ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο: ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Άσκηση 1

i. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c, c\in\mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c, c\in\mathbb{R}$

ii. Αν $c>0$, τότε ποιο εμβαδόν εκφράζει το $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx$;

Λύση

i. Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c\in\mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού $G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε $G'(x)=F'(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $G(x)=F(x)+c$, για κάθε $x\in\Delta$.

ii. Αν $c>0$, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με βάση β-α και ύψος c.

Άσκηση 2

i. Έστω μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

ii. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις C_f, C_g, και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$.

Να ορίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω, αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

<u>Λύση</u>

i. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $G(x) = F(x) + c$. **(1)**

Από την (1), για $x = \alpha$, έχουμε
$G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_\alpha^\alpha f(t)dt + c = c$, οπότε $c = G(\alpha)$.

Επομένως, $G(x) = F(x) + G(\alpha)$, οπότε, για $x=\beta$, έχουμε

$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(t)dt + G(\alpha)$ και άρα $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

ii. $E = \int_\alpha^\beta [f(x) - g(x)]dx$

Άσκηση 3

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$. Ποια σχέση δίνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha, x=\beta$;

<u>Λύση</u>

Η σχέση είναι: $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx$.

Άσκηση 4

i. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

ii. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$. Να ορίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω, αν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν έχει σταθερό πρόσημο στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

<u>Λύση</u>

i. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

ii. $E=\int_a^\beta |f(x)-g(x)|dx$.

Άσκηση 5

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$. Να ορίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω .

- αν $f(x)\geq 0$
- αν $f(x)\leq 0$
- αν η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$.

<u>Λύση</u>

- Αν $f(x)\geq 0$ το εμβαδόν Ω του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από τη C_f και τις ευθείες $x=\alpha, x=\beta$ και τον άξονα xx' είναι $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.
- Αν $f(x)\leq 0$ το εμβαδόν Ω του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από τη C_f και τις ευθείες $x=\alpha, x=\beta$ και τον άξονα xx' είναι $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(-f(x))dx$.
- Αν η f δε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\left[\alpha,\beta\right]$ το εμβαδόν Ω του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από τη C_f και τις ευθείες $x=\alpha, x=\beta$ και τον άξονα xx' είναι $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}\left|f(x)\right|dx$.

Άσκηση 6

i. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

ii. Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ ποια είναι η παράγωγος της συνάρτησης: $F(x)=\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt$ με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

<u>Λύση</u>

i. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha).$

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$ θα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $G(x)=F(x)+c$. **(1)**

Από την **(1)**, για $x=\alpha$, έχουμε $G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$, οπότε $c=G(\alpha)$. Επομένως, $G(x)=F(x)+G(\alpha)$, οπότε, για $x=\beta$, έχουμε $G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt+G(\alpha)$ και άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$.

ii. $\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x))\cdot g'(x)$

Άσκηση 7

Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και έστω $\alpha \in \Delta$. Ποια είναι η παράγωγος της συνάρτησης $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt,\ x \in \Delta$;

<u>Λύση</u>

$F'(x) = f(x)$.

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\int_3^x \ell n(t^2-8)dt$ και $F(x)=\int_3^x f(u)du$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και της F.

ii. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση F είναι κυρτή ή κοίλη και να βρεθούν τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

iii. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x>2\sqrt{2}$

iv. Να αποδείξετε ότι η F είναι γνησίως αύξουσα.

<u>Λύση</u>

i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(t)=\ell n(t^2-8)$.

Είναι: $t^2-8>0 \Leftrightarrow t^2>8 \Leftrightarrow |t|>2\sqrt{2} \Leftrightarrow t\in(-\infty,-2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2},+\infty)$ άρα η φ έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,-2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2},+\infty)$ στο οποίο είναι και συνεχής. Οπότε για την f έχουμε: $x\in(2\sqrt{2},+\infty)$, αφού $3\in(2\sqrt{2},+\infty)$.

Για την F είναι: Η f ορίζεται στο διάστημα $(2\sqrt{2},+\infty)$ και επειδή $3\in(2\sqrt{2},+\infty)$ είναι: $x>2\sqrt{2}$.

Άρα $D_F=(2\sqrt{2},+\infty)$.

ii. Οι συναρτήσεις f, F είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $(2\sqrt{2},+\infty)$ με $F'(x)=f(x)$ και $F''(X)=f'(x)=\ell n(x^2-8)$ για κάθε $x>2\sqrt{2}$.

Είναι:

- $F''(x)=0 \Leftrightarrow \ell n(x^2-8)=0 \Leftrightarrow \ell n(x^2-8)=\ell n1 \Leftrightarrow x^2-8=1 \Leftrightarrow x=3$, αφού $x>2\sqrt{2}$.
  (Η συνάρτηση ln ειναι1-1)

  $F''(x)<0 \Leftrightarrow \ell n(x^2-8)<0 \Leftrightarrow x^2-8<1 \Leftrightarrow x^2<9 \Leftrightarrow |x|<3 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}<x<3$.

  Αφού $x>2\sqrt{2}$ (η συνάρτηση ln είναι γνησίως αύξουσα).

  Άρα η F είναι κοίλη για κάθε $x\in(2\sqrt{2},3)$.

- Όμοια:

$$F''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 3$$

Άρα η F είναι κυρτή για κάθε $x > 3$. Επομένως, το σημείο $M(3, F(3)) = (3, 0)$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής της C_F.

iii. Είναι:

$F''(x) = f'(x)$ για κάθε $x \in (2\sqrt{2}, +\infty)$. Άρα, οι ρίζες και το πρόσημο της f' ταυτίζονται με τις ρίζες και το πρόσημο της F'' δηλαδή: $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} < x < 3$ από ii) και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 3$ από ii). Επομένως η f παρουσιάζει στο $x = 3$ ολικό ελάχιστο, οπότε: $f(x) \geq f(3) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (2\sqrt{2}, +\infty)$.

iv. Είναι:
$F'(x) = f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (2\sqrt{2}, +\infty)$ (από iii.) και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 3$.
Επομένως, η F είναι γνησίως αύξουσα.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με: $f(x)=\dfrac{2x^3+3x}{x^2+1}$

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f αν $x\to-\infty$.

iv. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt\right)$.

<u>Λύση</u>

i. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\left(\frac{2x^3+3x}{x^2+1}\right)'=\frac{(6x^2+3)(x^2+1)-(2x^3+3x)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{6x^4+3x^2+\cancel{6x^2}+3-4x^4-\cancel{6x^2}}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{2x^4+3x^2+3}{(x^2+1)^2}>0$$

Αφού $2x^4+3x^2+3>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και 1-1, επομένως αντιστρέφεται.

ii. Έπειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ το σύνολο τιμών της θα είναι

$$\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)$$

Είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+3x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3}{x^2}=2\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+3x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty\ .$$

Άρα $f(\mathbb{R})=(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=(-\infty,+\infty)$.

iii. Η συνάρτηση f είναι συνεχής, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη. Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση αν έχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη.

