# Κεφάλαιο 3ο

## Ακολουθίες - Πρόοδοι

**Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο αυτό θα πρέπει:**

- ✓ Να γνωρίζει την έννοια της ακολουθίας, τους τρόπους που ορίζεται, τις διαφορές της από μία συνάρτηση.
- ✓ Να γνωρίζει τους ορισμούς της αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου, τους τύπους των γενικών όρων αυτών, των μέσων, των αθροισμάτων καθώς και τις αποδείξεις αυτών.
- ✓ Να μπορεί να υπολογίζει: $\alpha_\nu$, $\omega$, $\lambda$, $S_\nu$.
- ✓ Να μπορεί να βρίσκει το γενικό όρο ακολουθιών που ορίζονται αναδρομικά (Αριθμητική - Γεωμετρική πρόοδος).
- ✓ Να μπορεί να βρίσκει τους όρους ακολουθίας από τον γενικό όρο ή από τον αναδρομικό τύπο της και να τους παριστάνουν στο επίπεδο.
- ✓ Να μπορεί να διακρίνει αν μια ακολουθία είναι αριθμητική ή γεωμετρική πρόοδος με τον υπολογισμό της διαφοράς $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu$ και του λόγου $\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$ αντίστοιχα.
- ✓ Να μπορεί να βρίσκει το νιοστό όρο μιας προόδου.
- ✓ Να κατανοήσει τις έννοιες αριθμητικός μέσος, γεωμετρικός μέσος και να μπορεί να επιλύει σχετικές ασκήσεις.
- ✓ Να επιλύει προβλήματα και ασκήσεις με τη βοήθεια των τύπων του νιοστού όρου και του αθροίσματος ν- πρώτων όρων αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

## ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ - ΠΡΟΟΔΟΙ: Τύποι - Βασικές έννοιες

### Ακολουθίες

**Ακολουθία** ονομάζουμε κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο Ν* των θετικών ακεραίων.

Μία ακολουθία συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα α και η τιμή της στο ν συμβολίζεται με $\alpha_\nu$ και διαβάζεται "α με δείκτη ν".

Οι τιμές της $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ κ.τ.λ. λέγονται κατά σειρά πρώτος όρος, δεύτερος όρος , τρίτος όρος κ.τ.λ. της ακολουθίας.

Ο όρος $\alpha_\nu$ λέγεται **νιοστός όρος** ή **γενικός όρος** της ακολουθίας.

Μία ακολουθία είναι πλήρως ορισμένη όταν μπορούμε να βρούμε οποιονδήποτε όρο της. Αυτό συμβαίνει όταν γνωρίζουμε:

**α. Τον γενικό όρο της ακολουθίας**

**π.χ.** Αν ο γενικός όρος είναι ο $\alpha_\nu = 2\nu - 1$, τότε $\alpha_1 = 1$ , $\alpha_2 = 3$ , $\alpha_3 = 5$ ,… είναι η ακολουθία των περιττών αριθμών

**β. Έναν αναδρομικό τύπο της ακολουθίας**

**π.χ.** Αν $\alpha_1 = 1$ , $\alpha_2 = 3$ και $\alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu$

Έχουμε: $\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_1 = 1 + 1 = 2$

$\alpha_4 = \alpha_3 + \alpha_2 = 2 + 1 = 3$

$\alpha_5 = \alpha_4 + \alpha_3 = 3 + 2 = 5$

Μειονέκτημα του αναδρομικού τύπου είναι ότι για να βρούμε π.χ. τον $\alpha_{100}$ πρέπει να γνωρίζουμε τους 99 προηγούμενους όρους.

### Αριθμητική πρόοδος (Α.Π.)

**Αριθμητική πρόοδος (Α.Π)** ονομάζουμε μια ακολουθία αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.
Τον αριθμό αυτόν τον συμβολίζουμε συνήθως με ω και τον λέμε **διαφορά** της προόδου.
Επομένως μια ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος , αν και μόνον αν, ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega \Leftrightarrow \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \omega,\ \nu \in N^*$$

Η διαφορά δύο διαδοχικών όρων είναι σταθερή

### Ιδιότητες της αριθμητικής προόδου

**α.** Ο νιοστός όρος $\alpha_\nu$ μιας αριθμητικής προόδου με **πρώτο όρο $\alpha_1$** και **διαφορά ω** δίνεται απο τον τύπο : $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$

**β. Αριθμητικός μέσος** των αριθμών α, γ λέγεται ο αριθμός β, αν και μόνο αν,

$$\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$$

**γ.** Οι α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι μιας Α.Π. , αν και μόνο αν, $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$

**δ.** Το **άθροισμα των ν πρώτων όρων** Α.Π. με διαφορά ω το συμβολίζουμε με:
$S_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + .... + \alpha_\nu$ και δίνεται από τους τύπους:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \quad \text{ή} \quad S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right]$$

## Γεωμετρική πρόοδος

**Γεωμετρική Πρόοδο (Γ.Π.)** ονομάζουμε μια ακολουθία αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.

• Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε συνήθως με λ και τον ονομάζουμε **λόγο** της προόδου.

• Σε μια γεωμετρική πρόοδο υποθέτουμε πάντα ότι $\alpha_1 \neq 0$ οπότε αφού είναι και $\lambda \neq 0$ ισχύει $\alpha_\nu \neq 0$, για κάθε $\nu \in N^*$.

• Επομένως μια ακολουθία $(\alpha_\nu)$ είναι γεωμετρική πρόοδος **αν και μόνο** αν ισχύει $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \lambda \Leftrightarrow \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda$, δηλαδή το πηλίκο δύο διαδοχικών όρων είναι σταθερό.

