Κεφάλαιο 3^o

Διαφορικός λογισμός

Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο αυτό θα πρέπει να είναι σε θέση:

1. Να γνωρίζει τον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης σε ένα σημείο x_0 και να τον ερμηνεύει ως ρυθμό μεταβολής.

2. Να γνωρίζει τις έννοιες ταχύτητα και επιτάχυνση κινητού, οριακό κόστος, οριακή είσπραξη, οριακό κέρδος και τη σχέση τους με την έννοια του παραγώγου.

3. Να γνωρίζει σε ποιά σημεία της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης ορίζεται η εφαπτομένη και να μπορεί κάθε φορά να σχηματίζει την εξίσωση της.

4. Να γνωρίζει:

- ✓ ότι κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση σε σημείο x_0 είναι συνεχής στο σημείο αυτό
- ✓ τις παραγώγους βασικών συναρτήσεων
- ✓ τον κανόνα της αλυσίδας και
- ✓ να μπορεί με τη βοήθειά τους να βρίσκει παραγώγους συναρτήσεων.
- ✓ τα θεωρήματα: Rolle, Μέσης Τιμής και Fermat και να μπορεί να τα εφαρμόζει σε απλές ασκήσεις.

5. Να μπορεί να προσδιορίζει τα διαστήματα στα οποία μια συνάρτηση είναι:

- ✓ Σταθερή
- ✓ γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα
- ✓ κυρτή ή κοίλη
- ✓ και να βρίσκει:

  α. τα τοπικά ακρότατα και **β.** τα σημεία καμπή της.

6. Να μπορεί να βρίσκει το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης και το σύνολο λύσεων μιας εξίσωσης $f(x)=0$.

7. Να μπορεί να εφαρμόζει τους κανόνες de L’ Hospital στον υπολογισμό ορίων.

8. Να μπορεί να βρίσκει τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

9. Να μπορεί να χαράζει τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης με τη βοήθεια των παραγώγων.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ: Τύποι - Βασικές έννοιες

Ορισμός παράγωγου αριθμού

Ορισμός 1

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη** σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

Δηλαδή: $$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Αν θέσουμε $x-x_0=h \Leftrightarrow x=x_0+h$ τότε έχουμε: $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Ορισμός 2

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ,αν και μόνο αν ,υπάρχουν στο R τα όρια: $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ίσα.

Τα παραπάνω όρια ονομάζονται **πλευρικές παράγωγοι στο x_0.**

Εξίσωση εφαπτομένης

Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός έστω λ, τότε ορίζουμε ως **εφαπτομένη** της C_f στο σημείο Α την ευθεία (ε) που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Δηλαδή , αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0 ($\lambda=f'(x_0)=\varepsilon\varphi\omega$),

οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) είναι:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

Παράγωγος και συνέχεια

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ'ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

α. Αν $f(x)=c,\ c\in R$ τότε $f'(x)=0$ $\qquad (c)'=0$

β. Αν $f(x)=x$ τότε $f'(x)=1$ $\qquad (x)'=1$

γ. Αν $f(x)=x^\nu$ $\nu\in N\text{-}\{0,1\}$ τότε $f'(x)=\nu\cdot x^{\nu-1}$ $\qquad (x^\nu)'=\nu\cdot x^{\nu-1}$

δ. Αν $f(x)=\sqrt{x},\ x\in[0,+\infty)$ (στο $x=0$ δεν είναι παραγωγίσιμη)

Για $x\in(0,+\infty)$ είναι: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad \left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

ε. Αν $f(x)=\eta\mu x$ τότε $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$ $\qquad (\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$

στ. $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ τότε $f'(x)=-\eta\mu x$ $\qquad (\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$

ζ. Αν $f(x)=e^x$ τότε $f'(x)=e^x$ $\qquad (e^x)'=e^x$

η. Αν $f(x)=\ln x,\ x>0$ τότε $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ $\qquad (\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

Κανόνες παραγώγισης

α. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η συνάρτηση $(f+g)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

β. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η συνάρτηση $(f\cdot g)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με:

$$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

Αν $c\in R$ και f παραγωγίσιμη στο x_0 τότε: $\qquad (cf)'(x_0)=c\cdot f'(x_0)$

γ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0)\neq 0$ τότε η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

- Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η σύνθεση της g με την f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$$

• Έστω η συνάρτηση $h(x)=f(g(x))$ με την $g(x)$ να είναι παραγωγίσιμη στο Α και την $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $g(A)$. Η $h=fog$ είναι παραγωγίσιμη στο Α με $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$ ή $\frac{dh}{dx}=\frac{dh}{du}\frac{du}{dx}$, όπου $u=g(x)$. (Κανόνας αλυσίδας).

Αναφέρουμε τις παραγώγους βασικών σύνθετων συναρτήσεων μόνο τυπικά
(χωρίς το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων)

Συνάρτηση	Παράγωγος	Συνάρτηση	Παράγωγος
f^{ν}	$\nu\cdot f^{\nu-1}\cdot f'$	$\sqrt{f}$	$\frac{1}{2\sqrt{f}}f'$
ημf	$\text{συν}f\cdot f'$	συνf	$-\text{ημ}f\cdot f'$
εφf	$\frac{1}{\text{συν}^2 f}\cdot f'$	σφf	$-\frac{1}{\text{ημ}^2 f}\cdot f'$
e^f	$e^f\cdot f'$	$\ln f$	$\frac{1}{f}f'$
$\alpha^f, \alpha>0$	$\alpha^f\ln\alpha\cdot f'$	$\ell og_{\alpha}f,\ 0<\alpha\neq 1$	$\frac{1}{\ell n\alpha}\cdot\frac{1}{f}\cdot f'$

Θεώρημα Rolle

Αν για μία συνάρτηση f ισχύουν ότι : είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β]
είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha)=f(\beta)$ τότε: υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε : $f'(\xi)=0$,
δηλαδή υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της παραγώγου στο διάστημα (α,β).

Θεώρημα μέσης τιμής

Αν για μία συνάρτηση f ισχύουν ότι: είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β]
είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)
τότε: υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Συνέπειες του θεωρήματος Μέσης Τιμης

Πρόταση 1

Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ ισχύει $f'(x)=0$ τότε η f είναι σταθερή στο Δ δηλαδή $f(x)=c$ για κάθε $x\in\Delta$.

Πρόταση 2
Αν οι f, g είναι συνεχείς σε διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει $f'(x) = g'(x)$ τότε: $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$.

Θεώρημα 1
Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ, τότε:
Αν $f'(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ, η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο Δ.
Αν $f'(x) < 0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ, η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο Δ.

Θεώρημα 2 (Fermat)
Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε εσωτερικό σημείο x_0 του Δ στο οποίο παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, τότε είναι: $f'(x_0) = 0$.

Θεώρημα 3
Έστω συνάρτηση f **συνεχής** στο (α, β).

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, x_0) και γνησίως φθίνουσα στο (x_0, β) τότε η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στη θέση x_0.

Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (α, x_0) και γνησίως αύξουσα στο (x_0, β) τότε η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στη θέση x_0.
ή με άλλη διατύπωση :
Έστω f συνάρτηση **συνεχής** στο (α, β) και παραγωγίσιμη σ' αυτό με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 του (α, β).

Αν $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$

και $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (x_0, \beta)$, τότε :

η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στη θέση x_0 το $f(x_0)$.

Αν $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$

και $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (x_0, \beta)$, τότε :

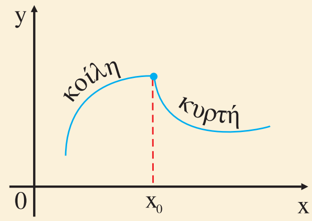
η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στη θέση x_0 το $f(x_0)$.

Αν η f΄ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε:
i. το $f(x_0)$ δεν είναι τ. ακρότατο
ii. η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.

Αν $f''(x) > 0$, για κάθε x εσωτερικό του Δ τότε η f είναι κυρτή στο Δ.
Αν $f''(x) < 0$, για κάθε x εσωτερικό του Δ τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

Πως ορίζεται το σημείο καμπής μιας συνάρτησης.
Μια συνάρτηση μπορεί να αλλάζει απο κυρτή σε κοίλη ή απο κοίλη σε κυρτή.
Αν αυτό συμβαίνει σε σημείο που η γραφική παράσταση της f δέχεται εφαπτομένη τότε το σημείο αυτό λέγεται **σημείο καμπής** της συνάρτησης.

