ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΘΕΜΑ Α

Άσκηση 1

Αν z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι:
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

<u>Λύση</u>

Έχουμε:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow$$

$$\left(|z_1 \cdot z_2|\right)^2 = \left(|z_1| \cdot |z_2|\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot \overline{(z_1 \cdot z_2)} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \Leftrightarrow$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = z_1 \cdot \overline{z_1} \cdot z_2 \cdot \overline{z_2}\,.$$

Το τελευταίο ισχύει, άρα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική σχέση.

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι κάθε εξίσωση δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει πάντα λύση στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

Λύση

(όπως στο σχολικό βιβλίο σελ.92)

Έστω η εξίσωση $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$.

Εργαζόμαστε όπως στην αντίστοιχη περίπτωση στο $\mathbb{R}$ και τη μετασχηματίζουμε με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων, στη μορφή:

$\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2}$,όπου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$, η διακρίνουσα της εξίσωσης.

Έτσι έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $\Delta>0$. Τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις τις $z_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$.

- $\Delta=0$. Τότε η εξίσωση έχει μια διπλή πραγματική λύση: $z=\frac{-\beta}{2\alpha}$.

- $\Delta<0$. Τότε επειδή $\frac{\Delta}{4\alpha^2}=\frac{-(-\Delta)}{4\alpha^2}=\frac{i^2\left(\sqrt{-\Delta}\right)^2}{4\alpha^2}=\left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$, η εξίσωση γράφεται

  $\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$, οπότε οι λύσεις της είναι: $z_{1,2}=\frac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$, οι οποίες είναι δύο

  συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.

Άσκηση 3

α) Αν z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί, να δείξετε ότι: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

β) Τι ονομάζουμε μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού z;

<u>Λύση</u>

α) Έστω $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$, με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i)} = \overline{(\alpha + \gamma) + (\beta + \delta) i} = (\alpha + \gamma) - (\beta + \delta) i =$$

$$(\alpha - \beta i) + (\gamma - \delta i) = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

β) Έστω $M(x, y)$ η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$ στο μιγαδικό επίπεδο. Ορίζουμε ως μέτρο του z την απόσταση του M από την αρχή O, δηλαδή:

$$|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Άσκηση 4

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό $z=\alpha+\beta i$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύουν:
$z+\overline{z}=2\alpha$
$z-\overline{z}=2\beta i$

β) Τι παριστάνουν στο μιγαδικό επίπεδο οι εξισώσεις:

i. $\left|z-z_0\right|=\rho,\ z,z_0\in\mathbb{C}$ με $\rho>0$.

ii. $\left|z-z_1\right|=\left|z-z_2\right|,\ z,z_1,z_2\in\mathbb{C}$.

<u>Λύση</u>

α) Έστω $z=\alpha+\beta i,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ τότε ισχύουν:

$z+\overline{z}=\alpha+\beta i+\alpha-\beta i=2\alpha$ και $z-\overline{z}=\alpha+\beta i-\alpha+\beta i=2\beta i$

β) Η εξίσωση $\left|z-z_o\right|=\rho$ παριστάνει κύκλο με κέντρο την εικόνα $K\left(z_0\right)$ του μιγαδικού z_0 στο μιγαδικό επίπεδο και ακτίνα ρ.

Η εξίσωση $\left|z-z_1\right|=\left|z-z_2\right|$ παριστάνει τη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, όπου Α, Β οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 στο μιγαδικό επίπεδο.

Άσκηση 5

Αν $\nu \in \mathrm{N}$ και i η φανταστική μονάδα, να υπολογίσετε το i^{ν} για τις διάφορες τιμές του ν.

<u>Λύση</u>

Έστω $\nu = 4\cdot\rho + \upsilon$ όπου ρ και υ το πηλίκο και το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του ν με το 4. Τότε επειδή $\upsilon = 0,1,2,3$ έχουμε:

$$\mathrm{i}^{\nu} = \mathrm{i}^{4\rho+\upsilon} = \begin{cases} \mathrm{i}^{4\rho} = \left(\mathrm{i}^4\right)^{\rho} = 1 \\ \\ \mathrm{i}^{4\rho+1} = \left(\mathrm{i}^4\right)^{\rho}\mathrm{i} = \mathrm{i} \\ \\ \mathrm{i}^{4\rho+2} = \left(\mathrm{i}^4\right)^{\rho}\mathrm{i}^2 = -1 \\ \\ \mathrm{i}^{4\rho+3} = \left(\mathrm{i}^4\right)^{\rho}\mathrm{i}^3 = \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i} \end{cases}$$

Άσκηση 6

α) Να φέρετε το πηλίκο $\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ και $\gamma+\delta i\neq 0$ στη μορφή $\kappa+\lambda i$ με $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Με τι ισούται γεωμετρικά το μέτρο της διαφοράς $|z_1-z_2|$ δυο μιγαδικών αριθμών z_1,z_2.

<u>Λύση</u>

α) Για να εκφράσουμε το πηλίκο $\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$ στη μορφή $\kappa+\lambda i$ πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με το συζυγή του παρονομαστή και έχουμε:

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta+\beta\gamma i-\alpha\delta i}{\gamma^2+\delta^2}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i\,.$$

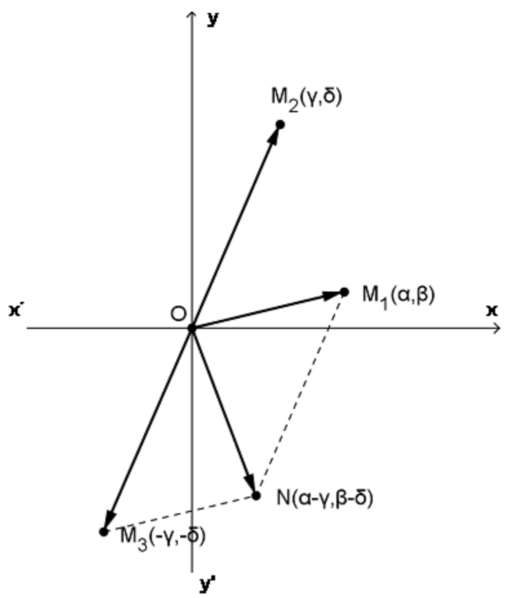
β) Το μέτρο της διαφοράς δυο μιγαδικών αριθμών ισούται με την απόσταση των εικόνων τους στο μιγαδικό επίπεδο.

Άσκηση 7

Να δείξετε ότι η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς δυο μιγαδικών αριθμών ισούται με τη διαφορά των διανυσματικών τους ακτινών.

<u>Λύση</u>

Αν $M_1(\alpha,\beta)$ και $M_2(\gamma,\delta)$ είναι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\gamma+\delta i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε η διαφορά $z_1-z_2=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$ παριστάνεται με το σημείο $N(\alpha-\gamma,\beta-\delta)$ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}$, άρα αποδείχτηκε.



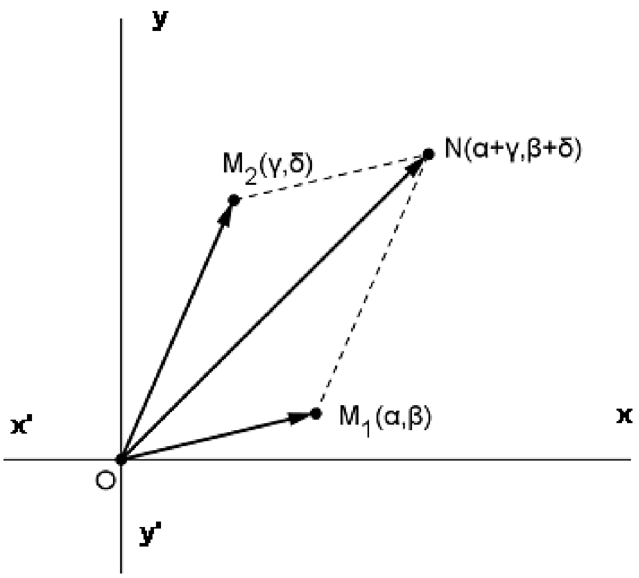
Άσκηση 8

Να δείξετε ότι η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δυο μιγαδικών αριθμών ισούται με το άθροισμα των διανυσματικών τους ακτινών.

<u>Λύση</u>

Αν $M_1(\alpha,\beta)$ και $M_2(\gamma,\delta)$ είναι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\gamma+\delta i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε το άθροισμα $z_1+z_2=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$ παριστάνεται με το σημείο $N(\alpha+\gamma,\beta+\delta)$, για το οποίο ισχύει:

$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$, άρα αποδείχτηκε.



Άσκηση 9

Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

i. $|z-2+3i|=1$.

ii. $|z+2+i|=|z-1-i|$.

Λύση

i. Έστω $M(x,y)$ η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο και $K(2,-3)$ η εικόνα του $2-3i$. Τότε έχουμε: $|z-2+3i|=1 \Leftrightarrow |z-(2-3i)|=1 \Leftrightarrow (KM)=1$.
Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(x,y)$ των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο το $K(2,-3)$ και ακτίνα $\rho=1$.

ii. Έστω Λ η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο και Α, Β οι εικόνες των μιγαδικών $-2-i$ και $1+i$ αντίστοιχα. Τότε έχουμε: $|z+2+i|=|z-1-i| \Leftrightarrow |z-(-2-i)|=|z-(1+i)| \Leftrightarrow (\Lambda A)=(\Lambda B)$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία Α(-2,-1) και Β(1,1).

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z \neq 1+0i$ για τους οποίους ισχύει: $\left|\dfrac{z-4}{z-1}\right| = 2.$

i. Να δείξετε ότι $|z| = 2$.

ii. Αν επιπλέον ισχύει $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$ να υπολογίσετε τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς.

iii. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z του παραπάνω ερωτήματος να αποδείξετε ότι $z^2 \in I$.