## Ιδιότητες της Γεωμετρικής Προόδου

**α.** Ο νιοστός όρος μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1$ και λόγο λ δίνεται από τον τύπο: $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$

**β.** Γεωμετρικός μέσος των $\alpha, \gamma \neq 0$ λέγεται ο **θετικός αριθμός β**, αν και μόνο αν,

$$\beta = \sqrt{\alpha \cdot \gamma}$$

**γ.** Οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μιας Γ.Π. , αν και μόνο αν, $\beta^2 = \alpha\gamma$

**δ.** Το άθροισμα των ν πρώτων όρων Γ.Π. με διαφορά λ το συμβολίζουμε $S_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu$ και δίνεται από τον τύπο $S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$ για $\lambda \neq 1$ και $S_\nu = \nu \cdot \alpha_1$ για $\lambda = 1$.


## Αποδείξεις στην αριθμητική πρόοδο

**ΘΕΩΡΙΑ 1** **Ο $\nu^{ος}$ όρος μίας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1$ και διαφορά ω είναι:** $\boldsymbol{\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega}$

***Απόδειξη***

Από τον ορισμό της αριθμητικής προόδου έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 = \alpha_1 \\ &\alpha_2 = \alpha_1 + \omega \\ &\alpha_3 = \alpha_2 + \omega \\ &\alpha_4 = \alpha_3 + \omega \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_{\nu-1} = \alpha_{\nu-2} + \omega \\ &\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \omega \end{aligned}\right\} \text{Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε: } \alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$$

**ΘΕΩΡΙΑ 2** **(Αριθμητικός μέσος). Τρείς αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει:**

$$\boldsymbol{2\beta = \alpha + \gamma \quad \text{ή} \quad \beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}}$$

***Απόδειξη***

Έστω α, β, γ τρείς διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Τότε ισχύει:

$$\beta - \alpha = \omega \ \text{ και } \ \gamma - \beta = \omega \Leftrightarrow \beta - \alpha = \gamma - \beta \Leftrightarrow \beta + \beta = \gamma + \alpha \Leftrightarrow 2\beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

## Αποδείξεις στην γεωμετρική πρόοδο

**ΘΕΩΡΙΑ 3** **Ο $\nu^{ος}$ όρος μίας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1$ και λόγο λ είναι:** $\boldsymbol{\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1}}$

*Απόδειξη*

Από τον ορισμό της γεωμετρικής προόδου έχουμε :

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_1 \\ \alpha_2 = \alpha_1\lambda \\ \alpha_3 = \alpha_2\lambda \\ \alpha_4 = \alpha_3\lambda \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\nu-1} = \alpha_{\nu-2}\lambda \\ \alpha_\nu = \alpha_{\nu-1}\lambda \end{array}\right\} \text{Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη παίρνουμε: } \alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1}$$

**ΘΕΩΡΙΑ 4** **(Γεωμετρικός μέσος). Τρείς μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου $\alpha_\nu$ και μόνο αν:**

$$\boldsymbol{\beta^2 = \alpha\gamma}$$

*Απόδειξη*

Έστω $\alpha,\beta,\gamma \neq 0$ τρείς διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Τότε ισχύει:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \lambda \text{ και } \frac{\gamma}{\beta} = \lambda \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha\gamma$$

**ΘΕΩΡΙΑ 5** **Άθροισμα ν διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου. Το άθροισμα των πρώτων ν όρων μίας γεωμετρικής προόδου $\alpha_\nu$ με λόγο $\lambda \neq 1$ είναι: $S_\nu = \alpha_1 \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$ .**

*Απόδειξη*

Έστω: $S_\nu = \alpha_1 + \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \ldots + \alpha_1\lambda^{\nu-2} + \alpha_1\lambda^{\nu-1}$ (1)

Πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της (1) με λ έχουμε:

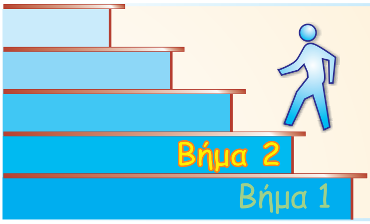
$$\lambda S_\nu = \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \alpha_1\lambda^3 + \ldots + \alpha_1\lambda^{\nu-1} + \alpha_1\lambda^\nu \quad (2)$$

Αφαιρούμε κατά και έχουμε: $\lambda S_\nu - S_\nu = \alpha_1\lambda^\nu - \alpha_1$ ή $S_\nu(\lambda - 1) = \alpha_1(\lambda^\nu - 1)$

και επειδή $\lambda \neq 1$ ισχύει: $S_\nu = \alpha_1 \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$

***Παρατήρηση:***

Αν $\lambda = 1$ τότε όλοι οι όροι είναι ίσοι με τον πρώτο όρο $\alpha_1$ οπότε $S_\nu = \nu\alpha_1$ .

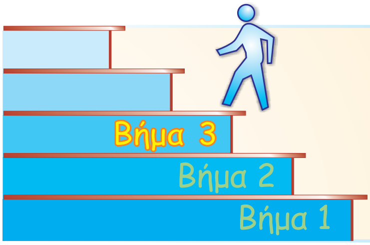



# Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις "κλειδιά"

## Α. Από το σχολικό βιβλίο

**ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.**

| | | |
|---|---|---|
| **§ 3.2** | Α΄ Ομάδα: | 3, 4, 5, 10, 12 |
| | Β΄ Ομάδα: | 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 16 |
| **§ 3.3** | Α΄ Ομάδα: | 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 13 |
| | Β΄ Ομάδα: | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 14 |




## Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

**1.i. Δίνεται η ακολουθία:** $\alpha_\nu = \dfrac{3\nu^3+\nu^2+\nu+2}{\nu^2+\nu+1}$ **με** $\nu \in \mathbb{N}^*$.

**Δείξτε ότι είναι Α.Π.*** .

**ii. Βρείτε ποιος όρος της ισούται με 28.**

**iii. Βρείτε το άθροισμα:** $\alpha_1+\alpha_4+\alpha_7+\ldots+\alpha_{61}$

**iv. Δείξτε ότι:** $6\cdot S_\nu = -3\nu+(\alpha_\nu+2)^2$, **για κάθε** $\nu \in \mathbb{N}^*$.

**Λύση:**

**i.** Εκτελούμε την διαίρεση:

$$\begin{array}{r|l} 3\nu^3+\ \nu^2+\ \nu+2 & \nu^2+\nu+1 \\ \cline{2-2} -3\nu^3-3\nu^2-3\nu & 3\nu\ -2 \\ \hline -2\nu^2-2\nu+2 & \\ 2\nu^2+2\nu-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Άρα $\alpha_\nu = \dfrac{(3\nu-2)\cdot(\nu^2+\nu+1)}{\nu^2+\nu+1} = 3\nu-2$, με $\nu \in \mathbb{N}^*$