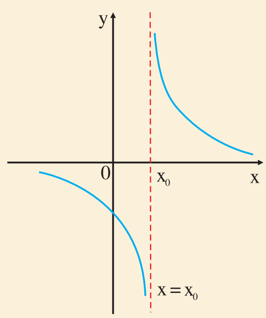


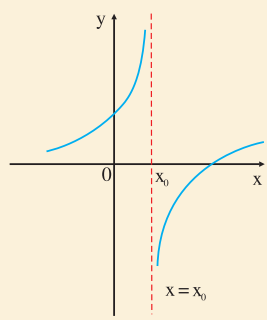
Θεώρημα

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε το $f''(x_0) = 0$.

1. Κατακόρυφη ασύμπτωτη

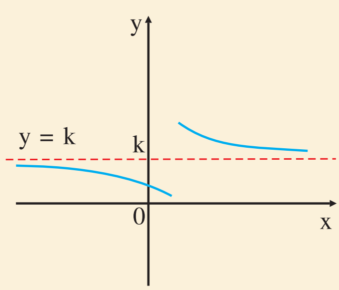
Η ευθεία $x = x_0$ χαρακτηρίζεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

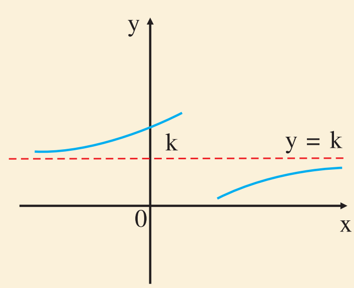




2. Οριζόντια ασύμπτωτη

Αν για μια συνάρτηση f ισχύει: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = k \in R$ ή $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = k \in R$, τότε ορίζουμε οριζόντια ασύμπτωτη της C_f την ευθεία $y = k$ στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ αντίστοιχα.



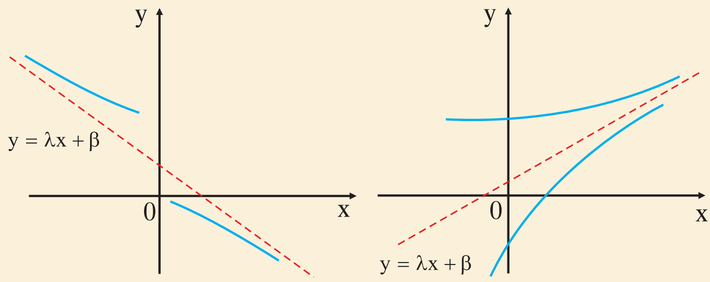


Πλάγια ασύμπτωτη

Ορίζουμε την ευθεία $y=\lambda x+\beta$ ως πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ αν :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0 \text{ ή } \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0$$

αντίστοιχα .



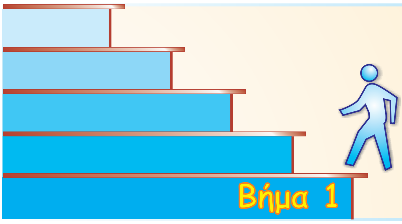
πλάγια ασύμπτωτη της f

Θεώρημα

Η $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$ αν και μόνον αν :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in R \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta\in R \text{ ή}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in R \text{ και } \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta\in R \text{ αντίτοιχα.}$$



Μαθαίνουμε τις αποδείξεις

ΘΕΩΡΙΑ 1 **Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0, τι προκύπτει για την παραγωγισιμότητα της f στο χ₀ ;**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$ έχουμε

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\text{, οπότε}$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)$$

$=f'(x_0)\cdot 0=0$, αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0, τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

ΘΕΩΡΙΑ 2 **Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x)=c\,,c\in R$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=0$, δηλαδή**

$$(c)'=0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν x_0 είναι ένα τυχαίο στοιχείο του R , τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0\,.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0,$$

δηλαδή $(c)'=0$.

ΘΕΩΡΙΑ 3 **Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=1$, δηλαδή**

$$(x)'=1$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν x_0 είναι ένα τυχαίο στοιχείο του R, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}1=1,$$

δηλαδή $(x)'=1$.

ΘΕΩΡΙΑ 4 **Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^\nu, \nu\in N-\{0,1\}$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$, δηλαδή**

$$(x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν x_0 είναι ένα τυχαίο στοιχείο του R, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^\nu-x_0^\nu}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1},$$

δηλαδή $(x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}$.

ΘΕΩΡΙΑ 5 **Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή**

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν x_0 είναι ένα τυχαίο στοιχείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

ΘΕΩΡΙΑ 6 **Έστω συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$, δηλαδή**

$$(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για κάθε $x\in \mathrm{R}$ και $h\neq 0$ ισχύει :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\eta\mu(x+h)-\eta\mu x}{h}=\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu h+\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu h-\eta\mu x}{h}$$

$$=\eta\mu x\cdot\frac{(\sigma\upsilon\nu h-1)}{h}+\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}.$$

Επειδή

$$\lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu h}{h}=1 \quad \text{και} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}=0,$$

έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\text{ημ}x\cdot 0+\text{συν}x\cdot 1=\text{συν}x\,.$$

Δηλαδή, $(\text{ημ}x)'=\text{συν}x$.

ΘΕΩΡΙΑ 7 **Έστω η συνάρτηση $f(x)=\text{συν}x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=-\text{ημ}x$, δηλαδή**

$$(\text{συν}x)'=-\text{ημ}x$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για κάθε $x\in \mathbb{R}$ και $h\neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\text{συν}(x+h)-\text{συν}x}{h}=\frac{\text{συν}x\cdot\text{συν}h-\text{ημ}x\cdot\text{ημ}h-\text{συν}x}{h}$$

$$=\text{συν}x\cdot\frac{\text{συν}h-1}{h}-\text{ημ}x\cdot\frac{\text{ημ}h}{h}\,,$$

οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\text{συν}x\cdot\frac{\text{συν}h-1}{h}\right)-\lim_{h\to 0}\left(\text{ημ}x\cdot\frac{\text{ημ}h}{h}\right)$$

$$=\text{συν}x\cdot 0-\text{ημ}x\cdot 1=-\text{ημ}x\,.$$

Δηλαδή, $(\text{συν}x)'=-\text{ημ}x$.

ΘΕΩΡΙΑ 8 **Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:**

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x\neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\,.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

δηλαδή $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

ΘΕΩΡΙΑ 9 **Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}, \nu\in N^*$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή**

$$(x^{-\nu})'=-\nu x^{-\nu-1}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για κάθε $x\in R^*$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})'=\left(\frac{1}{x^\nu}\right)'=\frac{(1)'x^\nu-1(x^\nu)'}{(x^\nu)^2}=\frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}=-\nu x^{-\nu-1}.$$

ΘΕΩΡΙΑ 10 **Αποδείξτε ότι, $(x^\kappa)'=\kappa x^{\kappa-1}$, με $k\in Z-\{0,1\}$ και $x\in R^*$.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από την ερώτηση 4 και 9 προκύπτει ότι, αν $k\in Z -\{0,1\}$,τότε $(x^\kappa)'=\kappa x^{\kappa-1}$.

Πράγματι , αν κ θετικός ακέραιος ισχύει $(x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}$, όπου κ = ν , $\nu\in N-\{0,1\}$.

Αν κ αρνητικός ακέραιος ισχύει : $(x^{-\nu})'=-\nu x^{-\nu-1}$, όπου κ = -ν , $\nu\in N-\{0,1\}$.

ΘΕΩΡΙΑ 11 **Έστω η συνάρτήση $f(x)=\text{εφ}x$. Αποδείξτε ότι, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R_1=R-\{\chi/\sigma\upsilon\nu\chi=0\}$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{\text{συν}^2x}$, δηλαδή**

$$(\text{εφ}x)'=\frac{1}{\text{συν}^2x}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, για κάθε $x \in R_1$ έχουμε:

$$(\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

ΘΕΩΡΙΑ 12 **Αποδείξτε ότι, η συνάρτηση $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in R - Z$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή**

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν $y = x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^{u}$. Επομένως,

$$y' = (e^{u})' = e^{u} \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

ΘΕΩΡΙΑ 13 **Αποδείξτε ότι, η συνάρτηση $f(x) = \alpha^{x}$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x) = \alpha^{x} \ln \alpha$, δηλαδή**

$$(\alpha^{x})' = \alpha^{x} \ln \alpha$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν $y = \alpha^{x} = e^{x \ln \alpha}$ και θέσουμε $u = x \ln \alpha$, τότε έχουμε $y = e^{u}$. Επομένως,

$$y' = (e^{u})' = e^{u} \cdot u' = e^{x \ln \alpha} \cdot \ln \alpha = \alpha^{x} \ln \alpha.$$

ΘΕΩΡΙΑ 14 **Αποδείξτε ότι, η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in R^*$ είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει:**

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

αν $x>0$, τότε $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$,

αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε, $y=\ln(-x)$ και αν θέσουμε $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$. Επομένως,

$$y'=(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$$

Άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει : $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$.

