (αφού είναι συνεχής στο [0,π]) και συνεπώς είναι “ 1-1 ” δηλαδή αντιστρέψιμη.

β. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα , έπεται ότι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} (αν βέβαια υπάρχουν) θα βρίσκονται επί της ευθείας με εξίσωση $y = x$, ουσιαστικά δηλαδή θα προέρχονται από τη λύση της εξίσωσης $f(x) = x$ στο [0,π].

Έτσι λοιπόν: $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \pi$

(αφού $x \in [0, \pi]$) και επομένως, λόγω συμμετρίας των διαγραμμάτων των f και f^{-1} , ως προς την ευθεία $y = x$, το ζητούμενο εμβαδό θα είναι:

$$E = 2\int_0^\pi |f(x) - x| dx = 2\int_0^\pi |\eta\mu x| dx = 2\int_0^\pi \eta\mu x dx \text{ (αφού για κάθε } x \in [0, \pi],\ \eta\mu x \geq 0)$$

$=2(-\sigma\upsilon\nu\pi+\sigma\upsilon\nu 0)=4$

27. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο R και η συνάρτηση:

$$F(x)=\int_1^x xf(t)dt,\ x\in R$$

α. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $F'(\xi)=0$.

β. $\int_1^{\xi} f(t)dt=-\xi f(\xi)$

Λύση:

α. Είναι $F(x)=x\int_1^x f(t)dt,\ x\in R$. Η F είναι παραγωγίσιμη στο R ως γινόμενο των παραγωγίσιμων στο R συναρτήσεων $f_1(x)=x$ και $f_2(x)=\int_1^x f(t)dt$.

Άρα είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ και επειδή $F(0)=0,\ F(1)=1\cdot\int_1^1 f(t)dt=0$ ισχύει το θεώρημα Rolle στο $[0,1]$. Άρα υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε :

$$F'(\xi)=0.$$

β. Για κάθε $x\in R$ είναι : $F'(x)=\int_1^x f(t)dt+xf(x)$ και με $x=\xi$, παίρνουμε:

$$F'(\xi)=0\Leftrightarrow\int_1^{\xi} f(t)dt+\xi f(\xi)=0\Leftrightarrow\int_1^{\xi} f(t)dt=-\xi f(\xi)$$

28. Έστω f συνεχής στο $(0,+\infty)$ και $f(x)=\frac{1}{x}+\int_1^x\frac{tf(t)}{x^2}dt,\ x>0$

Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση:

Είναι: $$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\int_1^x tf(t)dt\Leftrightarrow\frac{x^2f(x)-\int_1^x tf(t)dt}{x^2}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\int_1^x tf(t)dt}{x}\right)'=(\ell nx)'\Leftrightarrow\frac{\int_1^x tf(t)dt}{x}=\ell nx+c$$

Για $x=1: 0=c$,άρα $\int_1^x tf(t)dt = x\ell nx$. Από (1) $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}x\ell nx=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\ell nx$

29. **Αν ισχύει $\int_x^{x^2} f(t)dt \geq x^2 - x$, για κάθε $x\in R$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο R. Να δείξετε ότι υπάρχει: $\xi\in(0,1): f'(\xi)=0$.**

Λύση:

Αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει για την f το θεώρημα Rolle στο $[0,1]$ και συγκεκριμένα αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(0)=f(1)$ (αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο R).

Έχουμε: $$\int_x^{x^2} f(t)dt - x^2 + x \geq 0 \Leftrightarrow \int_x^0 f(t)dt + \int_0^{x^2} f(t)dt - x^2 + x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-\int_0^x f(t)dt + \int_0^{x^2} f(t)dt - x^2 + x \geq 0}_{g(x)},\ x\in R$$

Θέτουμε: $g(x)=-\int_0^x f(t)dt + \int_0^{x^2} f(t)dt - x^2 + x \geq 0,\ x\in R$ (1)

Παρατηρούμε ότι $g(0)=0$ και $g(1)=0$.Τότε η σχέση (1) γράφεται:

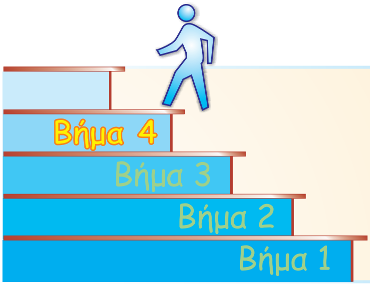
$$\begin{cases} g(x)\geq g(0) \\ \text{και} \\ g(x)\geq g(1) \end{cases},\ \text{για κάθε } x\in R$$

Άρα η g παρουσιάζει στις θέσεις $x_1=0$ και $x_2=0$ τοπικά ελάχιστα και σύμφωνα με το θ. Fermat είναι $g'(0)=0$ και $g'(1)=0$.