<u>Λύση</u>

i. Η δοσμένη σχέση μας δίνει:

$$|z-4|^2 = 2^2\,|z-1|^2 \Leftrightarrow (z-4)(\overline{z}-4) = 4(z-1)(\overline{z}-1) \Leftrightarrow$$

$$z\cdot\overline{z} - 4z - 4\overline{z} + 16 = 4z\cdot\overline{z} - 4z - 4\overline{z} + 4 \Leftrightarrow 3z\cdot\overline{z} = 12 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2.$$

ii. Έστω $z = \alpha + \beta i, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Επειδή $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$, δηλαδή $\alpha = \beta$ και από το προηγούμενο ερώτημα έπεται ότι:

$$|z| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 4 \Leftrightarrow 2\alpha^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = \pm\sqrt{2}.$$

Άρα, $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ή $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

iii. Έστω $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ τότε:

$$z^2 = \left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^2 = 2 + 2\sqrt{2}^2 i + 2i^2 = 4i \in I.$$

Ομοίως και για την άλλη ρίζα: $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

Άσκηση 2

Για το μιγαδικό $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι:

i. $\mathrm{Re}(z) \le |\mathrm{Re}(z)| \le |z|$.

ii. $\mathrm{Im}(z) \le |\mathrm{Im}(z)| \le |z|$.

iii. $2|\mathrm{Re}(z)\cdot\mathrm{Im}(z)| \le |z|^2$.

iv. $|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \le \sqrt{2}|z|$.

<u>Λύση</u>

i. Έχουμε:
$\mathrm{Re}(z) \le |\mathrm{Re}(z)| \le |z| \Leftrightarrow x \le |x| \le \sqrt{x^2 + y^2}$, η πρώτη ανισότητα $x \le |x|$ ισχύει, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,από τις ιδιότητες των απολύτων τιμών και η δεύτερη γίνεται:
$|x| \le \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow |x|^2 \le \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 \le x^2 + y^2 \Leftrightarrow 0 \le y^2$, η οποία ισχύει, για κάθε $y \in \mathbb{R}$, άρα ισχύει και η αρχική.

ii. Έχουμε:
$\mathrm{Im}(z) \le |\mathrm{Im}(z)| \le |z| \Leftrightarrow y \le |y| \le \sqrt{x^2 + y^2}$, η πρώτη ανισότητα $y \le |y|$ ισχύει, για κάθε $y \in \mathbb{R}$, από τις ιδιότητες των απολύτων τιμών και η δεύτερη ανισότητα γίνεται:

$|y| \le \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow |y|^2 \le \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 \Leftrightarrow y^2 \le x^2 + y^2 \Leftrightarrow 0 \le x^2$, η οποία ισχύει, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii. Έχουμε:
$2|\mathrm{Re}(z)\cdot\mathrm{Im}(z)| \le |z|^2 \Leftrightarrow 2|x\cdot y| \le x^2 + y^2 \Leftrightarrow |x|^2 + |y|^2 - 2|x|\cdot|y| \ge 0 \Leftrightarrow$
$\left(|x| - |y|\right)^2 \ge 0$, το οποίο ισχύει, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, άρα αποδείχτηκε.

iv. Έχουμε:
$|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \le \sqrt{2}|z| \Leftrightarrow |x| + |y| \le \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow$

$\left(|x| + |y|\right)^2 \le \left(\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2$

$|x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \le 2x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow \left(|x| - |y|\right)^2 \ge 0$, το οποίο ισχύει, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, άρα αποδείχτηκε.

Άσκηση 3

α) Να υπολογίσετε το γινόμενο:

$$P = i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{64}.$$

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$S = i - i^2 + i^3 - i^4 + \ldots - i^{2\nu}$, για τις διάφορες τιμές του $\nu \in N$.

<u>Λύση</u>

α) Χρησιμοποιώντας τον τύπο του αθροίσματος των ν πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου, δηλαδή τον τύπο $S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu)$, παίρνουμε:

$$P = i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{64} = i^{1+2+3+\ldots+64} = i^{\frac{64}{2}(1+64)} = i^{2080} = i^{4\cdot 520+0} = i^0 = 1$$

β) Εδώ έχουμε το άθροισμα των 2ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = i$ και λόγο $\lambda = -i$. Οπότε, χρησιμοποιώντας τον τύπο του αθροίσματος των ν πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου, δηλαδή τον τύπο: $S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$, παίρνουμε:

$$S = i - i^2 + i^3 - i^4 + \ldots - i^{2\nu} = i\frac{(-i)^{2\nu} - 1}{-i-1} = i\frac{(-1)^\nu - 1}{-i-1} =$$

$$\begin{cases} i\frac{1-1}{-i-1} = 0, & \text{αν ν: άρτιος} \\ i\frac{-1-1}{-i-1} = i\frac{2}{1+i} = i\frac{2(1-i)}{2} = 1+i, & \text{αν ν: περιττός} \end{cases}$$

Άσκηση 4

Αν για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει: $z^7 = 16(\overline{z})^3$:

i. Να δείξετε ότι: $z^{10} \in \mathbb{R}$.

ii. Να υπολογίσετε το $|z|$.

<u>Λύση</u>

i. Πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη της σχέσης $z^7 = 16(\overline{z})^3$ με z^3 και παίρνουμε:

$z^7 \cdot z^3 = 16(\overline{z})^3 \cdot z^3 \Leftrightarrow z^{10} = 16(\overline{z} \cdot z)^3 \Leftrightarrow z^{10} = 16|z|^6$ και επειδή $|z| \in R$ έπεται ότι και $z^{10} \in \mathbb{R}$.

ii. Παίρνουμε τα μέτρα στην αρχική σχέση και έχουμε:

$|z^7| = |16(\overline{z})^3| \Leftrightarrow |z|^7 = 16|(\overline{z})^3| \Leftrightarrow |z|^7 = 16|\overline{z}|^3$ και επειδή $|z| = |\overline{z}|$, έχουμε ισοδύναμα

$|z|^3\left(|z|^4 - 16\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\left(|z| = 0 \text{ ή } |z|^4 = 16\right) \Leftrightarrow$

$\left(|z| = 0 \text{ ή } |z| = 2\right)$.

Άσκηση 5

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z, $z \neq \frac{2}{3}i$.

α) Να βρείτε το συζυγή του μιγαδικού αριθμού : $w = \frac{5i|\overline{z}|+3+z}{2-3\cdot i\cdot\overline{z}}$, $z \in \mathbb{C} - \left\{\frac{2}{3}i\right\}$.

β) Αν ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z, στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο μοναδιαίος κύκλος, να βρείτε την καμπύλη στην οποία κινούνται οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού $u = (12+5i)z - i$.

<u>Λύση</u>

α) Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των συζυγών μιγαδικών αριθμών, έχουμε:

$$\overline{w} = \overline{\left(\frac{5i|\overline{z}|+3+z}{2-3\cdot i\cdot\overline{z}}\right)} = \frac{\overline{5i|\overline{z}|+3+z}}{\overline{2-3\cdot i\cdot\overline{z}}} =$$

$$\frac{\overline{5i|\overline{z}|}+\overline{3}+\overline{z}}{\overline{2}-\overline{3\cdot i\cdot\overline{z}}} = \frac{5\cdot\overline{i}\cdot\left(\overline{|\overline{z}|}\right)+3+\overline{z}}{2-3\cdot\overline{i}\cdot\overline{\overline{z}}} = \frac{-5i|\overline{z}|+3+\overline{z}}{2+3\cdot i\cdot z}.$$

β) Ισχύει $|z| = 1$ και $u = (12+5i)z - i \Leftrightarrow u + i = (12+5i)z$ επομένως $|u+i| = |(12+5i)z| = \sqrt{12^2+5^2}\,|z|$ άρα $|u+i| = 13$ επομένως οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού u κινούνται σε κύκλο με κέντρο το σημείο $K(0,-1)$ και ακτίνα 13, δηλαδή στον κύκλο $C: x^2 + (y+1)^2 = 13^2$

Άσκηση 6

Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις:

i. $z-\overline{z}=2i$.

ii. $\overline{z}=1-z$.

iii. $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Re}(z)$.

iv. $(z+\overline{z})^2=4$.

<u>Λύση</u>

Έστω $z=x+yi$ με $x,y\in\mathbb{R}$ τότε:

i. $z-\overline{z}=2i \Leftrightarrow 2yi=2i \Leftrightarrow y=1$ άρα η εξίσωση περιγράφει γεωμετρικά τους μιγαδικούς αριθμούς που οι εικόνες τους είναι πάνω στην οριζόντια ευθεία $y=1$.

ii. $\overline{z}=1-z \Leftrightarrow z+\overline{z}=1 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ άρα η εξίσωση περιγράφει γεωμετρικά τους μιγαδικούς αριθμούς που οι εικόνες τους είναι πάνω στην κατακόρυφη ευθεία $x=\frac{1}{2}$.

iii. $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Re}(z) \Leftrightarrow y=x$ άρα η εξίσωση περιγράφει γεωμετρικά τους μιγαδικούς αριθμούς που οι εικόνες τους είναι πάνω στην πρώτη διχοτόμο των αξόνων.

iv. $(z+\overline{z})^2=4 \Leftrightarrow 4x^2=4 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm1$ άρα η εξίσωση περιγράφει γεωμετρικά τους μιγαδικούς αριθμούς που οι εικόνες τους είναι πάνω στις κατακόρυφες ευθείες $x=1$ και $x=-1$.