• Οπότε για $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu = 3(\nu+1)-2-(3\nu-2)$$
$$\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu = 3\nu+3-2-3\nu+2$$
$$\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu = 3 \iff \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu+3$$

Άρα η $\alpha_\nu$ είναι Α.Π. με: $\alpha_1 = 1$ και $\omega = 3$

**ii.** Έστω: $\alpha_\nu = 28 \iff 3\nu-2 = 28 \iff 3\nu = 30 \iff \nu = 10$

Άρα ο δέκατος όρος της προόδου ισούται με 28.

**iii.** Οι αριθμοί $\alpha_1$ , $\alpha_4$ , $\alpha_7$ ,…,$\alpha_{61}$ είναι οι μ πρώτοι όροι Α.Π. $\beta_\nu$ με $\beta_1 = \alpha_1 = 1$ και διαφορά $\omega' = 3\omega = 3\cdot 3 = 9$ οπότε:

---

* Με τη συντομογραφία **Α.Π.** εννοούμε αριθμητική πρόοδο.

$$\beta_\mu=\beta_1+(\mu-1)\cdot\omega'\Leftrightarrow\alpha_{61}=\alpha_1+(\mu-1)\cdot 9\Leftrightarrow\alpha_1+60\cdot\omega=\alpha_1+(\mu-1)\cdot 9\Leftrightarrow$$
$$180=(\mu-1)\cdot 9\Leftrightarrow 20=\mu-1\Leftrightarrow\mu=21$$

Άρα $\alpha_1+\alpha_4+\alpha_7+\ldots+\alpha_{61}=\dfrac{2\beta_1+20\omega'}{2}\cdot 21=(\beta_1+10\omega')\cdot 21=$

$$=(1+90)\cdot 21=91\cdot 21=1911$$

**iv.** Ισχύουν:

- $6\cdot S_\nu=6\cdot\dfrac{2\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega}{2}\cdot\nu=3\nu\cdot[2+(\nu-1)\cdot 3]=3\nu\cdot(3\nu-1)=9\nu^2-3\nu$
- $-3\nu+(\alpha_\nu+2)^2=-3\nu+(3\nu-2+2)^2=-3\nu+9\nu^2$

Άρα: $6\cdot S_\nu=-3\nu+(\alpha_\nu+2)^2$ με $\nu\in\mathbb{N}^*$.

**2.α. Σε μία Α.Π. $\alpha_\nu$ δίνονται $\alpha_\nu=18$, $S_\nu=88$ και $\omega=2$. Βρείτε τα $\alpha_1$ και ν.**
**β. Βρείτε τέσσερις αριθμούς αν ξέρετε ότι είναι διαδοχικοί όροι μιας Α.Π. με άθροισμα 16 και γινόμενο των δύο μεσαίων το 15**

**Λύση:**

**α.** Ισχύουν:

- $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega\Leftrightarrow 18=\alpha_1+(\nu-1)\cdot 2\Leftrightarrow 18=\alpha_1+2\nu-2\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow 20=\alpha_1+2\nu\Leftrightarrow\alpha_1=20-2\nu$
- $S_\nu=\dfrac{2\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega}{2}\cdot\nu\Leftrightarrow 88=(20-2\nu+\nu-1)\cdot\nu\Leftrightarrow 88=\nu\cdot(-\nu+19)\Leftrightarrow$

$$\nu^2-19\nu+88=0\Leftrightarrow\nu=\frac{-(-19)\pm\sqrt{9}}{2}\Leftrightarrow\nu=\frac{19\pm 3}{2}\Leftrightarrow\nu=11\ \text{ ή }\ \nu=8$$

Οπότε $\nu=11$ και $\alpha_1=-2$
ή
$\nu=8$ και $\alpha_1=4$

**β.** Έστω: $x-3\omega$, $x-\omega$, $x+\omega$, $x+3\omega$, οι ζητούμενοι αριθμοί οπότε ισχύουν:

- $x-3\omega+x-\omega+x+\omega+x+3\omega=16\Leftrightarrow 4x=16\Leftrightarrow x=4$
- $(x-\omega)\cdot(x+\omega)=15\Leftrightarrow x^2-\omega^2=15\Leftrightarrow 16-\omega^2=15\Leftrightarrow\omega^2=1\Leftrightarrow\omega=\pm 1$

Άρα: αν $\omega = 1$, οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι: 1, 3, 5, 7
αν $\omega = -1$, οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι: 7, 5, 3, 1

**3. Δίνονται οι ακολουθίες:** $\alpha_\nu = 3\nu + 1$ **με** $\nu \in \mathbb{N}^*$ **και**
$\beta_\nu = 2^{\nu-1}$ **με** $\nu \in \mathbb{N}^*$

**i. Δείξτε ότι η $\alpha_\nu$ είναι Α.Π. και η $\beta_\nu$ Γ.Π.***

**ii. Βρείτε το άθροισμα:** $A = (4+1)+(7+2)+(10+4)+\ldots+(31+512)$

**iii. Μεταξύ του $\beta_2$ και του $\alpha_{17}$ παρεμβάλλονται οι αριθμοί $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_\mu$ και όλοι μαζί αποτελούν την Α.Π. $\gamma_\nu$ με διαφορά το $\omega'$.**

**α. Δείξτε ότι:** $\omega' = \dfrac{50}{\mu+1}$

**β. Αν ο έκτος ενδιάμεσος της $\gamma_\nu$ είναι ο έκτος όρος της $\beta_\nu$, βρείτε τα $\omega'$ και μ.**

**Λύση:**

**i.** • Για $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει: $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = [3(\nu+1)+1] - (3\nu+1) = 3\nu + 3 + 1 - 3\nu - 1 = 3$

Άρα η $\alpha_\nu$ είναι Α.Π., με διαφορά $\omega = 3$ και πρώτο όρο $\alpha_1 = 4$.