ΘΕΩΡΙΑ 15 **Διατυπώστε το θεώρημα Rolle και δώστε τη γεωμετρική του ερμηνεία .**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

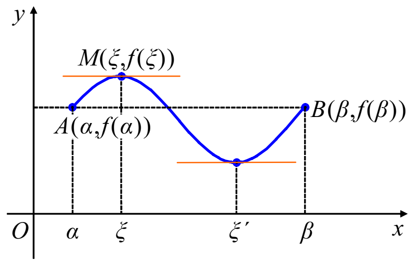
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και
- $f(\alpha)=f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=0$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



ΘΕΩΡΙΑ 16 **Διατυπώστε το θεώρημα μέσης τιμής και δώστε τη γεωμετρική του ερμηνεία .**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

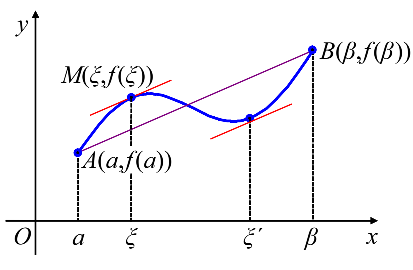
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB.



ΘΕΩΡΙΑ 17 **Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $\varDelta$. Αν**

- **η f είναι συνεχής στο $\varDelta$ και**
- **$f'(x)=0$ για κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του $\varDelta$,**

τότε αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα $\varDelta$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \varDelta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Πράγματι

Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.

Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \qquad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του $\varDelta$, ισχύει $f'(\xi)=0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1)=f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

ΘΕΩΡΙΑ 18 **Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα $\varDelta$. Αν**

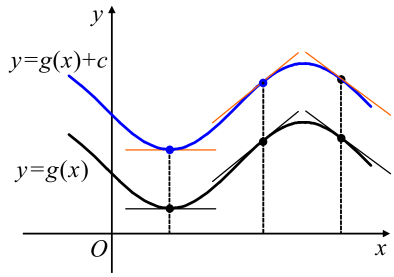
- **οι f, g είναι συνεχείς στο $\varDelta$ και**
- **$f'(x)=g'(x)$ για κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του $\varDelta$, τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \varDelta$ να ισχύει:**

$$f(x)=g(x)+c$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0\,.$$



Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$,οπότε $f(x) = g(x) + c$.

ΘΕΩΡΙΑ 19 **Έστω μια συνάρτηση *f*, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα *Δ*.**

- **Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο *x* του *Δ*, τότε η *f* είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το *Δ*.**

- **Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο *x* του *Δ*, τότε η *f* είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.**

Ισχύει το αντίστροφο ; Δώστε ένα παράδειγμα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

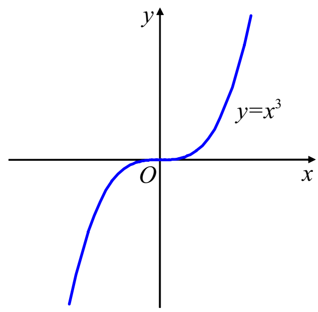
Έστω $f'(x) > 0$ και $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

Στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος **δεν ισχύει**. Δηλαδή, αν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο Δ, η παράγωγός της **δεν είναι υποχρεωτικά** θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του Δ.



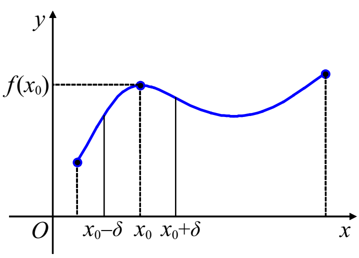
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο R, έχει παράγωγο $f'(x)=3x^2$,η οποία δεν είναι θετική σε όλο το R, αφού $f'(0)=0$. Ισχύει όμως $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in$ R.

ΘΕΩΡΙΑ 20

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0)=0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε

$(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq \Delta$ και $f(x)\leq f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$. (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Επομένως,

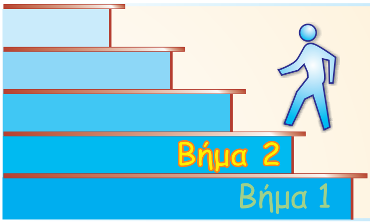
αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \qquad (2)$$

αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 . \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) προκύπτει $f'(x_0) = 0$.



Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις "κλειδιά"

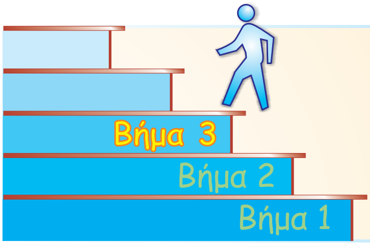
Α. Από το σχολικό βιβλίο

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.

§ 2.1-και 2.4	
Παράγωγος	
-Ορισμός παραγώγου	σελ. 220, άσκηση 2,4 (Α΄ ομάδα)
	σελ. 221, άσκηση 5,6,7,8
	σελ. 228, άσκηση 1 (Β΄ ομάδα)
	σελ. 240, άσκηση 7
-Παράγωγος συνάρτησης	σελ. 238, άσκηση 4
	σελ. 239, άσκηση 12,13,14
	σελ. 240, άσκηση 5,9
-Εφαπτομένη	σελ. 228, άσκηση 2,3,4 (Β΄ ομάδα)
	σελ. 239, άσκηση 8,9,10,11
	σελ. 240, άσκηση 1,2,3,4
	σελ. 241, άσκηση 10,11
-Ρυθμός μεταβολής	σελ. 242, Εφαρμογή 2
	σελ. 243, άσκηση 2,3
	σελ. 244, άσκηση 5 (Α΄ ομάδα)
	σελ. 244-245, άσκηση 2,4,5,7,8
§ 2.5 Θεωρήματα	
Rolle-ΘΜΤ	
§ 2.6 Συνέπειες ΘΜΤ	
-Θεωρητικές ασκήσεις	σελ. 248, εφαρμογές 2,3
-Εξισώσεις (τουλάχιστον μια ρίζα, το πολύ μια ρίζα, μοναδική κ.λ.π)	σελ. 247, εφαρμογή 1
	σελ. 249, άσκηση 1 (Β΄ ομάδα)

	σελ. 250, άσκηση 2,3,7
-Ανισότητες με ΘΜΤ	σελ. 252, εφαρμογή
	σελ. 250, άσκηση 4,5
-Να αποδεικνύουμε ότι η f είναι σταθερη	σελ. 252, εφαρμογή
	σελ. 256, άσκηση 1
	σελ. 257, άσκηση 1
-Εύρεση τύπου συνάρτησης	σελ. 293, άσκηση 11
	σελ. 308, άσκηση 4 (Α΄ ομάδα)
	σελ. 309, άσκηση 4 (Β΄ ομάδα)
§ 2.6 Μονοτονία συνάρτησης	
§ 2.7 Τοπικά ακρότατα	
-Στο θεώρημα μονοτονίας	σελ. 256, άσκηση 3,4
	σελ. 257, άσκηση 6
-Εύρεση τοπικών-ολικών ακρότατων	σελ. 268, άσκηση 3,4
	σελ. 270, άσκηση 6
-Ανισότητες με μονοτονία-ακρότατα	σελ. 258, άσκηση 7,8
	σελ. 266, εφαρμογή 2
	σελ. 269, άσκηση 3
	σελ. 291, άσκηση 2
	σελ. 292, άσκηση 6
-Στο θεώρημα Fermat	σελ. 268, άσκηση 5
	σελ. 269, άσκηση 4
	σελ. 292, άσκηση 7
-Σύνολο τιμών	σελ. 255, εφαρμογή 2
	σελ. 256, άσκηση 5
	σελ. 257, άσκηση 2
-Εξισώσεις	σελ. 256, άσκηση 6
	σελ. 257, άσκηση 5
	σελ. 267, άσκηση 2
	σελ. 269, άσκηση 1,2
- Προβλήματα	σελ. 257, άσκηση 3
	σελ. 266, εφαρμογή 3

	σελ. 268, άσκηση 8, 10
	σελ. 270-271, άσκηση 7, 8, 13
§ 2.8 Κυρτότητα - Σημεία καμπής	
	σελ. 277, άσκηση 2
	σελ. 278-279, άσκηση 2, 35
§2.9 Ασύμπτωτες - Κανόνες De l' Hospital	
	σελ. 285, άσκηση 1,3 (Α΄ Ομάδα)
	σελ. 285-286, άσκηση 1, 2 (Β΄ Ομάδα)
	σελ. 285, άσκηση 4
	σελ. 286, άσκηση 4,6
§ 2.10 Μελέτη συνάρτησης	σελ. 290, άσκηση 3
- Γενικές ασκήσεις	σελ. 292, άσκηση 8, 9, 10
- Ερωτήσεις κατανόησης	σελ. 295-299



Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. **Υποθέτουμε ότι σε κάποια αγορά η τιμή ενός κιβωτίου αχλαδιών είναι μ ευρώ, x είναι ο αριθμός των κιβωτίων (σε χιλιάδες) που εισάγονται στην αγορά κάθε μέρα και η εξίσωση που συσχετίζει αυτά είναι:**

$$\mu x - 20\mu - 3x + 105 = 0 \quad (1)$$

Αν μετά από κάποια μέρα ο αριθμός των κιβωτίων που εισάγονται στην αγορά γίνεται μικρότερος κατά 250 κιβώτια την ημέρα, να βρείτε* το ρυθμό μεταβολής της αξίας του κιβωτίου όταν η ημερήσια εισαγωγή είναι 5.000 κιβώτια.