Άσκηση 7

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

i. $|z-2+3i|<1.$

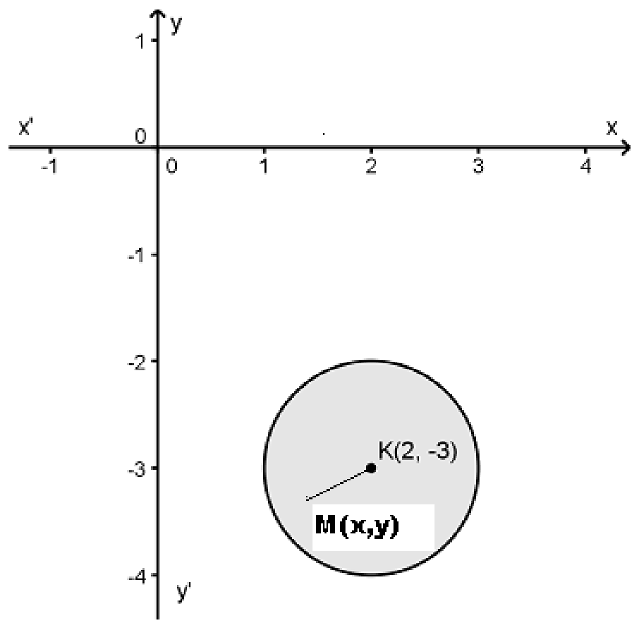
ii. $|z+2+i| \le |z-1-i|$

<u>Λύση</u>

i. Έστω $M(x,y)$ η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο και $K(2,-3)$ η εικόνα του $2-3i$. Τότε έχουμε: $|z-2+3i|<1 \Leftrightarrow |z-(2-3i)|<1 \Leftrightarrow (KM)<1$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(x,y)$ των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι τα σημεία του κυκλικού δίσκου με κέντρο το $K(2,-3)$ και ακτίνα $\rho=1$, που έχει εξίσωση:

$(x-2)^2+(y+3)^2<1,$ δηλαδή τα εσωτερικά σημεία του κύκλου με κέντρο το $K(2,-3)$ και ακτίνα $\rho=1$. (Σχήμα 1)



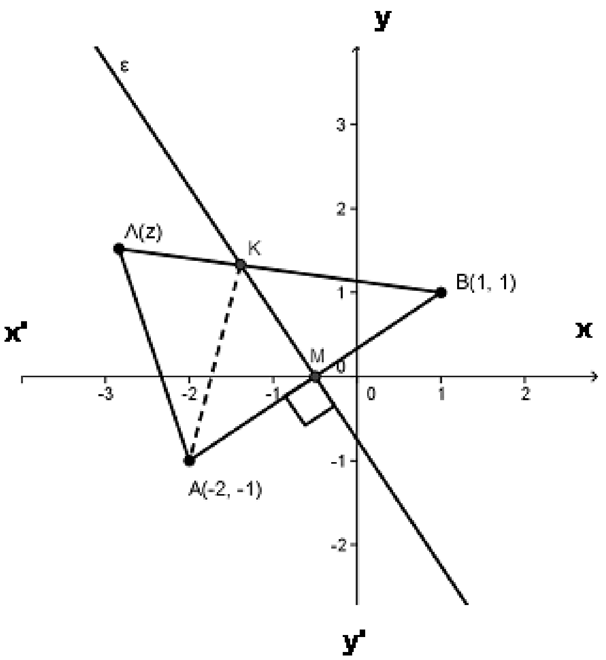
ii. Έστω Λ η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο και A, B οι εικόνες των μιγαδικών $-2-i$ και $1+i$ αντίστοιχα. Τότε έχουμε:

$|z+2+i| \le |z-1-i| \Leftrightarrow$

$$\left|z-(-2-i)\right| \le \left|z-(1+i)\right| \Leftrightarrow$$

$$(\Lambda A) \le (\Lambda B).$$

Η τελευταία ανισότητα επαληθεύεται από τα σημεία του ημιεπιπέδου (ϵ, A), δηλαδή του ημιεπιπέδου που περιέχει το σημείο Α και έχει ακμή τη μεσοκάθετο ϵ του ευθύγραμμου τμήματος Α Β . Πράγματι (βλ. Σχήμα 2) έστω ότι το σημείο Λ ανήκει στο ημιεπίπεδο (ϵ, A). Αν δεν ανήκει στην ευθεία ϵ και επίσης δεν ανήκει στην ημιευθεία ΜΑ, τότε από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΑΚΛ έχουμε $(\Lambda A) < (\Lambda K) + (KA) = (\Lambda K) + (KB) = (\Lambda B)$. Αν το σημείο Λ ανήκει στην ευθεία ϵ τότε $(\Lambda A) = (\Lambda B)$. Επίσης αν ανήκει στην ημιευθεία ΜΑ, τότε πάλι προφανώς $(\Lambda A) \le (\Lambda B)$.



Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι το ημιεπίπεδο με εξίσωση: $6x + 4y + 3 \le 0$.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1

Έστω η εξίσωση $z^2-2z+\left(1+\lambda^2\right)=0$ (1) με $\lambda\in\mathbb{R}^*$

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει μιγαδικές ρίζες.

ii. Αν z_1,z_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1) να υπολογίσετε τα z_1+z_2 και $z_1\cdot z_2$.

iii. Αν Μ και Ν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο και $\left(OMN\right)=3$, όπου Ο η αρχή των αξόνων, να υπολογίσετε το λ και τις ρίζες z_1 και z_2.

Λύση

i. Υπολογίζουμε τη Διακρίνουσα:

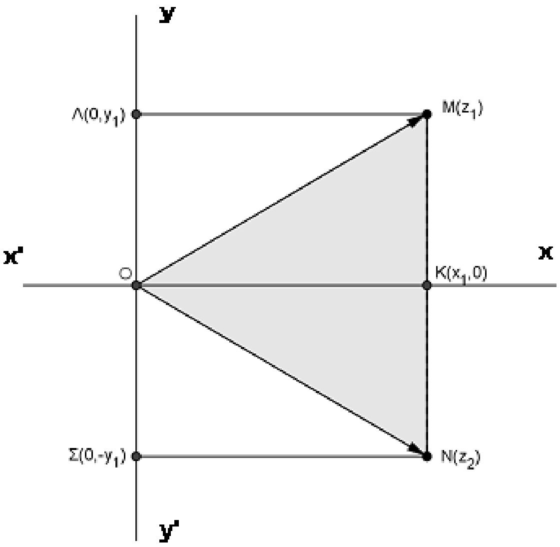
$\Delta=4-4\left(1+\lambda^2\right)=-4\lambda^2<0$ άρα η εξίσωση (1) έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες.

ii. Γνωρίζουμε ότι:

$z_1+z_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $z_1\cdot z_2=\dfrac{\gamma}{\alpha},\ \alpha\neq 0$, άρα,

$z_1+z_2=2$ και $z_1\cdot z_2=1+\lambda^2$.

iii. Οι ρίζες z_1,z_2 της εξίσωσης είναι συζυγείς μιγαδικές, οπότε έστω $z_1=x_1+y_1i$ και $z_2=x_1-y_1i$ με $x_1,y_1\in\mathbb{R}$ και $y_1>0$. Τότε από το προηγούμενο ερώτημα θα ισχύει
$z_1+z_2=2x_1=2\Leftrightarrow x_1=1$ και
$z_1\cdot z_2=x_1^{\,2}+y_1^{\,2}=1+\lambda^2\Leftrightarrow 1+y_1^{\,2}=1+\lambda^2\Leftrightarrow y_1=|\lambda|$.



Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΝ είναι:

$\left(\mathrm{OMN}\right)=\dfrac{(\mathrm{MN})\cdot(\mathrm{OK})}{2}=\dfrac{2y_1\cdot 1}{2}=y_1=3$, άρα $\left|\lambda\right|=3\Leftrightarrow\lambda=\pm 3$ και οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$z_1=1+3i$ και $z_2=1-3i$.

Άσκηση 2

i. Αν z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί, να δείξετε ότι:

$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

ii. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2, να αποδείξετε τις ισοδυναμίες:

$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z_2} \in I \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{ON}$, όπου $\overrightarrow{OM}$ και $\overrightarrow{ON}$ οι διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών z_1 και z_2 αντίστοιχα.

iii. Να δειχθεί ότι για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει η ταυτότητα:

$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$.

iv. Αν $|z| = 3, |w| = 5$ και $|z + w| = 6$ να υπολογίσετε το $|z - w|, z, w \in \mathbb{C}$

<u>Λύση</u>

i. Εφαρμόζοντας ιδιότητες του μέτρου μιγαδικών αριθμών, έχουμε:

$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) =$

$z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} =$

$|z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

ii. Έστω $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$, τότε βάσει του πρώτου ερωτήματος έπεται ότι:

$2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) = 0 \Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z_2} \in I$ (1).

Αντίστροφα, για $z_1 \cdot \overline{z_2} \in I$ και λόγω της ισοδυναμίας (1) και του (i) ερωτήματος θα έχουμε ότι:

$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

Για $z_1 = x_1 + y_1 i$ και $z_2 = x_2 + y_2 i$, με $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$z_1 \cdot \overline{z_2} = (x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i) = (x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2) + (y_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2)i.$ (2)

Έστω $z_1 \cdot \overline{z_2} \in I$, τότε από τη σχέση (2), παίρνουμε:

$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$ (3) όμως $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$, άρα $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{ON}$.

Αντίστροφα, για $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{ON}$ συνεπάγεται ισχύει η σχέση (3) και λόγω της σχέσης (2), έχουμε $z_1 \cdot \overline{z_2} \in I$.

iii. Ισχύει:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) + (z_1 - z_2)\left(\overline{z_1} - \overline{z_2}\right) =$$

$$\left(z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2}\right) + \left(z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2}\right) =$$

$2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$, άρα αποδείχτηκε.

iv. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε:

$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)$, για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$

και αντικαθιστώντας τις τιμές, από τα δεδομένα του ερωτήματος, παίρνουμε:

$$6^2 + |z - w|^2 = 2\left(3^2 + 5^2\right) \Leftrightarrow |z - w|^2 = 3 \Leftrightarrow |z - w| = \sqrt{3}.$$

Άσκηση 3

Δίνεται η εξίσωση $z^2 - 4z \cdot ημθ + 4 = 0, \quad (1), \quad z \in \mathbb{C}, θ \in \mathbb{R}$.

i. Να λύσετε την εξίσωση (1).

ii. Να δείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της (1), στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται πάνω σε κύκλο.

iii. Αν z_1, z_2 οι ρίζες της (1), να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$.