• Για $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει: $\dfrac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} = \dfrac{2^\nu}{2^{\nu-1}} \Leftrightarrow \dfrac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} = 2 \Leftrightarrow \beta_{\nu+1} = 2\beta_\nu$

Άρα η $\beta_\nu$ είναι Γ.Π., με λόγο $\lambda = 2$ και πρώτο όρο $\beta_1 = 1$.

**ii.** Ισχύει: $A = (4+1)+(7+2)+(10+4)+\ldots+(31+512)$

$A = (4+7+10+\ldots+31)+(1+2+4+\ldots+512)$

• Οι αριθμοί 4, 7, 10,..., 31 είναι οι ρ πρώτοι όροι της Α.Π. $\alpha_\nu$ άρα:

$\alpha_\rho = 31 \Leftrightarrow 3\rho + 1 = 31 \Leftrightarrow 3\rho = 30 \Leftrightarrow \rho = 10$

Οπότε: $4+7+10+\ldots+31 = \dfrac{4+31}{2}\cdot 10 = 175$

• Ομοίως οι αριθμοί 1, 2, 4,..., 512 είναι οι 10 πρώτοι όροι της Γ.Π. $\beta_\nu$.

Οπότε: $1+2+4+\ldots+512 = \dfrac{\beta_1\cdot(\lambda^{10}-1)}{\lambda-1} = 2^{10} - 1 = 1023$

Άρα: $A = 175 + 1023 = 1198$

* Με τη συντομογραφία **Γ.Π.** εννοούμε γεωμετρική πρόοδο.

**iii. α.** Είναι: $\beta_2 = 2^{2-1} = 2$, $\alpha_{17} = 3\cdot 17 + 1 = 52$, οπότε οι αριθμοί $2, x_1, x_2, x_\mu, 52$ είναι οι $\mu+2$ πρώτοι όροι της Α.Π. $\gamma_\nu$ με $\gamma_1 = 2$ και διαφορά $\omega'$ τότε:

$$\gamma_{\mu+2} = 52 \Leftrightarrow \gamma_1 + (\mu+1)\cdot\omega' = 52 \Leftrightarrow 2 + (\mu+1)\cdot\omega' = 52 \Leftrightarrow$$

$$(\mu+1)\cdot\omega' = 50 \Leftrightarrow \omega' = \frac{50}{\mu+1}$$

**β.** Ο έκτος ενδιάμεσος είναι ο: $\gamma_7 = \gamma_1 + 6\cdot\omega' = 2 + 6\cdot\omega'$

Όμως: $\gamma_7 = \beta_6 \Leftrightarrow 2 + 6\cdot\omega' = \beta_1\cdot\lambda^5 \Leftrightarrow 2 + 6\cdot\omega' = 32 \Leftrightarrow 6\cdot\omega' = 30 \Leftrightarrow \omega' = 5$

Άρα: $\mu = 9$

**4.i. Δίνεται η Α.Π. $\beta_\nu$ με $\beta_1 = 2$ και $S_4 = 26$. Βρείτε τον γενικό όρο $\beta_\nu$ της προόδου.**

**ii. Δίνεται η ακολουθία: $\alpha_\nu = 3\nu + 3\cdot 2^\nu - 1$, με $\nu \in \mathbb{N}^*$.**

**Δείξτε οτι η ακολουθία: $\gamma_\nu = \alpha_\nu - \beta_\nu$, με $\nu \in \mathbb{N}^*$, είναι Γ.Π.**

**iii. Βρείτε το άθροισμα: $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{10}$**

**Λύση:**

**i.** Ισχύει: $S_4 = 26 \Leftrightarrow \frac{2\beta_1 + 3\omega}{2}\cdot 4 = 26 \Leftrightarrow 2(2\beta_1 + 3\omega) = 26 \Leftrightarrow$

$2\beta_1 + 3\omega = 13 \Leftrightarrow 4 + 3\omega = 13 \Leftrightarrow \omega = 3$

Άρα: $\beta_\nu = \beta_1 + (\nu-1)\cdot\omega \Leftrightarrow \beta_\nu = 2 + (\nu-1)\cdot 3 \Leftrightarrow \beta_\nu = 3\nu - 1$, με $\nu \in \mathbb{N}^*$ ο γενικός όρος της Α.Π.

**ii.** Για $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει: $\gamma_\nu = \alpha_\nu - \beta_\nu \Leftrightarrow \gamma_\nu = 3\nu + 3\cdot 2^\nu - 1 - 3\nu + 1 \Leftrightarrow \gamma_\nu = 3\cdot 2^\nu$

οπότε: $\frac{\gamma_{\nu+1}}{\gamma_\nu} = \frac{3\cdot 2^{\nu+1}}{3\cdot 2^\nu} = 2$, δηλαδή $\gamma_{\nu+1} = 2\gamma_\nu$.

Άρα η $\gamma_\nu$ είναι Γ.Π. με πρώτο όρο $\gamma_1 = 6$ και λόγο $\lambda = 2$.