Λύση:

Αναζητούμε το $\mu'(t)$ όταν $x(t) = 5$.

Αν t είναι ο αριθμός των ημερών από τότε που αρχίζει η μείωση της εισαγωγής των κιβωτίων, τα μεγέθη μ και x είναι συνάρτηση του t. Επειδή η μείωση είναι κατά 250 κιβώτια την ημέρα: $\quad x'(t) = -\dfrac{250}{1000} = -\dfrac{1}{4}$

Παραγωγίζουμε ως προς t τη δοθείσα σχέση (1).

$$\left(\mu(t)x(t)\right)' - 20\left(\mu(t)\right)' - 3\left(x(t)\right)' + (105)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\mu'(t)x(t) + \mu(t)x'(t) - 20\mu'(t) - 3x'(t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\mu'(t)\left(x(t) - 20\right) = -\mu(t)x'(t) + 3x'(t) \quad (2)$$

Στη σχέση (1) $x(t) = 5$ και $x'(t) = -\dfrac{1}{4}$ ενώ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\mu(t)5 - 20\mu(t) - 3\cdot 5 + 105 = 0 \Leftrightarrow -15\mu(t) = -90 \Leftrightarrow \mu(t) = 6 \text{ €}$$

Άρα από τη σχέση (2) έχουμε:

$$\mu'(t)(5-20) = -6\left(-\frac{1}{4}\right) + 3\left(-\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow \mu'(t)(-15) = \frac{6}{4} - \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$-15\mu'(t)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow \mu'(t)=-\frac{1}{20}\ \text{€}/\text{μέρα}$$

2. **Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:**

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-2x}{x-3}=1 \text{ και } f(5)=6$$

i. Να δείξετε ότι $f(3)=6$.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(3,f(3))$.

iii. Να δείξετε ότι η ευθεία $y=x+2$ τέμνει την C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα (3,5).

iv. Αν η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(3,5)$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

Λύση:

i. Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)-2x}{x-3}$. Τότε $\lim\limits_{x\to 3}g(x)=1$ και $f(x)-2x=g(x)(x-3)$.

Άρα $f(x)=g(x)(x-3)+2x$ (1). Από την (1) παίρνουμε:

$$\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}\left[g(x)(x-3)+2x\right]=6$$

Επειδή η f είναι συνεχής ισχύει: $f(3)=6$.

ii. Αρχικά πρέπει να βρούμε τον $f'(3)$.

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-6}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-2x+2x-6}{x-3}=$$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-2x}{x-3}+\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{x-3}=1+2=3$, άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y-f(3)=f'(3)(x-3)\Leftrightarrow y-6=3(x-3)\Leftrightarrow y=3x-3$$

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $h(x)=f(x)-x-2$ (2)

που είναι συνεχής στο διάστημα [3,5] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης είναι $h(3)\cdot h(5)=(f(3)-3-2)(f(5)-5-2)=1\cdot(-1)<0$,

συνεπώς υπάρχει $x_0\in(3,5)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0)-x_0-2\Leftrightarrow f(x_0)=x_0+2$$

Το σημείο $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ είναι σημείο τομής της C_f με την $y = x + 2$.

iv. Επειδή η f στρέφει τα κοίλα κάτω, ισχύει ότι για κάθε $x \in (3,5)$ η $f'(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο (3,5),άρα είναι και "1–1". Επειδή $f(3) = f(5)$ υπάρχει $\xi \in (3,5)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$ (απο θεώρημα Rolle),.Το ξ είναι μοναδικό αφού η f΄ είναι συνάρτηση 1–1.Επομένως

$$\text{Αν } x \in (3,5) \text{ και } x < \xi : f'(x) > f'(\xi) = 0$$

$$\text{Αν } x \in (3,5) \text{ και } x > \xi : f'(x) < f'(\xi) = 0$$

x	3		ξ		5
f'		+	0	-	
f		↗		↘	

Ο πίνακας μεταβολών της f στο (3,5).

Άρα η f παρουσιάζει στο ξ τοπικό μέγιστο και είναι μοναδικό.

3. **Δίνεται η συνάρτηση** $\begin{cases} e^{2\lambda} + x + 1, & x < 1 \\ -\lambda^3 x + 3, & x \geq 1 \end{cases}$. **Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής.**

Λύση:

Για $x < 1$ η συνάρτηση $f(x) = x + 1 + e^{2\lambda}$ είναι συνεχής. Το ίδιο ισχύει και για $x > 1$ αφού $f(x) = -\lambda^3 x + 3$.

Για να είναι συνεχής στο R,πρέπει να είναι συνεχής και στο 1.Δηλαδή πρέπει

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1).$$

Όμως $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2 + e^{2\lambda}$ ενώ $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\lambda^3 + 3 = f(1)$.

Άρα πρέπει να ισχύει $e^{2\lambda} + 2 = -\lambda^3 + 3 \Leftrightarrow e^{2\lambda} + \lambda^3 - 1 = 0 \qquad (1)$.

Προφανής λύση της (1) είναι το μηδέν , $\lambda = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\lambda) = e^{2\lambda} + \lambda^3 - 1,\ \lambda \in R$, τότε $g'(\lambda) = 2e^{2\lambda} + 3\lambda^2 > 0$ για κάθε $\lambda \in R$.Οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο R και συνεπώς η $g(\lambda) = 0$ έχει μοναδική λύση στο R.

4. Ένας πληθυσμός βακτηρίων μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t σε ώρες ώστε ο ρυθμός μεταβολής του να ισούται με το 1/10 του πληθυσμού. Βρείτε τον πληθυσμό x(t) αν στην αρχή υπάρχουν 1000 βακτήρια. Πόσος είναι ο πληθυσμός μετά από 10 ώρες;

Λύση

Για $t \geq 0$ ισχύει $x'(t) = \frac{1}{10}x(t)$ απο όπου παίρνουμε ισοδύναμα:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \left(\ln\left(x(t)\right)\right)' = \left(\frac{t}{10}\right)' \Leftrightarrow \ln\left(x(t)\right) = \frac{t}{10} + c,\ c \in R\ .$$

Άρα $x(t) = e^{\frac{t}{10}+c} = e^c e^{\frac{t}{10}} = c_1 e^{\frac{t}{10}}$, όπου $c_1 = e^c$.

Όμως $x(0) = 1000 \Leftrightarrow c_1 = 1000$, άρα τελικά $x(t) = 1000e^{\frac{t}{10}}$ με $t \geq 0$ και ο πληθυσμός μετά από 10 ώρες είναι $x(10) = 1000e$.

5. Δίνονται $f, g : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ παραγωγίσιμες και τέτοιες ώστε:

$g'(x) = -f(x)g^2(x)$ **και** $f'(x) = -g(x)f^2(x)$ **και** $g(0) = 1$ **και** $f(0) = 2$.

α. Δείξτε ότι $f(x) = 2g(x)$ για κάθε $x \geq 0$.

β. Βρείτε τους τύπους των f, g.

Λύση

α. Για $x \geq 0$, ισχύουν: $\begin{cases} g'(x) = -f(x)g^2(x) \\ f'(x) = -g(x)f^2(x) \end{cases}$, με διαίρεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-g(x)f^2(x)}{-f(x)g^2(x)} \quad \text{ή} \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{ή} \quad f'(x)g(x) - g'(x)f(x) = 0$$

$$\frac{f'(x)g(x) - g'(x) - f(x)}{g^2(x)} = 0 \quad \text{ή} \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = 0.$$

Άρα υπάρχει $c \in R$ ώστε $\frac{f(x)}{g(x)} = c \Leftrightarrow f(x) = cg(x)$ για κάθε $x \geq 0$.