<u>Λύση</u>

$z^2 - 4z \cdot ημθ + 4 = 0 \quad (1), θ \in \mathbb{R}$

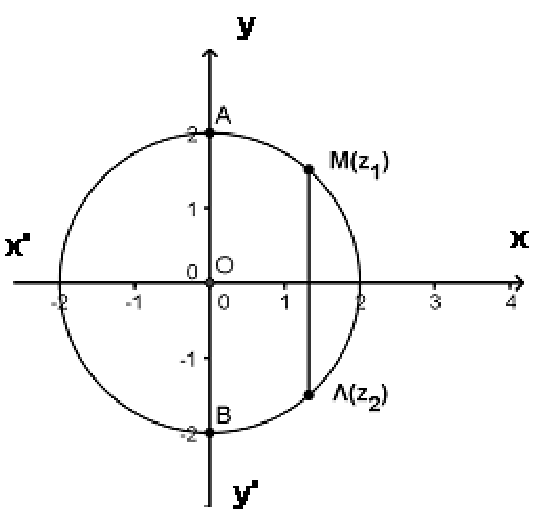
i. $Δ = 16 \cdot ημ^2θ - 16 = -16(1 - ημ^2θ) = -16 \cdot συν^2θ$ οπότε

$$z_{1,2} = \frac{4 \cdot ημθ \pm 4i \cdot συνθ}{2} = 2 \cdot ημθ \pm 2i \cdot συνθ = 2\left(ημθ \pm i \cdot συνθ\right)$$

ii. Έστω $x = 2 \cdot ημθ$ και $y = \pm 2 \cdot συνθ$, τότε: $x^2 + y^2 = 4 \cdot ημ^2θ + 4 \cdot συν^2θ = 4$.

Οπότε οι ρίζες της εξίσωσης κινούνται πάνω στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2.

iii. Αν Μ και Λ οι εικόνες των ριζών z_1, z_2 στο μιγαδικό επίπεδο, τότε επειδή αυτές είναι συζυγείς, τα σημεία Μ και Λ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$. Οπότε η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το $|z_1 - z_2|$ είναι το (ΑΒ)=4, για $θ = 2kπ, k \in Z$, (σχήμα 1).



Άσκηση 4

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w για τους οποίους ισχύει:

$\left(\overline{z}\right)^2\cdot\overline{w}=4$ και $z^6\cdot w=4$.

i. Να υπολογίσετε τα $|z|$ και $|w|$.

ii. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w.

iii. Να δείξετε ότι: $3\le|z+w|\le 5$. Πότε ισχύουν οι ισότητες;

<u>Λύση</u>

i. Αν πάρουμε μέτρα και στις δυο σχέσεις έχουμε:

$\left|\left(\overline{z}\right)^2\cdot\overline{w}\right|=4\Leftrightarrow\left|\left(\overline{z}\right)^2\right|\cdot|\overline{w}|=4\Leftrightarrow|z|^2\cdot|w|=4$ (1).

$\left|z^6\cdot w\right|=4\Leftrightarrow|z|^6\cdot|w|=4$ (2).

Διαιρώντας τις σχέσεις (2):(1), $z,w\in\mathbb{C}^*$ από δεδομένα, παίρνουμε:

$|z|^4=1\Leftrightarrow|z|=1$ και αντικαθιστώντας στην (1): $|w|=4$.

ii. $\left(\overline{z}\right)^2\cdot\overline{w}=4\Leftrightarrow\overline{\left(\overline{z}\right)^2\cdot\overline{w}}=\overline{4}\Leftrightarrow\overline{\left(\overline{z}\right)^2}\cdot\overline{\left(\overline{w}\right)}=4\Leftrightarrow\left(\overline{\left(\overline{z}\right)}\right)^2\cdot w=4\Leftrightarrow\left(z\right)^2\cdot w=4$, οπότε η σχέση $z^6\cdot w=4$ γίνεται:

$z^6\cdot w=4\Leftrightarrow z^4\cdot\left(z^2\cdot w\right)=4\Leftrightarrow z^4\cdot 4=4\Leftrightarrow z^4-1=0\Leftrightarrow$

$\left(z^2-1\right)\left(z^2+1\right)=0\Leftrightarrow z=\pm1, z=\pm i$.

Αν $z=\pm1$ τότε $w=4$, και αν $z=\pm i$, τότε :

$i^6 w=4\Leftrightarrow w=-4$.

iii. ισχύει: $|z|=1$ και $|w|=4$, οπότε:

$\big||z|-|w|\big|\le|z+w|\le|z|+|w|\Leftrightarrow 3\le|z+w|\le 5$.

Η $\big||z|-|w|\big|=|z+w|$ ισχύει όταν $z=-1$ και $w=4$, ενώ η $|z+w|=|z|+|w|$ ισχύει όταν $z=1$ και $w=4$.

Άσκηση 5

α) Για τον μιγαδικό αριθμό $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε τις ισοδυναμίες:

$\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

$\overline{z} = -z \Leftrightarrow z \in I$

β) Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $|z_1| = |z_2| = \rho, \rho > 0$ και $z_1 \cdot z_2 \neq -\rho^2$, να δείξετε ότι:

i. Ο μιγαδικός αριθμός $w_1 = \dfrac{z_1 + z_2}{\rho^2 + z_1 \cdot z_2} \in \mathbb{R}$.

ii. Ο μιγαδικός αριθμός $w_2 = \dfrac{z_1 - z_2}{\rho^2 + z_1 \cdot z_2} \in I$.

<u>Λύση</u>

α) $\overline{z} = z \Leftrightarrow x - yi = x + yi \Leftrightarrow 2yi = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

Ομοίως,

$\overline{z} = -z \Leftrightarrow x - yi = -x - yi \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow z \in I$.

β) $|z_1| = |z_2| = \rho \Leftrightarrow |z_1|^2 = |z_2|^2 = \rho^2 \Leftrightarrow$

$z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2} = \rho^2$ οπότε:

$\overline{z_1} = \dfrac{\rho^2}{z_1}$ και $\overline{z_2} = \dfrac{\rho^2}{z_2}$.

i. Χρησιμοποιώντας το ερώτημα (α) αρκεί να δείξουμε ότι $w_1 = \overline{w_1}$. Είναι:

$$\overline{w_1} = \overline{\left(\frac{z_1 + z_2}{\rho^2 + z_1 \cdot z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1 + z_2}}{\overline{\rho^2 + z_1 \cdot z_2}} =$$

$$\frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{\rho^2 + \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}} = \frac{\dfrac{\rho^2}{z_1} + \dfrac{\rho^2}{z_2}}{\rho^2 + \dfrac{\rho^2}{z_1} \cdot \dfrac{\rho^2}{z_2}} = \frac{\dfrac{\rho^2 \left(z_1 + z_2\right)}{z_1 \cdot z_2}}{\dfrac{\rho^2 \left(z_1 \cdot z_2 + \rho^2\right)}{z_1 \cdot z_2}} = w_1$$ άρα αποδείχτηκε.

ii. Χρησιμοποιώντας το ερώτημα (α) αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{w_2} = -w_2$. Είναι:

$$\overline{w_2} = \overline{\left(\frac{z_1 - z_2}{\rho^2 + z_1 \cdot z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1 - z_2}}{\overline{\rho^2 + z_1 \cdot z_2}} =$$

$$\frac{\overline{z_1} - \overline{z_2}}{\rho^2 + \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}} = \frac{\frac{\rho^2}{z_1} - \frac{\rho^2}{z_2}}{\rho^2 + \frac{\rho^2}{z_1} \cdot \frac{\rho^2}{z_2}} = \frac{\frac{\rho^2\left(z_2 - z_1\right)}{z_1 \cdot z_2}}{\frac{\rho^2\left(z_1 \cdot z_2 + \rho^2\right)}{z_1 \cdot z_2}} = -w_2$$. άρα αποδείχτηκε.

Άσκηση 6

Για τους μη μηδενικούς μιγαδικούς αριθμούς z, w, να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} z^8 \cdot w^6 = -1 \\ z^{26} \cdot w^{20} = -1 \\ z^2 + w^2 = -2 \end{cases}$$

<u>Λύση</u>

Έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} z^8 \cdot w^6 = -1 & (1) \\ z^{26} \cdot w^{20} = -1 & (2) \\ z^2 + w^2 = -2 & (3) \end{cases},$$

υψώνουμε την πρώτη στον κύβο: $z^{24} \cdot w^{18} = -1 (4)$ και διαιρούμε την (2) με την (4):

$z^2 \cdot w^2 = 1 \Leftrightarrow z^2 = \frac{1}{w^2}$ και αντικαθιστούμε στην (3), οπότε:

$$\frac{1}{w^2} + w^2 = -2 \Leftrightarrow w^4 + 2w^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(w^2 + 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow w^2 = -1 \Leftrightarrow w = \pm i .$$

Αντικαθιστώντας στην (3) βρίσκουμε: $z = \pm i$. Έτσι οι λύσεις του συστήματος είναι:

$\left(z = i, w = i\right)$ ή $\left(z = i, w = -i\right)$ ή $\left(z = -i, w = i\right)$ ή $\left(z = -i, w = -i\right)$.

Άσκηση 7

i. Να λύσετε στο $\mathbb{C}$ την εξίσωση: $z^2 - iz - 1 = 0$

ii. Αν z_1, z_2 οι ρίζες της προηγούμενης εξίσωσης, να αποδείξετε ότι: $z_1^{\ 3} = z_2^{\ 3}$.