Είναι:

- $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{2x^3+3x}{x^2+1}}{x}=$$

  $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+3x}{x^3+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^3}=2$$

- $$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-2x]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3+3x}{x^2+1}-2x\right)=$$

  $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+3x-2x^3-2x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}=$$

  $$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0\,.$$

Άρα η ευθεία $y=2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

iv. Έχουμε: $\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\left(\frac{2t^3+3t}{t^2+1}\right)dt=\int_0^x\frac{2t^3+2t+t}{t^2+1}dt=$

$$=\int_0^x\left(\frac{2t(t^2+1)+t}{t^2+1}\right)dt=\int_0^x\left(2t+\frac{t}{t^2+1}\right)dt=\int_0^x 2tdt+\int_0^x\frac{t}{t^2+1}dt=$$

$$=\left[t^2\right]_0^x+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{(t^2+1)'}{t^2+1}dt=x^2+\frac{1}{2}\left[\ln(t^2+1)\right]_0^x=x^2+\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)-\ln 1\right]=x^2+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

Άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)}{x^2}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{1}{2}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}\right]=1+\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}=1+\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(x^2+1))'}{(x^2)'}$$

$$=1+\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2+1}(x^2+1)'}{2x}=1+\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}=1+\frac{1}{2}\cdot 0=1\,.$$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\int_0^1 \ln2\cdot xf(xt)dt+1$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

ii. Να αποδείξετε ότι η $g(x)=\dfrac{f(x)}{2^x}$ είναι σταθερή και να βρείτε την f.

iii. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{5^x}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{5^x}$

<u>Λύση</u>

i. Έχουμε: $f(x)=\ln2\int_0^1 xf(xt)dt+1$ **(1).** Θέτουμε $xt=u$,οπότε $xdt=du$ και

- για $t=0\Rightarrow u=0$
- για $t=1\Rightarrow u=x$

Οπότε η **(1)** γράφεται: $f(x)=\ln2\int_0^x f(u)du+1$ **(2)**.

Η $f(u)$ είναι συνεχής άρα η $\int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη οπότε και f παραγωγίσιμη με $f'(x)=(\ln2\int_0^x f(u)du+1)'=\ln2f(x)$ **(3)**

ii. Θα δείξουμε ότι $g'(x)=0$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$g'(x)=\left(\frac{f(x)}{2^x}\right)'=\frac{f'(x)\cdot2^x-f(x)(2^x)'}{(2^x)^2}=\frac{f'(x)\cdot2^x-f(x)\cdot2^x\cdot\ln2}{(2^x)^2}=\frac{f'(x)-f(x)\ln2}{2^x}\overset{(3)}{=}0$$ οπότε

$g(x)=c$ άρα $\dfrac{f(x)}{2^x}=c$.

$\dfrac{f(x)}{2^x}=c\Leftrightarrow f(x)=c\,2^x$

αλλά $f(0)=1$ (από **(2)**), άρα $c=1$ οπότε $f(x)=2^x$.

iii. Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{5^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x}{5^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^x=0$, αφού $0<\dfrac{2}{5}<1$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{5^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x}{5^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^x=+\infty$.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x)=2e^x-2+\int_x^{2x} f(t-x)dt$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f.

<u>Λύση</u>

i. Έστω $g(x)=\int_x^{2x} f(t-x)dt$. Θέτουμε $t-x=u \Leftrightarrow t=x+u$, οπότε είναι $dt=du$.
Επίσης:

- για $t=x$ είναι $u=0$
- για $t=2x$ είναι $u=x$

Έχουμε: $g(x)=\int_0^{x} f(u)du$

Επομένως, η σχέση της υπόθεσης γίνεται: $f(x)=2e^x-2+\int_0^{x} f(u)du$ **(1)**

Η f είναι συνεχής άρα η $f_1(x)=\int_0^{x} f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη ως αρχική της f. Επίσης η $f_2(x)=2e^x-2$ παραγωγίσιμη, οπότε η f παραγωγίσιμη, ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων.

ii. Από τη σχέση **(1)** του i) με παραγώγιση και των δύο μελών έχουμε:

$$f'(x)=2e^x+f(x) \Leftrightarrow f'(x)-f(x)=2e^x \Leftrightarrow e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=2 \Leftrightarrow$$

$$(e^{-x}f(x))'=(2x)' \Leftrightarrow e^{-x}f(x)=2x+c \Leftrightarrow f(x)=2xe^x+c\cdot e^x \quad \textbf{(2)}$$

Αλλά η **(1)** για $x=0$ γίνεται: $f(0)=0$ **(3)**

Η **(2)** για $x=0$ δίνει: $f(0)=c \overset{(3)}{\Leftrightarrow} c=0$. Άρα: $f(x)=2xe^x$.

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2x\cdot e^x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{e^{-x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-e^{-x}}=0$$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^x=+\infty$.

iv. Από iii) έχουμε: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$, επομένως η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Επίσης: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\cdot e^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}(2e^x)=+\infty$.

Επομένως η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Και τέλος επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων, η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\int_{2}^{x-2}\ln(16-t^2)dt$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την παράγωγό της.

iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(4,f(4))$.

iv. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρεθούν τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης

<u>Λύση</u>

i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(t)=\ln(16-t^2)$.

Είναι: $16-t^2\geq 0 \Leftrightarrow t\in(-4,4)$ άρα η φ ορίζεται στο διάστημα $A=(-4,4)$, οπότε πρέπει:

$$\begin{cases} 2\in(-4,4) \\ \text{και} \\ x-2\in(-4,4) \end{cases} \Leftrightarrow -4<x-2<4 \Leftrightarrow -2<x<6$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι το $D_f=(-2,6)$.

ii. Η συνάρτηση $\varphi(t)=\ln(16-t^2)$ είναι συνεχής στο $(-4,4)$ και η $K(x)=x-2$ παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-2,6)$ άρα και η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-2,6)$ ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\left(\int_{2}^{x-2}\ln(16-t^2)dt\right)'=\ln[16-(x-2)^2]\cdot(x-2)'=\ln(-x^2+4x+12) .$$

iii. Έχουμε: $f(4)=\int_{2}^{2}\ln(16-t^2)dt=0$ και $f'(4)=\ln(-16+16+12)=\ln 12$ οπότε η εξίσωση της C_f στο $A(4,f(4))$ είναι:

$\varepsilon: y-f(4)=f'(4)(x-4)$ ή

$\varepsilon: y-0=\ln 12(x-4)$ ή

$\varepsilon: y=\ln(12)x-4\ln 12$

iv. Για κάθε $x \in (-2,6)$ έχουμε:

$$f''(x) = (\ln(-x^2+4x+12))' = \frac{(-x^2+4x+12)'}{-x^2+4x+12} =$$

$$= \frac{-2x+4}{-x^2+4x+12} = \frac{2(x-4)}{x^2-4x-12}.$$

Είναι:

$f''(x) \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(x-4)}{x^2-4x-12} \le 0 \Leftrightarrow 2(x-4) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 4$ αφού $x^2-4x-12<0$ στο $(-2,6)$.

Άρα η f είναι κοίλη στο διάστημα $[4,6)$.

Όμοια $f''(x) \ge 0 \Leftrightarrow x \le 4$. Άρα η f είναι κυρτή στο διάστημα $(-2,4]$.

Η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 4 και επίσης ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(4,f(4))$, οπότε το $A(4,f(4))=(4,0)$ είναι σημείο καμπής.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνεχής και άρτια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$3xf(x)=3\int_2^x f(t)dt-24x^5$ **(1)**

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$.