**iii.** $S = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{10} \Leftrightarrow S = (\beta_1 + \gamma_1) + (\beta_2 + \gamma_2) + \ldots + (\beta_{10} + \gamma_{10}) \Leftrightarrow$

$$S = (\beta_1 + \beta_2 + \ldots \beta_{10}) + (\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{10}) \Leftrightarrow$$

$$S=\frac{2\beta_1+9\omega}{2}\cdot 10+\frac{\gamma_1\cdot(\lambda^{10}-1)}{\lambda-1}\Leftrightarrow S=5\cdot(4+27)+6\cdot(2^{10}-1)\Leftrightarrow$$

$$S=155+6\cdot 1023\Leftrightarrow S=6293$$

**5. Δίνεται Γ.Π. $\alpha_\nu$ για την οποία ισχύουν:**

$$\boldsymbol{\alpha_6=27\alpha_3 \quad \text{και} \quad \alpha_2+\alpha_4+\alpha_6=273}$$

**i. Βρείτε την πρόοδο.**

**ii. Αν $\dfrac{S_{3\nu}}{S_\nu}=91$, βρείτε το $\nu\in\mathbb{N}^*$.**

**iii. Λύστε την εξίσωση: $\eta\mu^2 x\cdot \sigma\upsilon\nu(\nu\cdot x)=\dfrac{1}{8}$**

**Λύση:**

**i.** Ισχύουν:

- $\alpha_6=27\alpha_3\Leftrightarrow \alpha_1\cdot\lambda^5=27\cdot\alpha_1\lambda^2\Leftrightarrow\lambda^3=27\Leftrightarrow\lambda=\sqrt[3]{27}=3$
- $\alpha_2+\alpha_4+\alpha_6=273\Leftrightarrow\alpha_1\cdot\lambda+\alpha_1\cdot\lambda^3+\alpha_1\cdot\lambda^5=273\Leftrightarrow$

  $3\alpha_1+27\alpha_1+243=273\Leftrightarrow 273\alpha_1=273\Leftrightarrow\alpha_1=1$

**ii.** Ισχύει:

$$S_{3\nu}=91\cdot S_\nu\Leftrightarrow\frac{\alpha_1\cdot(\lambda^{3\nu}-1)}{\lambda-1}=91\cdot\frac{(\lambda^\nu-1)}{\lambda-1}\Leftrightarrow\frac{3^{3\nu}-1}{2}=91\cdot\frac{3^\nu-1}{2}\Leftrightarrow$$

$$(3^\nu-1)\cdot(3^{2\nu}+3^\nu+1)=91\cdot(3^\nu-1)\Leftrightarrow 3^{2\nu}+3^\nu+1=91\Leftrightarrow 3^{2\nu}+3^\nu-90=0$$

Θέτουμε $y=3^\nu$ και η εξίσωση γίνεται:

$$y^2+y-90=0\Leftrightarrow y=\frac{-1\pm\sqrt{361}}{2}\Leftrightarrow y=\frac{-1\pm 19}{2}\Leftrightarrow y=9,\ y=-10\quad 3^\nu=3^2\Leftrightarrow\nu=2$$

**iii.** Λύνουμε τώρα την εξίσωση

$$\eta\mu^2x\cdot\sigma\upsilon\nu(\nu\cdot x)=\frac{1}{8}\Leftrightarrow\eta\mu^2x\cdot\sigma\upsilon\nu(2x)=\frac{1}{8}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu 2x=\frac{1}{8}\Leftrightarrow(1-\sigma\upsilon\nu 2x)\cdot\sigma\upsilon\nu 2x=\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$

$$4\sigma\upsilon\nu^2 2x-4\sigma\upsilon\nu 2x+1=0\Leftrightarrow(2\sigma\upsilon\nu 2x-1)^2=0\Leftrightarrow$$

$$2\sigma\upsilon\nu 2x-1=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu 2x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow$$

$$2x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\kappa\pi\pm\frac{\pi}{6},\ \mu\varepsilon\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

**6.** **Δίνεται Γ.Π. $\alpha_\nu$ με λόγο $\lambda \neq 1$ στην οποία ισχύουν:**

$$\frac{S_6}{S_3}=9 \quad \text{και} \quad \alpha_5=48$$

**i. Βρείτε την πρόοδο.**

**ii. Αν τώρα $\beta_\nu$ Α.Π. με $\beta_{16}=\alpha_5-1$ και $S_5=\alpha_5-8$, βρείτε την πρόοδο.**

**Λύση:**

**i.** • Ισχύει:

$$\frac{S_6}{S_3}=9 \Leftrightarrow S_6=9\cdot S_3 \Leftrightarrow \frac{\alpha_1\cdot(\lambda^6-1)}{\lambda-1}=9\cdot S_3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha_1\cdot(\lambda^3-1)}{\lambda-1}\cdot(\lambda^3+1)=9\cdot S_3 \Leftrightarrow S_3\cdot(\lambda^3+1)=9\cdot S_3 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^3+1=9 \Leftrightarrow \lambda^3=8 \Leftrightarrow \lambda=\sqrt[3]{8}=2$$

• Ακόμα ισχύει: $\alpha_5=48 \Leftrightarrow \alpha_1\cdot\lambda^4=48 \Leftrightarrow \alpha_1\cdot 16=48 \Leftrightarrow \alpha_1=3$

**ii.** Ισχύουν:

• $\beta_{16}=\alpha_5-1 \Leftrightarrow \beta_1+15\omega=47$

• $S_5=\alpha_5-8 \Leftrightarrow \dfrac{2\beta_1+4\omega}{2}\cdot 5=40 \Leftrightarrow \dfrac{2(\beta_1+2\omega)}{2}\cdot 5=40 \Leftrightarrow \beta_1+2\omega=8$

• Λύνουμε τώρα το σύστημα: $\begin{cases}\beta_1+15\omega=47\\ \beta_1+2\omega=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta_1+15\omega=47\\ -\beta_1-2\omega=-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\omega=3\\ \beta_1=2\end{cases}$

**7.i. Αν $\alpha_\nu$ Γ.Π. με $\lambda\neq 1$, δείξτε ότι:** $\quad S_\nu=\dfrac{\alpha_\nu\cdot\lambda-\alpha_1}{\lambda-1}$