<u>Λύση</u>

i. Έστω $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$, τότε η εξίσωση $z^2 - iz - 1 = 0$ γίνεται:

$$x^2 - y^2 + 2xyi - ix + y - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + y - 1 = 0 \\ x(2y-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + y - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x^2 - y^2 + y - 1 = 0 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\begin{cases} x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ άρα $z_{1,2} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}$, (για $x = 0$ η εξίσωση $-y^2 + y - 1 = 0$ είναι αδύνατη).

ii. $z_1^{\ 3} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{3\sqrt{3}}{8} + 3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 i\dfrac{1}{2} + 3\dfrac{\sqrt{3}}{2}i^2\dfrac{1}{4} + i^3\dfrac{1}{8} = i$

και $z_2^{\ 3} = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right)^3 = -\dfrac{3\sqrt{3}}{8} + 3\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 i\dfrac{1}{2} - 3\dfrac{\sqrt{3}}{2}i^2\dfrac{1}{4} + i^3\dfrac{1}{8} = i$,

επομένως: $z_1^{\ 3} = z_2^{\ 3}$

Άσκηση 8

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = 3\eta\mu\theta + 4i\sigma\upsilon\nu\theta,\ \theta \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z κινούνται πάνω σε μια έλλειψη.

ii. Αν z_1, z_2 δυο μιγαδικοί αριθμοί της παραπάνω μορφής, να δείξετε ότι $|z_1 - z_2| \le 8$.

<u>Λύση</u>

i. Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$, τότε $z = 3\eta\mu\theta + 4i\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\eta\mu\theta \\ y = 4\sigma\upsilon\nu\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{3} = \eta\mu\theta \\ \\ \dfrac{y}{4} = \sigma\upsilon\nu\theta \end{cases}$,

υψώνουμε στο τετράγωνο και τις δυο σχέσεις και αθροίζουμε, οπότε λαμβάνουμε:

$\left(\dfrac{x}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{4}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ και η οποία παριστάνει έλλειψη με μήκος μεγάλου άξονα 8 και

μήκος μικρού άξονα 6.

ii.Το $|z_1 - z_2|$ παριστάνει την απόσταση των εικόνων των δυο μιγαδικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο και επειδή οι τελευταίες είναι σημεία της προηγούμενης έλλειψης έπεται έχουν τη μεγαλύτερη απόσταση όταν είναι τα άκρα του μεγάλου άξονα, άρα η μέγιστη τιμή που λαμβάνει το $|z_1 - z_2|$ είναι 8.

Άσκηση 9

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z \neq 0$, και $w = z - \frac{4}{z}$. Να δείξετε ότι αν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 2$, τότε οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w κινούνται σε ευθύγραμμο τμήμα.

<u>Λύση</u>

Για τον $z = \alpha + bi$ με $\alpha, b \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|z| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2 + b^2} = 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + b^2 = 4 \Leftrightarrow b^2 = 4 - \alpha^2 \geq 0$

απ' όπου $|\alpha| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \alpha \leq 2$ και ομοίως συνάγεται $-2 \leq b \leq 2$.

Επίσης $w = z - \frac{4}{z} = \alpha + bi - \frac{4}{\alpha + bi} = \alpha + bi - \frac{4(\alpha - bi)}{\alpha^2 + b^2} = \alpha + bi - \alpha + bi = 0 + 2bi$ οπότε αν

$w = x + yi$ έπεται ότι $x = 0$ και $y = 2b \in [-4, 4]$. Άρα η εικόνα του w κινείται πάνω στον

άξονα των φανταστικών στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $A(0, -4)$ και $B(0, 4)$.

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z με $z=5+3\cdot\frac{1+i\cdot t}{1-i\cdot t}$, $t\in\mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού z ανήκουν σε κύκλο του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.

<u>Λύση</u>

Έστω $z=x+yi$ με $x,y\in\mathbb{R}$. Έχουμε:

$$x+yi=5+3\cdot\frac{1+i\cdot t}{1-i\cdot t}\Leftrightarrow x+yi=5+3\cdot\frac{\left(1+i\cdot t\right)^2}{1+t^2}\Leftrightarrow$$

$$x+yi=5+3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+3\cdot\frac{2ti}{1+t^2}.$$

Άρα, $x-5=3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}$ και $y=3\cdot\frac{2t}{1+t^2}$.

Υψώνουμε στο τετράγωνο και αθροίζουμε, οπότε:

$$\left(x-5\right)^2+y^2=3^2\,\frac{1-2t^2+t^4+4t^2}{\left(1+t^2\right)^2}=3^2$$

Άρα οι εικόνες του μιγαδικού z ανήκουν σε κύκλο με κέντρο Κ(5,0) και ακτίνα ρ=3.

Άσκηση 2

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 1+2i$ και $z_2 = 3+4i$

i. Για τον μιγαδικό αριθμό $z = x+yi,\ x,y \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε την ισοδυναμία: $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο, για τους οποίους ισχύει: $\dfrac{z-z_1}{z-z_2} \in \mathbb{R}$, όπου $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $z \neq z_2$.

iii. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z να βρείτε ποιος έχει το ελάχιστο μέτρο.

iv. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο μιγαδικό επίπεδο, για τους οποίους ισχύει: $w = t\cdot z_1 + (1-t)\cdot z_2$ όταν το t διατρέχει το $\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

i. $\overline{z} = z \Leftrightarrow x - yi = x + yi \Leftrightarrow 2yi = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

ii. Έστω $z = x+yi$, με $x,y \in \mathbb{R}$ και $(x,y) \neq (3,4)$, τότε:

$$\frac{z-z_1}{z-z_2} \in R \Leftrightarrow \frac{z-z_1}{z-z_2} = \overline{\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)} \Leftrightarrow \frac{z-z_1}{z-z_2} = \frac{\overline{z}-\overline{z_1}}{\overline{z}-\overline{z_2}} \Leftrightarrow$$

$z\overline{z} - z\overline{z_2} - z_1\overline{z} + z_1\overline{z_2} = z\overline{z} - z\overline{z_1} - z_2\overline{z} + z_2\overline{z_1}$ και αντικαθιστώντας τους μιγαδικούς παίρνουμε:

$y = x+1$.

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία $(\epsilon): y = x+1$, χωρίς το σημείο Κ(3,4).

iii. Για να βρούμε ποιος από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z έχει το ελάχιστο μέτρο, θα φέρουμε την κάθετη ευθεία από την αρχή των αξόνων στην $(\epsilon): y = x+1$. Η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = 1$, άρα η κάθετη ευθεία (η) της (ε), θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = -1$ και επειδή διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα έχει εξίσωση:

$(\eta): y = -x$. Λύνουμε το σύστημα: $\begin{cases} y = x+1 \\ y = -x \end{cases}$

και βρίσκουμε $x = -\dfrac{1}{2}$ και $y = \dfrac{1}{2}$, άρα ο μιγαδικός αριθμός z με το μικρότερο μέτρο είναι ο $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

iv. Έστω $w = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$, τότε $x + yi = t\cdot(1+2i) + (1-t)\cdot(3+4i) = (3-2t) + (-2t+4)i$, συνεπώς, $x = 3-2t$, **(1)** και $y = -2t+4$, **(2)** και απαλείφοντας το $t \in \mathbb{R}$ μεταξύ των σχέσεων **(1)** και **(2)**, παίρνουμε: $y = x+1$.

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία $(\epsilon): y = x+1$.

Άσκηση 3

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός w για τον οποίο ισχύει: $1+w+w^2=0$. Να δείξετε ότι:

i. $w\neq 1$.

ii. $w^3=1$.

iii. $w^{3\rho}+w^{3\rho+1}+w^{3\rho+2}=0$.

iv. $w^9+w^8+w^{-2}=0$.

v. $(1+w)^5=-w$.

vi. $\left(3+3w+5w^2\right)^{12}=4096.$

Λύση

i. Προφανώς $w\neq 1$, διότι για $w=1$ από τη σχέση $1+w+w^2=0$ προκύπτει 3=0 άτοπο.

ii.Πολλαπλασιάζουμε τη δοσμένη σχέση με το $(1-w\neq 0)$ οπότε έχουμε:
$1+w+w^2=0\Leftrightarrow(1-w)\left(1+w+w^2\right)=0\Leftrightarrow 1-w^3=0\Leftrightarrow w^3=1$.
Β' τρόπος: Λύνουμε την εξίσωση $1+w+w^2=0\Leftrightarrow w_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, κατόπιν υψώνουμε στην 3η και βρίσκουμε το ζητούμενο.

iii. $w^{3\rho}+w^{3\rho+1}+w^{3\rho+2}=0\Leftrightarrow\left(w^3\right)^\rho+\left(w^3\right)^\rho w+\left(w^3\right)^\rho w^2=0\Leftrightarrow$
$1+w+w^2=0$ που ισχύει, άρα αποδείχτηκε.

iv. $w^9+w^8+w^{-2}=0\Leftrightarrow w^9+w^8+\frac{1}{w^2}=0\Leftrightarrow w^{11}+w^{10}+1=0\Leftrightarrow$
$w^{3\cdot3+2}+w^{3\cdot3+1}+1=0\Leftrightarrow\left(w^3\right)^3w^2+\left(w^3\right)^3w^1+1=0\Leftrightarrow w^2+w^1+1=0,$ που ισχύει άρα αποδείχτηκε.

v. $(1+w)^5=\left(-w^2\right)^5=-w^{10}=-\left(w^3\right)^3w=-w.$

vi. $\left(3+3w+5w^2\right)^{12}=\left(3+3w+3w^2+2w^2\right)^{12}=\left[3\left(1+w+w^2\right)+2w^2\right]^{12}=$
$2^{12}w^{24}=4096\left(w^3\right)^8=4096$.

Άσκηση 4

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w με $z=(\lambda+1)+(3\lambda+2)i,\ \lambda\in\mathbb{R}$ και $|w-4-i|=2$.

i. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.

ii. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w.