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f'.

iii. Να βρείτε τον τύπο της f.

iv. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I=\int_{-2}^{2} f(x)dx$.

Λύση

i. Για $x\neq 0$ έχουμε: $f(x)=\frac{1}{x}\int_2^x f(t)dt-8x^4$ **(2)** η οποία είναι παραγωγίσιμη διότι:

Η f είναι συνεχής οπότε η $\int_2^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη και επειδή $\frac{1}{x}$ παραγωγίσιμη και $\frac{1}{x}\int_2^x f(t)dt$ παραγωγίσιμη. Επίσης $-8x^4$ παραγωγίσιμο οπότε $f(x)=\frac{1}{x}\int_2^x f(t)dt-8x^4$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$.

ii. Από τη σχέση **(1)** για $x\neq 0$ παραγωγίζοντας έχουμε:

$3f(x)+3xf'(x)=3f(x)-120x^4 \Leftrightarrow f'(x)=-40x^3$

iii. Από ii) έχουμε: $f'(x)=-40x^3$ για κάθε $x\neq 0$.

- Αν $x>0$, τότε: $f(x)=-10x^4+C_1$ **(3)**

  Για $x=2$ η **(1)** δίνει: $6f(2)=-768 \Leftrightarrow f(2)=-128$

  Για $x=2$ η **(3)** δίνει: $f(2)=-160+C_1$ οπότε: $-160+C_1=-128 \Leftrightarrow C_1=32$.

  Άρα $f(x)=-10x^4+32$ για κάθε $x>0$.

- Αν $x<0$, τότε: $f(x)=-10x^4+C_2$ **(4)**

  Για $x=-2$ έχουμε: $f(-2)=-160+C_2$ και επειδή f άρτια

$f(-2)=f(2) \Leftrightarrow -160+C_2=-128 \Leftrightarrow C_2=32$

Άρα $f(x)=-10x^4+32$ για κάθε $x<0$

- Αν $x=0$, τότε επειδή f συνεχής έχουμε: $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(-10x^4+32)=32$

  Άρα $f(x)=-10x^4+32$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iv. Είναι: $I=\int_{-2}^{2} f(x)dx=\int_{-2}^{2}(-10x^4+32)dx=$

$=[-2x^5+32x]_{-2}^{2}=$

$=-2\cdot 2^5+32\cdot 2-[-2\cdot(-2)^5+32\cdot(-2)]=$

$=-64+64-(64-64)=0$.

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=3x^2+\int_0^{-x} t\eta\mu(x+t)dt$, με $x\in\mathbb{R}$ **(1)**.

i. Να βρείτε την $f'(x)$.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(0,f(0))$.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

<u>Λύση</u>

i. Θέτουμε: $x+t=u \Leftrightarrow dt=du$.

- Για $t=0$ έχουμε: $u=x$
- Για $t=-x$ έχουμε: $u=0$.

  Οπότε η **(1)** γράφεται:

  $$f(x)=3x^2+\int_x^0 (u-x)\eta\mu u du \Leftrightarrow f(x)=3x^2-\int_0^x u\eta\mu u du + x\int_0^x \eta\mu u du \quad \textbf{(2)}$$

  Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

  $$f'(x)=6x-x\eta\mu x+\int_0^x \eta\mu u du + x\eta\mu x \Leftrightarrow f'(x)=6x+\int_0^x \eta\mu u du \quad \textbf{(3)}$$

ii. Η **(2)** για $x=0$ δίνει: $f(0)=0$ Επίσης η **(3)** για $x=0$ δίνει:

$f'(0)=0$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(0,f(0))$ έχει εξίσωση:

$y-f(0)=f'(0)(x-0)$ ή $y-0=0(x-0)$ ή $y=0$.

iii. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$f''(x)=(6x+\int_0^x \eta\mu u du)'=6+\eta\mu x>0$, αφού $-1\le \eta\mu x\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=3x\ln x-3x$ και $g(x)=\int_x^1 f(t)dt$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g

ii. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να αποδείξετε ότι: $g(x)\le \frac{3e^2}{4}-\frac{9}{4}$.

iv. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $K(x)=g(3x^2)$ ως προς τη μονοτονία, αν $x>0$

Λύση

i. Το πεδίο ορισμού της f είναι:

$D_f=(0,+\infty)$ στο οποίο είναι και συνεχής. Επειδή $1\in(0,+\infty)$ το πεδίο ορισμού της g είναι: $D_g=(0,+\infty)$.

ii. Η συνάρτηση f είναι συνεχής, άρα η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη, με

$g'(x)=\left(-\int_1^x f(t)dt\right)'=-f(x)=-3x\ln x+3x$.

Έχουμε: $g'(x)>0 \Leftrightarrow -3x\ln x+3x>0 \Leftrightarrow -3x(\ln x-1)>0 \Leftrightarrow$

$\ln x<1 \Leftrightarrow x<e$, αφού $x\in(0,+\infty)$.

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο (0,e], όμοια g γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$ οπότε η g παρουσιάζει στο $x=e$ ολικό μέγιστο.

iii. Έχουμε:

$g(x)\le g(e)$ **(1)**, αφού η g παρουσιάζει στο $x=e$ ολικό μέγιστο

αλλά $g(e)=\int_e^1(3x\ln x-3x)dx=3\cdot\int_e^1 x\ln x dx-3\int_e^1 x dx=$

$$=3\cdot\int_e^1\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x dx-3\left[\frac{x^2}{2}\right]_e^1=$$

$$=3\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_e^1-3\int_e^1\frac{x^2}{2}\cdot(\ln x)'\,dx-\frac{3}{2}+\frac{3e^2}{2}=$$

$$=3\left(\frac{1}{2}\ln 1-\frac{e^2}{2}\ln e\right)-\frac{3}{2}\int_e^1 x\,dx-\frac{3}{2}+\frac{3e^2}{2}=$$

$$=-\frac{3}{2}e^2\cdot\ln e-\frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_e^1-\frac{3}{2}+\frac{3e^2}{2}=$$

$=\dfrac{3e^2}{4}-\dfrac{9}{4}$. **(2)**

Από **(1)**,**(2)** έχουμε: $g(x)\le\dfrac{3e^2-9}{4}$.

iv. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη οπότε και η συνάρτηση K είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$K'(x)=\left(\int_{3x^2}^{1}f(t)dt\right)'=\left(-\int_1^{3x^2}f(t)dt\right)'=-f(3x^2)(3x^2)'=$$

$$=-6xf(3x^2)=-6x\cdot[9x^2\ln 3x^2-9x^2]=-54x^3(\ln 3x^2-1).$$

Είναι: $K'(x)=0\Leftrightarrow -54x^3(\ln 3x^2-1)=0\Leftrightarrow \ln 3x^2-1=0$, αφού $x\in(0,+\infty)$,

$$\Leftrightarrow \ln 3x^2=\ln e\Leftrightarrow x^2=\frac{e}{3}\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{e}{3}}.$$

Επίσης:

$$K'(x)>0\Leftrightarrow -54x^3(\ln 3x^2-1)>0\Leftrightarrow \ln 3x^2<1\Leftrightarrow$$

$\ln 3x^2<\ln e\overset{\ln\text{γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow}3x^2<e\overset{x>0}{\Leftrightarrow}0<x<\sqrt{\dfrac{e}{3}}$, άρα K γνησίως αύξουσα στο $(0,\sqrt{\dfrac{e}{3}}]$.