Για $x = 0$ έχουμε $f(0) = cg(0) \Leftrightarrow c = 2$. Άρα τελικά $f(x) = 2g(x)$ για κάθε $x \geq 0$.

β. Για $x \geq 0$ ισχύει:

$$g'(x) = -f(x)g^2(x) \text{ ή } g'(x) = -2g(x)g^2(x) \text{ ή } \frac{-g'(x)}{g^3(x)} = 2 \text{ ή } \frac{-2g'(x)g(x)}{g^4(x)} = 4$$

$\left(\frac{1}{g^2(x)}\right)' = (4x)'$, άρα υπάρχει $c \in R$ ώστε να ισχύει :

$$\frac{1}{g^2(x)} = 4x + c \Leftrightarrow g^2(x) = \frac{1}{4x+c} \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{\sqrt{4x+c}}$$ με $x \geq 0$ (διότι $g(x) > 0$ για $x \geq 0$)

Όμως $g(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{c}} = 1 \Leftrightarrow c = 1$. Άρα τελικά $g(x) = \frac{1}{\sqrt{4x+1}}$ και $f(x) = \frac{2}{\sqrt{4x+1}}$ με $x \geq 0$.

6. Δίνεται συνάρτηση $f:[1,2] \to R$ για την οποία ισχύουν :

- $f''(x) > 0$ **για κάθε** $x \in [1,2]$
- $f(2) = 2f(1)$

α. Δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi}$.

β. Για $x \in (1,2)$ δείξτε ότι: $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} < \frac{f(2)-f(x)}{2-x}$.

Λύση:

α. • Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ στο $[1,2]$.

• η g είναι παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ (άρα και συνεχής) με $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$

• $g(2) = \frac{f(2)}{2} = \frac{2f(1)}{2} = f(1) = g(1)$

Άρα σύμφωνα με το Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = 0$$

Δηλαδή: $\xi f'(\xi) - f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi f'(\xi) = f(\xi) \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi}$.

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $h(x)=xf'(x)-f(x)$ στο $[1,2]$.

Για $x\in[1,2]$ ισχύει $h'(x)=f'(x)+xf''(x)-f'(x)=xf''(x)>0$,δηλαδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο [1,2] οπότε και "1–1" ,άρα θα έχει το πολύ μια ρίζα στο $[1,2]$.Έτσι το ξ ,που προκύπτει απο το θ.Rolle ,είναι μοναδικό στο διάστημα $(1,2)$

β. Θεωρούμε τυχαίο $x\in(1,2)$.

- Από Θ.Μ.Τ. για την f στο $[1,x]$, προκύπτει ότι υπάρχει $\xi_1\in(1,x)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

- Από Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x,2]$, προκύπτει ότι υπάρχει $\xi_2\in(x,2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi_2)=\frac{f(2)-f(x)}{2-x}$$

Επειδή $1<\xi_1<\xi_2<2$ και η f' είναι γν. αύξουσα στο $[1,2]$, (αφού $f''(x)>0$ στο $[1,2]$), ισχύει : $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$ δηλαδή $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}<\frac{f(2)-f(x)}{2-x}$

7.α. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,2]\to R$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε: $f(\xi)=\frac{2f(0)+3f(2)}{5}$, αν $f(0)<f(2)$.

β. Αν ξ = 1 δείξτε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,2)$ με $x_1<x_2$ ώστε $2f'(x_1)=3f'(x_2)$

γ. Αν για την $g(x)=f(x)+\alpha x^2+\beta x$ εφαρμόζεται το Θ. Rolle στα διαστήματα [0,1] και [1,2] βρείτε τα α, β (Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,2))

δ. Δείξτε ότι υπάρχει $p\in(0,2)$ ώστε $5f''(p)=f(0)-f(2)$

(Η f' είναι παραγωγίσιμη στο (0,2))

Λύση

α. Θεωρούμε την $h(x)=5f(x)-2f(0)-3f(2)$ στο $[0,2]$

Η h είναι συνεχής στο $[0,2]$

- $h(0)=5f(0)-2f(0)-3f(2)=3(f(0)-f(2))<0$

$h(2)=5f(2)-2f(0)-3f(2)=2(f(2)-f(0))>0$

δηλαδή $h(0)\cdot h(2)<0$. Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in(0,2)$ ώστε $h(\xi)=0$ ή

$$5f(\xi)-2f(0)-3f(2)=0\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{2f(0)+3f(2)}{5}$$

β. • Από το Θ.Μ.Τ για την f στο $[0,1]$ υπάρχει $x_1\in(0,1)$ ώστε

$$f'(x_1)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{2f(0)+3f(2)}{5}-f(0)=\frac{3\big(f(2)-f(0)\big)}{5}$$

• Από το Θ.Μ.Τ για την f στο $[1,2]$ υπάρχει $x_2\in(1,2)$ τότε

$$f'(x_2)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f(2)-\frac{2f(0)+3f(2)}{5}=\frac{2\big(f(2)-f(0)\big)}{5}$$ οπότε

$2f'(x_1)=\dfrac{6\big(f(2)-f(0)\big)}{5}$ και $3f'(x_2)=\dfrac{6\big(f(2)-f(0)\big)}{5}$, άρα $2f'(x_1)=3f'(x_2)$.

γ. Η g είναι $\left\langle\begin{array}{l}\text{συνεχής στο } [0,2]\\ \text{παραγωγίσιμη στο } (0,2)\end{array}\right.$ και επειδή ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.

Rolle στα διαστήματα $[0,1]$ και $[1,2]$ θα ισχύει:

$$\begin{cases}g(0)=g(1)\\ g(2)=g(1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(0)=f(1)+\alpha+\beta\\ f(2)+4\alpha+2\beta=f(1)+\alpha+\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=f(0)-f(1)\\ 3\alpha+\beta=f(1)-f(2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\alpha-\beta=f(1)-f(0)\\ 3\alpha+\beta=f(1)-f(2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{2f(1)-f(0)-f(2)}{2}\\[2mm] \beta=\dfrac{3f(0)+f(2)-4f(1)}{2}\end{cases}$$

δ. Ισχύουν $g'(x)=f'(x)+2\alpha x$ και $g''(x)=f''(x)+2\alpha$

• Από Θ. Rolle για την g στο $[0,1]$ υπάρχει $\xi_1\in(0,1)$ ώστε $g'(\xi_1)=0$

• Από Θ. Rolle για την g στο $[1,2]$ υπάρχει $\xi_2\in(0,1)$ ώστε $g'(\xi_2)=0$

• Από Θ. Rolle για την g' στο $[\xi_1,\xi_2]$ υπάρχει $p\in(\xi_1,\xi_2)$ δηλαδή $p\in(0,2)$ ώστε

$g''(p)=0$ ή $f''(p)+2\alpha=0\Leftrightarrow f''(p)=f(2)+f(0)-2f(1)\Leftrightarrow$

$$f''(p)=f(2)+f(0)-\frac{2f(0)+3f(2)}{5}\Leftrightarrow f''(p)=\frac{f(0)-f(2)}{5}$$

8.α. Δίνεται $f:(0,+\infty)\to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη ώστε $xf''(x)-f'(x)=1$ για κάθε $x>0$. Αν η ευθεία $y=x+2$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της A(1,f(1)) δείξτε ότι $f(x)=x^2-x+3$

β. Δίνεται $g:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-\sqrt{f(x)}\right)=4$. Βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g στο $+\infty$.

Λύση:

α. • Η εφαπτομένη της c_f στο σημείο $A(1,f(1))$ έχει εξίσωση:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow\ y=f'(1)x+f(1)-f'(1)$$

όμως μας δίνεται ότι η εφαπτομένη είναι η $y=x+2$,άρα πρέπει

$$\begin{cases}f'(1)=1\\ \text{και}\\ f(1)-f'(1)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f'(1)=1\\ \text{και}\\ f(1)=3\end{cases}$$

• Για $x>0$ ισχύει : $xf''(x)-f'(x)=1\Leftrightarrow\dfrac{xf''(x)-f'(x)}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}\Leftrightarrow\left(\dfrac{f'(x)}{x}\right)'=\left(\dfrac{-1}{x}\right)'$

Άρα υπάρχει $c\in R$ τέτοιος ώστε: $\dfrac{f'(x)}{x}=\dfrac{-1}{x}+c\Leftrightarrow f'(x)=cx-1$ για $x>0$.