**ii. Σε μία Γ.Π. $\alpha_\nu$ δίνονται: $\alpha_1=5$ , $\alpha_\nu=1280$ και $S_\nu=2555$. Βρείτε τα λ, ν.**

**iii. Βρείτε τρείς αριθμούς που να είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π. αν ξέρετε ότι έχουν γινόμενο 4λ και άθροισμα 2ν+3.**

**Λύση:**

**i.** Ισχύει: $\quad S_\nu=\dfrac{\alpha_1\cdot(\lambda^\nu-1)}{\lambda-1}=\dfrac{\alpha_1\cdot\lambda^\nu-\alpha_1}{\lambda-1}=\dfrac{\alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1}\cdot\lambda-\alpha_1}{\lambda-1}=\dfrac{\alpha_\nu\cdot\lambda-\alpha_1}{\lambda-1}$

**ii.** Ισχύει: $\quad S_\nu=\dfrac{\alpha_\nu\cdot\lambda-\alpha_1}{\lambda-1} \Leftrightarrow (\lambda-1)\cdot S_\nu=\alpha_\nu\cdot\lambda-\alpha_1 \Leftrightarrow$

$$\lambda\cdot S_\nu - S_\nu = \alpha_\nu\cdot\lambda - \alpha_1 \Leftrightarrow \lambda\cdot S_\nu - \lambda\cdot\alpha_\nu = S_\nu - \alpha_1 \Leftrightarrow$$

$$\lambda\cdot(S_\nu - \alpha_\nu) = S_\nu - \alpha_1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{S_\nu - \alpha_1}{S_\nu - \alpha_\nu} = \frac{2555-5}{2555-1280} = \frac{2550}{1275} = 2$$

Ακόμα ισχύει: $\alpha_\nu = \alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow 1280 = 5\cdot 2^{\nu-1} \Leftrightarrow 256 = 2^{\nu-1} \Leftrightarrow$

$2^8 = 2^{\nu-1} \Leftrightarrow 8 = \nu - 1 \Leftrightarrow \nu = 9$

**iii.** Έστω $\frac{x}{\rho}$, $x$, $x\rho$ οι ζητούμενοι αριθμοί τότε:

- $\frac{x}{\rho}\cdot x\cdot x\rho = 4\lambda = 8 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$

- $\left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + x^2 + (x\rho)^2 = 2\nu + 3 = 21 \Leftrightarrow \frac{4}{\rho^2} + 4 + 4\rho^2 = 21 \Leftrightarrow 4\rho^2 + \frac{4}{\rho^2} - 17 = 0$

Θέτουμε $y = \rho^2 > 0$ και η εξίσωση γίνεται:

$$4y + \frac{4}{y} - 17 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 - 17y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-(-17)\pm\sqrt{15^2}}{2\cdot 4} \Leftrightarrow y = \frac{17\pm 15}{8} \Leftrightarrow$$

$$y = 4 \quad ή \quad y = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\rho^2 = 4 \quad ή \quad \rho^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \quad \rho = 2 \quad ή \quad \rho = -2 \quad ή \quad \rho = \frac{1}{2} \quad ή \quad \rho = -\frac{1}{2}$$

Οπότε οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι: **2, 4, 8** ή **–2, 4, –8** ή **8, 4, 2** ή **–8, 4, –2**.

**8.α. Δίνεται Α.Π. $\alpha_\nu$ με $\alpha_1 = εφx$ και $\omega = \frac{\sqrt{3}}{5}$. Βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ο:** $\frac{2ημ\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{συνx}$

**β. Αν οι αριθμοί $συν\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $συν\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$, είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π. βρείτε το x με:** $0 < x < \frac{\pi}{2}$

**Λύση:**

**α.** Έστω: $\alpha_\nu = \dfrac{2\eta\mu\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\cdot\omega = \dfrac{2\eta\mu\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow$

$$\varepsilon\varphi x + (\nu-1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{2\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + (\nu-1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{5} = 2\cdot\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + \sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu\frac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x + (\nu-1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{5}\cdot\sigma\upsilon\nu x = 2\cdot\left(\eta\mu x\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu x\right) \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x + \frac{\sqrt{3}}{5}\cdot(\nu-1)\cdot\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x + \sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{3}\cdot(\nu-1)\cdot\sigma\upsilon\nu x = 5\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \nu-1=5 \Leftrightarrow \nu=6$$

Άρα ο ζητούμενος όρος είναι ο $\alpha_6$.

**β.** Οι αριθμοί $\sigma\upsilon\nu\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π.

Οπότε: $\sigma\upsilon\nu\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} + \eta\mu x\cdot\eta\mu\frac{\pi}{6}\right)\cdot\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} - \eta\mu x\cdot\eta\mu\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{6} - \eta\mu^2 x\cdot\eta\mu^2\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x\cdot\frac{3}{4} - \eta\mu^2 x\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$3\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x = 2 \Leftrightarrow 3\sigma\upsilon\nu^2 x - (1-\sigma\upsilon\nu^2 x) = 2 \Leftrightarrow$$

$$3\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 + \sigma\upsilon\nu^2 x = 2 \Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu^2 x = 3 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$\sigma\upsilon\nu x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ή $\sigma\upsilon\nu x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ απορρίπτεται διότι $\sigma\upsilon\nu x > 0$

$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \dfrac{\pi}{6}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$. Όμως $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, άρα $x = \dfrac{\pi}{6}$

**9.** **Σε πληθυσμό $10^6$ χιλιάδων μικροβίων ρίχνεται τοξική ουσία οπότε μειώνεται ο πληθυσμός τους κατά το $90\%$ των υπαρχόντων.**

**α.** **Βρείτε τον αριθμό των μικροβίων ν ώρες από την στιγμή που ερίφθη η τοξική ουσία.**

**β.** **Βρείτε τον πληθυσμό των μικροβίων μετά από 4 ώρες.**

**γ.** **Σε 4 ώρες απο την έναρξη του πειράματος ρίχνεται μία χημική ουσία που καταργεί την δράση της τοξικής ουσίας και προκαλεί αύξηση κατά 100 χιλιάδες ανά ώρα. Βρείτε σε πόσες ώρες από την στιγμή ρίψης της χημικής ουσίας ο πληθυσμός θα ξαναγίνει $10^6$ χιλιάδες μικρόβια.**

**Λύση:**

**α.** Αρχικός αριθμός μικροβίων $\alpha_0 = 10^6$ χιλιάδες μικρόβια.

Μετά το τέλος της $1^{\eta\varsigma}$ ώρας ο πληθυσμός είναι: $\alpha_1 = \alpha_0 - 0,9 \cdot \alpha_0 = 0,1 \cdot \alpha_0 = 10^5$

Μετά το τέλος της $2^{\eta\varsigma}$ ώρας ο πληθυσμός είναι: $\alpha_2 = 0,1 \cdot \alpha_1$

..........................................................................................................