Όμοια K γνησίως φθίνουσα στο $[\sqrt{\dfrac{e}{3}},+\infty)$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f(x)=x+1+\int_1^x \frac{1}{x}f(t)dt$ **(1)**.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

iv. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,f(1))$ και να αποδείξετε ότι:

$2x+\ln x\le 3x-1$

<u>Λύση</u>

i. Εχουμε: $f(x)=x+1+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt$ **(1)**

Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, οπότε η $\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ άρα και $\frac{1}{x}\cdot\int_1^x f(t)dt$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Επομένως f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

ii. Η **(1)** γράφεται: $xf(x)=x^2+x+\int_1^x f(t)dt$ και παραγωγίζοντας έχουμε

$f(x)+xf'(x)=2x+1+f(x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow xf'(x)=2x+1\Leftrightarrow f'(x)=2+\frac{1}{x}\Leftrightarrow f'(x)=\left(2x+\ln x\right)'$

Άρα $f(x)=2x+\ln x+c$ **(2)**

Η **(1)** για $x=1$ δίνει: $f(1)=2$ ενώ η **(2)** για $x=1$ δίνει: $f(1)=2+c$.

Επομένως: $2+c=2\Leftrightarrow c=0$. Άρα $f(x)=2x+\ln x, x>0$.

iii. Για κάθε $x>0$ έχουμε: $f'(x)=\left(2x+\ln x\right)'=2+\frac{1}{x}>0$ και $f''(x)=\left(2+\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}<0$, για κάθε $x>0$. Άρα η f είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$.

iv. Είναι:

- $f(1) = 2 + \ln 1 = 2$
- $f'(1) = 2 + 1 = 3$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο A είναι: $y - 2 = 3(x - 1)$ ή $y = 3x - 1$ και επειδή η $f(x) = 2x + \ln x$ κοίλη (από iii.) έχουμε: $2x + \ln x \le 3x - 1$. Η ισότητα ισχύει για $x = 1$.

Άσκηση 3

Εκφώνηση

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{2e}{x}+2\ln x,\ x>0$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq e^{x-e}$ για κάθε $x>0$.

iii. Αν ισχύει $\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \lambda^{x-e}$ για κάθε $x>0$ και $\lambda>0$ τότε να αποδείξετε ότι $\lambda=e$.

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=e^2$.

<u>Λύση</u>

i. Για κάθε $x>0$ έχουμε: $f'(x)=\left(\frac{2e}{x}+2\ln x\right)'=\frac{-2e}{x^2}+\frac{2}{x}=\frac{2(x-e)}{x^2}$

Είναι:

- $f'(x)<0 \Leftrightarrow x<e$, άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(0,e]$.
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>e$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $[e,+\infty)$.

Η f για $x=e$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Δηλαδή $f(x)\geq f(e)$ με τιμή $f(e)=2+2=4$.

ii. Θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε $x>0$. Ισχύει:

$$\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq e^{x-e} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \ln e^{x-e} \Leftrightarrow$$

$$x\ln\frac{x}{e}\geq x-e \Leftrightarrow x(\ln x-\ln e)\geq x-e \Leftrightarrow x\ln x-x\geq x-e \Leftrightarrow$$

$$x\ln x-2x+e\geq 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x-2+\frac{e}{x}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$2\ln x+\frac{2e}{x}\geq 4 \Leftrightarrow f(x)\geq 4$ που ισχύει από i). (Η συνάρτηση ln είναι γνησίως αύξουσα)

iii. Για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \lambda^{x-e} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \ln\lambda^{x-e} \Leftrightarrow x(\ln x-\ln e) \geq (x-e)\ln\lambda \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x\ln x - x - x\ln\lambda + e\ln\lambda \geq 0$ **(1)**

Έστω η συνάρτηση $g(x)=x\ln x - x - x\ln\lambda + e\ln\lambda, x>0$ και $\lambda>0$, τότε:

$$g'(x)=\ln x+1-1-\ln\lambda=\ln x-\ln\lambda$$

Από **(1)** έχουμε: $g(x)\geq 0$, για κάθε $x>0$. Αλλά $g(e)=0$. Άρα $g(x)\geq g(e)$ για κάθε $x>0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη και στο $x=e$ εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της παρουσιάζει ακρότατο οπότε από το θεώρημα Fermat έχουμε:

$$g'(e)=0 \Leftrightarrow \ln e-\ln\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=e.$$

iv. Είναι: $f(x)=\dfrac{2e}{x}+2\ln x, x>0$

Παρατηρούμε ότι:

$1\leq x\leq e^2 \Leftrightarrow \ln x\geq 0$ και $\dfrac{2e}{x}>0$, οπότε: $f(x)>0$ στο $[0,e^2]$, άρα

$$E=\int_1^{e^2}\left(\frac{2e}{x}+2\ln x\right)dx=2e\left[\ln x\right]_1^{e^2}+2\int_1^{e^2}\ln x dx=$$

$$=2\cdot e\ln e^2+2\int_1^{e^2}(x)'\ln x dx=4e+2\left[x\ln x\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}x\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=4e+2e^2\ln e^2-(e^2-1)=4e+4e^2-e^2+1=3e^2+4e+1.$$

Άσκηση 4

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = 1 + 2xi,\ x \in \mathbb{R}$, και η συνάρτηση με τύπο $f(x) = |z| - \mathrm{Im}(z)$ ορισμένη στο $\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

iii. Να αποδείξετε ότι $f'(x)|z| + 2f(x) = 0$.

<u>Λύση</u>

i. Έστω $z = \alpha + \beta i,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε $\alpha = 1$ και $\beta = 2x,\ x \in \mathbb{R}$.
Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία $x = 1$.

ii. Είναι: $|z| = \sqrt{1+4x^2}$ και $\mathrm{Im}(z) = 2x$. Άρα $f(x) = \sqrt{1+4x^2} - 2x$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Επίσης: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{1+4x^2} - 2x) \overset{+\infty-(+\infty)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+4x^2-4x^2}{\sqrt{1+4x^2}+2x} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2}+2x} = 0$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{1+4x^2} + 2x) = +\infty$.

Άρα $y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+4x^2}-2x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+4}+2\right)}{x} = -4 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - (-4x)\right] = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{1+4x^2} - 2x + 4x\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{1+4x^2} + 2x) \overset{(+\infty)+(-\infty)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1+4x^2-4x^2}{\sqrt{1+4x^2}-2x} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-x\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+4}+2\right)} = 0.$$

Άρα $y = -4x$ πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

iii. Είναι: $f'(x)=\left(\sqrt{1+4x^2}-2x\right)'=\dfrac{8x}{2\sqrt{1+4x^2}}-2=\dfrac{4x}{\sqrt{1+4x^2}}-2$ οπότε:

$$f'(x)\left|z\right|+2f(x)=\left(\frac{4x}{\sqrt{1+4x^2}}-2\right)\sqrt{1+4x^2}+2\sqrt{1+4x^2}-4x=0\,.$$

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\ln x-1$.

i. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f του άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=e$ και $x=\lambda>0$.

ii. Να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}E(\lambda)$.

iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(e^2, f(e^2))$.

iv. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την παραπάνω εφαπτομένη, την C_f και τον άξονα xx'.