Όμως $g'(x)=-f(x)+2xf(x^2)-2x+1$,για κάθε $x\in R$. Οπότε έχουμε :

$$\begin{cases} g'(0)=0 \\ \text{και} \\ g'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -f(0)+1=0 \Leftrightarrow f(0)=1 \\ \text{και} \\ -f(1)+2f(1)-1=0 \Leftrightarrow f(1)=1 \end{cases}$$

Δηλαδή $f(0)=f(1)$,οπότε ισχύει το θεώρημα Rolle για την f στο $[0,1]$ και συνεπώς υπάρχει $\xi\in(0,1): f'(\xi)=0$.



Λύνουμε μόνοι μας

1. **Έστω η συνάρτηση f με** $f(x)=\int_1^x \frac{\ell nt}{t+1}dt,\ x>0$**. Να δείξετε ότι:**

$$2\left(f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=(\ell nx)^2,\ x>0$$

2. **Αν f συνεχής στο R με** $f(x)>0$ **και** $f(x)+\int_0^x tf(t)dt=1$ **(1) :**

i. **Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R.** **ii.** **Να βρείτε την f.**

iii. **Να δείξετε ότι:** $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x te^{-t^2/2}dt=1$

....

....

....

3. **Έστω f συνεχής** $[0,3]$, $f([0,3])=[1,3]$ **και η εξίσωση** $\int_0^x f(t)dt = 4x-3$ **(1)**

Να αποδείξετε πως η (1) έχει μία ρίζα στο διάστημα (0,3).

....

....

....

....

....

....

....

....

4. **Έστω συνάρτηση** $g(x)=\int_x^{x+1} f(t)dt$ **όπου f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο** $(0,+\infty)$**. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο** $(0,+\infty)$**.**

....

....

....

....

....

....

....

....

5. **Δίνεται η συνάρτηση:** $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$

Να δειχθεί ότι ο άξονας x΄x είναι η μοναδική ασύμπτωτη της C_f **. Στη συνέχεια να υπολογιστεί το εμβαδόν που περικλείεται από την** C_f **, την**

ασύμπτωτη, τον άξονα y΄y και την ευθεία $x = \lambda, \lambda > 0$. Να βρείτε το όριο του παραπάνω εμβαδού καθώς $\lambda \to +\infty$.

....

....

....

....

....

....

....

6. Δίνεται συνάρτηση $f: R \to R$, της οποίας η κλίση στο τυχαίο σημείο $(x, f(x))$ είναι $2x - 4$ και η C_f τέμνει τον y΄y στο σημείο 3. Να βρεθούν:

α. Οι εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία που η C_f τέμνει τον x΄x.

β. Το εμβαδόν που περικλείεται από την C_f και της προηγούμενες εφαπτόμενες.

....

....

....

....

....

....

....

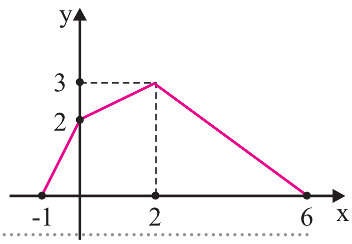
7. Έστω f, g συναρτήσεις ορισμένες και συνεχείς στο [α,β]. Αν $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ και $f(\alpha) = g(\alpha)$, $f(\beta) = g(\beta)$, να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδική ευθεία $x = x_0$ με $x_0 \in (\alpha, \beta)$, η οποία να χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από την C_f και τη C_g σε δύο ισοδύναμα μέρη (σε δύο εμβαδικά χωρία).

....

....

....

8. **Το διπλανό διάγραμμα είναι μιας συνάρτησης f. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt$ και να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.**



9. **Αν f συνεχής στο [0,1], να δειχθεί ότι:**

α. $\int_{0}^{1} 2xf(x^2)dx=\int_{0}^{1} f(x)dx$

β. **Υπάρχει** $\xi \in (0,1)$ **τέτοιο ώστε:** $2\xi f(\xi^2)=f(\xi)$

10. **Αν f συνεχής στο [0,1] και** $\int_{0}^{1} f(x)dx=1$**. Να δειχθεί ότι η εξίσωση**

$f(x)=x+\frac{1}{2}$ έχει λύση στο [0,1].