Μετά το τέλος της $\nu^{\eta\varsigma}$ ώρας ο πληθυσμός είναι: $\alpha_\nu = 0,1 \cdot \alpha_{\nu-1}$

Δηλαδή $\alpha_\nu$ γεωμ. πρόοδος με $\alpha_1 = 10^5$ και $\lambda = 0,1$.

**β.** Είναι: $\alpha_4 = \alpha_1 \cdot \lambda^3 = 10^5 \cdot (0,1)^3 = 100$ χιλιάδες μικρόβια.

**γ.** Μετά το 4ωρο ο πληθυσμός είναι: $\beta_0 = 100$ χιλιάδες μικρόβια.

Μετά το τέλος $1^{\eta\varsigma}$ ώρας ο πληθυσμός είναι: $\beta_1 = \beta_0 + 100 = 200$ χιλ. μικρόβια

Μετά το τέλος της $2^{\eta\varsigma}$ ώρας ο πληθυσμός είναι: $\beta_2 = \beta_1 + 100$ χιλ. μικρόβια

..........................................................................................................

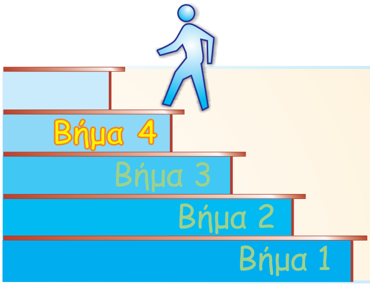
Μετά το τέλος της $\nu^{\eta\varsigma}$ ώρας ο πληθυσμός είναι: $\beta_\nu = \beta_{\nu-1} + 100$ χιλ. μικρόβια

Δηλαδή $\beta_\nu$ α.π. με $\beta_1 = 200$ και $\omega = 100$.

Λύνουμε την εξίσωση $\beta_\nu = 10^6$:

$$\beta_\nu = 10^6 \Leftrightarrow \beta_1 + (\nu - 1)\cdot\omega = 10^6 \Leftrightarrow 200 + (\nu-1)\cdot 100 = 10^6 \Leftrightarrow$$

$$2 + \nu - 1 = 10^4 \Leftrightarrow \nu = 10^4 - 1 = 10.000 - 1 = 9.999 \text{ ώρες}$$




## Λύνουμε μόνοι μας

**1. i.** Το πολυώνυμο $P(x)$ όταν διαιρείται με το $x-1$ αφήνει υπόλοιπο 3 ενώ όταν διαιρείται με το $x-2$ αφήνει υπόλοιπο 9. Βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ δια του $x^2-3x+2$, έστω $U(x)$.

**ii.** Αν $\alpha_\nu = U(\nu)$ με $\nu \in \mathbb{N}^*$ ακολουθία δείξτε ότι είναι Α.Π. και κατόπιν βρείτε ποιος όρος ισούται με 57 και πόσοι πρώτοι όροι έχουν άθροισμα 2700.

**2.** Δίνεται το πολυώνυμο: $q(x)=x^3-2x^2+\alpha x+\beta$ το οποίο όταν διαιρεθεί με το $G(x)=x^2-4$ δίνει υπόλοιπο $U(x)=-5x+10$.

**α.** Βρείτε τα $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

**β.** Λύστε την εξίσωση $q(x)=0$.

**γ.** Θεωρούμε τώρα την Α.Π. $\alpha_\nu$ με πρώτο όρο την μικρότερη ρίζα της εξίσωσης $q(x)=0$ και διαφορά την μεγαλύτερη ρίζα.

Βρείτε: **i.** Ποιος όρος ισούται με το 24.

**ii.** Πόσοι πρώτοι όροι έχουν άθροισμα 15.

**3.** **Δίνεται το πολυώνυμο:** $q(x) = x^4 - 4x^3 - 11x^2 - 4x - 12$

**i.** **Λύστε την εξίσωση:** $q(x) = 0$

**ii.** **Βρείτε πόσους αριθμητικούς ενδιάμεσους πρέπει να παρεμβάλλουμε μεταξύ της μικρότερης και μεγαλύτερης ρίζας της εξίσωσης $q(x) = 0$ αν γνωρίζουμε ότι το άθροισμα του δεύτερου και του τελευταίου ενδιάμεσου είναι $\frac{9}{2}$.**

**4.** **Οι αριθμοί $2\alpha^2+\alpha,\ \alpha^3,\ \alpha+4$ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π.**

**α. Βρείτε το α.**

**β. Δίνεται η Α.Π. $\beta_\nu$ και το πολυώνυμο:**

$$q(x)=\beta_1\cdot x^4+\beta_2\cdot x^3+\beta_3\cdot x^2+\beta_4\cdot x-16,$$

**που έχει παράγοντα το $x-1$ ενώ όταν διαιρείται με το $x-\alpha$ αφήνει υπόλοιπο 58. Βρείτε την πρόοδο.**

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

**5.** **Δίνεται Α.Π. $\alpha_\nu$ με διαφορά $\omega>0$. Αν το $\alpha_1$ είναι η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης $x^3-\frac{5}{2}\cdot x^2-\frac{1}{2}\cdot x+3=0$ και η συνάρτηση $f(x)=3\eta\mu(\omega\cdot x)+2$ έχει ελάχιστη θετική περίοδο $\frac{2\pi}{3}$.**

**Βρείτε: i. Τα: $\alpha_1,\ \omega$ ii. Το άθροισμα: $\Sigma=\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7+\ldots+\alpha_{20}$**

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

**6.** Δίνεται η Γ.Π. $\alpha_\nu$ και το πολυώνυμο $q(x)=x^3-\alpha_4\cdot x^2+x-\alpha_7+2$, το οποίο έχει παράγοντα το $x-2$, ενώ όταν διαιρεθεί με το $x+1$ αφήνει υπόλοιπο -9.