<u>Λύση</u>

i. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $\lambda>e$ τότε: $E(\lambda)=\int_e^\lambda f(x)dx=\int_e^\lambda(\ln x-1)dx=\int_e^\lambda(x)'\ln x dx-(\lambda-e)=$

$$=\left[x\ln x\right]_e^\lambda-\int_e^\lambda x\cdot\frac{1}{x}dx-\lambda+e=\lambda\ln\lambda-e-(\lambda-e)-\lambda+e=$$

$$=\lambda\ln\lambda-e-\lambda+e-\lambda+e=\lambda\ln\lambda-2\lambda+e$$ (Αφού $e<x<\lambda$ το $\ln x>1$)

- Αν $0<\lambda<e$, τότε

$$E(\lambda)=\int_\lambda^e(-f(x))dx=\int_\lambda^e(1-\ln x)dx=(e-\lambda)-\int_\lambda^e(x)'\ln x dx=$$

$$=e-\lambda-\left[x\ln x\right]_\lambda^e+\int_\lambda^e x(\ln x)'dx=$$

$$=e-\lambda-e+\lambda\ln\lambda+(e-\lambda)=\lambda\ln\lambda-2\lambda+e.$$

ii. Έχουμε: $\lim\limits_{\lambda\to0^+}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to0^+}(\lambda\ln\lambda-2\lambda+e)=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\lambda\ln\lambda-0+e=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\dfrac{\ln\lambda}{\frac{1}{\lambda}}+e=$

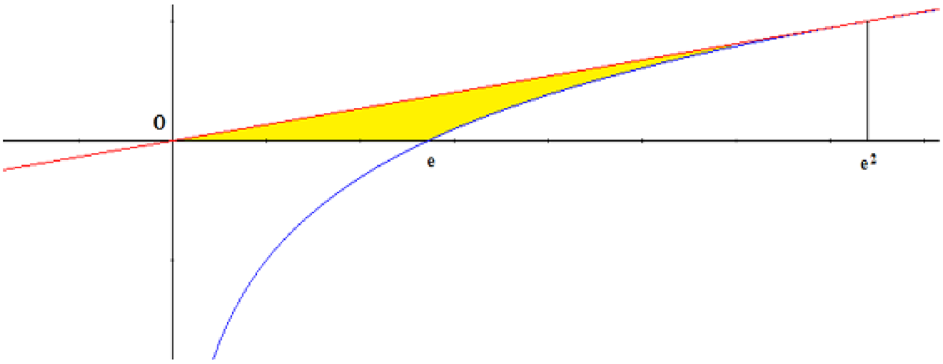
$$=\lim_{\lambda\to0^+}\frac{(\ln\lambda)'}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)'}+e=\lim_{\lambda\to0^+}\left(\frac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{1}{\lambda^2}}\right)+e=\lim_{\lambda\to0^+}(-\lambda)+e=e.$$

iii. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(e^2, f(e^2))$ είναι: $y - f(e^2) = f'(e^2)(x - e^2)$

Αλλά $f(e^2) = \ln e^2 - 1 = 1$ και $f'(e^2) = \frac{1}{e^2}$. Αφού $f'(x) = \frac{1}{x}$

Άρα η εξίσωση είναι: $y - 1 = \frac{1}{e^2}\left(x - e^2\right)$ ή $y = \frac{1}{e^2}x$.

iv. Για κάθε $x > 0$ έχουμε: $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, άρα f κοίλη, οπότε η γραφική παράσταση της εφαπτομένης στο Μ βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f.



Επομένως:

$$E = \int_0^{e^2} \frac{1}{e^2}x\,dx - \int_e^{e^2} (\ln x - 1)dx =$$

$$= \frac{1}{e^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{e^2} - \int_e^{e^2} \ln x\,dx + \left(e^2 - e\right) = \frac{1}{e^2}\cdot\frac{e^4}{2} - \int_e^{e^2} (x)'\ln x\,dx + e^2 - e =$$

$$= \frac{e^2}{2} - [x\ln x]_e^{e^2} + \int_e^{e^2} x\frac{1}{x}dx + e^2 - e = \frac{e^2}{2} - e^2\ln e^2 + e\ln e + e^2 - e + e^2 - e =$$

$$= \frac{e^2}{2} - 2\cancel{e^2} + \cancel{e} + \cancel{e^2} - \cancel{e} + \cancel{e^2} - e = \left(\frac{e^2}{2} - e\right) \text{ τ.μ.}$$

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x)=-3\int_2^x\left(\int_2^u 3^{f(t)}dt\right)du+3x-3$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη.

iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g με $g(x)=\dfrac{1}{2}\left(f'(x)\right)^2+\dfrac{3}{\ln 3}3^{f(x)}$ είναι σταθερή.

iv. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(2,f(2))$.

<u>Λύση</u>

i. Έστω: $\varphi(t)=3^{f(t)}$ και $h(u)=\int_2^u 3^{f(t)}dt$

Η φ είναι συνεχής, άρα η h είναι παραγωγίσιμη οπότε και συνεχής οπότε $g(x)=\int_0^x h(u)du$ παραγωγίσιμη. Επομένως f παραγωγίσιμη.

ii.Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε: $f'(x)=-3\int_2^x 3^{f(t)}dt+3$. αφού $f(x)=-3\int_2^x h(u)dt+3x-3$ άρα για κάθε $x>0$ $f'(x)=-3h(x)+3=-3\int_2^x 3^{f(t)}dt+3$ οπότε $f''(x)=-3\cdot 3^{f(x)}<0$ για κάθε $x>0$. Άρα f κοίλη.

iii. Για κάθε $x>0$ έχουμε: $g'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot f'(x)\cdot f''(x)+\dfrac{3}{\cancel{\ln 3}}\cdot 3^{f(x)}\cdot\cancel{\ln 3}\cdot f'(x)=$

$=f'(x)\left[f''(x)+3\cdot 3^{f(x)}\right]=0$ αφού $f''(x)=-3\cdot 3^{f(x)}$.

iv. Είναι: $f'(2)=3$ και $f(2)=3$.

Άρα η εφαπτομένη στο Μ έχει εξίσωση $y-3=3(x-2)$ ή $y=3x-3$

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x^3+x-2$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

iv. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I=\int_{-1}^{e} f^{-1}(x)dx$

<u>Λύση</u>

i. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $f'(x)=e^x+3x^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Από i) έχουμε ότι f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

iii. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$f(R)=(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x))$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+x^3+x-2)=0-\infty-\infty-2=-\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+x^3+x-2)=+\infty$.

Άρα $f(\mathbb{R})=(-\infty,+\infty)$. Επομένως το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι: $D_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=(-\infty,+\infty)$.

iv. Είναι: $I=\int_{-1}^{e} f^{-1}(x)dx$. Θέτουμε $x=f(y)$, οπότε είναι: $dx=f'(y)dy$. Επίσης: $f(0)=-1$ και $f(1)=e$. Άρα τα νέα άκρα ολοκλήρωσης είναι 0 και 1.