11. Έστω f συνεχής στο R και $e^x+\int_0^x f(t)dt-\lambda^2 x\geq 1$ για κάθε $x\in R$. Να βρεθεί ο λ αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

12. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}-1$

α. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να υπολογιστεί το: $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x+\kappa}^{x+\kappa+1} f(t)dt,\ \kappa>0$

Ελέγχουμε τη γνώση μας

Θέμα 1ο

Α. Αν G είναι μια παράγουσα της συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα [α,β], αποδείξτε ότι:

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

(Μονάδες 6)

Β1. Να αντιστοιχίσετε σε καθένα από τα γράμματα Α, Β, Γ, Δ έναν αριθμό από το 1 έως το 6 ώστε κάθε συνάρτηση της πρώτης στήλης να ταιριάζει με την παράγωγό της στη δεύτερη στήλη.

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. $\int_{1}^{x} xf(t)dt$	**1.** $xf(x)$
Β. $\int_{x^2}^{0} \eta\mu(t+1)dt$	**2.** $\int_{1}^{x} f(t)dt + xf(x)$
Γ. $\int_{1}^{1/x} \frac{1}{t^2}dt$	**3.** $2x\eta\mu(x^2+1)$
Δ. $\int_{2}^{x^2} \frac{1}{2t}dt$	**4.** $-2x\eta\mu(x^2+1)$
	5. -1
	6. x

Α	Β	Γ	Δ

(Μονάδες 10)

Β2. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με την ένδειξη Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος).

α. Αν $f(x) \leq g(x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx \geq \int_{\beta}^{\alpha} g(x)dx$

(Μονάδες 4)

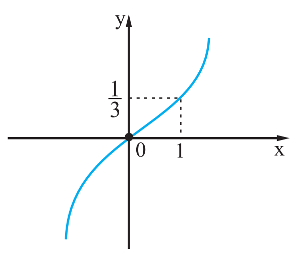
β. Αν $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx = 0$, τότε α=β

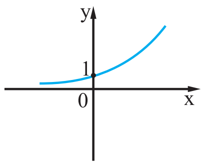
(Μονάδες 5)

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

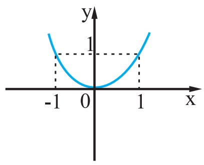
Θέμα 2⁰

Α. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η παράγουσα μιας συνάρτησης f, ποια από τις επόμενες γραφικές παραστάσεις μπορεί να παριστάνει την f ;

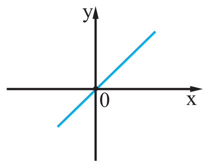




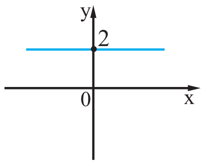
Α.



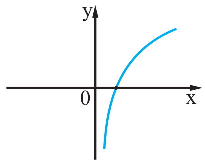
Β.



Γ.



Δ.



Ε.

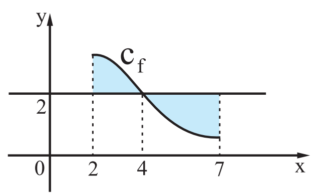
(Μονάδες 12)

Β. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{\varepsilon\varphi^4 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$ *(Μονάδες 13)*

Θέμα 3⁰

Α. Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2}\frac{\ln t}{t}dt$ *(Μονάδες 10)*

Β. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος είναι ίσο με:



Α. $\int_2^7 f(x)dx$ **Β.** $\int_2^7 -f(x)dx$

Γ. $\int_2^7 (f(x)-2)dx$ **Δ.** $\int_2^4 (f(x)-2)dx + \int_4^7 (2-f(x))dx$ **Ε.** $\left|\int_2^7 (f(x)-2)dx\right|$

(Μονάδες 15)

....

....

....

....

....

....

....

....

Θέμα 4ο

Αντλία της πυροσβεστικής αντλεί ποσότητα νερού από πλημμυρισμένο υπόγειο με ρυθμό μεταβολής $N'(t)=20+\dfrac{20(t+1)}{t^2+2t+2}$ σε λίτρα ανά λεπτό, όπου $t \geq 0$ τα λεπτά λειτουργίας της αντλίας.

1. Να βρεθεί η ποσότητα του νερού που αντλήθηκε από το υπόγειο τα 6 τελευταία λεπτά της λειτουργίας της, αν είναι γνωστό ότι η αντλία λειτουργεί επί 10 λεπτά.

(Μονάδες 10)

2. Να προσδιοριστεί η ποσότητα του νερού που μπορεί να αντλήσει η αντλία αν λειτουργήσει επί 3 ώρες.

(Μονάδες 15)

....

....

....

....

....

....

....