Όμως $f'(1)=1\Leftrightarrow c-1=1\Leftrightarrow c=2$. Άρα για $x>0$ είναι $f'(x)=2x-1$.

$f'(x)=\left(x^2-x\right)'$, άρα υπάρχει $k\in R$ ώστε $f(x)=x^2-x+k$ με $x>0$.

Όμως $f(1)=3\Leftrightarrow k=3$, άρα τελικά $f(x)=x^2-x+3$ με $x>0$.

β. • Η $y=\lambda x+\mu$ είναι ασύμπτωτη της c_g στο $+\infty$ οπότε:

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}\ \text{ και }\ \mu=\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-\lambda x\right)$$

• Θέτουμε $h(x)=g(x)-\sqrt{f(x)}$ στο $(0,+\infty)$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=4$

Ισχύει $g(x)=h(x)+\sqrt{f(x)}$. Άρα:

$$\frac{g(x)}{x}=h(x)\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{x^2-x+3}{x^2}}\ \Leftrightarrow\ \frac{g(x)}{x}=h(x)\frac{1}{x}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}$$

Άρα $\lambda=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[h(x)\frac{1}{x}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}\right]=4\cdot 0+1=1$.

• Επίσης, $\mu=\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-\lambda x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(h(x)+\sqrt{f(x)}-x\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(h(x)+\sqrt{x^2-x+3}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(h(x)+\frac{-x+3}{\sqrt{x^2-x+3}+x}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(h(x)+\frac{-1+\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x}}+1}\right)=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}.$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $y=x+\frac{7}{2}$ είναι η ασύμπτωτη της c_g στο $+\infty$.

9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:(0,+\infty)\to R$ δύο φορές παραγωγίσιμες για τις οποίες ισχύουν:

- $f(1)=g(1)=\sqrt{e}$
- $f'(x)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g'(x)=\ell nx-\frac{1}{x}$ **για** $x>0$

α. Δείξτε ότι $f(x)g(x)=e^x-\ell nx$ για $x>0$.

β. Αν τα $A(2,f(2))$ και $B(2,g(2))$ είναι σημεία καμπής των γραφικών παραστάσεων των f, g αντίστοιχα και οι εφαπτόμενες σ'αυτα είναι παράλληλες βρείτε τα $f'(2)$ και $g'(2)$.

γ. Βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)g(x)}{x}$.

Λύση:

α. Για $x>0$ ισχύει: $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)+\frac{1}{x}=f(x)g(x)+\ell nx$

$$(f(x)g(x)+\ell nx)'=f(x)g(x)+\ell nx.$$

Άρα υπάρχει $c\in R$ ώστε $f(x)g(x)+\ell nx=ce^x$ ή $f(x)g(x)=ce^x-\ell nx$ με $x>0$.

Για $x=1$ έχουμε: $f(1)\cdot g(1)=c\cdot e\Leftrightarrow\sqrt{e}\cdot\sqrt{e}=c\cdot e\Leftrightarrow c=1$

Άρα: $f(x)\cdot g(x)=e^x-\ell nx$

β. Τα $A(2, f(2))$, $B(2, g(2))$ είναι σημεία καμπής των c_f, c_g αντίστοιχα.

Άρα $f''(2) = g''(2) = 0$. Τώρα για $x > 0$ ισχύουν:

$f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = e^x - \frac{1}{x}$ και

$f''(x)g(x) + f'(x)g'(x) + g''(x)f(x) + g'(x)f'(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$ οπότε για $x = 2$ έχουμε

$f''(2)g(2) + 2f'(2)g'(2) + g''(2)f(2) = \frac{4e^2 + 1}{4}$

$f'(2)g'(2) = \frac{4e^2 + 1}{8}$ ($f'(2) = g'(2)$ διότι οι εφαπτομένες είναι παράλληλες)

$(f'(2))^2 = \frac{4e^2 + 1}{8}$,άρα $f'(2) = g'(2) = \pm\sqrt{\frac{4e^2 + 1}{8}}$

γ. Ισχύουν:
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(e^x)'}{x'} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ell nx}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ell nx)'}{(x)'} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Άρα $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - \ell nx}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ell nx}{x}\right) = +\infty$.

10. Έστω $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$. Να βρεθούν τα α, β, γ, δ ώστε η f να παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο με τετμημένη 1, καμπή στο σημείο με τετμημένη –1 και η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο με τετμημένη 0 να είναι η $y = 2x + 5$.

Λύση:

Είναι $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$ και $f''(x) = 6\alpha x + 2\beta$. Πρέπει $f'(1) = 0$, δηλ.

$3\alpha + 2\beta + \gamma = 0$ (1) και $f''(-1) = 0$, δηλ. $-6\alpha + 2\beta = 0 \Leftrightarrow -3\alpha + \beta = 0$ (2)

Πρέπει επίσης $f'(0) = 2$ και $f(0) = 5$,απο όπου παίρνουμε $\gamma = 2$ (3) και $\delta = 5$ (4).

Άρα: $(1) \overset{(3)}{\Leftrightarrow} 3\alpha + 2\beta = -2 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 3\alpha + 2 \cdot 3\alpha = -2 \Leftrightarrow 9\alpha = -2 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{2}{9}$.

Επομένως από τη (2) προκύπτει : $\beta = -\dfrac{2}{3}$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \pi \ell n x,\ x > 0$.

i. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να δείξετε ότι $e^e \cdot \pi^\pi > e^{2\pi}$.

Λύση:

i. $f'(x) = 1 - \pi\dfrac{1}{x}$. Είναι $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-\pi}{x} > 0 \Leftrightarrow x - \pi > 0 \Leftrightarrow x > \pi$.

Σχηματίζουμε τον επόμενο πίνακα :

x	0		π	
f'		-	0	+
f		↘	ελαχ.	↗

$f(\pi) = \pi - \pi\ell n\pi$ είναι η ελάχιστη τιμή της f.

ii. Επειδή $e < \pi$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, \pi]$ έχουμε:

$f(e) > f(\pi) \Leftrightarrow e - \pi\ell ne > \pi - \pi\ell n\pi \Leftrightarrow$

$e - \ell ne^\pi > \pi - \ell n\pi^\pi \Leftrightarrow \ell n\pi^\pi - \ell ne^\pi > \pi - e \Leftrightarrow$

$\ell n\left(\dfrac{\pi^\pi}{e^\pi}\right) > \pi - e \Leftrightarrow \dfrac{\pi^\pi}{e^\pi} > e^{\pi - e} \Leftrightarrow \dfrac{\pi^\pi}{e^\pi} > \dfrac{e^\pi}{e^e} \Leftrightarrow e^e \cdot \pi^\pi > (e^\pi)^2$

Άρα $e^e \cdot \pi^\pi > e^{2\pi}$.

Σημειώσεις: (1): Το ακρότατο είναι ολικό διότι: $\lim\limits_{x \to 0^+}(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty}(x) = +\infty$.

12. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \dfrac{\ell nx^2}{x^2},\ x \neq 0$.

i. Να βρεθούν τα ακρότατα της f(x) και το σύνολο τιμών της.

ii. Να δειχθεί ότι $x^{2e} \leq e^{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$.

iii. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $\ell nx^2 = \dfrac{x^2}{4}$.

Λύση:

i. Είναι $f'(x)=\dfrac{\dfrac{2x}{x^2}\cdot x^2-\ell nx^2\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{2x\left(1-\ell nx^2\right)}{x^4}$ για $x\neq 0$.

Έχουμε $f'(x)>0 \Leftrightarrow 2x\left(1-\ell nx^2\right)>0$. Για το πρόσημο της f' σχηματίζουμε τον επόμενο πίνακα:

x	$-\infty$		$-\sqrt{e}$		0		$\sqrt{e}$	
$2x$		$-$		$-$	‖	$+$		$+$
$1-\ell nx^2$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$
f'		$+$		$-$	‖	$+$		$-$
f		↗	τ.μ.	↘	‖	↗	τ.μ.	↘

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ell nx^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\ell nx^2\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x^2}2x}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$

Όμοια βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^2}\lim\limits_{x\to0^+}\ell nx^2=(+\infty)(-\infty)=-\infty$ και όμοια $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$

Ακόμη είναι $f\left(\sqrt{e}\right)=\dfrac{\ell n\left(\sqrt{e}\right)^2}{\sqrt{e}^{\,2}}=\dfrac{1}{e}$ και $f\left(-\sqrt{e}\right)=\dfrac{1}{e}$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $\left(-\infty,\dfrac{1}{e}\right]$.

ii. Επειδή η συνάρτηση ℓnx είναι γνησίως αύξουσα,έχουμε :

$$x^{2e}\leq e^{x^2}\Leftrightarrow \ell nx^{2e}\leq e^{x^2}\Leftrightarrow \ell n\left(x^2\right)^e\leq \ell ne^{x^2}\Leftrightarrow e\ell nx^2\leq x^2\Leftrightarrow \frac{\ell nx^2}{x^2}\leq\frac{1}{e}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow f(x)\leq\dfrac{1}{e}$, που ισχύει διότι το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $\left(-\infty,\dfrac{1}{e}\right]$.

iii. $\ell nx^2=\dfrac{x^2}{4}\Leftrightarrow\dfrac{\ell nx^2}{x^2}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{e}$

Όμως όταν $x\in\left(0,\sqrt{e}\right)$ η f είναι γνησίως αύξουσα με σύνολο τιμών $\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$ και επειδή $\frac{1}{4}\in\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$ υπάρχει $\xi_1\in\left(0,\sqrt{e}\right)$ τέτοιο ώστε $f\left(\xi_1\right)=\frac{1}{4}$.