Επομένως:

$$I=\int_{-1}^{e} f^{-1}(x)dx=\int_{0}^{1} f^{-1}(f(y))f'(y)dy= \int_{0}^{1} yf'(y)dy=[yf(y)]_0^1-\int_{0}^{1}(y)'f(y)dy=$$

$$=1\cdot f(1)-0-\int_{0}^{1} f(y)dy=f(1)-\int_{0}^{1}(e^y+y^3+y-2)dy=e-[e^y+\frac{y^4}{4}+\frac{y^2}{2}-2y]_0^1=$$

$$e-[e+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-2-(e^0+0+0-0)]=\cancel{e}-\cancel{e}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+2+1=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+3=\frac{9}{4}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=3e^{2x}-3$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$f(x)\geq 3\int_0^2 xg(2x+t)dt$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

i. $\int_0^2 g(t)dt=2$.

ii. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,2)$, τέτοιο ώστε $\int_0^{x_0} g(t)dt=1$.

iii. Η συνάρτηση $F(x)=x\int_0^x g(t)dt-x$ είναι παραγωγίσιμη με $F'(x)=\int_0^x g(t)dt+xg(x)-1$.

iv. Η εξίσωση $xg(x)-1+\int_0^x g(t)dt=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0,x_0)$.

<u>Λύση</u>

i. Έστω $h(x)=\int_0^2 xg(2x+t)dt$. Θέτουμε $u=2x+t$ έτσι $du=dt$. Αν $t=0$, τότε: $u=2x$.

Αν $t=2$, τότε:

$u=2x+2$. Άρα $h(x)=x\cdot\int_{2x}^{2x+2} g(u)du$

Οπότε έχουμε: $f(x)\geq 3x\int_{2x}^{2x+2} g(u)du \Leftrightarrow 3e^{2x}-3-3x\int_{2x}^{2x+2} g(u)du\geq 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$K(x)=3e^{2x}-3-3x\int_{2x}^{2x+2} g(u)du$, τότε:

$K(x)\geq K(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η K ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Fermat δηλαδή είναι παραγωγίσιμη και έχει ακρότατο στο $x_0=0$ άρα $K'(0)=0$ (1). Όμως

$$K'(x)=6e^{2x}-3\int_{2x}^{2x+2} g(u)du-3x\left(\int_{2x}^{\alpha} g(u)du+\int_{\alpha}^{2x+2} g(u)du\right)'=$$

$6e^{2x}-3\int_{2x}^{2x+2}g(u)du-3x\left(-2g(2x)+2g(2x+2)\right)$ **(2)**

Οπότε από **(1)**,**(2)** έχουμε: $6-3\int_0^2 g(u)du=0 \Leftrightarrow \int_0^2 g(u)du=2$

Δηλαδή το ζητούμενο.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $\varphi(x)=\int_0^x g(t)dt-1$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής άρα η $\int_0^x g(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη οπότε και συνεχής. Επομένως η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο [0,2].

Επίσης: $\varphi(0)\cdot\varphi(2)=(-1)\cdot\left[\int_0^2 g(t)dt-1\right]=(-1)(2-1)=-1<0$.

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,2)$, τέτοιο ώστε:

$\varphi(x_0)=0 \Leftrightarrow \int_0^{x_0} g(t)dt-1=0 \Leftrightarrow \int_0^{x_0} g(t)dt=1$.

iii. Είναι:

- g συνεχής άρα $\int_0^x g(t)dt$ παραγωγίσιμη ως αρχική της g.

Άρα F παραγωγίσιμη με $F'(x)=\left(x\int_0^x g(t)dt-x\right)'=\int_0^x g(t)dt+xg(x)-1$.

iv. Είναι:

- συνεχής ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[0,x_0]$.
- F παραγωγίσιμη στο $(0,x_0)$ (από iii) με $F'(x)=\int_0^x g(t)dt+xg(x)-1$.
- $F(0)=F(x_0)$, αφού:

  $F(0)=0$

  $F(x_0)=x_0\int_0^{x_0} g(t)dt-x_0=0$

  Άρα από το θεώρημα του Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,x_0)\subseteq(0,2)$ τέτοιο ώστε:

  $F'(\xi)=0 \Leftrightarrow \int_0^{\xi} g(t)dt+\xi g(\xi)-1=0$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{e}{x}+\ln x+1,\ x>0$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,4)$, τέτοιο ώστε $f(\xi)=3^{\xi-1}$.

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e^2$.

<u>Λύση</u>

i. Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ με $f'(x)=\left(\dfrac{e}{x}+\ln x+1\right)'=\dfrac{-e}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-e}{x^2}$

και επειδή $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>e$ και $f'(x)<0 \Leftrightarrow x<e$

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[e,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0,e]$ και για $x=e$ παρουσιάζει ακρότατο το $f(e)=\dfrac{e}{e}+\ln e+1=3$.

ii. Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e}{x}+\ln x+1\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e+x\ln x+x}{x}\right)=+\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$.

Άρα $x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Επίσης ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e}{x^2}+\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}\right)=0+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}+0=0$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e}{x}+\ln x+1\right)=+\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

Άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$.

iii. Έστω $g(x)=f(x)-3^{x-1}$ η οποία είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο [1,4] και για την οποία ισχύει: $g(1)\cdot g(4)<0$ αφού

- $g(1)=f(1)-3^0=e+\ln 1+1-1=e>0$
- $g(4)=f(4)-3^3=\dfrac{e}{4}+\ln 4+1-3^3<0$.

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,4)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=3^{\xi-1}$.

iv. Είναι:

$1\le x\le e^2 \Leftrightarrow \ln x\ge 0$ και $\dfrac{e}{x}>0$. Άρα $f(x)=\dfrac{e}{x}+\ln x+1>0$ για κάθε $x\in[1,e^2]$. Επομένως έχουμε:

$$E=\int_1^{e^2}\left(\frac{e}{x}+\ln x+1\right)dx=\int_1^{e^2}\frac{e}{x}dx+\int_1^{e^2}\ln x dx+1\cdot(e^2-1)=$$

$$=e\left[\ln x\right]_1^{e^2}+\int_1^{e^2}(x)'\cdot\ln x dx+e^2-1=$$

$$=e\cdot(\ln e^2-\ln 1)+\left[x\ln x\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}x\cdot\frac{1}{x}dx+e^2-1=$$

$$=2e+e^2\ln e^2-1\cdot(e^2-1)+e^2-1=2e+2e^2 \text{ τ.μ}$$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x}+\lambda x+3, x>0$ και $\lambda\in\mathbb{R}$.

i. Αν η εφαπτομένη της C_f στο $A(1,f(1))$ είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε) με εξίσωση $\varepsilon: y=3x$ να υπολογίσετε το λ.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και τις ευθείες με εξισώσεις: $x=1$ και $x=e$.

<u>Λύση</u>

i. Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$f'(x)=\left(\frac{2\ln x}{x}+\lambda x+3\right)'=2\left(\frac{\ln x}{x}\right)'+\lambda=2\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot(x)'}{x^2}+\lambda=$$

$$=2\frac{1-\ln x}{x^2}+\lambda\Leftrightarrow f'(x)=\frac{2-2\ln x}{x^2}+\lambda .$$

Ο συντελεστής της εφαπτομένης της C_f στο $A(1,f(1))$ είναι:

$f'(1)=\dfrac{2-0}{1}+\lambda=2+\lambda$ και επειδή είναι παράλληλη προς την ευθεία ε ισχύει:

$2+\lambda=3\Leftrightarrow\lambda=1$. Άρα $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x}+x+3, x>0$ και $f'(x)=\dfrac{2-2\ln x}{x^2}+1$.

ii. Για κάθε $x>0$ είναι: $f'(x)=\dfrac{2-2\ln x}{x^2}+1=\dfrac{2-2\ln x+x^2}{x^2}$.