α. Βρείτε την πρόοδο.

β. Βρείτε ποιος όρος της προόδου ισούται με 64 .

γ. Λύστε τις εξισώσεις: $q(x)=0$, $q(-2\sigma\upsilon\nu x+1)=0$

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

**7.α.** Αν οι αριθμοί $\alpha,\ \alpha+2\beta,\ 2\alpha+\beta$ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. ενώ οι αριθμοί $(\beta+1)^2,\ \alpha\beta+5,\ (\alpha+1)^2$ είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π., βρείτε τους $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

β. Δείξτε ότι: $\dfrac{\varepsilon\varphi^2\alpha x-\varepsilon\varphi^2\beta x}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha x\cdot\varepsilon\varphi^2\beta x}=\varepsilon\varphi 4x\cdot\varepsilon\varphi 2x$

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

**8.i.** Οι αριθμοί α, β είναι οι δύο πρώτοι όροι μίας Α.Π. ώστε ο 4ος όρος της να είναι κατα 6 μεγαλύτερος του πρώτου. Οι αριθμοί α,β είναι πάλι οι δύο πρώτοι όροι μίας Γ.Π. ώστε ο 3ος όρος της να ισούται με τον 2ο όρο της αυξημένο κατα 6. Βρείτε τους $\alpha\ ,\beta \in \mathbb{R}$ .

**ii.** Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$ και $\varepsilon\varphi 2x = -\frac{\beta}{4\alpha}$ :

**α.** Βρείτε το $\varepsilon\varphi x$ .

**β.** Αν ισχύει $\varepsilon\varphi(x+\omega) = -2$ , βρείτε το ω.

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

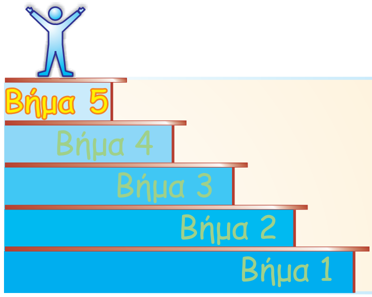
........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................




# Ελέγχουμε τη γνώση μας

## Θέμα 1ο

**α.** Δίνεται Γ.Π. $\alpha_\nu$ με $\lambda \neq 1$, δείξτε ότι: $$S_\nu = \frac{\alpha_1(\lambda^\nu - 1)}{\lambda - 1}$$

*(Μονάδες 10)*

..................................................................................................................

..................................................................................................................

..................................................................................................................

..................................................................................................................

..................................................................................................................

..................................................................................................................

..................................................................................................................

..................................................................................................................

**β.** Δίνεται Α.Π. $\alpha_\nu$ με $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$. Συμπληρώστε τον πίνακα.

| $\alpha_\nu$ | $S_\nu$ | $\nu$ |
|---|---|---|
| | | 10 |
| | 40 | |
| 59 | | |

*(Μονάδες 15)*

## Θέμα 2ο

**α.** Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha^3x^3 - (\alpha-1)x^2 - (2\beta+1)x + 3\alpha^2 + 3$, με α, β ακέραιοι, που έχει παράγοντα το $x-1$, ενώ οι α, β, 5 είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. . Βρείτε τα α, β.

*(Μονάδες 10)*

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

**β.** Αν οι αριθμοί α, $\frac{\beta}{2}$, γ είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π., δείξτε ότι το πολυώνυμο:

$$P(x)=\alpha x^3-(\beta-\alpha)x^2+(\gamma-\beta)x-\gamma$$

έχει μια διπλή ρίζα την οποία και να βρείτε.

*(Μονάδες 15)*

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

## Θέμα 3ο

Δίνεται η ακολουθία $\alpha_\nu=3\cdot 2^{\nu-3}$, με $\nu\in N^*$.

**α.** Δείξτε ότι η $\alpha_\nu$ είναι Γ.Π. και βρείτε το $\alpha_1$ και τον λόγο λ της προόδου.

*(Μονάδες 5)*

**β.** Βρείτε ποιος όρος την ισούται με 48.

*(Μονάδες 5)*

**γ.** Ποιοι πρώτοι όροι της προόδου έχουν άθροισμα 3069;

*(Μονάδες 5)*

**δ.** Βρείτε το άθροισμα: $S=\alpha_6+\alpha_7+\alpha_8+\alpha_9+\alpha_{10}$

*(Μονάδες 10)*

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

## Θέμα 4ο

Ασθενής (Άγγλος) παίρνει δόση 10mg ενός φαρμάκου κάθε 4ωρο. Στο χρονικό αυτό διάστημα διασπάται το $1/4$ της ποσότητας του φαρμάκου που βρίσκεται στην αρχή του 4ώρου στο αίμα του ασθενούς.

**α.** Βρείτε την ακολουθία $\alpha_\nu$ που εκφράζει την ποσότητα του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς στο τέλος ν - 4ώρων.

*(Μονάδες 5)*

**β.** Βρείτε την ποσότητα του φαρμάκου που υπάρχει στο αίμα μόλις πάρει την 3η δόση.

*(Μονάδες 10)*

**γ.** Βρείτε την ποσότητα του φαρμάκου που έχει στο αίμα του ο ασθενής στο τέλος του πρώτου 24ώρου.

*(Μονάδες 10)*

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................