Όταν $x\in\left[\sqrt{e},+\infty\right)$ η f(x) είναι γνησίως φθίνουσα με σύνολο τιμών $\left(0,\frac{1}{e}\right]$ και επειδή $\frac{1}{4}\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$ υπάρχει μοναδικό ξ_2, $\xi_2\in\left(\sqrt{e},+\infty\right)$ τέτοιο ώστε $f\left(\xi_2\right)=\frac{1}{4}$.

Άρα, στο $\left(0,+\infty\right)$ η $f\left(x\right)=\frac{1}{4}$ έχει δύο ακριβώς λύσεις. Επειδή η f είναι άρτια, η εξίσωση θα έχει δύο ακριβώς λύσεις και στο $\left(-\infty,0\right)$. Άρα, συνολικά η εξίσωση $f\left(x\right)=\frac{1}{4}$ θα έχει ακριβώς τέσσερις λύσεις.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\frac{x^2-\alpha^2}{2\alpha x}-\ell nx+\ell n\alpha,\ \alpha>0,\ x>0$.

i. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λυθεί η εξίσωση $x^2-\alpha^2=2\alpha x\left(\ell nx-\ell n\alpha\right)$.

iii. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

iv. Αν α, β είναι πραγματικοί αριθμοί ώστε α<β, να δείξετε ότι:

$$\ell n\frac{\alpha}{\beta}>\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta}$$

Λύση:

i. Έχουμε $f'(x)=\frac{\left(x^2-\alpha^2\right)'\cdot 2\alpha x-\left(x^2-\alpha^2\right)\left(2\alpha x\right)'}{\left(2\alpha x\right)^2}-\frac{1}{x}=$

$$=\frac{2x2\alpha x-2\alpha\left(x^2-\alpha^2\right)}{4\alpha^2x^2}-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-x^2+\alpha^2}{2\alpha x^2}-\frac{1}{x}=$$

$$=\frac{x^2+\alpha^2-2\alpha x}{2\alpha x^2}=\frac{\left(x-\alpha\right)^2}{2\alpha x^2}\geq 0,\ \text{για κάθε } x>0.$$

x	0		α	
f'		+	0	+
f		↗		↗

ii. $x^2-\alpha^2=2\alpha x(\ell nx-\ell n\alpha)\Leftrightarrow \dfrac{x^2-\alpha^2}{2\alpha x}-\ell nx+\ell n\alpha=0\Leftrightarrow f(x)=0$

Όμως $f(\alpha)=0$ (προφανής λύση). Επειδή f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ το είναι η μοναδική της ρίζα.

iii.α. *Έλεγχος για κατακόρυφη ασύμπτωτη*

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{x^2-\alpha^2}{2\alpha x}-\ell nx+\ell n\alpha\right]=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{x^2-\alpha^2-2\alpha x\cdot\ell nx}{2\alpha x}+\ell n\alpha\right]=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{2\alpha x}(x^2-\alpha^2-2\alpha x\cdot\ell nx)\right]+\ell n\alpha$$

Έχουμε: $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2\alpha x}=+\infty$ (1)

$$\lim_{x\to0^+}x\ell nx=\lim_{x\to0^+}\frac{\ell nx}{\frac{1}{x}}\overset{(2)}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$$

Άρα $\displaystyle\lim_{x\to0^+}(x^2-\alpha^2-2\alpha x\cdot\ell nx)=-\alpha^2$ (2). Από τις (1) και (2) έχουμε

$\displaystyle\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty$. Άρα η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

β. *Έλεγχος για οριζόντιες και πλάγιες ασύμπτωτες*

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-\alpha^2}{2\alpha x}-\ell nx+\ell n\alpha\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\alpha^2-2\alpha x\ell nx+2\alpha x\ell n\alpha}{2\alpha x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{\alpha^2}{x^2}+2\alpha\frac{\ell nx}{x}+2\alpha\frac{\ell n\alpha}{x}\right)}{2\alpha}=+\infty\text{, διότι :}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\alpha\ell n\alpha}{x}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ell nx}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Άρα η δεν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Είναι $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\alpha^2}{2\alpha x}-\frac{\ell nx}{x}-\frac{\ell n\alpha}{x}=\frac{1}{2\alpha}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2\alpha}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\alpha^2}{2\alpha x}-\ell nx+\ell n\alpha-\frac{1}{2\alpha}x=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\alpha^2-2\alpha x\ell nx+x^2}{2\alpha x}+\ell n\alpha=+\infty$$

Άρα δεν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη.

iv. $\ell n\frac{\alpha}{\beta}>\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta}\Leftrightarrow \ell n\alpha-\ell n\beta>\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta}\Leftrightarrow\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\alpha\beta}-\ell n\beta+\ell n\alpha>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(\beta)>0\Leftrightarrow f(\beta)>f(\alpha)$, που ισχύει διότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και $\beta>\alpha$.

14. Να γίνει μελέτη και γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο:

$$\mathbf{f(x)=\frac{\ell nx+1}{x}}$$

Λύση:

Πρέπει $x\neq 0,\ x>0\Leftrightarrow x\in(0,+\infty)$,άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $(0,+\infty)$.Η f είναι συνεχής ,ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων ,στο πεδίο ορισμού της και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο: $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-\ell nx-1}{x^2}=-\frac{\ell nx}{x^2}$

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow -\frac{\ell nx}{x^2}=0\Leftrightarrow \ell nx=0\Leftrightarrow x=1$ (πιθανό ακρότατο)

$f'(x)>0\Leftrightarrow -\frac{\ell nx}{x^2}>0\Leftrightarrow \ell nx<0\Leftrightarrow x<1$

x	0		1		$+\infty$
f'		+	0	−	
f		↗		↘	

Απο τα παραπάνω προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.Παρουσιάζει μέγιστο για $x=1$ το $f(1)=1$.

Έχουμε: $$f''(x)=\frac{\frac{1}{x}x^2+\ell nx2x}{x^4}=\frac{2x\ell nx-x}{x^4}=\frac{2\ell nx-1}{x^3}$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2\ell nx-1}{x^3}=0 \Leftrightarrow \ell nx=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\sqrt{e} \quad \text{(πιθανό σημείο καμπής)}$$

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2\ell nx-1}{x^3}>0 \Leftrightarrow \ell nx>\frac{1}{2} \Leftrightarrow x>\sqrt{e}$$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\frown$		$\smile$	

Άρα στη θέση $x=\sqrt{e}$ η f παρουσιάζει σημείο καμπής το $A\left(\sqrt{e},f\left(\sqrt{e}\right)\right)=\left(\sqrt{e},\frac{3}{2\sqrt{e}}\right)$

δ. $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\ell nx+1}{x}=0 \Leftrightarrow x=e^{-1} \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$. Άρα τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $A\left(\frac{1}{e},0\right)$. Τον άξονα y΄y δεν τον τέμνει διότι $x\neq 0$.

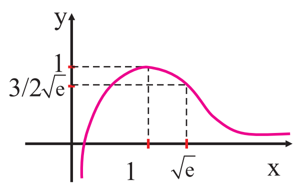
ε. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ell nx+1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x}(\ell nx+1)\right]=(+\infty)(-\infty)=-\infty$, άρα η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ell nx+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0=\lambda$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ell nx+1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0=\beta$$

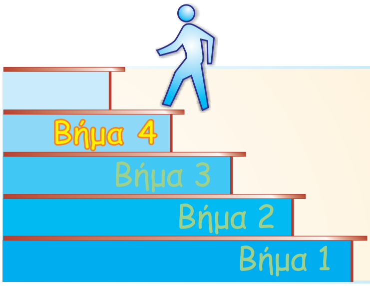
Άρα η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γρ. παράστασης της f στο $+\infty$.