Έστω $g(x)=x^2-2\ln x+2, x>0$.

Είναι: $g'(x)=2x-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2x^2-2}{x}$

$g'(x)=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x=1$.

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-2}{x} > 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow |x| > 1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x > 1$.

Άρα g γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Όμοια g γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$. Δηλαδή η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Επομένως: $g(x) \geq g(1) \Leftrightarrow g(x) \geq 3 > 0$, άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε η f δεν έχει ακρότατα και είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{2\ln x}{x} + x + 3}{x} =$

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\dfrac{\ln x}{x^2} + 1 + \dfrac{3}{x}\right) = 2\cdot 0 + 1 + 0 = 1$,

  αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x^2} = 0.$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\dfrac{\ln x}{x} + x + 3 - x\right) =$

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\dfrac{\ln x}{x} + 3\right) = 2\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)'}{(x)'} + 3 =$

  $= 2\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} + 3 = 3$. Άρα η ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ είναι η ευθεία $y = x + 3$.

iv. $E = \int_1^e |f(x) - x - 3|dx = \int_1^e \left|2\dfrac{\ln x}{x} + \cancel{x} + \cancel{3} - \cancel{x} - \cancel{3}\right|dx =$

$\int_1^e 2\left|\dfrac{\ln x}{x}\right|dx \overset{*}{=} 2\int_1^e \dfrac{\ln x}{x}dx =$

$= \left[\ell n^2 x\right]_1^e = \ell n^2 e - \ell n^2 1 = 1$.

*($1 < x < e \Leftrightarrow \ln x > 0$ άρα $\dfrac{\ln x}{x}$ θετικός)

Άσκηση 4

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με $f(x)=-2+\frac{2}{x}$ και $g(x)=3\ln x$, όπου $x\in(0,+\infty)$.

i. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης h με $h(x)=f(x)-g(x)$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και τις ευθείες με εξισώσεις: $x=1$ και $x=\lambda$, όπου $\lambda>0$.

iii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)$.

iv. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to0^+}E(\lambda)$.

Λύση

i. Είναι:

$h(x)=f(x)-g(x)=-2+\frac{2}{x}-3\ln x=\frac{2}{x}-3\ln x-2$ για κάθε $x>0$.

Άρα $h'(x)=\frac{-2}{x^2}-\frac{3}{x}<0$, οπότε h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$. Ακόμα $h(1)=0$.

Επομένως:
Για κάθε $x>1$ είναι $h(x)<h(1)\Leftrightarrow h(x)<0$ και για κάθε $0<x<1$ είναι $h(x)>h(1)\Leftrightarrow h(x)>0$.

ii. Για να προσδιορίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν πρέπει να γνωρίζουμε αν $\lambda>1$ ή $\lambda<1$.
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\lambda>1$ τότε:

$$E(\lambda)=\int_1^\lambda|f(x)-g(x)|\,dx=\int_1^\lambda|h(x)|\,dx\Leftrightarrow$$

$$E(\lambda)=-\int_1^\lambda h(x)dx=-\int_1^\lambda\left(\frac{2}{x}-3\ln x-2\right)dx=$$

$$=-2\left[\ln x\right]_1^\lambda+3\int_1^\lambda(x)'\ln x\,dx+2(\lambda-1)=$$

$$=-2(\ln\lambda-\ln1)+3[x\ln x]_1^\lambda-3\int_1^\lambda x\frac{1}{x}dx+2\lambda-2=$$

$$=-2\ln\lambda+3\lambda\ln\lambda-3(\lambda-1)+2\lambda-2=-2\ln\lambda+3\lambda\ln\lambda-3\lambda+3+2\lambda-2=$$

$= (3\lambda - 2)\ln\lambda - \lambda + 1$.

- Αν $0 < \lambda < 1$ τότε:

  $E(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} |h(x)|\,dx = \int_{\lambda}^{1} h(x)dx = -\int_{1}^{\lambda} h(x)dx$,

  $E(\lambda) = (3\lambda - 2)\ln\lambda + 1 - \lambda$.

- Αν $\lambda = 1$ τότε προφανώς $E(1) = 0$. Επομένως $E(\lambda) = (3\lambda - 2)\ln\lambda + 1 - \lambda$.

iii. Είναι:

$$\lim_{\lambda\to+\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty} [(3\lambda - 2)\ln\lambda + 1 - \lambda] = \lim_{\lambda\to+\infty} (3\lambda\ln\lambda - 2\ln\lambda - \lambda + 1) =$$

$$= \lim_{\lambda\to+\infty} [\lambda(3\ln\lambda - 2\frac{\ln\lambda}{\lambda} - 1 + \frac{1}{\lambda})] = (+\infty)(+\infty - 2\cdot 0 - 1 + 0) = +\infty .$$

Αφού $\lim_{\lambda\to+\infty} \ln\lambda = +\infty$ και $\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\ln\lambda}{\lambda} = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{(\ln\lambda)'}{(\lambda)'} = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\lambda} = 0$.

iv. Είναι: $\lim_{\lambda\to 0^+} E(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0^+} \left[(3\lambda - 2)\ln\lambda + 1 - \lambda\right] = \left[(0 - 2)\cdot(-\infty) + 1 - 0\right] = +\infty$.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$. Αν $F(x)=\int_2^x f(t)dt+\int_2^{2010-x} f(t)dt$, τότε:

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g με $g(x)=\int_2^x f(t)dt$.

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $F(x)=\int_2^x f(t)dt+\int_2^{2010-x} f(t)dt.$

iii. Να μελετήσετε την F ως προς τη μονοτονία.

iv. Να αποδείξετε ότι $F(x)\geq 2\int_2^{1005} f(t)dt$ για κάθε $x\in(0,2010)$.

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και ο αριθμός 2 ανήκει στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Άρα η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το $D_g=(0,+\infty)$.

ii. Είναι: $F(x)=g(x)+g(2010-x)$

Η συνάρτηση $h(x)=g(2010-x)$ ορίζεται σε εκείνα τα x για τα οποία ισχύει

$2010-x>0\Leftrightarrow x<2010$. Άρα $D_h=(-\infty,2010)$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της F αποτελείται από εκείνα τα x για τα οποία ισχύει $x\in D_g$ και $x\in D_h$ δηλαδή $x>0$ και $x<2010$.

Άρα $D_F=(0,2010)$.

iii. Για κάθε $x\in(0,2010)$ έχουμε:

$$F'(x)=\left(\int_2^x f(t)dt+\int_2^{2010-x} f(t)dt\right)'=$$

$$=\left(\int_2^x f(t)dt\right)'+\left(\int_2^{2010-x} f(t)dt\right)'=$$

$$=f(x)+f(2010-x)(2010-x)'=f(x)-f(2010-x).$$

Οπότε: $F'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=f(2010-x) \Leftrightarrow x=2010-x \Leftrightarrow x=1005$ αφού f γνησίως αύξουσα άρα και 1-1.