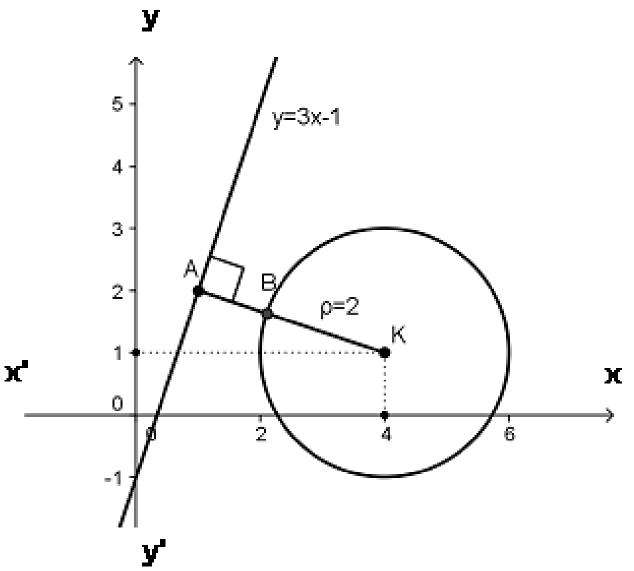
iii. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

<u>Λύση</u>

i. Στον μιγαδικό αριθμό $z=(\lambda+1)+(3\lambda+2)i,\ \lambda\in\mathbb{R}$, θέτουμε $x=(\lambda+1)$ και $y=(3\lambda+2)$ και απαλείφοντας το λ παίρνουμε $y=3x-1$. Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y=3x-1$.

ii. Ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο το $K(4,1)$ και ακτίνα $\rho=2$.

iii. Όπως φαίνεται στο Σχέδιο 1, η ελάχιστη απόσταση του κύκλου από τη ευθεία είναι το μήκος του τμήματος ΑΒ.



$y=3x-1 \Leftrightarrow 3x-y-1=0$ οπότε:

$(AK)=\dfrac{|3\cdot4-1\cdot1-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$ άρα $(AB)=\left|\sqrt{10}-2\right|$, επομένως η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$

είναι $\sqrt{10}-2$.

Άσκηση 5

Έστω η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu^2\alpha\cdot z^2 - 2\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot z + \left(1+\eta\mu^2\alpha\right) = 0$ (1) με $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

i. Να λύσετε την εξίσωση (1). Για ποια τιμή του α η (1) έχει πραγματικές ρίζες;

ii. Να δείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της (1) κινούνται πάνω σε μια υπερβολή.

iii. Να βρεθεί η τιμή του $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έτσι, ώστε να έχουμε τη λύση της εξίσωσης με το ελάχιστο μέτρο.

<u>Λύση</u>

i. Η διακρίνουσα της εξίσωσης ισούται:

$$\Delta = 4\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 4\left(1+\eta\mu^2\alpha\right)\sigma\upsilon\nu^2\alpha = -4\sigma\upsilon\nu^2\alpha\cdot\eta\mu^2\alpha \le 0 .$$

Όταν $\alpha = 0$ τότε $\Delta = 0$ και η εξίσωση έχει μια διπλή πραγματική ρίζα

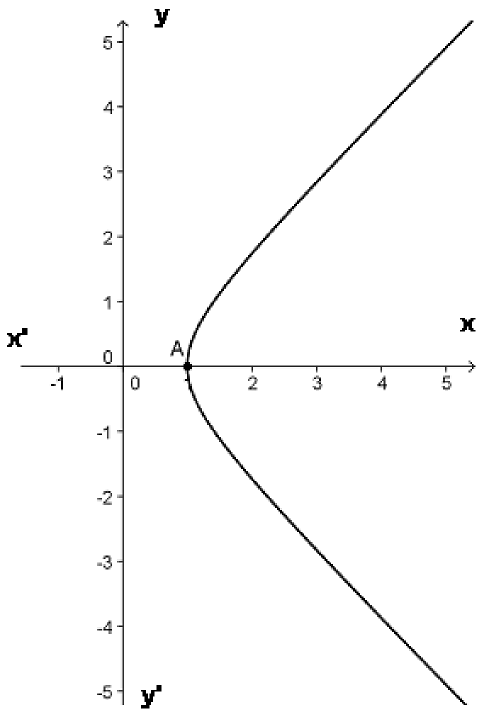
$$z = \frac{2\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 0} = 1 .$$

Όταν $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τότε $\Delta < 0$ και η εξίσωση έχει δυο συζυγείς μιγαδικές ρίζες

$$z_{1,2} = \frac{2\sigma\upsilon\nu\alpha \pm 2i\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\alpha}{2\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} \pm i\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} .$$

ii. Έστω $x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$ και $y = \pm\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$ και από τη γνωστή ταυτότητα $\epsilon\phi^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$ έπεται ότι

$y^2 + 1 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1$ με $x > 0$, αφού $\sigma\upsilon\nu\alpha > 0$. Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι ο ένας κλάδος μιας (ισοσκελούς) υπερβολής.



iii. Η λύση με το ελάχιστο μέτρο αντιστοιχεί στο σημείο της υπερβολής που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων, δηλαδή στην κορυφή Α(1,0), το οποίο είναι η εικόνα της πραγματικής λύσης της εξίσωσης που βρήκαμε στο πρώτο ερώτημα, για $\alpha = 0$.

Άσκηση 6

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 με $z_2 \neq 0$. Αν Α, Β, Γ οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z_1 + i \cdot z_2$, $z_1 - i \cdot z_2$ και $z_1 + \sqrt{3} \cdot z_2$ αντίστοιχα, τότε:

i. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

ii. Αν $|z_2| = 2$,να βρείτε το εμβαδό του ΑΒΓ.

<u>Λύση</u>

i. Έστω Α, Β, Γ οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των $z_1 + i \cdot z_2$, $z_1 - i \cdot z_2$ και $z_1 + \sqrt{3} \cdot z_2$ αντίστοιχα. Για να δείξουμε ότι σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο, αρκεί να δείξουμε ότι $(AB) = (A\Gamma) = (B\Gamma)$. Όμως:

$$(AB) = \left|(z_1 + i \cdot z_2) - (z_1 - i \cdot z_2)\right| =$$

$$|2i \cdot z_2| = 2|z_2|.$$

$$(A\Gamma) = \left|(z_1 + i \cdot z_2) - \left(z_1 + \sqrt{3} \cdot z_2\right)\right| =$$

$$\left|\left(-\sqrt{3} + i\right) \cdot z_2\right| = \left|-\sqrt{3} + i\right||z_2| = 2|z_2| \text{ και}$$

$$(B\Gamma) = \left|(z_1 - i \cdot z_2) - \left(z_1 + \sqrt{3} \cdot z_2\right)\right| =$$

$$\left|\left(-\sqrt{3} - i\right) \cdot z_2\right| = \left|-\sqrt{3} - i\right||z_2| = 2|z_2|.$$

Άρα το τρίγωνο είναι ισόπλευρο και οι πλευρές του έχουν μήκος $2|z_2|$.

ii. Γνωρίζουμε ότι το εμβαδό ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α δίνεται από τον τύπο $E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$, επομένως το παραπάνω ισόπλευρο τρίγωνο έχει εμβαδό

$$(AB\Gamma) = \frac{\left(2|z_2|\right)^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \text{ τ.μ.}$$

Άσκηση 7

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει:

i. $\operatorname{Re}\left(z-\frac{4}{\bar{z}}\right)=-7\operatorname{Re}(z)$.

ii. $\operatorname{Im}\left(z-\frac{4}{\bar{z}}\right)=-2\operatorname{Im}(z)$.

<u>Λύση</u>

Θέτουμε $z=x+yi$ με $x,y\in\mathbb{R}$ και έχουμε:

$$z-\frac{4}{\bar{z}}=x+yi-\frac{4}{x-yi}=x+yi-\frac{4(x+yi)}{x^2+y^2}=$$

$\frac{x\left(x^2+y^2-4\right)}{x^2+y^2}+\frac{y\left(x^2+y^2-4\right)}{x^2+y^2}i$ με $x^2+y^2\neq 0$. Οπότε:

i. $\operatorname{Re}\left(z-\frac{4}{\bar{z}}\right)=-7\operatorname{Re}(z)\Leftrightarrow\frac{x\left(x^2+y^2-4\right)}{x^2+y^2}=-7x\Leftrightarrow x=0$ ή $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο άξονας $y'y$ με εξαίρεση το σημείο $O(0,0)$ και ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ii. $\operatorname{Im}\left(z-\frac{4}{\bar{z}}\right)=-2\operatorname{Im}(z)\Leftrightarrow\frac{y\left(x^2+y^2-4\right)}{x^2+y^2}=-2y\Leftrightarrow y=0$ ή $x^2+y^2=\frac{4}{3}$ άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο άξονας $x'x$ με εξαίρεση το σημείο $O(0,0)$ και ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Άσκηση 8

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w με $|z+1-i|=2$ και $|w-4-3i|=1$.

i. Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων των z και w στο μιγαδικό επίπεδο.

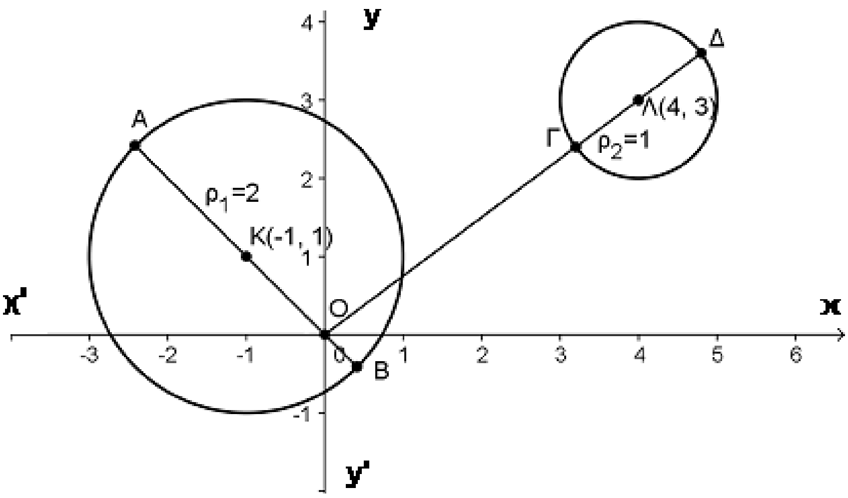
ii. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των $|z|$ και $|w|$.

iii. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

<u>Λύση</u>

i. Ισχύει:
$|z+1-i|=2 \Leftrightarrow |z-(-1+i)|=2$
άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο το σημείο Κ(-1,1) και ακτίνα $\rho_1=2$, δηλαδή ο $C_1:(x+1)^2+(y-1)^2=2^2$. Επίσης,
$|w-4-3i|=1 \Leftrightarrow |w-(4+3i)|=1,$
άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο το σημείο Λ(4,3) και ακτίνα $\rho_2=1$, δηλαδή ο $C_2:(x-4)^2+(y-3)^2=1$

ii.