στ. **Γραφική παράσταση** **Πίνακας μεταβολών**



x	0		1		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$		$-$	
f''		$-$		$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$ $\frown$		$\searrow$ $\frown$		$\searrow$ $\smile$	

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ell nx+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ και επειδή η f παρουσιάζει μέγιστο στη θέση x = 1 το f(1) = 1 το πεδίο τιμών της είναι το $(-\infty,1]$.



Λύνουμε μόνοι μας

1. Αν $f'(x)=3x^2\eta\mu x+x^3\sigma\upsilon\nu x$ και η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(0,4)$, να βρείτε τον τύπο της f.

2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ώστε η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2-\beta x+2, & -1\le x\le 0\\ x^2+x-\gamma, & 0<x\le 1\end{cases}$, να ικανοποιεί της υποθέσεις του θ.Rolle στο διάστημα [–1,1].

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

4. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [0,α] με $|f''(x)|\leq m$ για κάθε $x\in(0,\alpha)$. Αν υπάρχει $\gamma\in(0,\alpha)$ τέτοιο ώστε $f'(\gamma)=0$, δείξτε ότι:

$$|f'(0)|+|f'(\alpha)|\leq\alpha\cdot m$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5. Έστω f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R με

$$f'(x)+xf''(x)=0,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R} \ \text{ και } f(0)=1$$

Δείξτε ότι $f(x)=1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

....

....

....

....

....

....

....

....

6. Έστω συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσημη στο $[\alpha,\beta]$ με $\alpha<0<\beta$ και $f(0)=\dfrac{\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)}{\beta-\alpha}$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

....

....

....

....

....

....

....

7. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με $f(xy)=xf(y)+yf(x)\,(1)$, $x,y\in(0,\infty)$ και $f'(1)=2$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\infty)$

ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

....

....

....

....

....

....

....

....

8. **Έστω συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσημη στο R με**

$$2f(x) \geq f(\alpha) + f(\beta),\ x \in R$$

Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta): f''(x_0) = 0$

....

....

....

....

....

....

....

9. **Αν η συνάρτηση f είναι 2 φορές παρ/μη στο $[-1,1]$ με $f(0)=0$ και $g(x) = f(x)(x^2-1)$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-1,1)$ τέτοιος ώστε $g''(\xi) = 0$.**

....

....

....

....

....

....

....

10.α. **Έστω η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.**

β. Να λύσετε την εξίσωση: $e^x = (e-1)x + 1$

....
....
....
....
....
....
....
....
....

11. $f:[0,1] \to [0,1]$ **παραγωγίσιμη με** $f(0)=0,\ f(1)=1$.

i. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ **ώστε** $f(x_0) = 1 - x_0$

ii. Δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2\ (0,1)$ **με** $\xi_1 \neq \xi_2$ **ώστε** $f'(\xi_1) f'(\xi_2) = 1$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

12. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R* και ισχύει για κάθε $x \in R^*$

$xf'(x) = (x+1)f(x)$ **(1) και** $f(1) = e,\ f(-1) = \frac{1}{e}$**. Να βρείτε το τύπο της f.**

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

13. **Αν f συνεχής στο** $[-4,4]$, $f(-4)=20, f(4)=22$ **και παραγωγίσιμη στο (–4,4), τότε υπάρχουν** ξ_1,ξ_2 **στο** $(-4,4)$ **:** $\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=8$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

14. **Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f τέμνει τις ευθείες** $y=1$ **και** $y=-4$ **σε σημεία με τετμημένες** $x=1$ και $x=5$, **να δείξετε ότι υπάρχουν** ξ_1,ξ_2 **στο** $(1,5)$**:** $\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{4}{f'(\xi_2)}=-4$.

....

....

....

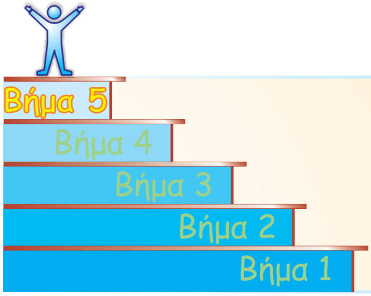
....
....
....
....

15. **Έστω ότι η ευθεία $y = x - 3$ είναι ασύμπτωτη της γρ. παράστασης της f στο $+\infty$.**

i. **Να βρεθούν τα όρια** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$.

ii. **Να βρεθεί ο πραγματικός λ αν :** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\lambda f(x) - 4\eta\mu x}{xf(x) - x^2 + 4x} = 2$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....



Ελέγχουμε τη γνώση μας

Θέμα 1ο

Α.α. Έστω f, g συναρτήσεις τέτοιες ώστε:

- να είναι συνεχείς σε διάστημα Δ.
- $f'(x)=g'(x)$, για κάθε σημείο x εσωτερικό του Δ.

Αποδείξτε τότε, ότι οι συναρτήσεις f, g διαφέρουν κατά κάποια σταθερά c, δηλαδή $f(x)=g(x)+c$.

(Μονάδες 4)

β. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύουν: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, για κάθε $x\geq 0$ και η γραφική της παράσταση, διέρχεται από σημείο (4,6).

(Μονάδες 2)

Β1. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με την ένδειξη Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος).

α. Αν η f έχει 4 ρίζες τότε η f' έχει τουλάχιστον 3 ρίζες.

(Μονάδες 3)

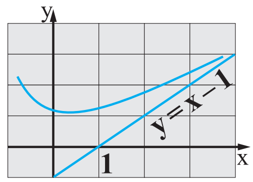
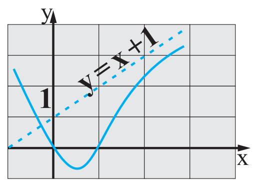
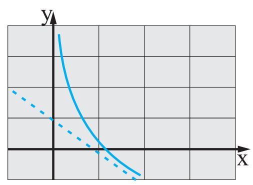
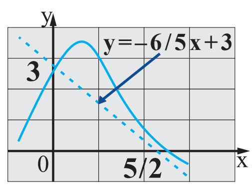
β. Αν η f' έχει 2 ρίζες τότε η f έχει το πολύ 2 ρίζες

(Μονάδες 3)

γ. Κάθε πολυώνυμο τρίτου βαθμού έχει πάντα σημείο καμπής.

(Μονάδες 3)

Β2. Αντιστοιχίστε σε καθένα από τα γράμματα Α,Β,Γ,Δ έναν αριθμό από το 1 έως το 4, ώστε κάθε όριο της πρώτης στήλης να ταιριάζει με το κατάλληλο σχήμα.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
Α. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{6}{5}x\right)=3$	**1.** 
Β. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-1$	**2.** 
Γ. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=1$	**3.** 
Δ. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x)=1$	**4.** 

Α	Β	Γ	Δ

(Μονάδες 10)

Θέμα 2ο

Α. Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν ίσες παραγώγους στο διάστημα [2,20] και οι καμπύλες $\psi=f(x)$, $\psi=g(x)$ διέρχονται από τα σημεία (4,10), (4,7) αντιστοίχως, τότε $f(10)-g(10)=$

Α. 17 **Β.** -3 **Γ.** 3 **Δ.** -17 **Ε.** 0

(Μονάδες 10)

Β.Αποδείξτε ότι $\ell n(1+x)\leq x$, για $x\geq 0$.

(Μονάδες 15)

....

....

....

....

....

....

....

....

Θέμα 3ο

Η συνάρτηση θέσης ενός σωματιδίου που κινείται πάνω στον άξονα $x'x$ είναι: $S(t)=t^3-9t^2+24t$

Να βρείτε:

α.Τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία το σωματίδιο κινείται προς τα δεξιά.

β.Τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία το σωματίδιο κινείται προς τα δεξιά και επιταχύνει.

γ.Τις χρονικές στιγμές t_1,t_2 κατά τις οποίες η ταχύτητα του σωματιδίου είναι ίση με το μηδέν.

δ.Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία η επιτάχυνση του σωματιδίου είναι ίση με το μηδέν.

ε.Αν σχεδιάσουμε την καμπύλη της συνάρτησης θέσης, τότε ποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά θα είχαν τα σημεία της που αντιστοιχούν στις χρονικές στιγμές t_0,t_1,t_2

(Μονάδες 25)

....

....

....

....

....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Θέμα 4^0

Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση f, αν $f(0)=0$ και $f'(x)e^{f(x)}=2x$, για κάθε $x\in\Re$.

(Μονάδες 25)

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....