Επίσης:

$F'(x)<0 \Leftrightarrow f(x)-f(2010-x)<0 \Leftrightarrow$

$f(x)<f(2010-x) \Leftrightarrow x<2010-x \Leftrightarrow 0<x<1005$, αφού f γνησίως αύξουσα.

$F'(x)>0 \Leftrightarrow f(x)-f(2010-x)>0 \Leftrightarrow$

$f(x)>f(2010-x) \Leftrightarrow x>2010-x \Leftrightarrow x \in (1005, 2010)$.

Άρα F γνησίως φθίνουσα στο $(0,1005]$ και F γνησίως αύξουσα στο [1005,2010]

iv. Η F στο $x=1005$, παρουσιάζει ολικό ελάχιστο άρα για κάθε $x \in (0, 2010)$ ισχύει:

$F(x) \geq F(1005) \Leftrightarrow F(x) \geq \int_2^{1005} f(t)dt + \int_2^{1005} f(t)dt \Leftrightarrow F(x) \geq 2\int_2^{1005} f(t)dt.$

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=3\ln(x\cdot e^{1-x})+2, x>0$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $3f(x)+2011=0$.

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

<u>Λύση</u>

i. Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$f'(x)=(3\cdot\ln xe^{1-x}+2)'=3\frac{1}{xe^{1-x}}(xe^{1-x})'=$$

$$=\frac{3}{x\cdot e^{1-x}}\cdot(e^{1-x}+x(e^{1-x})')=\frac{3}{x\cdot e^{1-x}}(e^{1-x}+x\cdot e^{1-x}(1-x)')=$$

$$=\frac{3}{x\cdot e^{1-x}}\cdot e^{1-x}\cdot(1-x)=\frac{3(1-x)}{x}$$

Έχουμε:

- $f'(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{3(1-x)}{x}>0\Leftrightarrow x<1$ αφού $x>0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$
- $f'(x)<0\Leftrightarrow\dfrac{3(1-x)}{x}<0\Leftrightarrow x>1$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\geq 1$.
Άρα η f για $x=1$ παρουσιάζει ακρότατο με τιμή $f(1)=3\ln 1+2=2$ που είναι η μέγιστη

ii. Το σύνολο τιμών θα είναι: $f((0,+\infty))=(\lim\limits_{x\to 0^+}f(x),f(1)]\cup(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(1)]$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}[3\ln(x\cdot e^{1-x})+2]=3\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x\cdot e^{1-x})+2=-\infty$ αφού

  $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot e^{1-x})=0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[3\ln(x\cdot e^{1-x})+2]=-\infty$ αφού

$$\lim_{x\to+\infty}(x\cdot e^{1-x}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-1}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^{x-1})'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}} = 0\ .$$

- $f(1)=2$

Άρα $f((0,+\infty)) = (-\infty, 2]$.

iii. Είναι: $3f(x)+2011=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{-2011}{3}$

Έστω $g(x)=f(x)+\dfrac{2011}{3}$ τότε $g'(x)=f'(x)$, οπότε η g έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f

$g((0,1]) = (-\infty, 2+\dfrac{2011}{3}]$ και επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1] έχει μοναδική ρίζα σε αυτό.

Άρα και η $f(x)+\dfrac{2011}{3}=0$ έχει μοναδική ρίζα στο (0,1].

$g([1,+\infty)) = (-\infty, 2+\dfrac{2011}{3}]$ και επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ έχει μοναδική ρίζα.

Άρα και η $f(x)+\dfrac{2011}{3}=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $[1,+\infty)$.

Άρα η εξίσωση $3f(x)+2011=0$ έχει δύο λύσεις, μία στο (0,1] και μία στο $[1,+\infty)$.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>: Το iii) μπορεί να λυθεί και με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.

iv. Είναι:

- $f(1)=2$

- $f(2)=3\ln\left(\dfrac{2}{e}\right)+2=3\ln2-3\ln e+2=3\ln2-1>0$ και επειδή f γνησίως φθίνουσα

  $f([1,2])=[3\ln2+1,2]$ δηλαδή $f(x)>0$ στο [1,2].

  Επίσης $f(x)=3\ln x+3\ln e^{1-x}+2=3\ln x+3(1-x)+2=3\ln x+5-3x$.

  Άρα $E=\int_1^2 f(x)dx = 3\int_1^2 \ln x dx + \int_1^2 (5-3x)dx = 3\int_1^2 (x)'\ln x dx + [5x-\frac{3}{2}x^2]_1^2 =$

  $=3[x\ln x]_1^2 - 3\int_1^2 x\cdot(\ln x)'dx + 10 - \frac{3}{2}\cdot4 - 5 + \frac{3}{2} =$

  $=3\cdot(2\ln2-0) - 3\int_1^2 1dx + 10 - 6 - 5 + \frac{3}{2} = 6\ln2 - 3(2-1) + \frac{3}{2} - 1 =$

  $=6\ln2-\frac{5}{2}$ τ.μ.

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με $f(x)=2x^4+3\ln x+2$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\lambda^4=\dfrac{3}{2}\ln\dfrac{1}{\lambda}-1$ έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda>0$.

iv. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I=\int_0^4 f^{-1}(t)dt$.

Λύση

i. Για κάθε $x>0$ έχουμε: $f'(x)=8x^3+\dfrac{3}{x}>0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε δεν έχει ακρότατα.

ii. Είναι:

- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(2x^4+3\ln x+2)=0-\infty+2=-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^4+3\ln x+2)=+\infty+\infty+2=+\infty$.

Επίσης η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, από i), άρα το σύνολο τιμών της είναι: $f((0,+\infty))=(-\infty,+\infty)$.

iii. Για κάθε $\lambda>0$ έχουμε:

$$\lambda^4=\frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda}-1\Leftrightarrow 2\lambda^4=3(\ln1-\ln\lambda)-2\Leftrightarrow 2\lambda^4=-3\ln\lambda-2\Leftrightarrow$$

$$2\lambda^4+3\ln\lambda+2=0\Leftrightarrow f(\lambda)=0 .$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\lambda>0$, τέτοιο ώστε $f(\lambda)=0$.

Αυτό ισχύει αφού το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$

(ΑΠΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ) και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

iv.Η συνάρτηση f επειδή είναι γνησίως αύξουσα είναι και 1-1 άρα αντιστρέφεται. Θέτουμε $t=f(x)\Leftrightarrow dt=f'(x)dx$. Για $t=0$ είναι $0=f(x)\Leftrightarrow x=$.

Για $t=4$ είναι $4=f(x)\Leftrightarrow f(1)=f(x)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} x=1$.

Επομένως:

$$\int_0^4 f^{-1}(t)dt=\int_\lambda^1 f^{-1}(f(x))f'(x)dx=\int_\lambda^1 xf'(x)dx=\int_\lambda^1 x\left(8x^3+\frac{3}{x}\right)dx=$$

$$\int_\lambda^1 (8x^4+3)dx=\left[8\frac{x^5}{5}+3x\right]_\lambda^1=\frac{8}{5}+3-\left(\frac{8}{5}\lambda^5+3\lambda\right)=-\frac{8}{5}\lambda^5-3\lambda+\frac{23}{5}.$$