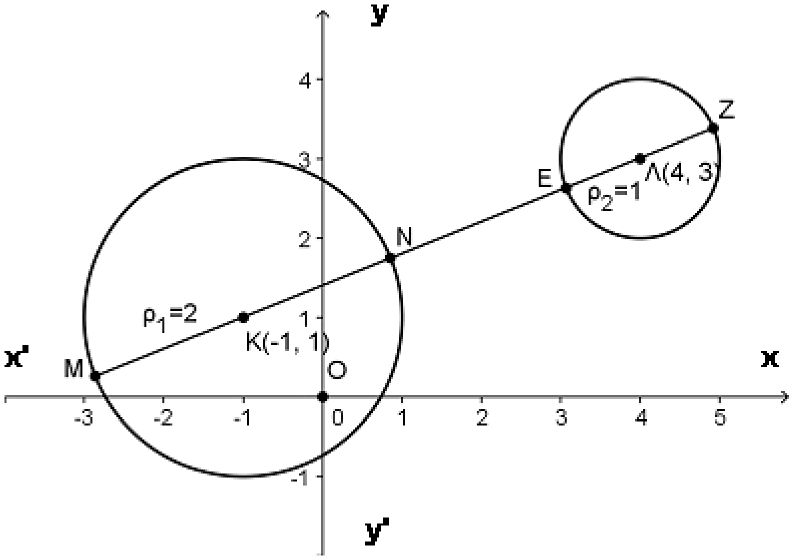
Στο σχήμα 1 φαίνονται οι δυο γεωμετρικοί τόποι. Από την ευκλείδεια γεωμετρία γνωρίζουμε ότι για τον κύκλο με κέντρο Κ η ελάχιστη απόσταση των σημείων του από την αρχή των αξόνων είναι το
$(OB)=|d(O,K)-\rho_1|$ και η μέγιστη το
$(OA)=d(O,K)+\rho_1$.

Όμως $d(O,K)=(OK)=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$ οπότε $(OB)=|2-\sqrt{2}|$ και $(OA)=2+\sqrt{2}$.

Επομένως η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι $2-\sqrt{2}$ και $2+\sqrt{2}$ αντίστοιχα.

Για τον κύκλο με κέντρο Λ έχουμε $d(O,\Lambda)=(O\Lambda)=\sqrt{4^2+3^2}=5$, οπότε η ελάχιστη απόσταση των σημείων του από την αρχή των αξόνων είναι το $\left(O\Gamma\right)=\left|d\left(O,\Lambda\right)-\rho_2\right|=5-1=4$ και η μέγιστη το $\left(O\Delta\right)=d\left(O,\Lambda\right)+\rho_2=5+1=6$.
Επομένως η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του $|w|$ είναι 4 και 6 αντίστοιχα.

iii.



Ισχύει $\left(K\Lambda\right)=\sqrt{\left(4+1\right)^2+\left(3-1\right)^2}=\sqrt{29}$ και $\rho_1+\rho_2=1+2=3$, οπότε $\left(K\Lambda\right)>\rho_1+\rho_2$,
άρα ο ένας κύκλος είναι εξωτερικός του άλλου. Σ΄ αυτήν την περίπτωση γνωρίζουμε από την ευκλείδεια γεωμετρία ότι η ελάχιστη απόσταση των σημείων των δυο κύκλων είναι το τμήμα (ΝΕ) και η μέγιστη το τμήμα (ΜΖ).

Άρα $\left(NE\right)=\left(K\Lambda\right)-\rho_1-\rho_2=\sqrt{29}-3$ και $\left(NE\right)=\left(K\Lambda\right)+\rho_1+\rho_2=\sqrt{29}+3$, οι οποίες τιμές αντιστοιχούν στην ελάχιστη και στη μέγιστη τιμή του $|z-w|$.

Άσκηση 9

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των $z \in \mathbb{C}$ που επαληθεύουν την: $|\mathrm{Im}(z)-1| = |z+i|$.

β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των $z, w \in \mathbb{C}$ που επαληθεύουν τις: $|z-1| = |z-2i|$ και $|w-2| = |w-4i|$ βρίσκονται πάνω σε παράλληλες ευθείες, και να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

Λύση

α) Έστω $z = x+yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$|\mathrm{Im}(z)-1| = |z+i| \Leftrightarrow |y-1| = |x+yi+i| \Leftrightarrow |y-1| = \sqrt{x^2+(y+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y-1)^2 = x^2+(y+1)^2 \Leftrightarrow y^2-2y+1 = x^2+(y+1)^2 \Leftrightarrow x^2 = -4y,$$

άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι παραβολή με κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον $y'y$, παράμετρο $p=-2$, Εστία το $E(0,-1)$ και διευθετούσα την ευθεία $y=1$.

β) Έστω $z = x+yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$|z-1| = |z-2i| \Leftrightarrow |x+yi-1| = |x+yi-2i| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-2)^2} \Leftrightarrow$$

$$-2x+1 = -4y+4 \Leftrightarrow -2x+4y-3=0,$$

άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = -\frac{A}{B} = \frac{1}{2}$.

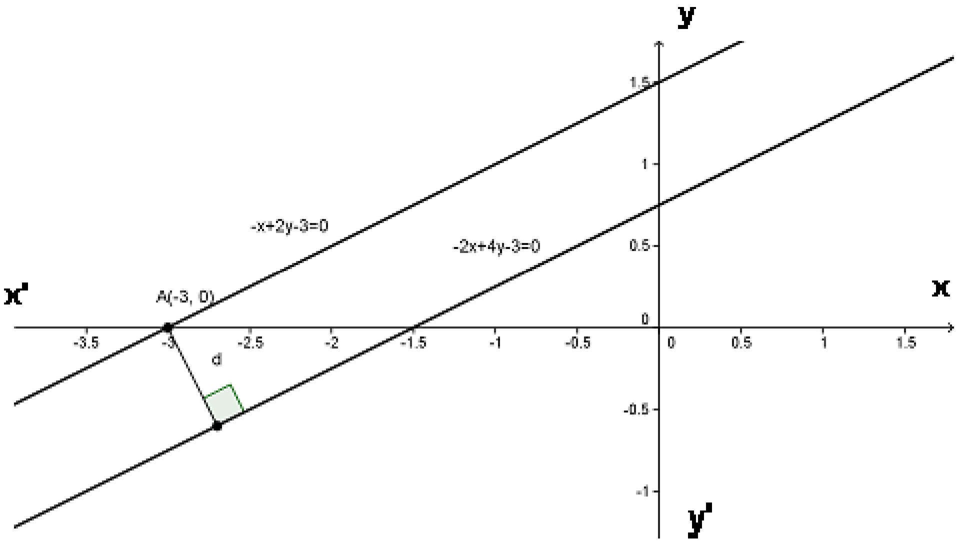
Ομοίως έστω $w = \alpha+bi$, με $\alpha, b \in \mathbb{R}$, τότε:

$$|w-2| = |w-4i| \Leftrightarrow |\alpha+bi-2| = |\alpha+bi-4i| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(\alpha-2)^2+b^2} = \sqrt{\alpha^2+(b-4)^2} \Leftrightarrow$$

$$-4\alpha+4 = -8b+16 \Leftrightarrow -\alpha+2b-3=0.$$

Άρα συντεταγμένες του w επαληθεύουν την εξίσωση $-x+2y-3=0$, επομένως και ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ και επειδή $\lambda_1 = \lambda_2$ οι δυο ευθείες είναι παράλληλες.



Η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$ είναι η απόσταση των παραλλήλων. Θεωρούμε ένα σημείο της μιας ευθείας π.χ. το $A(-3,0)$ που ανήκει στην $-x+2y-3=0$ και από τον τύπο της απόστασης σημείου από ευθεία βρίσκουμε την απόσταση του Α από την ευθεία $-2x+4y-3=0$, που είναι

$$d=\frac{|-2\cdot(-3)+4\cdot 0-3|}{\sqrt{(-2)^2+4^2}}=\frac{3}{\sqrt{20}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$ είναι $\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Άσκηση 10

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση:
$\left|z-4-3i\right|=3$ (1).

α) Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων τους είναι κύκλος που εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

β) Αν z_1 μιγαδικός αριθμός που ικανοποιεί την (1), τότε να δείξετε ότι:

$\left|z_1-\left(1+3i\right)\right|^2+\left|z_1-\left(7+3i\right)\right|^2=36$ (2) και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τη σχέση (2)

γ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $\left|z-\left(8+3i\right)\right|$, όπου z μιγαδικός που ικανοποιεί την (1).

<u>Λύση</u>

α) Έχουμε:
$\left|z-4-3i\right|=3\Leftrightarrow\left|z-\left(4+3i\right)\right|=3,$
άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος, με κέντρο το σημείο $K\left(4,3\right)$ και ακτίνα 3. Επειδή η απόσταση του κέντρου του κύκλου από τον άξονα $x'x$ είναι 3, δηλαδή ισούται με την ακτίνα του κύκλου, έπεται ότι ο κύκλος εφάπτεται στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β) Έστω $z_1=\alpha+bi$, με $\alpha,b\in\mathbb{R}$. Τότε $\left|z_1-\left(1+3i\right)\right|^2+\left|z_1-\left(7+3i\right)\right|^2=36\Leftrightarrow$

$\left|\left(\alpha-1\right)+\left(b-3\right)i\right|^2+\left|\left(\alpha-7\right)+\left(b-3\right)i\right|^2=36\Leftrightarrow$

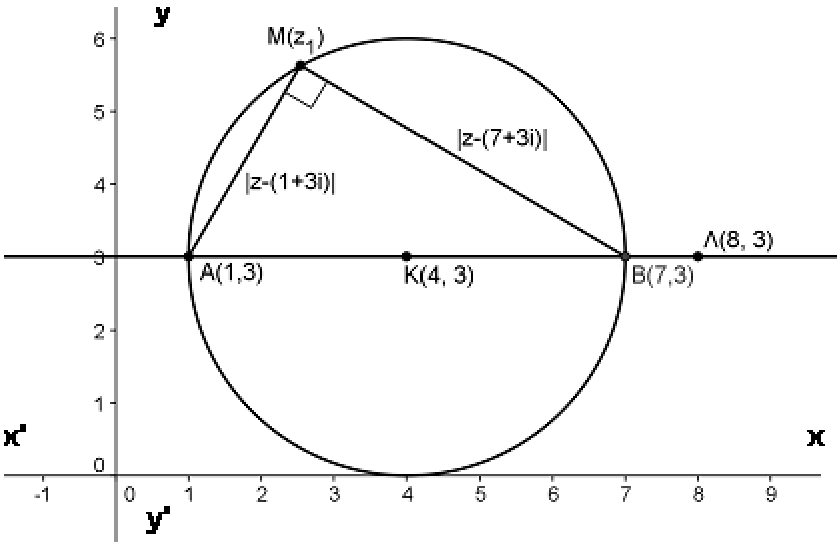
$\left(\alpha-1\right)^2+\left(b-3\right)^2+\left(\alpha-7\right)^2+\left(b-3\right)^2=36\Leftrightarrow$

$2\alpha^2-16\alpha+50+2\left(b-3\right)^2=36\Leftrightarrow$

$\alpha^2-8\alpha+25+\left(b-3\right)^2=18\Leftrightarrow\alpha^2-8\alpha+16+9+\left(b-3\right)^2=9+9\Leftrightarrow$

$\alpha^2-8\alpha+16+\left(b-3\right)^2=9\Leftrightarrow\left(\alpha-4\right)^2+\left(b-3\right)^2=3^2\Leftrightarrow\left|z_1-\left(4+3i\right)\right|=3$, το οποίο ισχύει, άρα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική σχέση.
Γεωμετρική ερμηνεία:
Έστω τα σημεία $A\left(1,3\right)$ και $B\left(7,3\right)$. Επειδή ο συντελεστής διεύθυνσης του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ είναι μηδέν έχουμε ότι η ΑΒ είναι παράλληλη του άξονα $x'x$. Θεωρούμε τον κύκλο με διάμετρο την ΑΒ και κέντρο το σημείο Κ(4,3). Λόγω του (Β) ερωτήματος αν M η εικόνα του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο, το $\left|z_1-\left(1+3i\right)\right|$ παριστάνει την απόσταση $\left(MA\right)$ και το $\left|z_1-\left(7+3i\right)\right|$ την απόσταση $\left(MB\right)$ οπότε

$\left|z_1-(1+3i)\right|^2+\left|z_1-(7+3i)\right|^2=36 \Leftrightarrow (MA)^2+(MB)^2=(AB)^2$ το οποίο ισχύει αφού είναι το Πυθαγόρειο Θεώρημα για το ορθογώνιο τρίγωνο ΜΑΒ.



γ) Αν $\Lambda(8,3)$ η εικόνα του μιγαδικού $8+3i$, η οποία βρίσκεται πάνω στην ευθεία που ορίζουν τα σημεία Α και Β, τότε από την ευκλείδεια γεωμετρία (βλέπε Σχήμα 1) γνωρίζουμε ότι η ελάχιστη τιμή του $\left|z-(8+3i)\right|$ είναι το μήκος του ΛΒ που είναι 1 και η μέγιστη τιμή το μήκος του ΛΑ που είναι 7, δηλαδή $(\Lambda B)=\left|z-(8+3i)\right|_{\min}=1$ και $(\Lambda A)=\left|z-(8+3i)\right|_{\max}=7$

Άσκηση 11

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha+\beta i$, $\alpha,\beta\in R$ και $w=2\overline{z}+iz-3$. Να δείξετε ότι:

i. $\operatorname{Re}(w)=2\alpha-\beta-3$ και $\operatorname{Im}(w)=\alpha-2\beta$.

ii. Αν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται πάνω στην ευθεία $y=2x+1$, τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.

iii. Αν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται πάνω στην ευθεία $y=x+1$, τότε οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w κινούνται πάνω στην ευθεία $y=-x-6$.

Λύση

i. $w=2\overline{z}+iz-3\Leftrightarrow$

$w=2(\alpha-\beta i)+i(\alpha+\beta i)-3=(2\alpha-\beta-3)+(\alpha-2\beta)i\Leftrightarrow$

$\operatorname{Re}(w)=2\alpha-\beta-3$ και $\operatorname{Im}(w)=\alpha-2\beta$.

ii.Η εικόνα του w κινείται πάνω στην ευθεία $y=2x+1$, άρα $\alpha-2\beta=4\alpha-2\beta-6+1\Leftrightarrow\alpha=\frac{5}{3}$

επομένως ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z είναι η κατακόρυφη ευθεία $x=\frac{5}{3}$.

iii. Έστω $\gamma=\operatorname{Re}(w)$ και $\delta=\operatorname{Im}(z)$, τότε έχουμε: $\begin{cases}\gamma=2\alpha-\beta-3\\ \delta=\alpha-2\beta\end{cases}$, οπότε λύνοντας ως προς α

και β παίρνουμε: $\begin{cases}\alpha=\dfrac{2\gamma-\delta+6}{3}\\ \beta=\dfrac{\gamma-2\delta+3}{3}\end{cases}$ και αντικαθιστώντας στην $y=x+1$ βρίσκουμε: $\delta=-\gamma-6$

άρα η εικόνα του w κινείται πάνω στην ευθεία $y=-x-6$.

Άσκηση 12

α)

i. Να δείξετε την ταυτότητα: $\left|1+z\cdot\overline{w}\right|^2-\left|z+w\right|^2=\left(1-\left|z\right|^2\right)\left(1-\left|w\right|^2\right)$.

ii. Αν $\left|z\right|<1$ και $\left|w\right|>1$ να δείξετε ότι: $\left|1+z\cdot\overline{w}\right|<\left|z+w\right|$.

β)

Αν $z,w\in\mathbb{C}$ να δείξετε ότι:

i. $z\cdot\overline{w}+\overline{z}\cdot w\le\left|z\right|^2+\left|w\right|^2$.

ii. $\frac{1}{2}\left(z\cdot\overline{w}+\overline{z}\cdot w\right)\le\left|z\right|\left|w\right|$.

<u>Λύση</u>

α) i. $\left|1+z\cdot\overline{w}\right|^2-\left|z+w\right|^2=\left(1+z\cdot\overline{w}\right)\overline{\left(1+z\cdot\overline{w}\right)}-\left(z+w\right)\overline{\left(z+w\right)}=$

$\left(1+z\cdot\overline{w}\right)\left(1+\overline{z}\cdot w\right)-\left(z+w\right)\left(\overline{z}+\overline{w}\right)=1+\left|z^2\right|\cdot\left|w\right|^2-\left|z^2\right|-\left|w\right|^2=$

$\left(1-\left|z\right|^2\right)\left(1-\left|w\right|^2\right)$ άρα αποδείχτηκε.

ii. αν $\left|z\right|<1$ και $\left|w\right|>1$ τότε $\left(1-\left|z\right|^2\right)\left(1-\left|w\right|^2\right)<0\Leftrightarrow$

$\left|1+z\cdot\overline{w}\right|^2-\left|z+w\right|^2<0\Leftrightarrow\left|1+z\cdot\overline{w}\right|<\left|z+w\right|$.

β) i. $z\cdot\overline{w}+\overline{z}\cdot w\le\left|z\right|^2+\left|w\right|^2\Leftrightarrow z\cdot\overline{z}+w\cdot\overline{w}-z\cdot\overline{w}-\overline{z}\cdot w\ge0\Leftrightarrow$

$\left(z-w\right)\left(\overline{z}-\overline{w}\right)\ge0\Leftrightarrow$

$\left(z-w\right)\overline{\left(z-w\right)}\ge0\Leftrightarrow\left|z-w\right|^2\ge0$ το οποίο ισχύει, άρα αποδείχτηκε.

ii. Ισχύει $\left|z+w\right|^2=\left|z\right|^2+z\cdot\overline{w}+\overline{z}\cdot w+\left|w\right|^2\Leftrightarrow$

$z\cdot\overline{w}+\overline{z}\cdot w=\left|z+w\right|^2-\left|z\right|^2-\left|w\right|^2$ οπότε η ανισότητα γίνεται: $\frac{1}{2}\left(z\cdot\overline{w}+\overline{z}\cdot w\right)\le\left|z\right|\left|w\right|\Leftrightarrow$

$$\left|z+w\right|^2-\left|z\right|^2-\left|w\right|^2\le 2\left|z\right|\left|w\right|\Leftrightarrow\left|z+w\right|^2\le\left(\left|z\right|+\left|w\right|\right)^2\Leftrightarrow$$

$\left|z+w\right|\le\left|z\right|+\left|w\right|$ η τελευταία ισχύει από τη γνωστή τριγωνική ανισότητα, άρα ισχύει και η ισοδύναμη της αρχική.

Ημερομηνία τροποποίησης: 12/1/2012